



## FUTEBOL EM SALA DE AULA: A GEOMETRIA DINÂMICA E A INTERPRETAÇÃO DE UM LANCE POLÊMICO

## SOCCER IN THE CLASSROOM: DYNAMIC GEOMETRY AND THE INTERPRETATION OF A POLEMIC MOVE

## FÚTBOL EN EL AULA: GEOMETRÍA DINÁMICA E INTERPRETACIÓN DE UNA JUGADA POLÉMICA

Lucas Siviero Sibemberg\* , Márcia Rodrigues Notare\*\* 

Cómo citar este artículo: Sibemberg, L. S.; Notare, M. R. (2021). Futebol em Sala de Aula: a geometria dinâmica e a interpretação de um lance polêmico. *Góndola, enseñanza y aprendizaje de las ciencias*, 16(3), 580-593. DOI: <https://doi.org/10.14483/23464712.16919>

### Resumo

Durante o ano de 2019 um lance polêmico entre dois times do futebol brasileiro dividiu opiniões. Neste lance um jogador, aparentemente em posição de impedimento, marcou um gol, que foi validado com uma nova tecnologia digital presente nos jogos de futebol: o VAR (Video Assistant Referee). No presente artigo abordamos este lance de gol, utilizando matemática para explicar o porquê de a decisão final do VAR ter sido correta. Em seguida, apresentamos uma possível abordagem da jogada polêmica de futebol em sala de aula, a partir de uma atividade exploratória em ambiente de geometria dinâmica para o desenvolvimento de conceitos de projeção ortogonal e habilidades de visualização espacial. A atividade foi aplicada com estudantes do Ensino Médio e os resultados apontam que a exploração do modelo construído com geometria dinâmica auxiliou os alunos no entendimento do lance de futebol em questão e na compreensão do conceito de projeção ortogonal.

**Palavras chave:** Visualização Espacial. GeoGebra. Tecnologia Digital.

### Abstract

In 2019 a controversial bid between two Brazilian football teams divided opinions. In this move, a player, apparently in an offside position, scored a goal validated with a new digital technology present in football games: the VAR (Video Assistant Referee). In this paper, we approach this goal throw, using mathematics to explain why VAR's final decision was correct. Then, we present a possible approach to the controversial play

Recibido: 29 de agosto de 2020; aprobado: 8 de julio de 2021

\* Licenciado em Matemática. Universidade Federal do Rio Grando do Sul (UFRGS), Brasil. E-mail: lucas.siviero@ufrgs.br - ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3347-5064>

\*\* Doutora em Informática na Educação. Universidade Federal do Rio do Sul (UFRGS), Brasil. Docente do Instituto de Matemática e Estatística (IME-UFRGS), do Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática (PPGEMAT-UFRGS) e do Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação (PPGIE-UFRGS). E-mail: marcia.notare@ufrgs.br - ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2897-8348>

of soccer in the classroom, from an exploratory activity in a dynamic geometry environment developing orthogonal projection concepts and spatial visualization ability. We work with high school students. Results show that this activity exploring the build model, through dynamic geometry, helped students to understand the soccer move in question, comprehending the concept of orthogonal projection, and developing spatial visualization ability.

**Keywords:** Spatial Visualization. GeoGebra. Digital Technology

## Resumen

Durante 2019, un movimiento polémico entre dos equipos de fútbol brasileños dividió opiniones. En esta jugada, un jugador, aparentemente en posición de fuera de juego, marcó un gol, que fue validado con una nueva tecnología digital presente en los juegos de fútbol: el VAR (Video Assistant Re arbitro). En este artículo abordamos este lanzamiento de meta, utilizando las matemáticas para explicar por qué la decisión final del VAR fue correcta. A continuación, presentamos un posible acercamiento al polémico juego de fútbol en el aula, basado en una actividad exploratoria en un entorno de geometría dinámica para el desarrollo de conceptos de proyección ortogonal y habilidades de visualización espacial. La actividad se aplicó a estudiantes de secundaria y los resultados muestran que la exploración del modelo construido con geometría dinámica ayudó a los estudiantes a comprender el movimiento de fútbol en cuestión y a comprender el concepto de proyección ortogonal.

**Palabras clave:** Visualización espacial. GeoGebra. Tecnología digital. la física. Estado del arte.

## 1. Introdução

Em todo mundo há diferentes esportes que são jogados e atualmente o futebol, esporte mais jogado no Brasil, é considerado um dos esportes mais famosos do mundo. De acordo com a entidade máxima do futebol FIFA (Federação Internacional de Futebol, 2018), somente na última copa do mundo, em 2018, o futebol contou com mais de 3,5 bilhões de espectadores e, apesar de não ser o esporte que mais movimenta dinheiro do mundo, movimenta cifras bilionárias no mercado todo ano. Uma das possíveis razões que faz o futebol ser tão apaixonante pode estar relacionada com a aleatoriedade que está presente em campo, fato de ser um dos esportes mais imprevisíveis devido aos pequenos placares, partidas terminadas em empates, placares menos previsíveis que em outros esportes, gols de sorte (ANDERSON; SALLY, 2013).

Essa aleatoriedade pode passar a mensagem de que futebol e Matemática são temas disjuntos. Neste artigo mostraremos que a ideia de que futebol e Matemática não se misturam pode estar equivocada e que, graças à Matemática, podemos ver jogos mais justos no futebol.

No futebol há um árbitro, que é responsável pelo cumprimento das regras em cada jogo, dois auxiliares em campo, cujo objetivo é ajudar o árbitro a tomar as melhores decisões e um quarto árbitro que pode substituir tanto o árbitro, quanto algum dos auxiliares. Porém, as ações do árbitro muitas vezes abrem margem para decisões questionáveis em campo.

Portanto, nos últimos anos podemos dizer que houve uma revolução no futebol com a implementação da tecnologia digital, para auxiliar na análise de imprecisões e possibilitar uma revisão

do jogo e das jogadas a partir de diversos ângulos, deixando o futebol mais justo. Essa tecnologia, conhecida como VAR (Video Assistant Referee)<sup>1</sup>, vem sendo utilizada em situações em que o árbitro tenha tomado a decisão errada em algum lance em campo.

No dia 12 de junho de 2019, dois times brasileiros de futebol estavam jogando pelo campeonato do país. Podemos dizer que o VAR mudou a história desse jogo em um lance no qual foi identificado um erro da arbitragem. Normalmente, o ocorrido seria considerado um lance normal, o qual os torcedores aceitariam, porém, em decorrência de algumas particularidades deste lance, muitas pessoas contestaram a decisão final.

A situação ocorrida nesse jogo desencadeou a pesquisa aqui apresentada, que integra futebol, aprendizagem de projeção ortogonal e geometria dinâmica. Dessa forma, os objetivos desse artigo são: (i) analisar a jogada e argumentar, com fundamentação matemática, o equívoco na decisão final, evidenciando as aproximações que podem existir entre Matemática e futebol; (ii) apresentar uma proposta de atividade que articula o lance de futebol com o estudo de projeção ortogonal em ambiente de geometria dinâmica; (iii) e analisar os dados produzidos a partir de aplicação da proposta elaborada com estudantes do Ensino Médio. À luz de fundamentação teórica sobre o desenvolvimento da visualização espacial proposta por Gutiérrez (1996), analisamos como a atividade proposta contribuiu para o desenvolvimento de habilidades de visualização espacial nos alunos que participaram da pesquisa.

