UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias

DOI: https://doi.org/10.14483/23464712.17817

GÓNDOLA
ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS CIENCIAS
Resultado de Investigación

VISUALIZAÇÃO DE FORMAS GEOMÉTRICAS ORNAMENTADAS EM ÁRVORES URBANAS

VISUALIZATION OF ORNAMENTED GEOMETRIC SHAPES IN URBAN TREES

VISUALIZACIÓN DE FORMAS GEOMÉTRICAS ORNAMENTADAS EN ÁRBOLES URBANOS

José Carlos Pinto Leivas[1*]

Leivas, J.C.P. (2022). Visualização de formas geométricas ornamentadas em árvores urbanas. *Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias*, *18*(1), pp. 8-22 DOI: [2]https://doi.org/10.14483/23464712.17817

Resumo

Neste artigo, apresenta-se uma pesquisa qualitativa, em um estudo de caso, que teve por objetivo analisar como participantes de uma oficina ministrada pelo autor, em um evento internacional, visualizam formas geométricas espaciais encontradas em árvores (ciprestes) ornamentadas à frente de moradias em uma cidade urbanizada no sul do Brasil, a partir de registros fotográficos do pesquisador. Participaram 29 sujeitos, os quais responderam a um formulário no *Google Forms*, no início dos trabalhos, como uma forma de motivá-los para a sequência das atividades. Foram propostas imagens que se assemelhavam a elipsoides, a paraboloides e a cones, para que os participantes respondessem se percebiam formas geométricas em tais objetos, que foram ornamentados pelo homem, dando-lhes formatos que o investigador percebeu envolver Geometria. Além disso, solicitava-se que apresentassem uma pequena justificativa para suas escolhas. Os resultados mostraram que os participantes, de diversos níveis de ensino superior e de variadas instituições, apresentaram grande dificuldade em perceber formas 3D, limitando-se, em maioria, a formas 2D. Além disso, as nomenclaturas empregadas nem sempre seguiram aquelas que são matematicamente empregadas, incluindo algumas que são inapropriadas. Conclui-se ser necessário desenvolver percepções e habilidades que proporcionem o desenvolvimento de pensamento geométrico.

Palavras-Chave: Habilidades imaginativas. Conhecimento geométrico. Representações em 2D e 3D. Ensino de Geometria..

Abstract

In this paper, we present qualitative research in case of study type, aiming to analyze how participants in a workshop taught by the author in an international event visualize spatial geometric shapes, over ornamented trees (cypresses) in front of housing in an urbanized city in southern Brazil, based on the researcher's photographic records. We had 29

[1] *Fecha recibido: abril de 2021. Fecha aceptado: agosto de 2022*

[*] Doutor em Educação (Matemática). Universidade Franciscana, Brasil. Email: leivasjc@gmail.com – ORCID https://orcid.org/0000-0001-6876-1461

2

participants, who filled a Google Forms at the beginning of the work as a strategy to motivate them to the activity. Images that resemble the ellipsoid, paraboloid, and cone were proposed for the participants to answer if they perceived geometric shapes in such objects that were ornamented by man, giving them formats that the researcher considers involve Geometry. In addition, they were asked to provide a short justification for their choices. Results show that the participants (who come from different levels of higher education and institutions) had difficulties perceiving 3D shapes, mainly being limited to 2D shapes. In addition, the terminologies used did not always follow those that are mathematically employed, including some that are inappropriate. We can conclude that it is necessary to develop perceptions and geometric thought skills.

Keywords: Imaginative abilities. Geometric knowledge. 2D and 3D representations. Geometric education.

Resumen

En este artículo, se presenta una investigación cualitativa, de tipo estudio de caso que tuvo como objetivo analizar cómo los participantes de un taller ofrecido por el autor en un evento internacional, visualizan formas geométricas espaciales encontradas en árboles ornamentales (cipreses) frente a viviendas en una ciudad urbanizada del sur de Brasil, a partir de los registros fotográficos del investigador. Participaron 29 sujetos, quienes respondieron a un formulario en *Google Forms*, al inicio del trabajo, como una forma de motivarlos para hacer las tareas. Se propusieron imágenes que se asemejan a elipsoides, paraboloides y conos, para que los participantes respondieran si percibían formas geométricas en tales objetos, que fueron ornamentados por el hombre, asignándoles formatos que el investigador considera que están involucrados con la Geometría. Además, se les pidió que dieran una pequeña justificación para sus elecciones. Los resultados mostraron que los participantes, de diferentes niveles de educación superior y de diferentes instituciones, tenían gran dificultad para percibir formas 3D, mostrándose mayormente limitados a formas 2D. Además, las nomenclaturas utilizadas no siempre siguen las que se emplean matemáticamente, incluyendo algunas que son inapropiadas. Se concluye que es necesario desarrollar percepciones y habilidades que faciliten el desarrollo del pensamiento geométrico.

Palabras-Clave: Habilidades imaginativas. Conocimientos geométricos. Representaciones 2D y 3D. Enseñanza de la Geometría.

1. Introdução

A Geometria tem se apresentado, ao longo dos séculos, como uma área do conhecimento que desperta o interesse tanto de investigadores quanto dos próprios utilitários, a fim de resolver situações concretas para o seu bem viver no dia-a-dia. Artistas, por exemplo, têm uma percepção visual e criativa muito interessante ao observarem o meio que os rodeia para produzir suas obras de arte. A título de ilustração, tem-se as obras de Escher, que exploram uma Geometria repleta de reflexões, simetrias etc. Nestas a criatividade e a imaginação desempenham o importante papel de despertar a habilidade visual e podem favorecer o ensino e a aprendizagem de Matemática, particularmente, de Geometria.

No início da história da humanidade, a Geometria servia para a medição de terras e, com Euclides, ela foi formalizada axiomaticamente por meio de definições, proposições e teoremas, permanecendo assim por muito tempo. No século XIX, criam-se as duas primeiras geometrias não euclidianas[3], o que gerou a denominada Crise dos Fundamentos. A Hiperbólica e a Elíptica serviram como ponto de partida para o surgimento de outras tantas: a Finita, a Sintética, a Topológica etc. Para medições ou deslocamentos, criou-se a Geometria do Táxi, caracterizada pela

[3] Segundo EVES (1969, p. 325), “Cualquier geometría cuya base postulacional contradiga algún postulado de la geometría euclidiana puede, con todo derecho, llamarse geometría no euclidiana”.

métrica dos catetos, o que corresponde, por exemplo, a medir os trajetos realizados por um táxi em uma cidade urbanizada. Geometricamente, em um sistema cartesiano ortogonal, esse trajeto corresponderia ao percurso realizado ao longo dos catetos de um triângulo retângulo, ligando o ponto de partida ao de chegada, e não pela hipotenusa como ocorre na euclidiana.

