UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias

DOI: https://doi.org/10.14483/23464712.16417

GÓNDOLA
ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS CIENCIAS

Reflexión documentada

O ENSINO E A APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA: ENTRE O GRAMATICAL E O EMPÍRICO

THE TEACHING AND LEARNING OF MATHEMATICS: BETWEEN THE GRAMMATICAL AND THE EMPIRICAL

ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS: ENTRE LO GRAMATICAL Y LO EMPÍRICO

Valdomiro Pinheiro Teixeira Junior**, **Marisa Rosâni Abreu da Silveira*****, **Paulo Vilhena da Silva******

Cómo citar este artículo: Teixeira Jr, V. P., Silveira, M. R. A. y Silva, P. V. (2021). O ensino e a aprendizagem da matemática: entre o gramatical e o empírico. *Góndola, enseñanza y aprendizaje de las ciencias, 16*(3), 569-579. DOI: https://doi.org/10.14483/23464712.16417

Resumo

Este texto tem o objetivo de analisar possibilidades inerentes ao ensino e aprendizagem da matemática, onde buscamos refletir, a partir da filosofia da linguagem de Wittgenstein, sobre como poderíamos pensar o ensino: gramatical ou empírico? Baseado em regras ou na experiência? Realizamos um ensaio teórico, no qual discutimos inicialmente o papel gramatical da linguagem e da matemática, onde tratamos das proposições matemáticas como proposições gramaticais, e seus usos empíricos e, então, refletimos sobre possibilidades pedagógicas vislumbrando os contextos gramatical e empírico. Concluímos, a partir da análise realizada que o aluno precisa compreender regras da matemática (gramatical), mas seu ensino pode se valer de atividades de aplicação na realidade (empírico), que devem ser vistas a partir da noção de jogos de linguagem.

Palavras Chave: Matemática. Ensino. Aprendizagem. Filosofia da educação. Linguagem. Regra. Experiência.

Abstract

We analyze some possibilities inherent to mathematics teaching and learning when considering two characteristics of the mathematical propositions: we seek to reflect from Wittgenstein's philosophy of language about how we could think the teach: grammatical and empirical. Based on rules or experience? We carried out a theoretical

Recibido: 29 de mayo de 2020; aprobado: 26 de noviembre de 2020

* Este texto é uma reelaboração da tese de doutorado do primeiro autor. URL: http://repositorio.ufpa.br/jspui/bitstream/2011/9067/1/Tese_TerapiaWittgensteinEnsino.pdf

** Doutor em Educação em Ciências e Matemática pela Universidade Federal do Pará (UFPA). Professor da Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará (UNIFESSPA), Pará, Brasil. E-mail: valdomiro@unifesspa.edu.br – ORCID: http://orcid.org/0000-0002-1425-0049

*** Doutora em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Professora do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal do Pará (UFPA), Pará, Brasil. E-mail: marisabreu@ufpa.br – ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3147-9478

**** Doutor em Educação em Ciências e Matemática pela Universidade Federal do Pará (UFPA). Professor da Universidade Federal do Pará (UFPA), Pará, Brasil. E-mail: pvilhena@ufpa.br – ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3989-5927

reflection essay in which there are discussions about the grammatical role of language and mathematics. We consider the mathematical propositions as grammatical propositions, and with empirical uses from the view of the philosopher Wittgenstein. In this sense, we reflect on pedagogical possibilities by looking at the grammatical and empirical contexts. We conclude, based on the analysis performed, that student needs to understand rules of mathematics (grammatical), but also can develop application activities in reality (empirical), which must be seen from the notion of language games.

Keywords: Mathematics. Teaching. Learning. Philosophy of education. Language. Rule. Experiment.

Resumen

Este texto tiene como objetivo analizar las posibilidades inherentes a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, donde buscamos reflexionar, a partir de la filosofía del lenguaje de Wittgenstein, sobre cómo podríamos pensar la enseñanza: ¿gramatical o empírica? ¿Basado en reglas o experiencia? Realizamos un ensayo teórico, en el que inicialmente discutimos el papel gramatical del lenguaje y las matemáticas, donde tratamos las proposiciones matemáticas como proposiciones gramaticales y sus usos empíricos, y luego reflexionamos sobre las posibilidades pedagógicas observando contextos gramaticales y empíricos. Concluimos, con base en el análisis realizado, que el alumno necesita comprender las reglas de la matemática (gramatical), pero su enseñanza puede incluir actividades de aplicación en la realidad (empírica), lo cual debe verse desde la noción de juegos de lenguaje.

Palabras clave: Matemáticas. Enseñanza. Aprendizaje. Filosofía de la educación. Lenguaje. Regla. Experimento.

1. Introdução

Reconhecemos a matemática como aporte teórico que contribui com o desenvolvimento científico e avanço tecnológico de uma sociedade. Este conhecimento precisa ser ensinado e aprendido na escola, pois ele garante, assim como os demais saberes, as bases que edificam a educação e oferecem aos sujeitos formas de compreender e interpretar o mundo.

A educação matemática brasileira tem fracassado, já que os estudantes não conseguem aprender matemática, como mostram pesquisas em larga escala realizadas no Brasil acerca de níveis de letramento matemático dos alunos da educação básica, que tem mostrado seguidamente resultados abaixo do esperado (INEP, 2019).