## 2. O desenvolvimento de habilidades de visualização espacial

Neste artigo estamos interessados em analisar um lance ocorrido no campo de futebol e discutir o potencial de sua aplicabilidade na sala de aula para o desenvolvimento da visualização espacial. Portanto, para esta análise, é necessário

compreender o conceito de visualização espacial. Para Gutiérrez (1996) podemos separar o conceito de visualização espacial em quatro habilidades principais: imagens mentais, representação externa, processo de visualização e habilidades de visualização.

Gutiérrez (1996) entende que a imagem mental é o elemento mais básico que o estudante precisa para “aprender a construir, transformar e analisar objetos geométricos (grifo nosso) a fim de adquirir uma boa capacidade de visualização espacial<sup>2</sup>” (GUTIÉRREZ, 1996, p. 25, tradução nossa). Presmeg (1986) apresenta alguns exemplos de imagem mental, salientando que a imagem concreta é considerada a forma mais simples de imagem mental, sendo o tipo de imagem que normalmente utilizamos para representar, por exemplo, poliedros. Já a imagem dinâmica envolve movimento mental de algum objeto, portanto ela permite ver este objeto em qualquer posição desejada, mas exige maiores habilidades de visualização espacial.

Para Gutiérrez (1996), a representação externa corresponde a representações, sejam elas verbais ou gráficas, de um objeto ou propriedades dele. Essas representações podem ser feitas por meio de imagens, desenhos, gráficos, etc. A representação externa é importante para a criação e transformação da imagem mental.

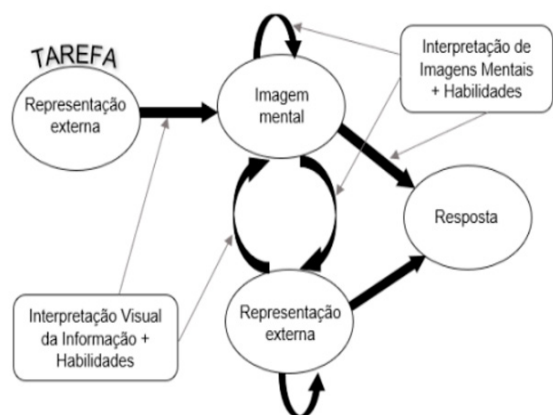
O processo de visualização está dividido em dois processos inter-relacionados, em que o primeiro “é o processo de converter dados abstratos e não figurativos em imagens visuais, e também converter uma imagem mental em outra<sup>3</sup>” (GUTIÉRREZ, 1996, p.26) chamado de processamento visual. O segundo é o processo de interpretação de informação figural, que consiste no “processo de ler, analisar e entender representações espaciais, como representações no plano ou imagens mentais de poliedros, a fim de obter algum dado deles<sup>4</sup>” (GUTIÉRREZ, 1996, p.26).

2 “[...] learn to construct, transform, and analyze them in order to acquire a good capability of spatial visualization” (GUTIÉRREZ, 1996, p.25).

3 “[...] is the process of converting abstract and non-figurative data in visual images, and also that of converting a mental image into another one” (GUTIÉRREZ, 1996, p.26).

4 “[...] is the process of reading, analysing and understanding spatial representation, such as plane representations

1 Árbitro de Vídeo



**Figura 1.** Principais elementos de visualização na solução de uma tarefa matemática. **Fonte:** LEMMERTZ, 2019 apud Gutiérrez, 1996, p.21

A última componente da atividade de visualização são as habilidades de visualização, em que “a aprendizagem e a melhoria dessas habilidades são a chave de todo o processo de visualização espacial<sup>5</sup>” (GUTIÉRREZ, 1996, p.26, tradução nossa). Assim o aluno deve ser capaz de escolher qual habilidade de visualização usar, dependendo do problema que estiver resolvendo. Dois exemplos de habilidades espaciais são: a percepção figura-fundo, em que se espera que o sujeito identifique um certo objeto isolado de um contexto complexo e a percepção de relações espaciais, em que se espera que o sujeito consiga relacionar objetos, figuras e/ou imagens mentais uns com os outros. O diagrama da Figura 1, elaborado por Gutiérrez (1996), traduz como deve ser o processo de resolver uma tarefa, em que é necessário o uso da visualização geométrica. Neste processo, primeiro interpretamos a tarefa utilizando a representação externa, assim geramos a primeira imagem mental. Com essa imagem o aluno realiza um processo de raciocínio visual, em que dependendo da tarefa ou das habilidades dos estudantes, podem ser geradas novas imagens mentais e representações externas antes do aluno chegar em uma resposta

(GUTIÉRREZ, 1996).

Esse processo ajuda a compreender como um problema que envolve visualização espacial pode ser resolvido. A seguir, discutimos as contribuições dos recursos tecnológicos, em especial a geometria dinâmica, no desenvolvimento da visualização espacial.

### 3. A geometria dinâmica e a visualização espacial

De acordo com Santos e Moita (2016), os recursos tecnológicos podem contribuir para o processo de aprendizagem, pois permitem ao professor interpretar, refletir e criar processos de ensino inovadores, numa prática produtiva e dinâmica, reinventando o ato de educar.

Em seus estudos Gutiérrez (1996) mostra que, com o auxílio da geometria dinâmica, os estudantes tendem a aprender propriedades de objetos geométricos com mais profundidade, justificando que, a partir de uma imagem estática, nem sempre é possível tirar conclusões sobre o objeto explorado. Gutiérrez (1996) ressalta que os estudantes tendem a tirar conclusões sobre propriedades do objeto geométrico apenas pelo seu desenho estático na tela, como por exemplo, concluir que um ângulo é agudo apenas porque assim o estudante o está vendo na imagem.

Assim,

[...] uma das principais contribuições das tecnologias digitais para a educação matemática foi tornar possível a “concretização” dos objetos matemáticos na tela do computador, dando a sensação de realismo e de existência material pela possibilidade de manipulação e alteração de suas propriedades (NOTARE E BASSO, 2016, p. 2).

Dessa forma o uso da geometria dinâmica torna-se cada vez mais necessário em sala de aula, tendo papel fundamental no desenvolvimento do pensamento geométrico.

Para Notare e Basso (2016), um dos fatores determinantes para a habilidade de visualização e pensamento espacial é a capacidade de manter e manipular em mente uma imagem preservando

or mental images of polyhedra, in order to obtain some data from them” (GUTIÉRREZ, 1996, p.26).