Dessa forma, não é possível, ainda, descobrir qual é a Geometria que descreve o mundo físico. Busca-se, aqui, envolver aspectos de medidas envolvidos na Geometria Analítica moderna de Descartes e Fermat. De acordo com EVES (1969), "há uma diferença fundamental entre os dois estudos, visto que o primeiro é um ramo da geometria, enquanto que o outro (ao menos em sua forma inicial) é um método geométrico" (p. 1, tradução própria).

No Brasil, os cursos de formação de professores, em geral, oferecem um semestre de Geometria Analítica (plana e espacial), priorizando os aspectos algébricos, como constatado na pesquisa de Leivas (2009) realizada em cursos de formação de professores de Matemática no Rio Grande do Sul. Atualmente, é viável realizar práticas pedagógicas nessa direção, utilizando o software de Geometria Dinâmica Geogebra, o qual, simultaneamente, envolve uma janela algébrica e outra geométrica. Por exemplo, dada a lei de formação $x^2 + y^2 = r^2$, com x e y variáveis e r constante, o estudante a assimila como representando um círculo. No entanto, sequer é questionado se o lugar geométrico está no espaço R^2 ou no R^3, tampouco diferencia essa sentença da $x^2 + y^2 < r^2$.

A experiência e pesquisas do autor do artigo tem mostrado que estudantes da escola básica, ao abordarem leis matemáticas, aprendem a diferenciar os sinais =, <, >, ≤, ≥ envolvidos em representações algébricas e resolução de problemas. Entretanto, tal diferenciação não parece ser levada em consideração ao serem abordados aspectos visuais/geométricos em representações figurais. Assim, modernamente, priorizando o ensino e a aprendizagem coerentes, entende-se que a diferenciação entre as leis deveria ser feita, no exemplo dado no parágrafo anterior, da seguinte forma: no R^2, a primeira tem por lugar geométrico uma circunferência, enquanto a segunda, um círculo sem sua fronteira (circunferência). Por sua vez, se for considerado o espaço R^3, embora a variável z não esteja explicita, isso significa que ela pode assumir qualquer valor real. Assim, a primeira lei teria por lugar geométrico uma superfície cilíndrica se desenvolvendo ao longo do eixo OZ, enquanto a segunda corresponderia ao sólido limitado pela superfície cilíndrica. Com isso, as grandezas e medidas envolvidas seriam de naturezas distintas, sendo, portanto, relevante para o ensino a discussão entre representações figurais e algébricas.

Entende-se que essas diferenciações necessitam estar presentes, principalmente, na formação de professores de Matemática, para que estes possam desenvolver, posteriormente, em suas práticas profissionais, um desenvolvimento de pensamento geométrico condizente em seus alunos. Considera-se, portanto, entender a Geometria Analítica não como uma disciplina que prioriza os aspectos algébricos, mas que os conecta aos geométricos. Nesse sentido, evoca-se FREUDENTHAL (1973), ao abordar que a Geometria "pode ser colocada como uma parte da Matemática, até certo ponto axiomaticamente organizada. Porém, ela só pode ser cheia de significados quando for explorada sua relação com o espaço experimentado e se prestar à matematização da realidade e à realização de descobertas" (p. 403, tradução independente).

A partir desses pressupostos, pode-se intuir a necessidade de realizar pesquisas envolvendo a maneira de visualizar formas geométricas percebidas ao andar por lugares diversos. Uma dessas pesquisas envolveu a percepção visual do autor em uma viagem do sul do Brasil aos Andes, na Argentina, na qual foram analisadas formas geométricas espaciais e sua relação com a Geometria, indicando possibilidades didáticas de incluí-las no ensino de curvas obtidas em arco de acesso à uma cidade (distinguindo as formas da parábola da catenária), até curvatura gaussiana nas cordilheiras (LEIVAS, 2020). Reporta-se, também, a pesquisa de COSTA, SUTIL, ALVES (2019), na qual os autores fazem uma investigação envolvendo atividades educacionais que abordam análise de paisagens sonoras, música e indústria cultural envolvendo futuros professores de Física. Para eles, "Apesar dos cenários urbanos perderem gradualmente a maioria das características primitivas, deve-se levar em consideração as outras espécies que convivem no mesmo ambiente" (p. 327). Chama atenção para a presente pesquisa a mudança do cenário urbano quanto à forma com que as árvores perdem sua forma original para se transformarem em ornamentos em jardins e calçadas no meio urbano de grandes cidades, pela ação do ser humano.

Nessa direção, justifica-se a importância de realizar uma pesquisa que tenha por objetivo: analisar como participantes de uma oficina, em um evento internacional, ministrada pelo autor, visualizam formas geométricas espaciais encontradas em árvores (ciprestes) ornamentadas à frente de moradias em uma cidade urbanizada no sul do Brasil, a partir de registros fotográficos do pesquisador. Para tal, apoiar-se-á sobre imaginação, criatividade e visualização, tema presente no *Working Group* (WG 6) - PME 43[4] (2019), o qual abordou '**imaginação e visualização**'. Como este grupo é um dos mais relevantes para a Educação Matemática atual, entende-se que pesquisas que busquem envolver/desenvolver tais habilidades são sempre importantes para o ensino de Geometria.

A partir dessas considerações preliminares e da justificativa, delineou-se a pesquisa que procurou responder ao questionamento: como participantes de uma oficina ministrada em um evento internacional exploraram imaginação e visualizavam formas geométricas espaciais em imagens fotografadas pelo pesquisador e encontradas em árvores ornamentadas pelo ser humano em um ambiente urbano?

2. Marco de Referência

A presente pesquisa centrou-se em três pilares: criatividade, imaginação e visualização. No que segue, traz-se algumas considerações a respeito de cada uma.

2.1. Criatividade. A pesquisa de HONG, O'NEIL, PENG (2016) tratou dos efeitos criativos produzidos por 303 estudantes chineses quanto à originalidade (criatividade) que utilizaram na realização de tarefas em casa, sem, contudo, envolver a fluência/flexibilidade nessa realização. Por sua vez, Rodríguez e Cortés (2020) indicam que a pesquisa de Sanchez y Ruiz foi embasada no conceito dado por Eysenck, que entende criatividade "como um estilo cognitivo, uma disposição a atuar de um modo determinado na esfera da cognição, motivada por uma tendência particular a relacionar-se com o entorno, no qual a amplitude das associações e o distanciamento afetivo do convencional são característicos" (p. 2). Ainda, o autor afirma que os conceitos que são anteriores e que se vinculam ao criativo e ao cognitivo indicam que, nem sempre, as pessoas com maior desenvolvimento cognitivo são aquelas com maior criatividade (EYSENCK, 1995, citado em SÁNCHEZ e RUIZ, 2013), p. 2, tradução independente). Por sua vez, no que diz respeito à criatividade matemática, CALLEJO (2003, citado por SÁNCHEZ e RUIZ, 2013), p. 27, tradução independente) indica que, na Matemática, ela "transita pelas fases: a preparação, a inspiração, a incubação e a verificação. Cada uma dessas fases foi enunciada a partir de um discurso de Henri Poincaré".