Com a intenção de repensar essa situação de fracasso, bem como contribuir para encontrarmos alternativas para este problema, este texto tem o objetivo de discutir o ensino e a aprendizagem da matemática, sobre os quais muitas vezes se discute sobre a necessidade ou não do aprendizado de regras, sobre a relevância do aluno construir seu próprio conhecimento, sobre a importância da ludicidade nas atividades escolares, etc. Seria o ensino da matemática mais efetivo em meio a aplicações[1] em sala de aula ou pelo ensino de regras?

Ora um, ora outro pode ser utilizado na tentativa de o professor oferecer sentido aos conteúdos matemáticos ensinados aos seus alunos. Se pensarmos em um ensino apenas teórico, por vezes sentimos que falta algo que complemente a compreensão.

1 Consideramos como aplicações, neste texto, atividades práticas, empíricas, contextualizadas ou concretas.

As aplicações práticas servem para dar sentido aos conceitos matemáticos, porém, eles sozinhos podem não oferecer uma compreensão satisfatória do conceito matemático abordado pelo professor. É nestes termos que nossa discussão se insere. Para tanto, apoiar-nos-emos na segunda filosofia da linguagem de Wittgenstein. Buscamos refletir, a partir dessa filosofia, sobre como poderíamos pensar em um ensino: gramatical ou empírico? Baseado em regras ou na experiência?

Nossa abordagem se dá por um ensaio teórico que não visa respostas ou conclusões definitivas, mas trazer reflexões para pensarmos nos desafios de nosso tempo. Conforme Meneghetti (2011), os ensaios adquiriram diversos formatos e são utilizados com diversos fins, como o literário ou o científico, o que não altera sua relevância na "aventura" de pensar e refletir sobre a realidade.

Assim, este texto tem o objetivo de analisar algumas possibilidades inerentes ao ensino e aprendizagem da matemática, quando se considera duas caraterísticas da matemática, a gramatical e empírica. Deste modo, discutimos, inicialmente, o papel gramatical da linguagem, onde tratamos das proposições matemáticas como proposições gramaticais, e seus usos empíricos, na visão do filósofo Wittgenstein, e então, refletimos sobre possibilidades pedagógicas vislumbrando o contexto gramatical e o empírico**.**

2. O papel gramatical da linguagem e da matemática

O conceito de gramática em Wittgenstein surge em sua segunda filosofia, mas para compreendê-lo é importante nos determos em pontos importantes de sua primeira filosofia, apresentada na obra *Tractatus Logico-Philosophicus*. Para o primeiro Wittgenstein havia uma isomorfia entre a estrutura do mundo e a estrutura da linguagem, que teria a forma lógica como base comum, uma essência. Uma proposição só teria sentido se descrevesse um fato do mundo. "Nada é acidental na lógica: se uma coisa puder aparecer num estado de coisas, a possibilidade do estado de coisas já deve estar antecipada nela" (WITTGENSTEIN, 1993, p. 130).

Segundo Glock (1998, p. 26), o Wittgenstein do *Tractatus* entende que as proposições lógicas possuem um estatuto apriorístico, pois refletem regras descritivas da realidade empírica, e, portanto, "a forma lógica essencial da linguagem é idêntica à forma metafísica essencial da realidade, uma vez que encerra os traços estruturais que a linguagem e a realidade precisam ter em comum para que aquela possa representar esta", ou seja, a lógica é a essência que existe na base do mundo e da linguagem, e esta seria referência dos fatos do mundo.

O *Tractatus* trouxe a linguagem para o centro da discussão na filosofia, mas ainda em uma visão essencialista, pois buscava um pano de fundo comum entre a linguagem e o mundo, que seria a forma lógica, e deste modo a linguagem era considerada sob uma concepção referencial, já que era tomada apenas em sua função descritiva da realidade. Mas, Wittgenstein abandonou essa sua primeira filosofia, e de acordo com Azize (2004), passou da univocidade para a vagueza, da ideia de uma proposição linguística como figura (imagem, espelho) da realidade, para uma ideia de uma gramática autônoma, onde as regras começam a se destacar, mas em um uso na linguagem ordinária, quando veremos a pragmática linguística se revelando como o lugar dos significados.

O segundo Wittgenstein também deixa de entender a existência de apenas uma única linguagem, admitindo a existência de diversas linguagens, que tem sua compreensão dependente do contexto e das regras, isto é, da gramática, que ele considera agora como o que regula nosso fazer e pensar, isto é, toma o lugar antes reservado à lógica, mas agora, não pressupõe uma essência que esteja na base de toda e qualquer atividade. Wittgenstein, em sua segunda filosofia, substitui a lógica pelo que ele passa a chamar de gramática.

Para Wittgenstein, há duas gramáticas, a superficial (WITTGENSTEIN, 1999) - que é a que fornece regras formais, isto é, que se referem aos fatos, que se detém nas características imediatamente evidentes das expressões, em detrimento de seu uso geral – e a gramática profunda - que é seu uso prático em uma determinada linguagem, é a que fornece as regras do uso da linguagem em seu funcionamento interno, diz respeito às regras de uso que não podem revelar-se imediatamente na forma superficial da nossa gramática.