<sup>5</sup> “The learning and improvement of these abilities is the key in the whole process of spatial visualization” (GUTIÉRREZ, 1996, p.26).



uma variedade de elementos. Assim, o pensamento espacial deve contemplar habilidades como gerar uma imagem, analisar uma imagem para identificar informações sobre ela, transformar ou operar sobre uma imagem, e manter uma imagem a serviço de alguma operação mental. Isso implica que os processos mentais envolvidos em habilidades espaciais devem ser capazes de conter informações que permitam a reconstrução da imagem, com um grau elevado de isomorfismo com a imagem externa observada (Notare e Basso, 2016).

Assim, percebe-se que a ação mental tem papel fundamental no processo de visualização espacial e, nesse sentido, defendemos a utilização de construções e manipulações em ambiente de geometria dinâmica para apoiar a construção de imagens mentais. Manipulações dinâmicas permitem ações como experimentar, analisar e refletir sobre ideias, com o realismo necessário para apoiar a construção de imagens mentais adequadas.

Notare e Basso realizaram um experimento com um grupo de alunos de um Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. Os alunos foram desafiados resolver um problema de geometria espacial de duas formas diferentes: com papel e lápis e, em outro momento, com auxílio do software de geometria dinâmica GeoGebra 3D. Analisando os dados, os autores verificaram que, ao tentar resolver o problema apenas com papel e lápis, de forma estática, alguns estudantes erram a resposta, pois “construíram uma imagem figural equivocada dos sólidos destacados” (Notare e Basso, 2016, p.4).

Após essas respostas, os alunos são incentivados a representar a situação problema no GeoGebra 3D, utilizando suas possibilidades de construção e dinamismo. Nessa situação, os estudantes conseguem solucionar o problema com sucesso, dada a riqueza de elementos e a possibilidade de manipulação que a construção dinâmica oferece. Logo, é notado que o GeoGebra 3D permite a construção de objetos dinâmicos isomorfos à

situação real.

Sibemberg (2020) realizou uma pesquisa com alunos procurando investigar, a partir de uma sequência de atividades em ambiente de geometria dinâmica, se a geometria dinâmica pode auxiliar na visualização da projeção ortogonal de objetos geométricos. Na pesquisa, verificou que, quando os alunos podiam manusear os recursos de geometria dinâmica na tela do computador para construir sólidos, eles identificavam quando o sólido construído respeitava propriedades geométricas ou não.

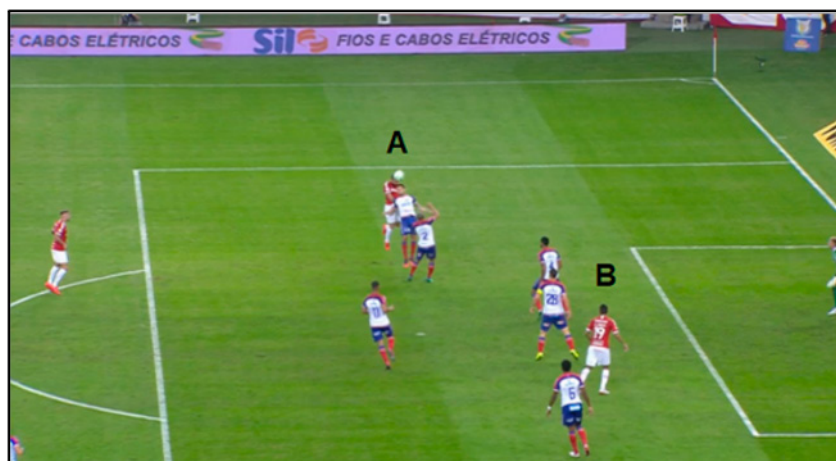
Lemmertz (2019) realizou uma pesquisa com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental. A partir de uma sequência de atividades a autora buscou investigar se tarefas envolvendo a manipulação de objetos tridimensionais físicos e digitais podem contribuir para o desenvolvimento de habilidades de visualização espacial. A autora verificou que as habilidades de visualização espacial foram necessárias para o raciocínio geométrico, que ajudou os alunos a criarem imagens mentais dos objetos que, provavelmente, não poderiam construir apenas com representações bidimensionais desses sólidos.

A partir desses estudos, percebemos que a geometria dinâmica potencializa o aprendizado de geometria espacial e auxilia no desenvolvimento de habilidades espaciais. Assim, surge um questionamento: será que a geometria dinâmica pode auxiliar no entendimento de uma situação da vida real?

Na próxima seção apresentamos o lance do jogo de futebol que estamos analisando e mostraremos porque ele foi considerado um lance polêmico.

#### 4. O Lance

O lance discutido nesse artigo ocorreu no jogo entre os times Internacional e Bahia em Porto Alegre, válido pela nona rodada do Campeonato Brasileiro de Futebol 2019. Aos 20 minutos do primeiro tempo de jogo, o jogador A do Internacional tocou a bola para o jogador B, que



**Figura 2.** Momento em que o jogador A toca a bola para o jogador B. **Fonte:** Globo Esporte, 2019

marcou o gol. Na Figura 2 podemos observar o exato momento em que o jogador A toca a bola para o jogador B.

A polêmica desse lance ocorreu porque, em um primeiro momento, o árbitro considerou o jogador B em impedimento, invalidando o gol. Porém, depois de realizada a revisão no VAR, o árbitro reviu sua decisão e considerou que o jogador B não estava em posição de impedimento, validando o gol. De acordo com a CBF (Confederação Brasileira de Futebol) (2018/19)<sup>6</sup> um jogador estará em posição de impedimento quando:

- qualquer parte de sua cabeça, corpo ou pés estiver na metade do campo adversário (excluindo a linha de meio de campo) e se
- qualquer parte de sua cabeça, corpo ou pés estiver mais próximo da linha de meta adversária do que a bola e o penúltimo adversário. As mãos e os braços dos jogadores, inclusive dos goleiros, não são considerados.

Um jogador não se encontrará em posição de impedimento quando estiver em linha com:

- o penúltimo adversário ou;
- os dois últimos adversários.

Assim, no exato momento apresentado na Figura 2, surge a polêmica do lance: O jogador B está em impedimento, isto é, o jogador B encontra-se à frente de todos os jogadores do time Bahia

(jogadores de branco) com exceção do goleiro? Vale observar que os braços do jogador não são considerados para a posição de impedimento. Para grande parte dos telespectadores e, inclusive, os comentaristas<sup>7</sup> do jogo, o jogador B encontra-se em posição de impedimento, e a imagem da Figura 2 também sugere isso. Um diálogo entre narrador e comentarista durante a checagem do VAR é apresentado a seguir:

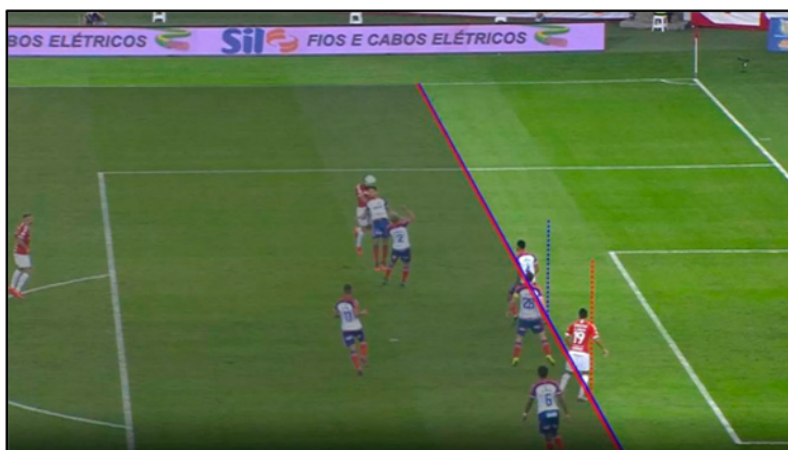
*É, o jogador B “tá” a frente, disse o narrador;  
Tem muita dúvida não né [...] tava impedido  
“juízo”, tava impedido, vamo “pro” jogo, disse o comentarista;  
Aí estão as polêmicas do VAR, uma demora em lances extremamente simples, disse o narrador.*

Após alguns instantes, o árbitro de jogo com auxílio do VAR validou o gol, gerando uma grande polêmica no cenário nacional. Dessa forma, no dia seguinte o chefe de arbitragem da CBF explicou o que o Árbitro de Vídeo observou e analisou a imagem na câmera para que fosse validado o gol, afirmando que

*É feita uma calibragem de todas câmeras, é parada a imagem no momento do toque do jogador de cabeça e, a partir daí, a gente trabalha com a linha vertical. A gente puxa essa linha em relação à linha de fundo, vê qual o ponto do jogador, nesse caso o ponto dele mais próximo da linha de fundo é o ombro, faz uma*

<sup>6</sup> Regras válidas para as temporadas de 2018 e 2019.

<sup>7</sup> Pessoas que, durante a transmissão do jogo na televisão e/ou internet, comentam os lances do jogo.



**Figura 3.** Momento que o jogador A toca a bola para o jogador B com as linhas de impedimento. **Fonte:** Globo Esporte, 2019

projeção ao solo e vai até o jogador do Bahia, pois com a imagem em diagonal a gente não consegue ver o pé do jogador, que está dando condição (GACIBA, 2019). Enquanto o chefe da arbitragem explicava o ocorrido, a imagem de campo ilustrada na Figura 3 foi divulgada nos principais sites de esporte do Brasil mostrando as linhas mencionadas pelo chefe de arbitragem.

O interessante na Figura 3 é que, mesmo após a divulgação da imagem, o público em geral não aceitou o fato do jogador B não estar em posição de impedimento, como mostram alguns dos comentários mais curtidos da página do SporTV8 abaixo:

*“Desculpa, mas pra mim ele continua com o corpo a frente dos zagueiros. Impedimento claro.”* Com 451 likes<sup>8</sup>.

*“Esse VAR contra o Bahia foi uma vergonha nacional, manchando a verdadeira função da tecnologia, que se usada por pessoas competentes irá contribuir bastante para o futebol mundial. Não precisa ser especialista em computação gráfica para ver o tamanho da burrice desmontada por essa equipe de Inter X Bahia. Lamentável!”* Com 40 likes.

*“Isso mostra bem como esses caras enxergam o povo brasileiro, nos enxergam como ignorantes... Querem manipular o que está claro nas imagens, chega a ser bizarro... A mesma coisa de tentar convencer que  $2 + 2$  é 5, piada.”* Com 11 likes.

8 Canal de esportes.

9 O número de likes é o número de pessoas que curtiram aquele comentário

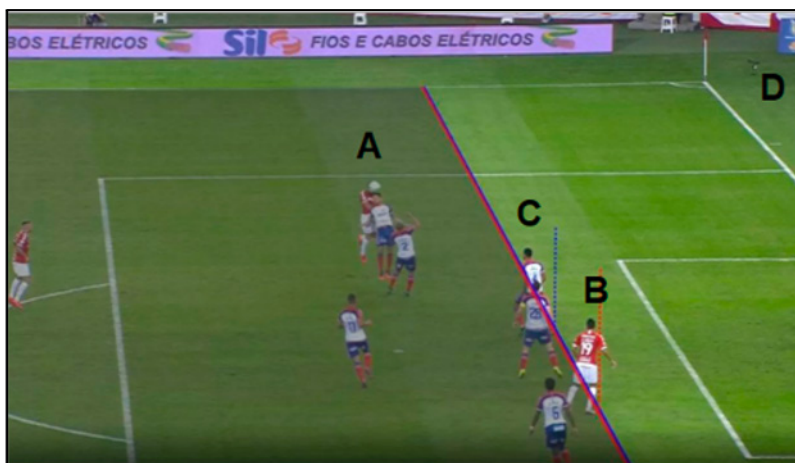
Uma das possíveis razões para a insatisfação dos torcedores com a resolução do lance pode ser pelo fato de só estar disponível uma imagem que mostra um único ângulo de visão, a partir de uma imagem estática de um evento em movimento, que pode resultar na construção de uma imagem mental restrita e equivocada. Como afirma Gutiérrez (1996), é comum que estudantes tirem conclusões sobre sólidos apenas pelo que estão vendo em uma imagem estática, em que, nem sempre, as propriedades observadas são verdadeiras, pois não há o realismo necessário para apoiar a construção de uma imagem mental adequada (NOTARE e BASSO, 2016).

Para compreender melhor a situação apresentada, na próxima seção abordamos a matemática envolvida neste lance, e como ela sustentou a validação do gol do time Internacional.

## 5. Matemática no lance

Pode não parecer, mas há muita matemática envolvida no lance discutido nesse artigo. Primeiro vamos destrinchar a fala do chefe de arbitragem e entender o funcionamento do VAR e porque a decisão foi acertada. A Figura 4 apresenta a imagem do lance com a marcação de cada jogador ou linha que será citado no texto.

No início de seu comentário, o chefe de arbitragem afirma que, com a imagem parada “é feita uma



**Figura 4.** Momento que o jogador A toca a bola para o jogador B, mostrando a posição do jogador C. **Fonte:** Globo Esporte, 2019

calibragem de todas câmeras, [...] e a gente trabalha com a linha vertical”. Como já discutimos anteriormente, uma imagem estática pode não apresentar todas as nuances de um fenômeno e, conseqüentemente, conduzir à construção de imagens mentais equivocadas. Assim, o primeiro passo tomado pela arbitragem de vídeo é juntar imagens de todos os ângulos de visão que possuem, para determinar a imagem que melhor representa o posicionamento dos jogadores em campo. A linha vertical mencionada pelo chefe de arbitragem corresponde à linha paralela à linha de fundo (representada pela letra D na Figura 4), linha que evidenciará qual jogador está à frente: o jogador B ou o jogador C.