BOLDEN, HARRIES e NEWTON (2010, tradução independente) analisam a respeito da criatividade em crianças pequenas, promovida por professores no Reino Unido, e afirmam que tal habilidade está mais presente nas Artes do que na Matemática. A pesquisa, que teve o objetivo de explorar concepções dos professores que atuam nos níveis básicos, utilizou-se de questionários e entrevistas, o que permitiu concluir que, no início da formação, as concepções eram escassas em relação ao "ensinar criativamente", limitando-se ao uso de recursos e tecnologias. Com a aproximação de entrarem na escola, as limitações foram sendo reduzidas e os professores passaram a preparar-se para o "ensinar para a criatividade".

FISCHBEIN (1987) já afirmava que "cognição são essencialmente componentes estruturais de qualquer comportamento adaptável, referindo-se a aspectos de cognição tanto de representação quanto de criatividade" (p. 13, tradução independente). Isso demonstra que tal habilidade é importante de ser abordada na formação do professor de Matemática, a fim de proporcionar possibilidades de a empregar em sua atuação, especialmente no que diz respeito à área de Geometria, a qual fornece variedade de possibilidades.

2.2. Imaginação. Imaginação está intimamente ligada à criatividade e, como afirma TALL (1991),

> [...] criatividade está preocupada com a forma como as ideias sutis de investigação são construídas na mente humana e uma prova disso é a forma como essas ideias são ordenadas em um desenvolvimento lógico tanto para verificar sua natureza quanto para apresentá-las à

[4] *CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION- 2019.*

aprovação da comunidade matemática. (p. xiii, tradução independente).

O autor cita DREYFUS ao fazer considerações sobre o pensamento avançado, o qual propicia relação entre abstração e representação, especialmente no que diz respeito a processos de representações mentais, os quais se formam em quatro estágios, a saber: "usando uma única representação; usando mais que uma representação em paralelo; utilizando links entre representações paralelas e integrando representações e flexibilizando conexões entre elas" (Idem, p. 39).

Segundo JONES (1991), memorização e imaginação se relacionam intrinsecamente e correspondem a imagens mentais que são formadas a partir de experiências que são realizadas mentalmente para, então, serem memorizadas. Por sua vez, a coordenação visual-motora é indicada por DEL GRANDE (apud LINDQUIST e SCHULTE, 1994, p. 158) como uma daquelas aptidões de importância para o desenvolvimento do pensar geométrico. No Grupo de Trabalho em Geometria do PME, há questões interessantes que devem ser investigadas, tais como: "descobrir para que espécies de processo de raciocínio e em quais espécies de situações de aprendizagem, diagramas e/ou imaginação visual são particularmente úteis; descobrir quais os significados são eficientes para comunicação sobre, e pelo significado de diagramas e suas interpretações associadas" (DREYFUS, 1995, apud JONES, 1991, p. 122).

2.3. Visualização. Como indicado antes, as três habilidades: criatividade, imaginação e visualização caminham lado a lado. Retomando o PME, citado antes, encontra-se a criação de um Grupo de Trabalho específico para a abordagem do que se está tratando aqui. Nele, é indicado que, a partir da década de 90, a Geometria Dinâmica impulsionou pesquisas relacionadas ao tema, particularmente, como elemento propulsor na resolução de problemas, quer algébricos, quer geométricos. A esse respeito, SKEMP (1993) formulou que o símbolo visual, em qualquer situação, tem um vínculo maior com o conceito do que o verbal. A esse respeito, FISCHBEIN (1987) reafirma sobre a concepção de Matemática como atividade humana, preconizada por SKEMP (1993), na qual o raciocínio matemático pode ser desenvolvido, também, por meio de visualização.

Adotou-se, nesta investigação, a concepção de visualização formulada pelo autor do artigo (LEIVAS, 2009) como "um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos" (p. 122). Tal conceito é amparado por pesquisadores como PRESMEG (1986), ARCAVI (1999), GUZMÁN (1997) e COSTa (2000), para citar os mais clássicos.

3. Metodología de investigação

A pesquisa realizada é de caráter qualitativo, pois, segundo SEVERINO (2016), este tipo corresponde a um conjunto de metodologias envolvendo diferentes referências metodológicas. Além disso, ela também é experimental, uma vez que "toma o próprio objeto em sua concretude como fonte e o coloca em condições técnicas de observação em manipulação experimental nas bancadas e pranchetas de um laboratório, onde são criadas condições adequadas para seu tratamento" (p. 131). Por ter sido realizada em um minicurso em congresso internacional realizado em uma país de língua espanhola, quando o autor do artigo realizou atividades envolvendo Geometria no início de 2021, julgou por bem, para motivar o grupo, aplicar uma pesquisa por meio do *Google Forms*. Assim, a pesquisa foi realizada com um grupo específico, o que a caracteriza, também, como estudo de caso, segundo o mesmo autor: "o objeto/fonte é abordado em seu meio ambiente próprio. A coleta de dados é feita nas condições naturais em que os fenômenos ocorrem [...]" (p. 131). Os dados foram coletados por meio deste instrumento on-line (*Google Forms*), uma vez ser considerado o período de pandemia COVID-19, em que todo o processo ocorreu de forma remota.

Elaborar um questionário, como foi optado realizar por meio do Google Forms, pode ser estruturado envolvendo várias dimensões, como por exemplo, na pesquisa de AGUIAR BARRERA, GUTIÉRREZ PULIDO e GUTIÉRREZ GONZÁLEZ (2018), com itens envolvendo respostas simples, duplas e/ou com opiniões. Na realização da presente pesquisa, foram seis itens livres para apontarem o que visualizavam na imagem apresentada e uma justificativa. Assim, diferenciou-se, em termos quantitativos da pesquisa apresentadas pelos autores.

Foram sugeridas seis imagens, obtidas por fotografias realizadas pelo próprio pesquisador, das quais apenas três serão analisadas neste artigo (Figura 1), em decorrência da limitação de espaço e das análises serem amplas, uma vez que 29 participantes responderam ao formulário. Dessa forma, não caberia em um único artigo a análise de todas as respostas de todos.

Figura 1. Imagens fornecidas para a pesquisa.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Na introdução do formulário[5], foi explicado que a investigação tratava da visualização de formas geométricas em jardins e calçadas residenciais. Em seguida, pediu-se que os participantes escolhessem um pseudônimo, a fim de manter sua identidade preservada. Do total de 29, identificados doravante por P01, P02, ..., P29, apenas P18 escolheu algo diferente de alguma parte do seu nome e sobrenome, a saber, 'Geometria observável', muito apropriado para a situação.