A gramática de Wittgenstein (1999) é o conjunto de regras que permitem que demos significados ao nosso uso da linguagem, assim, a gramática nos limita e nos permite; ela nos leva a usar a linguagem dentro de um sistema, que é acordado pelos usuários de tal linguagem. Gramática é "o conjunto de usos que fazemos das palavras que podem ser expressos sob a forma de um sistema de regras" (MORENO, 2003, p. 116). Nossos usos formulam nossas regras e estas regem nossos usos.

Wittgenstein compara a gramática com o conjunto de regras que se têm no xadrez, onde para se jogá-lo deve-se seguir as regras previamente acordadas, onde se pode até fazer algum movimento diferente da regra, porém se dirá não se estar jogando xadrez, mas outro jogo. "Mas olhamos para os jogos e a linguagem sob o disfarce de um jogo jogado segundo regras. Isto é, estamos sempre comparando a linguagem com um procedimento desse tipo" (WITTGENSTEIN, 2003, p. 45).

Para o filósofo, as regras determinam e constituem o jogo, que não existe antes das regras, só dizemos que é jogo devido à existência de regras. Não há um conceito do rei no xadrez - *o rei não é, ele faz, ele é suas regras*. Não há um conceito oculto, pois, as regras não podem estar ocultas. As regras não descrevem, elas orientam, elas constituem sentidos, nos dizem o que podemos ou não podemos dizer. Porém, não podemos verificá-las como verdadeiras ou falsas, pois são proposições necessárias ou gramaticais. As regras constituem os significados, elas não descrevem os significados. Os significados não existem independentemente das regras.

De acordo com Wittgenstein (1999), a gramática não tem um fundamento justificado, como busca a filosofia tradicional, mas é arbitrária. Schmitz (2004) aponta dois sentidos nessa conclusão: primeiramente, escolhemos algumas regras (assim como poderíamos ter escolhido outras). Por exemplo, Wittgenstein (1999) compara uma regra a uma unidade de medida, pois é escolhida arbitrariamente e a usamos. Outro sentido é que não há, de fato, qualquer justificação para o uso de tal regra, ou seja, usamos porque é assim que fazemos (e assim sempre fizemos). Se encontramos uma justificativa, é porque já estamos de posse da regra, e se usamos a regra é porque já temos a justificativa. "Se me pedem a razão pela qual escrevi 24 depois de 22, rapidamente invocarei a regra que pretendo seguir, mas se me perguntam o que significa "seguir a regra" '+ 2'" irei infalivelmente responder que isso significa, por exemplo, escrever 24 depois de 22" (SCHMITZ, 2004, p. 166). Estamos de certa forma presos às regras que seguimos, e assim somos treinados a agir do modo que agimos.

As regras normatizam nosso modo de viver. Elas podem ter sua origem na empiria, mas a partir de um determinado momento, tornam-se regras, e podem ser usadas então para descrever, e não são mais dependentes da empiria. Mas o que torna essas regras independentes da empiria? Para Wittgenstein é o acordo entre os usuários da linguagem. Wittgenstein (1999) não defende um simples acordo de opiniões, mas uma concordância de juízos, isto é, uma constância naquilo que ocorre, e assim temos uma concordância nas formas de vida.

Um exemplo para isto está na história da linguagem matemática, que muitas vezes teve suas regras advindas de um uso cotidiano. Wittgenstein não negava as raízes empíricas de algumas proposições matemáticas; pelo contrário, a matemática é vista como parte da história natural dos homens (WITTGENSTEIN, 1998). Uma das contribuições de Wittgenstein à filosofia da matemática, inclusive, foi apontar a natureza social da matemática. Entretanto, depois de estruturados na linguagem matemática, os conceitos tornam-se independentes, são aceitos como regras linguísticas que independem de confirmação empírica: "nós talvez tenhamos adotado que 2 + 2 = 4 porque duas bolas mais duas bolas [em uma balança] equilibram quatro. Porém depois de adotado, este fato não diz respeito à experiência, está petrificado" (WITTGENSTEIN, 1976, p. 98). Nas

Investigações Wittgenstein (1999, P. 203) afirma:

> Esta reflexão [a respeito da concordância entre os homens] deve valer também para a matemática. Se não houvesse essa total concordância, os homens não aprenderiam a matemática que aprendemos. Seria mais ou menos diferente da nossa, até o ponto de ser irreconhecível.

Esses acordos estão relacionados ao modo como vivemos, que Wittgenstein chama de *Formas de Vida*. De acordo com Moreno (2006), a garantia de uma significação se perde no turbilhão imprevisível das nossas formas de vida. A partir das formas de vida, regras são criadas e determinadas, servem aos indivíduos em determinadas situações, ou seja, as formas de vida não determinam a criação das regras, mas sim os indivíduos, tendo como base tais formas de vida.

Para Wittgenstein os conceitos são vagos, não são definições precisas, mas sim um conjunto impreciso de regras. No entanto, isso não indetermina seu significado, pois sabemos usar as palavras nas devidas situações em que somos colocados. Sabemos usar a palavra "vermelho" nas diferentes situações: "sua camisa é vermelha", "ele está vermelho de raiva", "Moisés abriu o Mar Vermelho", "Parei por que o sinal está vermelho" ... A palavra "vermelho" não está ligada a apenas um objeto ou fato, mas é usada em diferentes situações para diferentes objetivos, onde em cada situação é aplicada de forma diferente, porém nem por isso dizemos que não sabemos o que é vermelho. Essas diferentes situações em que uma mesma palavra pode ser empregada são os jogos de linguagem. Wittgenstein decide chamar de jogo de linguagem "a totalidade formada pela linguagem e pelas atividades com as quais ela vem entrelaçada" (Wittgenstein, 1999, p. 30).