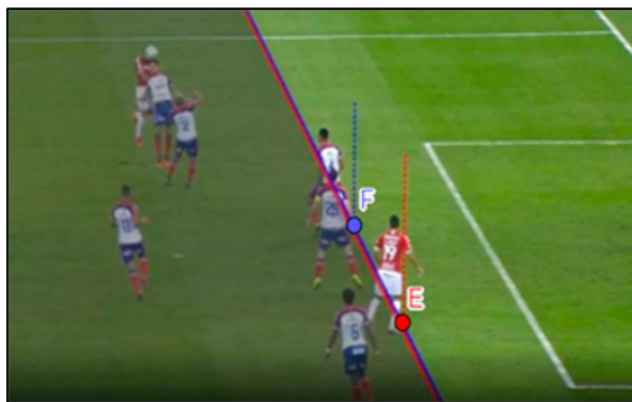
Para explicarmos essa situação, é fundamental pensarmos em uma equivalência: um jogador está à frente de outro se, e somente se, esse jogador está mais próximo da linha de fundo do campo adversário. Para analisar essa situação, podemos dizer que o jogador está mais perto da linha de fundo do campo adversário ao minimizarmos a função que leva o ponto mais à frente do jogador em cada ponto da linha de fundo, ou, de uma maneira mais simples, projetamos o ponto na linha de fundo e calculamos a distância entre esses dois pontos. Este resultado é importante, pois agora não comparamos os jogadores entre si e sim cada jogador com a linha de fundo e analisamos qual a

menor distância.

Dando continuidade à análise do comentário, percebemos que o chefe de arbitragem afirma que o VAR analisa qual o ponto do jogador B está mais próximo da linha de fundo, que, neste caso, é o ombro. Para compreender esse comentário, vamos utilizar um conceito fundamental da Matemática, a projeção ortogonal. A “projeção ortogonal é a representação de um objeto em um plano de projeção, quando as linhas visuais são perpendiculares a este plano” (Hoelscher, R.P.; Springer, C.H.; Dobrovolny, J.S., 1978). No caso que estamos analisando, a projeção ortogonal do jogador atacante no campo é um ponto - que chamaremos de E - no gramado, que minimiza a distância do ombro do jogador em relação ao gramado. O chefe de arbitragem comenta que o pé do jogador C é a parte de seu corpo que está mais próxima da linha de fundo e assim marcamos o ponto F e, utilizando a projeção ortogonal desses pontos sobre a linha de fundo, podemos comparar as distâncias dos pontos E e F em relação à mesma. Com auxílio do GeoGebra, ilustramos os pontos E e F na Figura 5.

Vamos entender o porquê de traçarmos as retas paralelas à linha de fundo (retas que o chefe de arbitragem denomina como retas verticais). Na Figura 4, essas retas, são representadas pelas retas azul e vermelha. Como são construídas essas retas





**Figura 5.** Projeções ortogonais no campo dos pontos mais próximos da linha de fundo. **Fonte:** Globo Esporte, 2019

e como sabemos até onde traçá-las? Para construí-las, utilizamos os pontos E e F e usamos uma propriedade das retas paralelas: dada uma reta  $r$  e um ponto A existe uma, e somente uma, reta paralela à  $r$  que passa por A. Dessa forma, a reta será construída corretamente, pois basta traçarmos retas paralelas à linha de fundo que passem pelos pontos E e F.

É importante observar a importância da utilização de retas paralelas, mas ainda não argumentamos sobre o porquê de retas paralelas proporcionarem uma análise precisa da situação. Para tal, citamos mais uma propriedade de retas paralelas: dadas duas retas  $r$  e  $s$  paralelas e dados dois pontos da reta  $r$ , as distâncias de ambos à reta  $s$  são iguais. Assim, essa propriedade permite deixar de comparar o ponto E com o ponto F e comparamos quaisquer dois pontos, um da reta azul e um da reta vermelha, isto é, basta analisar qual reta - azul ou vermelha - está mais próxima da linha de fundo, o que, de acordo com a compilação de imagens feita pelo recurso tecnológico disponível para o árbitro de vídeo, é a reta azul, permitindo afirmar que o jogador C está à frente e, conseqüentemente, o jogador B não está em posição de impedimento. O tempo de resolução de um impedimento no jogo precisa ser o menor possível, portanto mesmo havendo várias formas de responder se um jogador está em posição de impedimento ou não, o método mais simplificado é o que é implementado no jogo de futebol.

## 6. Interpretando o lance como uma tarefa de visualização geométrica

Na fundamentação teórica, ressaltamos os aspectos que integram a visualização espacial e destacamos como Gutiérrez (1996) observa o processo de resolução de um problema espacial. Podemos analisar esse lance de futebol como uma tarefa geométrica à luz do diagrama elaborado por Gutiérrez.

Primeiro definimos a tarefa. O que motivou a dúvida no telespectador que estava assistindo ao jogo? Saber se o jogador estava impedido ou não. Assim, esta tornou-se a tarefa do telespectador. A representação da jogada que o telespectador teve foi a imagem estática ilustrada na Figura 2, gerando a primeira imagem mental.

Nessa imagem mental, o telespectador tenta comparar a distância dos jogadores B e C, com relação à linha de fundo. Conforme o telespectador assiste ao mesmo lance, mais ele confirma que sua decisão está correta, apoiado na representação estática da Figura 2. Gutiérrez (1996), em seu diagrama de resolução de um problema de visualização espacial (Figura 1), mostra que - antes de encontrar uma resposta de uma tarefa - é necessário obter algumas imagens mentais e representações externas que vão aprimorando o resultado final.

Para isso as habilidades espaciais auxiliam no processo. Neste caso, as habilidades mais evidentes seriam percepção de relações espaciais (pois estamos comparando o corpo de dois jogadores) e percepção figura-fundo (pois estamos querendo analisar o posicionamento dos jogadores e a posição da câmera de jogo, e as linhas do campo de futebol nos induzem a uma resposta).

Neste momento, percebe-se que as imagens estáticas podem conduzir a conclusões equivocadas, pela restrição de propriedades que podem ser identificadas. A manipulação da imagem pode auxiliar no processo de construção de uma imagem mental adequada e a geometria dinâmica ajuda nesse processo. Se, no instante

em que foi parada a câmera, tivéssemos um recurso que girasse a câmera em pelo menos 180° no sentido horizontal, poucas pessoas ficariam com dúvidas sobre o lance, afinal seria possível observar o lance de outros pontos de vista, fornecendo elementos para criar o realismo necessário para apoiar a construção da imagem correta. Essencialmente, mesmo alguém com domínio das habilidades espaciais teria dúvida no lance, afinal sem manipular a imagem, pouco podemos afirmar sobre o lance. Assim, a resposta de alguém com domínio das habilidades espaciais seria, possivelmente, um “não sei”. Portanto, a utilização do software utilizado para construir as linhas na Figura 3 permite tirar uma conclusão sobre o acontecimento.

A partir do lance de futebol, pensamos em uma tarefa geométrica para ser discutida e explorada com estudantes, colocando em pauta o desenvolvimento de habilidades espaciais de cada um e a importância da geometria dinâmica para tirarmos conclusões que não são possíveis com uma imagem estática. A seguir apresentamos a atividade baseada no lance de futebol, realizada com alunos do 2º ano do Ensino Médio.