A respeito das instituições que os participantes frequentavam, registrou-se um total de 18, sendo duas brasileiras e as demais colombianas. As instituições que apresentaram uma única incidência são: Alfonso Daza Aguirre; Colegio Nuestra Señora del Rosario Funza; CUR; Diego Montaña Cuellar; I E TULIO; Ipa; San José Circasia; Universidad Nacional de Colombia; Universidade Regional de Blumenau; Universidad del Magdalena; UAEM; Universidad Autónoma del Estado de Morelos; Universidad Nacional Abierta y a Distancia. Foram instituições com duas ou mais incidências: Universidad de Sucre Colombia (2); Universidad Surcolombiana (2); Universidad Antonio Nariño (4); Unillanos (4); Universidad Pedagogica y Tecnologica de Colombia (4).

Com relação ao nível de escolaridade, por exemplo, graduação, especialização, mestrado, doutorado etc, os dados coletados estão registrados no Quadro 1.

Os dados do Quadro 1 mostram que o maior número de participantes são mestres ou estudantes de mestrado, com 11 incidências, seguido de 4 de graduação e 4 graduados.

Para a análise e obtenção de resultados, utilizou-se o seguinte formato: apresenta-se a questão como formulada no *Google forms*; verifica-se se o participante visualiza ou não formas geométricas na imagem fornecida; categoriza-se aquelas cujas respostas foram 'sim' em dois grupos: a) objetos geométricos planos e b) objetos geométricos espaciais; analisa-se comparativamente as justificativas apresentadas para alguns casos; e, finalmente, apresenta-se uma fundamentação teórica, especialmente explorando Geometria Dinâmica, de modo a proporcionar ao professor ou futuro professor possibilidades de desenvolver visualização.

Quadro 1. Distribuição do grau de escolaridade dos participantes

Graduação ou Licenciatura em andamento	4
Licenciatura	4
Mestrado	11
Doutorado e Doutorado em Física Matemática	1 + 1-
Profissional Universitário	1
Estudiante de professorado	1
2º semestre licenciatura em Matemáticas +Licenciatura	1 + 1
Magistério	1
Especialização	1
Bacharelado	1
Universitário	1
Total	29

Fonte. Dados da pesquisa.

A partir dos pressupostos indicados neste item a respeito de pesquisa qualitativa, em que se analisa como indivíduos percebem formas geométricas naturais em seu entorno e ancorado em referências clássicas, embora um tanto quanto antigas, mas sempre pertinentes para a pesquisa em Educação Matemática, passa-se à análise de resultados encontrados.

4. Resultados e análisis

[5] Tanto o questionário quanto as respostas dos participantes foram escritas em Espanhol, porém, aqui, optou-se por apresentá-las em Português.

4.1. Primeira imagem. Esta primeira fotografia é de uma árvore (cipreste) encontrada em várias calçadas na região onde o pesquisador passou a visualizar/observar tais objetos naturais que o homem não mais os deixa crescer naturalmente. Ele os poda, buscando obter formas geométricas aproximadas de acordo com percepções próprias, provavelmente, sem formação geométrica acadêmica, mas com habilidade viso-espacial-geométrica própria ou inata. Nesse sentido, aproveitar o que ocorre ao redor dos indivíduos parece algo importante para desencadear o ensino de Geometria, particularmente de superfícies e sólidos, algo que na escola básica e, mesmo em cursos de formação de professores, reduz-se à aplicação de fórmulas.

Figura 2. Primeira imagem para visualizar.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Todos os 29 respondentes afirmaram Sim, ou seja, identificavam representações geométrica nessa imagem. Emergiram duas categorias, as quais são distribuídas no Quadro 2: objetos geométricos planos e objetos geométricos espaciais.

Quadro 2. Categorias relativas à imagem 1.

Objetos geométricos planos	Objetos geométricos espaciais
retângulo:10	oval ou ovoide[6]: 8
elipse: 7	esfera: 3
forma circular, Círculo ou circunferência: 5	uma intenção de elipsóide:1
quadrilátero: 2	elipses no espaço: 1
paralelogramo: 1	esfera cilindro: 1 esfera cilindro: 1
reta: 1	Esferoide: 1 esferoide: 1
	prismas: 1
Total = 26	Total = 16

Fonte. Dados da pesquisa.

Percebe-se algumas situações inusitadas nas respostas, uma vez que, sendo representações de objetos reais e concretos encontrados em um ambiente natural, isto é, ao ar livre, todas elas corresponderiam a objetos espaciais. No entanto, verifica-se que o número maior de incidências (26) é sobre objetos planos em relação aos espaciais (16). Isso demonstra alguma confusão no entendimento do que sejam conceitos de objetos espaciais e planos em representações figurais. Esse dado parece indicar certa tendência no ensino de Geometria, a saber, aquela que prioriza um enfoque em nomenclaturas de objetos planos em detrimento dos espaciais, pelo fato da Geometria Espacial ser focada na aplicação de fórmulas. Nos termos da teoria de SKEMP (1993), privilegia-se uma Compreensão Instrumental em detrimento de uma Compreensão Relacional, a qual vai na direção de uma compreensão conceitual.

A análise e o Quadro 2 permitem algumas situações que merecem um olhar apurado como, por exemplo, nas justificativas a seguir:

P06: *uma esfera porque se vê como um círculo no plano da foto*. Este participante, estudante de professorado, ao dar tal justificativa, parece ter clareza da diferenciação entre objeto e sua representação, além de ter um construto mental visual definido (LEIVAS, 2009). Para PIAGET e INHELDER (1993, p. 32), "O problema da passagem da percepção à representação espacial é, portanto, dupla e apoia-se simultaneamente no significante e no significado, isto é, na imagem e no pensamento".

P16: *Elipse no espaço.* Aqui, parece que o indivíduo, ao fazer sua justificativa, não distingue o conceito de elipse como sendo uma curva plana. O que ele deveria estar identificando é que se trata da representação de um elipsoide, ou seja, a superfície gerada pela rotação de uma elipse em torno de um eixo. Esse participante é estudante de graduação.

[6] Forma de um ovo. Dúbia a tradução, pois poderia se enquadrar como curva plana.

O estudante P19 (graduado) indica tratar-se de *'esfera cilindro'* o que, no entender do pesquisador, careceria de maior esclarecimento, pois não faz sentido na linguagem matemática.

P24: *esferoide.* Acredita-se que esteja querendo dizer que visualizou uma espécie aproximada de esfera ou superfície esférica, o que está correto no entender deste professor universitário.