Com o tempo e os mais variados usos de uma palavra, expandimos os significados, ou até os reformulamos. Com o tempo podemos descrever outros usos possíveis de uma determinada palavra, inventar novos usos, descrevê-los em uma situação particular (MORENO, 2006), e assim, com o tempo e o domínio das mais variadas técnicas de uso, estaremos cada vez mais em domínio de tais usos, logo, podemos, até não saber definir uma palavra, mas sabemos usá-la amplamente ou até poderemos sugerir uma definição, por que teremos domínio de tal palavra.

É nesse sentido que para Wittgenstein a linguagem pode ter uso gramatical ou empírico, a depender do contexto em que é aplicado. O primeiro uso, o gramatical, trata-se do uso normativo da linguagem, isto é, quando usamos a linguagem para normatizar, para definir regras. O segundo uso, o empírico, seria o uso descritivo da linguagem, que ocorre quando usamos a linguagem para descrever os fatos. As proposições gramaticais são consideradas proposições normativas, que regulam nossas práticas, que são critérios que usamos e pelas quais compreendemos a realidade (Gottschalk, 2014). Uma regra conhecida *a priori* nos permite realizar descrições, e estas mesmas podem ser usadas como paradigmas, como exemplos para a introdução de regras a aprendizes. Portanto, tais proposições normativas, podem também ser usadas como descritivas, pois justamente podem descrever fatos do mundo, mas as proposições normativas não dependem mais da realidade.

Wittgenstein afirma que todas as proposições matemáticas são *regras gramaticais*. Diz ele sobre a natureza de tais proposições:

> Lembremo-nos de que, em matemática, estamos convencidos de proposições *gramaticais*; a expressão, o resultado desse convencimento é, portanto, que *aceitamos uma regra*. Estou tentando dizer algo como isto: mesmo que a proposição matemática demonstrada pareça referir-se a uma realidade fora de si mesma, esta é apenas a expressão da aceitação de uma nova medida (da realidade) (Wittgenstein, 1998, p. 162).

As proposições gramaticais, como vimos, se diferenciam de enunciados empíricos pois nada descrevem, nada dizem a respeito do mundo, apenas nos fornecem regras para o uso de palavras ou conceitos, estabelecem relações internas entre conceitos. Proposições gramaticais são anteriores à verdade ou falsidade: definem o que faz sentido chamar de verdadeiro ou falso e assim acontece com as proposições matemáticas. A proposição "2 + 2 = 4" não é verdadeira nem falsa, mas estabelece que é falso dizer, por exemplo, que "dois mais dois é igual a 3", ou seja, que há algum erro no cálculo. Proposições gramaticais são enunciados que usamos com inteira certeza, são proposições que não conseguimos imaginar de outra forma.

Uma proposição empírica pode tornar-se gramatical, assim como uma proposição gramatical pode tornar-se empírica. Conforme Glock (1996, p. 211), a afirmação "O ouro tem 79 prótons" era uma descoberta empírica, mas agora é uma regra linguística que faz parte do uso da palavra ouro. Wittgenstein indica como uma asserção empírica pode tornar-se uma proposição normativa:

Qualquer proposição da experiência pode servir como regra se, como uma peça de uma máquina, verifica-se imobilidade, de modo que agora toda representação gire em torno dela e ela se torne [...] independente dos fatos (WITTGENSTEIN, 1998, p. 437). É como se tivéssemos endurecido a proposição empírica e a convertido em regra. O que temos então, agora, não é uma hipótese verificável pela experiência, mas um paradigma com o qual comparamos e julgamos a experiência, e, portanto, um novo tipo de julgamento ((WITTGENSTEIN, 1998, p. 324).

Não é a empiria que nos indica como seguir as regras matemáticas, ao contrário, são as proposições matemáticas que nos dizem como agir em suas possíveis aplicações, é através das convenções linguísticas aceitas por nós – como as regras matemáticas – que apreendemos os fatos sensíveis. Não dizemos que "2 + 2" é igual a quatro porque um par de sapatos mais um par de sapatos resultam quatro sapatos; ao contrário, é por meio da regra matemática "2 + 2 = 4" que estamos autorizados a passar de "Vejo dois pares de sapatos" para "Vejo quatro sapatos".

A partir do exposto, cabe a nós refletirmos, então, sobre o ensino e aprendizagem da matemática. Este ensino seria mais eficaz baseando-se na empiria ou na gramática? Na experiência ou em regras? É o que buscamos discutir na próxima seção.

3. Reflexões sobre ensino e aprendizagem da matemática

Quando se pensa no ensino de matemática a ideia de relacionar este com a realidade parece óbvia, no entanto, há vários conteúdos da matemática que são abstratos a ponto de dificultar uma relação direta com a realidade. Por vezes, a matemática parece ser dotada de uma abstração que o seu ensino como uma linguagem parece mais adequado.