## 7. Em sala de aula

Apresentamos aqui uma atividade, recorte de um trabalho mais amplo de conclusão de curso (SIBEMBERG, 2020), que foi aplicada para sete alunos do 2º ano do Ensino Médio, cujo foco era estudar e desenvolver habilidades espaciais para a compreensão de projeção ortogonal e sua importância para a construção das linhas de impedimento no lance. Para realizar a atividade, os alunos que foram divididos em três duplas e um aluno que trabalhou individualmente. Os estudantes serão referenciados pela letra inicial de seus nomes.

A atividade iniciou com uma conversa sobre o lance polêmico: o pesquisador perguntou aos alunos se lembravam do lance e todos responderam que tinham conhecimento do

Você concorda com a decisão final de validar o gol? Por que? _____
Por que você acha que esse lance foi polêmico? _____

**Figura 6.** Perguntas iniciais da atividade. **Fonte:** Acervo pessoal

mesmo. Então o pesquisador pediu para que cada dupla respondesse às questões apresentadas na Figura 6. As respostas foram realizadas antes de qualquer tipo de discussão sobre o lance.

Analisando as respostas, verificamos que todos concordaram com a decisão final do VAR. Uma observação importante é que, como os sete alunos torcem para o time que teve o gol validado, os sete alunos, possivelmente, tendem a concordar com a decisão final do VAR. Sobre a explicação da razão do lance ter sido polêmico, o aluno P respondeu que o ângulo da câmera “deixa” o jogador em posição de impedimento (Figura 7). O pesquisador, ao observar essa resposta, perguntou à dupla:

Pesquisador: *Então a câmera deixou o jogador em posição de impedimento? É ela quem decide quem tá em posição de impedimento?*

P: *Não, assim não. O ângulo dela que faz o Jogador B parecer em impedimento.*

Pesquisador: *É uma questão de perspectiva né, só tem como o jogador tá ou não tá impedido, mas pra gente saber se tá ou não, tem que pegar o ângulo certo.*

Os estudantes G e D responderam que o lance é polêmico pois o Jogador B está à frente dos jogadores do time adversário (com exceção do goleiro) (Figura 8). O pesquisador observou a resposta da dupla e comentou “É exatamente isso! O problema todo é porque o Jogador B parece tá na frente, isso é polêmico. Mas por que que ele parece que tá na frente, se ele não tá?”. G respondeu “Por causa da câmera, por que a gente tá olhando pela câmera errada”. Essa discussão foi feita com os demais alunos e as respostas assemelham-se às supracitadas.

Após essa discussão, os sete alunos assistiram a um vídeo indicado na atividade (Figura 9). Neste vídeo, o chefe de arbitragem da CBF (Confederação Brasileira de Futebol) explica como é a construção

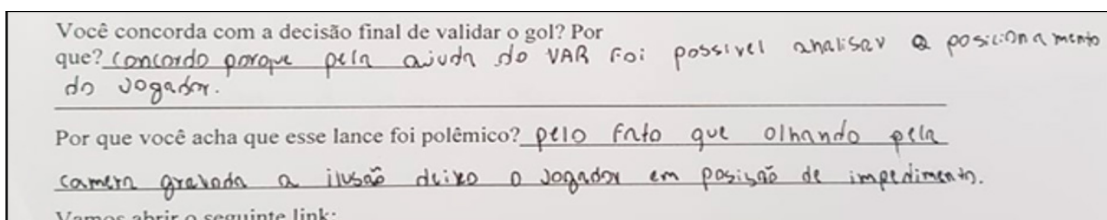


Figura 7. Resposta do aluno P. Fonte: Acervo pessoal

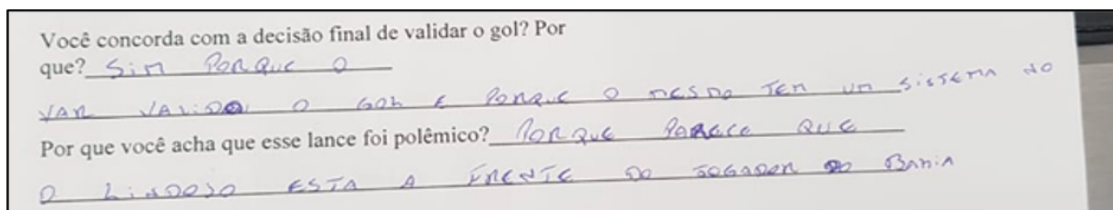


Figura 8. Respostas dos alunos G e D. Fonte: Acervo pessoal

da linha de impedimento pelo software utilizado pela CBF<sup>10</sup>. Ressaltamos que, em dado momento do vídeo, o chefe de arbitragem da CBF comenta que a construção linha de impedimento é realizada a partir de todas as câmeras que mostram ângulos diferentes do mesmo lance. O pesquisador comentou esse fato com os alunos, como mostra o extrato de diálogo abaixo.

Pesquisador: *O que foi fundamental ali? Pra que a linha tivesse certa?*

G: *Alguém com a mão boa, pra acertar* (referindo-se ao fato que uma mão humana encontra o melhor ponto para definir a posição do jogador).

Pesquisador: *Sim, isso sim, mas por que ele tem tanta precisão pra acertar o impedimento?*

G: *Por que ele é um cara treinado.*

Pesquisador: *Vocês não acham que olhar em várias*

*câmeras ajuda?*

D: *Sim, até por que ele pode marca uma coisa numa câmera e fica na outra* (referindo-se a quando é feita uma marcação em uma câmera, esta marcação fica presente em todas as outras câmeras).

Pesquisador: *Sim, daí a gente olha por vários ângulos diferentes.*

P: *Que nem a jogada do Inter. Foi polêmico porque já que a maioria que tava vendo pela tv tiveram uma conclusão, o ângulo muda muito* (referindo-se a jogada ilustrada na Figura 2).

Após assistir ao vídeo e discutir com os alunos sobre a situação, o pesquisador solicitou que todos os grupos abrissem um arquivo (Figura 10) de uma construção dinâmica realizada no GeoGebra. Neste arquivo, construído pelo pesquisador, há uma reconstrução da linha de impedimento no GeoGebra, em que os jogadores são substituídos por cilindros, o cilindro azul representa o defensor e o cilindro vermelho o atacante. Nessa construção,



Figura 9. Imagem do Vídeo em que o chefe de arbitragem da CBF explicando a construção da linha de impedimento.