A denominação de oval/ovoide (forma de ovo) foi a maior na categoria espacial, com 8 incidências. Não é muito clara, na medida em que, também pode ser indicada para figuras planas. Acredita-se que essa denominação quisesse identificar o elipsoide, sem, contudo, produzir a nomenclatura correta. Por não haver possibilidade de uma entrevista para ratificar tal interpretação, registra-se que esse é o entendimento do pesquisador.

O maior indicativo, na categoria figuras geométrica planas, foi sobre a visualização de retângulo (10), e indica-se algumas justificativas merecedoras de destaque como, por exemplo:

> P01*: Retângulo, onde está plantada a árvore, [...] ao fundo tem alguns retângulos que são os prédios*. Percebe-se que a imagem central, ou seja, a árvore em si, não foi visualizada como uma figura espacial, mas como uma sombra que o indivíduo identifica sendo um retângulo. \Ou seja, a participante não atenta que se trata de espaço deixado para aterramento. Tall (1991) indica que a imaginação está intimamente ligada à criatividade, porém, neste caso o indivíduo não a utiliza para expressar o significado do que fora solicitado, isto é, a imagem representativa da árvore.

O retângulo também é descrito assim:

P02: *retângulo é o caminhozinho das folhas ao redor da árvore*, o que não procede, pois, neste caso, as folhas estariam perfeitamente ornamentadas em forma de uma região retangular. Aqui, há um conflito cognitivo existente entre estudantes em diversos níveis de escolaridade, que é não diferenciar polígono de região poligonal, pois, no caso, seria uma região retangular, não um retângulo.

Conclui-se existir dificuldades de visualização de figuras geométricas espaciais, especialmente por haver sete citações de elipses e apenas três de esferas. A hipótese inicial do pesquisador, ao propor a imagem, era de que os participantes poderiam confundir o conceito de elipsoide com o de esfera. No entanto, a maior concentração foi em conceitos geométricos planos. A justificativa de P04 chamou atenção pela generalização de visualizações obtidas: *Identifico formas 3D e formas 2D: segmentos, quadriláteros, prismas e ovoide*.

No que segue, apresenta-se uma fundamentação teórica que tem por objetivo ancorar o que foi analisado sobre a imagem com base matemática sobre o tema. Dessa maneira, entende-se que isso poderá auxiliar o leitor/professor no caso de vir a trabalhar em sua sala de aula com o conteúdo. Nesse sentido, explora-se, com o uso do Geogebra, o dito por ARCAVI (1999):

> visualização é a habilidade, o processo e o produto de criação, interpretação, uso e comentário sobre figuras, imagens, diagramas, em nossas mentes, em papel ou com ferramentas tecnológicas, com a finalidade de desenhar e comunicar informações, pensar sobre e desenvolver ideias não conhecidas e avançar na compreensão (p. 217).

É comum pessoas, por vezes, afirmarem que uma imagem como essa representa uma bola ou uma circunferência e, raramente, uma esfera ou superfície esférica. Dessa forma, a fim de fazer a verificação, a imagem foi levada ao Geogebra (Figura 3).

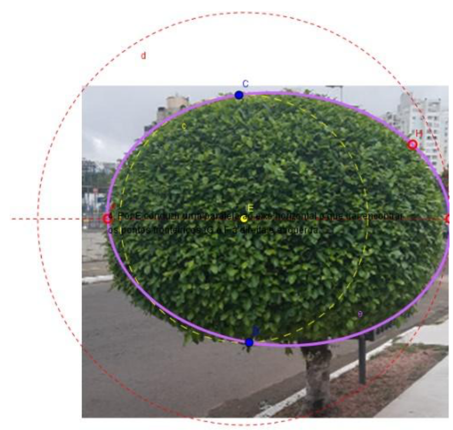


Figura 3. Imagem fotografada incluída no Geogebra.

Fonte: Construída pelo pesquisador.

Ao incluir a imagem, o pesquisador elaborou uma sequência de comandos, os quais são os que seguem:

1. Inserir a imagem no Geogebra, buscando centralizá-la, aproximadamente, no centro do sistema cartesiano;

2. Localizar o ponto mais alto da imagem, no eixo vertical (C), e o mais baixo (D), obtendo seu ponto médio (E);

3. Buscar a circunferência que tem centro em E, passe por um dos pontos C ou D, verificando que a mesma não alcança pontos da fronteira do lugar geométrico (tracejado em amarelo);

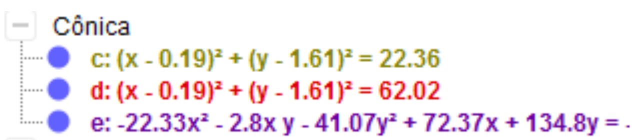
4. Por E, conduzir uma paralela ao eixo horizontal, determinando os pontos fronteiriços extremos (F e G) à esquerda e à direita, respectivamente;

5. Obter a circunferência que tem centro E, passa por G, verificando que ela vai além da imagem (tracejada em vermelho);

6. Buscar a equação de uma cônica que passa por cinco pontos, no caso, C, D, G, F e H (ferramenta do Geogebra);

7. A fronteira da imagem fotografada, portanto, assemelha-se a uma elipse, não a uma circunferência.

A janela de álgebra fornece as três equações obtidas, sendo a primeira a da circunferência em amarelo, a segunda em vermelho e a terceira a finalização em lilás:



,

Conclui-se interpretando o sólido não como uma esfera, mas como um ELIPSOIDE.

Mas o que é um elipsoide? Com essa imagem e estudo realizado, pode-se partir para o estudo de superfícies de revolução, por exemplo, em disciplinas de Geometria Analítica.

A superfície gerada pela rotação de uma elipse em torno de um qualquer de seus eixos é denominada elipsoide de revolução. Pode, também, ser considerada como uma das superfícies quádricas, ou seja, aquelas de equação reduzida, por exemplo, as centradas:

$$\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=1.$$

No caso, o elipsoide é a quádrica em que todos os coeficientes são positivos. Essa superfície pode ser obtida a partir da rotação de uma elipse (quádrica cêntrica). No caso de serem todos negativos, não há lugar geométrico real. A Figura 4, obtida no Geogebra, partiu da introdução na Janela de Entrada do software da lei

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\pm\frac{z^2}{16}=1.$$

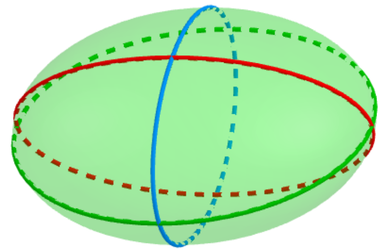


Figura 4. Elipsoide centrado na origem.

Fonte: Construção no Geogebra.