Muitos estudos em educação matemática defendem a relação da matemática com o cotidiano, um ensino de matemática contextualizado, visto que o aluno parece desempenhar bem seu papel com cálculos no cotidiano, mas fracassa nas atividades escolares, quando nelas se defrontam com símbolos, algoritmos etc. Porém, o oposto também ocorre, pois alguns alunos sabem usar regras e algoritmos em suas formas convencionais, mas não compreendem os enunciados dos problemas matemáticos escritos em linguagem natural, como no caso das situações-problema tão enfatizadas pelos documentos oficiais.

Se para alguns a matemática é tão ligada aos fatos do mundo, por que parece tão inexorável para nós? Esta discussão já é realizada há muito tempo. De acordo com Silva (2007), o filósofo Kant ao perceber essa característica da matemática, posicionou-a em lugar próprio em sua filosofia. Para Kant havia 4 tipos de juízos: o juízo sintético a posteriori é o conhecimento empírico em si; o juízo analítico a posteriori é racionalmente impossível, pois não há como algo ser explicativo, se nem existe ainda; o juízo analítico a priori é o que se sabe ser verdade por análise lógica, como algo evidente; e o juízo sintético a priori que é a grande novidade da filosofia kantiana, que se trata do conhecimento matemático. De acordo, com Kant, uma proposição matemática é um acréscimo a algo já existente, por exemplo, a proposição "um segmento de reta é a distância mais curta entre dois pontos" se baseia na ideia de pontos e retas. Esta foi uma forma de Kant resolver a desavença entre empiristas e idealistas para o problema do conhecimento da matemática, em que os primeiros diziam ser fruto da realidade e os idealistas, ser fruto da razão apenas.

No entanto, Wittgenstein, a partir da sua visão sobre linguagem, vai entender que as proposições matemáticas são gramaticais, com possibilidade de serem descritivas, e a matemática tem essa característica porque seus conceitos são construídos por uma demonstração, um procedimento lógico, algo que aceitamos como verdadeiro, isento de dúvidas. Além disso, as "leis" matemáticas são nosso próprio padrão de correção, adequam-se perfeitamente ao uso da linguagem com o qual estamos familiarizados (WITTGENSTEIN, 1998). Isso devido aos inúmeros usos diários e aplicações práticas que a matemática possui em nossa vida:

> é essencial à matemática que signos sejam também empregados à paisana. É o uso fora da matemática, e, portanto, o significado dos signos, que transforma o jogo de signos em matemática. [...] Não há matemática pura sem alguma matemática aplicada. A matemática seria apenas um jogo se não desempenhasse algum papel em nosso raciocínio empírico (GLOCK, 1998, p. 244-245).

Nossa "necessidade matemática" se deve ao papel especial que o jogo de linguagem matemático desempenha em nossas vidas. A matemática não é um conjunto de cálculos isolados de nossos usos ou autocontidos em alguma "realidade matemática", mas uma atividade humana, um conjunto de jogos de linguagem, relacionados uns com os outros que estão incorporados em nossa forma de vida (Gerrard, 1991).

Bouveresse (1973) observa que há muito deixamos de pensar que nossa maneira de pintar, esculpir ou compor fosse a verdadeira. Mas não conseguimos desfazer-nos da ideia de que nossa maneira de calcular corresponda a algo de verdadeiro, isso devido aos diversos usos empíricos que a matemática desempenha em nosso dia-a-dia. Assim, parece essencial para nós que haja diferentes maneiras de pintar ou compor, porém, no outro extremo, julgamos ser necessário calcularmos todos da mesma maneira, pois é assim que nos "formamos" com esses conceitos.

De forma semelhante ao aprendizado e uso de nossa linguagem e nossa prática de seguir regras, a concordância, a regularidade, enfim, os hábitos e asserções de nossa forma de vida são imprescindíveis para os resultados na matemática e também para seu aprendizado. Wittgenstein entende que nossas proposições matemáticas são convencionais, ou seja, dependem também de nossa visão de mundo, e não de uma "realidade matemática" transcendental. Assim como no aprendizado de nossa linguagem, as proposições matemáticas precisam ser ensinadas, isto é, não são aprendidas naturalmente, portanto não são óbvias ao aprendiz.

Wittgenstein mostra que nossas proposições matemáticas são convencionais, não possuem uma "essência", não descrevem nenhuma realidade ou fatos mundanos. Dizemos que um indivíduo sabe que "1 + 1 = 2" porque ele expõe esse resultado em concordância com o restante de nós (Wittgenstein, 1976) e não porque esta proposição se refere a alguma realidade, seja no mundo sensível ou em qualquer outro que possamos imaginar.

Nossos conceitos matemáticos são criações humanas que resultaram do acordo de juízos, não por acordo de opiniões, por exemplo, a regra gramatical que afirma que dois mais três são cinco é uma norma, assim como (- 1)X(-1) = 1 é uma das convenções matemáticas. Por nossa vontade, mas também por persuasão fomos convencidos que dois mais três são necessariamente cinco e passamos a nos engajar a esta regra que recebemos como herança de sociedades anteriores à nossa. As proposições matemáticas são normativas, não são descritivas como as proposições empíricas, mas podem ser descritivas, depende do uso que fazemos delas. Em sala de aula o professor na atividade de ensino, ora tenta mostrar ao aluno que uma determinada operação tem sentido, ora explica que é uma convenção.