Fonte: Acervo pessoal

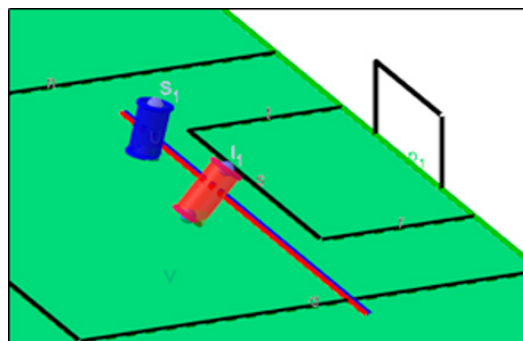
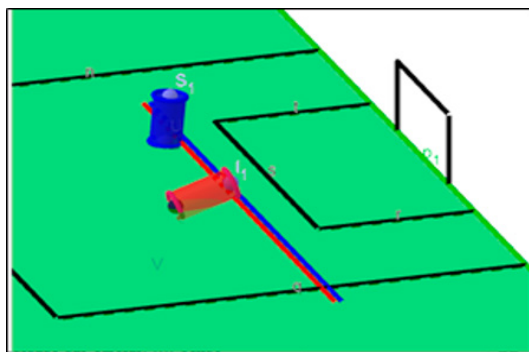


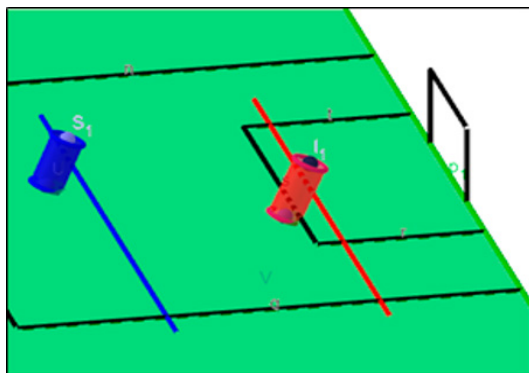
Figura 10. Representação da linha de impedimento no GeoGebra. Fonte: Acervo pessoal



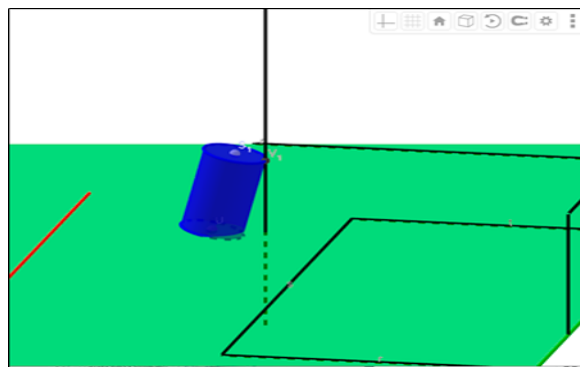
**Figura 11.** Demonstração de movimento de rotação de um dos cilindros. **Fonte:** Acervo pessoal

os alunos podem mover o ponto central da circunferência da base superior do cilindro, para alterar sua inclinação (Figura 11). No centro da circunferência da base inferior do cilindro há um ponto que, quando movimentado, move o cilindro para uma outra posição do campo (Figura 12). Observamos que qualquer movimento feito nos cilindros, representados nas Figura 11 e Figura 12, alteram dinamicamente a linha de impedimento do jogador.

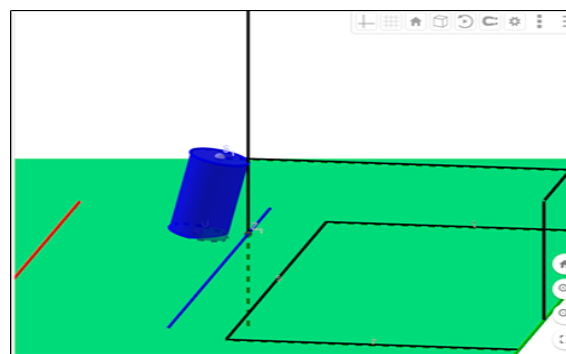
Os alunos exploraram a construção com o objetivo de responder à pergunta: “A projeção ortogonal é importante nessa situação?”. Na construção, há diversos objetos geométricos auxiliares ocultados, em que os alunos podiam, caso quisessem, fazê-los aparecer novamente para apoiar a exploração e análise que estavam realizando. Duas etapas importantes da construção estão ilustradas nas Figura 13 e Figura 14, que realçam as retas perpendiculares construídas para projetar o ponto  $V_1$  no solo, determinando o ponto  $Z_1$ , foram destacadas pelo pesquisador.



**Figura 12.** Demonstração de movimento de translação de um cilindros. **Fonte:** Acervo pessoal



**Figura 13.** Evidencia o ponto do cilindro mais próximo da linha de fundo. **Fonte:** Acervo pessoal



**Figura 14.** Evidencia a Projeção Ortogonal do ponto mais perto da linha de fundo. **Fonte:** Acervo pessoal

Sem mais intervenções do pesquisador, cada grupo respondeu à pergunta supracitada. Duas das quatro respostas podem ser conferidas nas Figura 15 e Figura 16. Os estudantes M e V responderam que “Ela (a projeção ortogonal) constrói a linha de impedimento”. Então o pesquisador buscou entender o que a dupla afirmou.

Pesquisador: *Então a projeção constrói a linha, não precisa mais nada?* (Insinuando que bastaria construir a projeção ortogonal do jogador que estaria tudo resolvido)

M: *Não sor, mas é que com a projeção a gente marca esse ponto aqui (ponto  $Z_1$  na Figura 14) e cria essa linha aqui (referindo-se a reta azul na Figura 14).*

Pesquisador: *Mas como tu cria essa linha?*

M: *Com o ponto.*

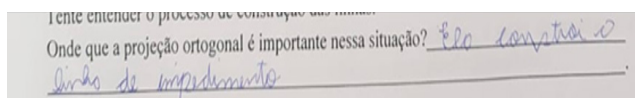
Pesquisador: *Tá, olha só, tu pegas e projetas e marca aquele ponto. Feito? Mas aqui (por esse ponto) pode passar várias retas né? Essa daqui que a gente criou (reta) é especial, não?*

M e V observaram a construção.

M: *Ata.*

Pesquisador: *Essa reta aqui é paralela a linha de fundo. Isso que ela tem de especial. E a projeção é*

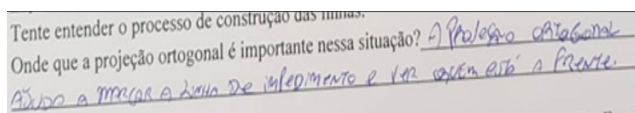




**Figura 15.** Resposta dos alunos M e V.. **Fonte:** Acervo pessoal

*importante, por que ela nos dá onde a gente cria essa linha.*

G e D comentaram com o pesquisador em tom de brincadeira que, na verdade, a projeção ortogonal “não servia para nada” para marcar a linha de impedindo. O pesquisador, então, respondeu (em bom humor) “Então faz o seguinte, a projeção não serve pra nada né? Exclui o ponto ali de baixo” (o ponto que representa a projeção ortogonal do ponto mais perto da linha de fundo do jogador). O aluno excluiu o ponto e, assim, a linha de impedimento também foi deletada. O pesquisador



**Figura 16.** Resposta dos alunos G e D. **Fonte:** Acervo pessoal

complementou “Agora faz a linha de novo, mas sem projetar o ponto”. G respondeu “Daí tu me complica, sor”. O pesquisador complementou “Mas é isso. Sem ela (projeção ortogonal) tu não marca a linha (de impedimento)”. Posteriormente, esses alunos responderam à pergunta deste exercício, que pode ser conferida na Figura 16.