Posteriormente, foram feitas intersecções da superfície com os planos coordenados, obtendo-se as três cônicas (elipses) em cada plano. Retoma-se o que KLEIN (1927), na obra "Matemática Elementar do Ponto de Vista Superior", discute sobre as transformações afins, bem como as interrelações que se pode estabelecer, para o ensino de Matemática atual, entre conceitos como: sistemas lineares, matrizes e determinares, vetores etc. Esses tópicos são importantes, atualmente, para dar significados aos componentes curriculares, os quais são, na maioria das vezes, tratados de forma isolada. Cita o autor que o nome "transformação afim" já fora citado por Möebius e Euler "[...] com as quais essas transformações são designadas, significando que nelas a cada ponto do infinito corresponde outro também do infinito, como se, de certa forma, os limites do espaço fossem preservados" [7] (p. 93, tradução livre).

Na direção apontada, as superfícies correspondentes à esférica devem ser todas do segundo grau, como essa. Em virtude de todos os pontos da superfície esférica serem próprios, o mesmo deve ocorrer com a superfície homóloga a ela, ou seja, uma superfície em forma elipsoidal. Na sequência, faz-se um estudo análogo ao apresentado aqui para a segunda imagem investigada.

4.2. Segunda imagem. Da mesma maneira que na realizada anteriormente, seguindo os mesmos procedimentos, foi indicada a imagem constante da Figura 5.

[7] "[...] con el que estas transformaciones se designan, quiere decir que en ellas a todo punto del infinito le corresponde otro también del infinito, como si em cierto modo se conservasen los limites del espacio"

Figura 5. Imagem disponibilizada no *Google Forms*.

Fonte: Construção no Geogebra.

Um total de 28 indivíduos afirmaram perceber uma forma geométrica e apenas um disse não, a saber, um participante graduado (P26): *não vejo figuras geométricas*. Emergiram, como antes, as duas categorias, conforme foram distribuídas no Quadro 3: objetos geométricos planos e objetos geométricos espaciais.

Quadro 3. Categorias relativas à imagem 2.

Objetos geométricos planos	Objetos geométricos espaciais
forma parabólica ou parábola: 7	cone e tronco de cone: 3
retângulo, forma retangular, quadrada, quadriculadas: 3	paraboloide: 3
cônica: 2	esfera e semiesfera e oval: 3
trapézio: 1	hiperboloide de uma folha: 1
forma parabólica invertida: 1	domo (cúpula): 1
parábola se está no plano: 1	pirâmide: 1
triângulo: 1	prisma: 1
	sólido de revolução: 1
Total = 16	Total = 14

Fonte. Dados da pesquisa

Ainda, prevaleceu nesta segunda imagem, a prioridade de visualização de formas 2D, porém se tornaram mais próximas das 3D. Algumas questões são importantes destacar nas justificativas apresentadas, como segue. Há uma maior aproximação do conceito desejado (paraboloide), com três incidências, assim como uma resposta abordando o hiperboloide, que se encaixa entre as quádricas.

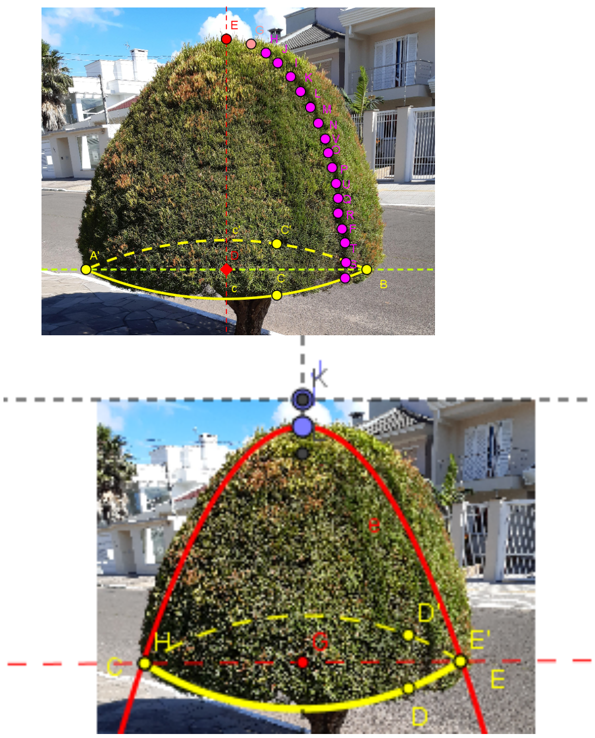
P10: *Observo o mesmo que na imagem 1, salvo que o que havia visto como ovoide já não o é. É um objeto 3D, não recordo o nome*. O participante, em nível de doutorado, havia justificado que a Imagem 1 se tratava de elipse.

Os retângulos, quadrados etc. foram observados nas fachadas das construções que não se encontravam no primeiro plano da imagem. No início da investigação, colocou-se: "[...] visualização de formas geométricas em jardins e calçadas residenciais".

P15: *Parábolas, é como se a parte superior estivesse formada por várias parábolas no espaço (em diferentes planos*. O construto mental deste participante está bem estruturado no que diz respeito a figuras geométricas no espaço. Destaca-se que este é um estudante de graduação, o que o caracteriza com um bom nível de conhecimento geométrico. Entende-se que o participante expressa sua criatividade no sentido apontado por TALL (1991), ou seja, apresenta uma forma de como sua ideia é ordenada de forma lógica para verificar tanto a natureza quanto a representação do objeto.

P20: *um paraboloide, pois o contorno se vê como uma parábola no plano* de visualização. Aqui, o participante percebe a superfície obtida e não o sólido. Isso é importante na formação de pensamento geométrico, o que vai ao encontro do que CALLEJO (2003) indica, isto é, na Matemática, a criatividade transita entre a preparação, a inspiração e a incubação para realizar a verificação.

Da mesma maneira que foi feito para o tratamento formal do que se esperava ser visualizado na Figura 5, partiu-se para um tratamento analítico a respeito da percepção do geômetra ao visualizar o *Bruxus Sempervirens* (nome científico do cipreste). Inicialmente, o pesquisador colocou a imagem capturada no Geogebra (Figura 6a). Poderia um observador desatento, ou um não geômetra, afirmar tratar-se, também, de um elipsoide, porém este não é o sólido representado, aproximadamente, conforme se observará a seguir. Assim, a imagem foi inserida no Geogebra, em seguida, foram demarcados dois pontos extremos no limite inferior, A à esquerda e B à direita, conduzindo uma reta horizontal pelos dois. Determinou-se o ponto médio do segmento AB, o qual se imaginou corresponder ao centro de uma circunferência passando por A e B, que corresponderia à base do objeto espacial modelado do ambiente natural. Escolheu-se um ponto C, também na borda inferior, e imaginou-se haver um arco de circunferência passando por esses três pontos, o que, de fato, foi obtido no software. Explorou-se a ferramenta Reflexão em Torno de uma Reta (simetria axial) do Geogebra e delineou-se a semicircunferência que estaria na parte de trás do sólido (tracejado em amarelo). Pelo centro dessa circunferência, traçou-se uma reta vertical (tracejada em vermelho), perpendicular ao plano da circunferência e passando pelo seu centro.