Como explicar aos alunos que o produto de -1 por -1 é igual a +1? Perguntas como esta tornam-se um dilema para o professor quando pretende ilustrar alguns conceitos matemáticos por meio da realidade. É preciso que reconheçamos que as convenções matemáticas, quando criadas, não exigiam sentido, tal como a raiz quadrada dos números negativos, mas que com o passar do tempo encontraram perfeita correspondência nos estudos de correntes elétricas. Acontece que

> O espírito objetivo corresponde à esfera das significações comuns instituídas, sociais, públicas. Uma significação comum institucional é caracterizada pelo lado estrutural, relacionando não duas subjetividades livres, mas dois parceiros (pelo menos) cujos papéis são definidos por regras (professor/classe, etc.) (GARRETA, 1998, p. 251)

Neste sentido, para Descombes (2000), o vínculo social do mestre e do aluno não é uma ligação entre um indivíduo e outro indivíduo, é um lugar de oposição entre dois status complementares. As instituições sociais são regras convencionais criadas pelo homem, tais como a linguagem, por exemplo, nós decidimos empregar a palavra "vermelho" para tal cor, "azul" para outra cor e estes nomes dados a diferentes cores são criações nossas porque assim nós decidimos. Não é acordo de opiniões, mas acordo de formas de vida.

Para Moreno (2001, p. 255), "O consenso gramatical não é empírico, mas intersubjetivo, ao evocar nossa convicção e certeza" a respeito do que fazemos com as proposições gramaticais.

> o consenso gramatical é intersubjetivo, por tratar-se de acordos sobre formas de vida, maneiras de falar, pensar, sentir e de agir em comunidade sobre o que existe e o que tem ou não sentido. É o consenso a respeito da essência da objetividade – das cores, da percepção, dos comportamentos, objetos, estados mentais, das entidades lógicas e matemáticas –, a respeito do sentido de nossa experiência em geral, e não, apenas, acordo de opiniões a partir de convenções sociais datadas. (MORENO, 2001, p. 256)

No consenso de nossas regras gramaticais, as imagens podem enganar na formulação de nossos conceitos e é por isso que devemos ter cautela ao ensinarmos matemática aos alunos. Algumas aplicações ou experimentos utilizados por professores para dar sentido aos conceitos matemáticos são de grande importância para a aprendizagem do aluno em matemática. Mostrar, por exemplo, que o valor de π (pi) pode ser encontrado pela razão entre a medida do comprimento da circunferência e a medida do comprimento de seu diâmetro auxilia na ilustração da origem desse número.

Ver as imagens da figura 1 abaixo e dizer que a da esquerda é um quadrado é se submeter à ilusão de que seja um quadrado simplesmente por sua aparência. Portanto, aparentar ser um quadrado, não significa que realmente seja um quadrado. A imagem da direita representa um quadrado porque tem as condições necessárias para sê-lo, têm os quatro lados iguais e quatro ângulos de 90 graus.

A gramática da matemática é o conjunto de regras que precisam ser seguidas para que o aluno tenha êxito na sua aprendizagem de conceitos matemáticos, mas, tais regras podem ser ensinadas

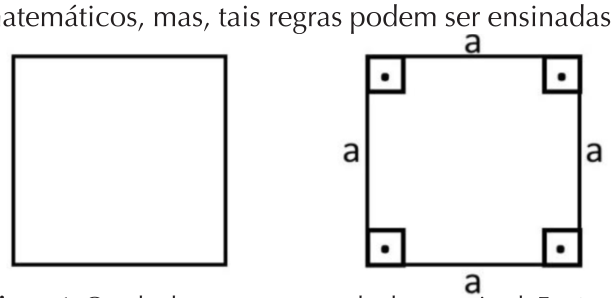

Figura 1. Quadrado aparente e quadrado conceitual. **Fonte**:

com sentido, tal como no desenvolvimento do produto notável abaixo que serve para mostrar a justificativa que o quadrado da soma de a e b por meio de sua representação geométrica.

Segundo Wittgenstein (1987), a proposição 2 + 3 = 5 não é um experimento porque é uma regra gramatical que não é verificável, ou seja, não é

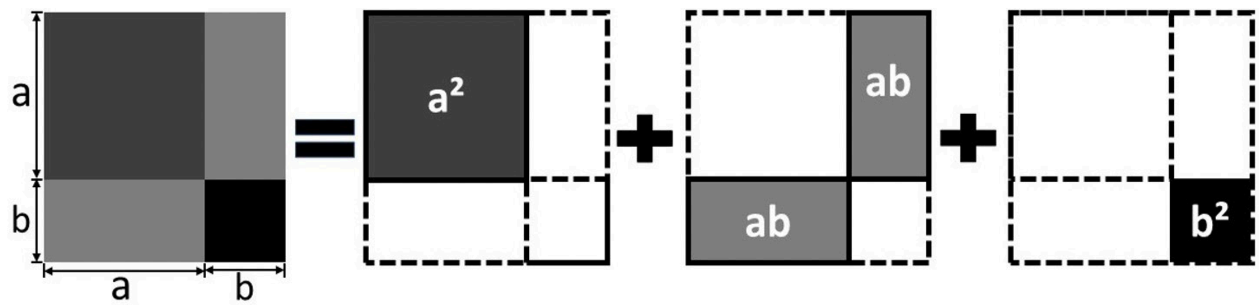

Figura 2. Representação geométrica de $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. **Fonte**: Elaborado pelos autores.

verdadeira nem falsa, mas uma norma a ser seguida. O cálculo em si não é um experimento, ele passa a ser um experimento, por exemplo, quando o professor quer saber se seu aluno sabe calcular, tal como a operação de cálculo 2 maçãs + 3 maçãs = 5 maçãs. É a experiência com cálculos que ensina o aluno a calcular, pois estando educados para uma técnica na medida em que calculam também estão educados para um ponto de vista, que está tão firmemente assentado com esta técnica.