Acreditamos que a geometria dinâmica ajudou os alunos no processo de entender e visualizar o lance de impedimento, pois com ela foi possível recriar a situação com alguma verossimilhança, dando um indício positivo para o questionamento feito ao fim do referencial teórico. Na construção, pode-se movimentar o cilindro como se este fosse um jogador de futebol movendo-se em campo, para frente, para trás, para os lados, cabeceando (inclinado), e, ao fazer qualquer movimento, a “linha de impedimento” do jogador (cilindro) movimenta-se junto. Assim, é possível visualizar como a projeção ortogonal do ponto mais próximo à linha de fundo do jogador se comporta, enquanto movimentamos o jogador. Esse movimento pode possibilitar estudantes a construírem imagens mentais dinâmicas que os ajudem desenvolver suas

habilidades de visualização, além de estimulá-los a refletir sobre suas conclusões frente à alguma afirmação em relação a uma imagem estática.

Dessa forma, essa atividade mostra que o lance de futebol pode estimular o pensamento geométrico espacial dos alunos, utilizando um dos esportes mais aleatórios: o futebol.

## 8. Considerações Finais

Nesse artigo abordamos um lance polêmico ocorrido no futebol brasileiro no ano de 2019 e procuramos mostrar o porquê desse lance ter dividido opiniões. Além disso explicamos a abordagem utilizada pelos árbitros da CBF (Confederação Brasileira de Futebol) para tirar uma conclusão no lance. Por fim, a partir do lance de futebol, foi realizada uma atividade sobre visualização espacial e projeção ortogonal com alunos do Ensino Médio, em que os alunos discutiram o lance polêmico e procuraram entender, com auxílio do software de geometria dinâmica GeoGebra 3D, o porquê da decisão final do árbitro.

Acreditamos que o lance foi polêmico, pois o ângulo que a câmera que captura a imagem estava em posição que sugere uma impressão de que a decisão final do VAR foi incorreta. Utilizando conceitos de projeção ortogonal, percebemos a teoria que está por trás das linhas que foram construídas na projeção do ponto mais próximo da linha de fundo de cada um dos jogadores mais próximo da linha de fundo e, assim, concluir porquê a decisão final estava correta.

É importante observar que, de forma alguma, estamos tecendo uma crítica àqueles que acreditam que o árbitro errou em sua decisão final, apenas utilizamos a matemática, mais especificamente a geometria euclidiana, para corroborar com a decisão final.

Uma atividade foi realizada com alunos de Ensino Médio, com o objetivo de discutir o lance de futebol na sala de aula e, além disso, descobrir por que a projeção ortogonal foi importante na resolução da situação de impedimento. Para isso os

alunos exploraram uma construção do GeoGebra 3D que lhes permitiu utilizar a dinamicidade proporcionada pelo software. Concluímos que o dinamismo do software ajudou os alunos no entendimento da polêmica da situação do futebol. No vídeo, ilustrado na Figura 9, o chefe de arbitragem explicou algumas ideias que foram discutidas nesse texto e, ao finalizar, ele afirmou: “Mágica? Não, tecnologia a serviço da arbitragem.” fazendo referência ao fato da tecnologia estar tornando o jogo de futebol mais justo, auxiliando o árbitro em lances polêmicos. Gostaríamos de complementar sua frase, finalizando este artigo: Mágica? Não! Matemática e tecnologia a serviço da arbitragem e do espectador de futebol.

## 9. Referências

- GLOBO ESPORTE. **Chefe de arbitragem da CBF divulga imagem e explica lance polêmico do VAR em Inter x Bahia**. Por SporTV.com, Porto Alegre, 2019. Disponível em: <https://sportv.globo.com/site/programas/redacao-sportv/noticia/chefe-de-arbitragem-da-cbf-divulga-imagem-e-explica-lance-polemico-do-var-em-inter-x-bahia.ghtml>. Acesso em: 28 mar. 2020.
- GUTIÉRREZ, A. **Children's ability for using different plane representations of space figures**, en Batturo, A.R. (ed.), *New directions in geometry education* (pp. 3342). Brisbane, Australia: Centre for Mathematics and Science Education, Q.U.T. Disponível em: <https://www.uv.es/angel.gutierrez/marcotex.html>. Acesso em 26 jun. 2019.
- GUTIÉRREZ, A. **Procesos y habilidades en visualización espacial**. In: Memorias del 3er Congreso Internacional sobre Investigación en Educ. Mat., Valencia, EspN. 1991. p. 44-59. Disponível em: <https://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/Gut92b.pdf>. Acesso em 26 jun. 2019
- GUTIÉRREZ, A. **The aspect of polyhedra as a factor influencing the students' ability for rotating them**, en Batturo, A.R. (ed.), *New directions in geometry education* (pp. 23-32). Brisbane, Australia: Centre for Mathematics and Science Education, Q.U.T. Disponível em: <https://www.uv.es/angel.gutierrez/marcotex.html>. Acesso em 26 jun. 2019.
- GUTIÉRREZ, A. **Visualization in 3-Dimensional Geometry: In Search of a Framework**. in L. Puig and A. Gutierrez (eds.) Proceedings of the 20th conference of the international group for the psychology of mathematics education (vol. 1, pp. 319). Valencia: Universidad de Valencia. 1996. Disponível em: <https://www.uv.es/angel.gutierrez/marcotex.html>. Acesso em 26 jun. 2019.
- HOELSCHER, R.P.; SPRINGER, C.H.; DOBROVOLNY, J.S. **Expressão Gráfica de Desenho Técnico**. Rio de Janeiro, RJ: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1978.
- LEMMERTZ A. S. **Visualização espacial via exploração de objetos tridimensionais**. 2019. Dissertação (Pós-Graduação em Ensino de Matemática). Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre.
- NOTARE M. R.; BASSO M. V. A. **Geometria Dinâmica 3D – novas perspectivas para o pensamento espacial**. Renote, V. 14 N° 2, dezembro, 2016. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/renote/article/view/70683>. Acesso em 26 jun. 2019.
- SANTOS, J. J. A.; MOITA, F. M. G. S. C. **Objetos de Aprendizagem e o Ensino de Matemática análise de sua importância na aprendizagem de conceitos de probabilidade**. 2016. Disponível em: [http://www.pucrs.br/ciencias/viali/tic\\_literatura/artigos/objetos/comunica13.pdf](http://www.pucrs.br/ciencias/viali/tic_literatura/artigos/objetos/comunica13.pdf). Acesso em 26 jun. 2019.
- SALLY, D.; ANDERSON, C. **The Numbers Game: Why Everything You Know about Soccer Is Wrong**. New York: Penguin Books. 2013.
- SIBEMBERG, L. S. **GeoGebra 3D no Ensino Médio: Uma possibilidade para a aprendizagem de projeção ortogonal**. 2019. Trabalho de Conclusão de Curso. Departamento de Matemática Pura e Aplicada. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. 2020.