Figuras 6. Demarcando elementos geométricos no sólido.

(a) Circunferência da base e pontos da superfície. (b) aproximação da parábola

Fonte: Construção no Geogebra.

Ainda, na Figura 6a, percebem-se marcas escuras no lado direito da superfície do sólido. Portanto, foram assinalados pontos seguindo uma dessas marcas. A partir da reta vertical, ao que tudo indica representar um eixo do sólido de revolução, localizou-se o ponto mais alto em que a superfície o encontra (E, na esquerda), o qual, juntamente com H e E' (na direita), parecem indicar a presença de uma parábola (aproximada, em vermelho). É possível, pois, intuir que essa parábola pode ser rotacionada em torno do eixo k, gerando uma superfície de revolução. Uma superfície como esta se encontra entre as denominadas superfícies quádricas centradas e, diferentemente da anterior, que tinha todos os coeficientes positivos, essa tem dois positivos e um negativo. Assim, constitui-se o **paraboloide**.

Uma superfície de revolução é aquela gerada pela rotação de uma curva plana dada, em torno de uma reta fixa. A curva é chamada de geratriz e a reta, de eixo de revolução. Portanto, há de considerar-se, nas imagens capturadas, que o analisado se refere à superfície dos sólidos, uma vez que os objetos físicos não são ocos, mas ocupados, quase que totalmente, com pequenos espaços entre ramos e folhas, o que já proporciona discussões teóricas para a sala de aula. Por isso, o jardineiro que faz a modelação somente na superfície.

Entende-se que, embora não sejam construções exatas, matematicamente, elas podem ser úteis para incentivar o estudo das superfícies quádricas o que, no entender do autor, vai se constituindo no que tem designado Geometria como uma didática, alinhando-se ao já indicado por FREUDENTHAL (1973) sobre o termo.

A Geometria Analítica das superfícies de revolução identifica as curvas que podem gerá-las como geratrizes (no caso a representada pelos pontilhados em roxo). O eixo de revolução ou eixo da superfície é aquela reta fixa em torno da qual a curva faz rotação (no caso a reta vertical tracejada em vermelho, passando pelo ponto C e perpendicular à reta horizontal tracejada em amarelo, por A e B). Uma posição qualquer ocupada pela geratriz, ao fazer a rotação, é denominada de meridiano da superfície e corresponde à intersecção dessa com um plano (no caso poderia ser a mesma demarcada por pontos). Finalizando, qualquer secção da superfície, obtida por um plano perpendicular ao eixo é denominada paralelo (no caso a circunferência em amarelo) .É possível, desta forma, explorar a Geometria Dinâmica aliada à Álgebra fornecendo subsídios para uma aprendizagem geométrico-analítica consistente, particularmente pelo tema em apreço estar um tanto quanto abandonado na formação de professores que ensinam Matemática.

4.3. Terceira imagem. Seguindo o que foi feito nos dois subitens anteriores, segue-se o tratamento da terceira imagem investigada. Pergunta-se, de início, se os participantes visualizam alguma forma geométrica na Figura 7.

Figuras 7. Imagem apresentada no Google Forms.

Fonte: Dados da pesquisa.

Novamente, responderam a esta terceira questão os 29 indivíduos, sendo que, desta feita, 02 indicaram não visualizarem nenhuma forma geométrica, a saber, P19 e P24, sendo o primeiro estudante de bacharelado, o qual já havia dito no item anterior não ter visualizado nenhuma, porém justificara lá sendo um oval. O segundo é um profissional universitário, de acordo com o qual *não há imagem geométrica*.

Havia a hipótese preliminar do investigador de que os participantes reconheceriam a forma geométrica cônica aproximadamente. Analisando-se as justificativas apresentadas, constata-se, novamente, as duas categorias constantes do Quadro 4.

Quadro 4. Categorias de objetos planos e espaciais.

Objetos geométricos planos	Objetos geométricos espaciais
triângulo ou forma triangular: 8	cone ou forma cônica: 14
retângulos: 2	pirâmide ou forma de pirâmide: 2
Total = 10	Total = 16

Fonte. Dados da pesquisa.

Percebeu-se que, nesta imagem, houve uma redução na diversificação de identificações, tanto as envolvendo formas planas quanto as espaciais, sendo duas diferentes em cada. Também, o número das espaciais passou a ser maior do que das planas.

Destaca-se uma justificativa bastante inusitada, a saber,

P09: *função valor absoluto se é no plano, invertida*. Teria sido importante haver entrevistas para averiguar o pensamento do indivíduo para sua resposta.

Por sua vez, P14, além de indicar um triângulo (árvore), também visualiza linhas paralelas no telhado. Esse participante deixou de focar na árvore para buscar outras formas, o que não constava no enunciado. Retoma-se o dito por FISCHBEIN (1987) a respeito da cognição como sendo um componente estrutural necessário a qualquer comportamento adaptável, quando se referiu a aspectos de cognição tanto de representação quanto de criatividade.

Assim, das respostas analisadas, percebe-se estar havendo uma forma mais condizente com as imagens que o investigador 'visualiza' ao perceber imagens geométricas quando seu olhar se volta às árvores durante suas caminhadas, talvez porque o cone se diferencie bastante das imagens anteriores e não permita dualidade de interpretação.

No que segue, sugere-se possibilidade de obter modelagem aproximada da superfície cônica no Geogebra, de modo a proporcionar uma forma de ensinar o tema, partindo-se de situação real. Em uma primeira olhada no ambiente, o pesquisador logo identificou, entre as três árvores, uma central, que o levou a visualizar um cone.

O geômetra visualizador/imaginativo/criativo imaginou o uso das imagens para o ensino de superfícies e, mais especificamente, da superfície cônica. De posse das duas imagens, verificou que a primeira apresentava um ponto extremo superior, enquanto a segunda continha uma bifurcação.

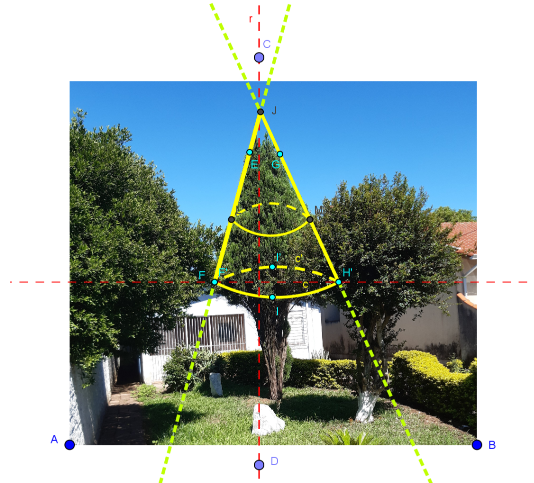
Na Figura 7a, consta o *cipreste* isolado em uma das residências. Posteriormente, identifica-se na Figura 7b, o cipreste este entre diversas outras árvores.