A regra gramatical $2 + 3 = 5$ é condição de sentido para o cálculo 2 maçãs + 3 maçãs = 5 maçãs, justamente porque é a aplicação da regra (Silveira, 2005). Assim, podemos perceber que as regras matemáticas estudadas na escola podem estar em desacordo com a experiência quando aplicadas ao cotidiano do aluno, uma vez que no cotidiano pode haver acordos locais, dependendo do contexto.

Sousa (2017) salienta que os acordos que os estudantes fazem entre si representam uma forma de vida das palavras pronunciadas, durante o desenvolvimento das tarefas de modelagem matemática. Buscam palavras com sentido para juntos pensarem uma resolução para o problema levantado. Segundo a autora, as estratégias por meio da modelagem matemática em meio a ajustes e acordos entre os grupos de alunos que participaram de sua pesquisa proporcionam a utilização de proposições empíricas que após o processo de modelagem se transformam em equações matemáticas. A equação que resulta da experiência é uma proposição matemática que com o passar do tempo se transforma em uma regra, ou melhor, passa a ser uma proposição normativa.

Estas e outras tarefas ajudam a ilustrar os conceitos matemáticos para que tenham sentido. Wittgenstein (1995, p. 263) afirma que 300 não tem significado, "existem 300 homens neste colégio" é um dos significados possíveis dado a 300.

As práticas pedagógicas que os professores utilizam para mostrar o vínculo de conceitos matemáticos com a realidade servem para oferecer dinâmicas alternativas que ilustram a formação de conceitos, mas elas sozinhas não apresentam sentido, já que a matemática é normativa. Bastaria dizer ao aluno que a soma dos ângulos do triângulo é 180 graus ou seria melhor representar com uma figura ou realizar um experimento, fazer com que os alunos desenhem e recortem um triângulo no papel e posteriormente juntem os ângulos? Se um professor simplesmente expressa regras pode gerar confusões, assim como na utilização de experimentos.

As proposições matemáticas diferem de proposições empíricas porque são atemporais e permitem generalizações. Quando demonstramos uma proposição matemática, sobre um triângulo retângulo, por exemplo, estamos demonstrando uma propriedade que é válida para todos os triângulos que possuam a propriedade de ser retângulo, independente se é aqui ou em outro país, hoje ou amanhã – ou seja, independem de fatos contingentes, como é o caso das proposições empíricas.

Para Wittgenstein (1998), as proposições matemáticas fornecem um "quadro de referência" para descrições. Assim, as proposições da matemática são paradigmas para proposições empíricas. Deste modo, é necessário que os alunos sejam colocados em contato com as diversas formas de apresentação, pois o significado é o uso, e o conhecimento matemático não se encontra fixo em uma forma ou outra, mas entre o gramatical e o empírico, e a pragmática é o ambiente que possibilita a aprendizagem.

Wittgenstein apresenta na segunda fase de sua filosofia uma nova visão sobre o significado. Para o filósofo o significado é o uso. É a variedade de usos das palavras em diferentes contextos o que favorece a significação das mesmas. Esses diversos usos parecem mostrar uma indefinição sobre o significado, pois uma só palavra parece ter diversas interpretações, mas o significado versa nesse conjunto de usos, e a situação mostra um aspecto desse conjunto, desse modo, formamos o significado sobre uma palavra nos usos diversos que efetuamos, considerando as semelhanças quando usamos nessas diversas situações.

As regras definem os usos, e usamos as palavras de acordo com as regras, e é nesse uso que o significado vai se expandindo. A regra já não contém em si sua aplicação, como o referencialismo leva a entender, como se um signo já contivesse seu significado, independente de como é aplicado. E isto só é possível devido primeiramente um consenso e em seguida o treino, que nada mais é do que o uso diário em repetidas atividades cotidianas.

Os usos de uma palavra podem ser direcionados, como é feito, na escola, por exemplo. Assim, o ensino pode ser compreendido como um treino de variadas técnicas de uso, como se faz com os ditados na língua portuguesa ou a tabuada na matemática, mas que poderíamos atribuir a quaisquer atividades rotineiras, mesmo que sejam a prática de atividades lúdicas ou o trabalho com situações-problemas. Com o uso frequente e variado, diversas descrições, os significados vão se ampliando, mas podem ser direcionados, e assim, promover redirecionamentos, quando se perceber que o significado não está sendo construído, ou se está de forma equivocada.

É nesse sentido que propomos neste texto que o ensino da matemática deve acontecer entre o empírico e o gramatical. O empírico se refere a experimentos, contextualizações, atividades que busquem dar sentido ao que se aprende, e o gramatical se trata de regras, normas e convenções. Embora a matemática possa ser considerada como normativa, e deste modo, independente das situações concretas do dia-a-dia, ela possui as mais variadas aplicações em nossos jogos de linguagem da vida cotidiana. Não podemos nos limitar a um aspecto somente, mas trabalhar com a aquisição de sentido por parte dos alunos, sem cair em uma supervalorização do cotidiano e do que é considerado útil para a vida, assim como devemos ensinar técnicas linguísticas, mas evitando cair em um formalismo abstrato, sem sentido para o aluno.

4. Considerações finais

São cada vez mais comuns os debates sobre como ensinar matemática, seja em textos acadêmicos, ou na conversa entre professores em escolas. Por vezes alguns docentes acreditam que as aplicações do conteúdo são o caminho a seguir, enquanto outros apostam em enfatizar no ensino das regras e procedimentos matemáticos. Buscamos mostrar que essa dicotomia não é necessária e que o ensino dessa disciplina pode estar entre o gramatical e o empírico, isto é, deve levar em conta a empiria quando for o caso, sem deixar de lado o aprendizado das técnicas matemáticas.

Nesse sentido, a forma de se descrever o mundo ou trazer exemplos da realidade deve ser visto a partir da noção de jogo de linguagem, ou seja, não são as descrições em si que nos permitem compreender ou que nos leva a descobrir conceitos, mas são as palavras ditas em situações, e o recorrente uso das mesmas nestas e em outras situações. O jogo de linguagem é o que possibilita as proposições normativas e as descrições, que podem servir como paradigmas que auxiliam na aceitação e fixação de regras, e depois são partes dos diversos usos que podemos fazer com as regras que já dominamos.

Portanto, o aluno precisa aprender a dominar as técnicas matemáticas, precisa compreender suas regras (gramatical), mas seu ensino pode se valer de atividades de aplicação, que lhes dê um sentido mais próximo de sua vida (empírico).

5. Referências

AZIZE, RL. Os inícios da abertura pragmática de Wittgenstein: o princípio do contexto. **Cognitio/ Estudos**: Revista Eletrônica de Filosofia. Centro de Estudos do Pragmatismo – Programa de Estudos Pós-Graduados em Filosofia. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, n. 1, 2004. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/cognitio/article/download/5406/3857. Acesso em: 09 set. 2018.

BOUVERESSE, J. Linguagem ordinária e filosofia. Em: SUMPF, J et al. **Filosofia da linguagem.** Coimbra: Almedina, 1973. p. 71-138.

DESCOMBES, V. Philosophie des représentations collectives. **History of the Human Sciences**, SAGE Publications, 13 (1), pp.37-49, 2000. Disponível em: https://jeannicod.ccsd.cnrs.fr/ijn_00000511/document. Acesso em: 30 dez. 2017.

GERRARD, S. Wittgenstein's philosophies of mathematics. **Synthese**, n. 87, Kluwer Academic Publishers, p. 125-142, 1991.

GLOCK, HJ. Necessity and normativity. Em: SLUGA, H; STERN, DG. **The Cambridge Companion to Wittgenstein.** Cambridge: Cambridge University Press, 1996. p. 198-225.

______. **Dicionário Wittgenstein.** Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1998.

GOTTSCHALK, CMC. Fundamentos filosóficos da matemática e seus reflexos no contexto escolar. **International Studies on Law and Education**, v. 18, p. 73-82, 2014.

INEP. **Relatório SAEB.** Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Brasília, 2019.

MENEGHETTI, FK. O que é um ensaio-teórico? **RAC**, Curitiba, v. 15, n. 2, pp. 320-332, Mar./ Abr. 2011.

MORENO, AR. Wittgenstein e os valores: do solipsismo à intersubjetividade. **Natureza Humana**, v. 3, n. 2, p. 233-288, jul.-dez. 2001.

______. Descrição fenomenológica e descrição gramatical: ideias para uma pragmática filosófica. **Revista Olhar**, UFSCar, v. IV, n.7, p. 94-139, 2003.

______. **Wittgenstein**: os labirintos da linguagem. Campinas: Editora Moderna, 2006.

SCHMITZ, F. **Wittgenstein**. São Paulo: Liberdade, 2004.

SILVA, Jairo José da. **Filosofias da matemática.** São Paulo: Editora da UNESP, 2007.

SILVEIRA, MRA. **Produção de sentidos e construção de conceitos na relação ensino/aprendizagem da matemática**. 2005. 175f. Tese (Doutorado em Educação), Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2005.

SOUSA, B. N. A. **A Matemática em atividades de modelagem matemática: uma perspectiva wittgensteiniana.** 2017. 316f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina, UEL, Londrina, 2017.

WITTGENSTEIN, L. **Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics, Cambridge 1939 (LFM).** Hassocks: Harvester Press, 1976.

______. **Observaciones sobre los fundamentos de la matemática**. Madrid: Alianza Editorial, 1987.

______. **Tractatus logico-philosophicus.** São Paulo: Edusp, 1993.

______. **Cours sur les fondements des mathématiques**. Toulouse: Éditions T. E. R., 1995.

______. **Remarks on the foundations of mathematics.** Oxford: Blackwell, 1998.

______. **Investigações filosóficas.** São Paulo: Nova cultural, 1999.

______. **Gramática filosófica.** São Paulo: Loyola, 2003.