Figuras 7. Imagens dos ciprestes cônicos.

a) Cipreste isolado b) cipreste no conjunto de árvores

Fonte: Dados da pesquisa.

Tomou, assim, a primeira e a levou ao software Geogebra (Figura 8), lembrando ser essencial tê-la no arquivo e utilizar a ferramenta "Inserir imagem de Arquivo", o que foi feito trazendo-a aos pontos A e B, de modo que ficasse na horizontal. Em seguida, tentou centralizá-la com o eixo vertical OY. Para isso, marcou os pontos C e D e uma reta coincidente com tal eixo. A imaginação é um processo que corresponde à memorização e à imaginação, relacionando-se intrinsecamente a imagens mentais formadas a partir de experiências concebidas mentalmente, para, então, serem representadas ou formalizadas, segundo JONES (1991).

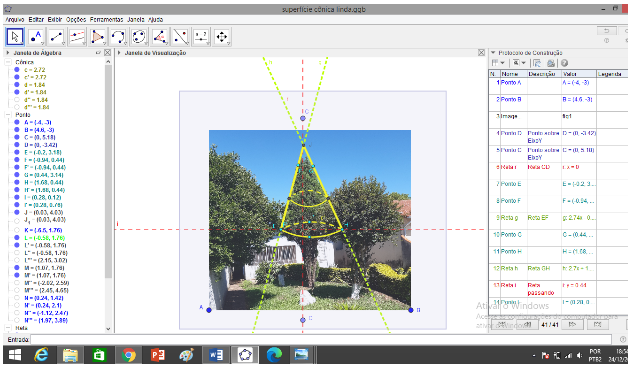


Figuras 8. Explorando o cipreste cônico.

Fonte: Dados da pesquisa.

Analisando a Figura 8, na fronteira da esquerda, foram demarcados os pontos E e F e, por eles, a reta (tracejada em amarelo). Na fronteira da direita, marcou-se os pontos G, H e a reta que os contêm. Um ajuste visual quanto à localização dos pontos F e H faz com que os mesmos se posicionem na parte mais inferior dessas duas fronteiras. Por esses dois pontos, obteve-se uma reta horizontal, determinando o segmento FH, que pode vir a o diâmetro da circunferência que contorna a imagem (ser aproximadamente, a base da superfície cônica). Visualmente, escolhe-se um ponto I dessa fronteira inferior e usa-se a ferramenta "arco definido por três pontos", determinando-se o mesmo. Em seguida, explora-se a ferramenta "reflexão em torno de uma reta", obtendo-se o seu simétrico, o qual se encontra tracejado por estar representando a parte de trás do cipreste.

Na sequência, usa-se a ferramenta "reta paralela" e "reflexão sobre uma reta", repetindo-se o processo para obter uma segunda circunferência, paralela à primeira, ou seja, a intersecção da superfície por um plano paralelo ao plano da base, produzindo o que se chama de paralelos em uma superfície de revolução. No que segue, faz-se um registro (Figura 9) da Janela de Álgebra com parte dos comandos, bem como o protocolo de construção.



Figuras 9. Janela de Álgebra e Protocolo de Construção.

Fonte: Construção do pesquisador.

Como feito anteriormente, após a análise das respostas dos participantes e a sugestão de utilização do Geogebra para certa confirmação sobre a superfície indicada se aproximar de uma forma 3D, buscou-se aspectos matemáticos sobre superfícies cônicas. De acordo com ANTON e BUSBY (2006, p. 474), "as formas quadráticas de R^3 surgem no estudo dos objetos geométricos denominados **superfícies quádricas** ou, simplesmente, **quádricas**" (grifo do próprio autor). Tais superfícies são identificadas algebricamente pela lei:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + g=0,$$

onde os coeficientes a, b, c não são simultaneamente nulos. No caso em que o sinal = é trocado por <, >, ≤ ou ≥, tem-se o interior ou exterior do sólido limitado pela superfície cônica, na presente situação, um cone. Aqui é ilustrada mais uma possibilidade de uso deste tipo de recurso para o ensino de elementos, por exemplo, de Álgebra Linear o que, geralmente, é feito sem exploração de aspectos geométricos, priorizando os algébricos.

5. Conclusões e/ou considerações finais

A pesquisa aqui apresentada teve por objetivo: analisar como participantes de uma oficina ministrada pelo autor em um evento internacional visualizam formas geométricas espaciais encontradas em árvores (ciprestes) ornamentadas à frente de moradias em uma cidade urbanizada no sul do Brasil, a partir de registros fotográficos do pesquisador.

A fim de verificar o cumprimento de tal objetivo apoiou-se em imaginação, criatividade e visualização, temas já consagrados no âmbito da Educação Matemática, mas que ainda carecem de estudos atuais, especialmente no que diz respeito ao ensino superior, na formação de professores de Matemática para a escola básica. Nesse sentido, a realização de uma pesquisa em um evento internacional, além do país de origem do autor, pode proporcionar uma visão ampla da forma como a população-alvo investigada tem percepção visual e a conecta com a realidade, dando ao pesquisador um novo horizonte de pesquisa, uma vez que o estudo envolveu 29 indivíduos de 18 instituições, na maioria colombianas.

Foram aplicadas seis imagens de árvores (ciprestes), fotografadas pelo pesquisador no seu andar pelo meio urbano de uma cidade do sul do Brasil, nas quais visualizou formas geométricas 3D aproximadas a superfícies e/ou sólidos como elipsoide, paraboloide, cone, prismas, esferas e até o toro. Neste artigo, foram apresentadas e analisadas três dessas imagens, considerando-se possibilidades de explorar os aspectos visuais por meio do software Geogebra.

Os resultados da pesquisa mostraram que participantes de diversos graus de ensino, desde a graduação ao doutorado, assim como em exercício profissional, tiveram dificuldades em perceber as representações dos objetos em 3D, centrando-se, particularmente, em formas 2D. Além disso, os dados indicaram a imaginação como algo ainda não muito aflorado nesses indivíduos, da mesma forma que a criatividade em termos de perceberem Geometria no seu dia-a-dia não o é. Pode-se também concluir que a variação de formas planas, indicadas na primeira imagem (similar ao elipsoide), foram amplamente superiores às espaciais 24 x 16). Já na segunda imagem, houve um equilíbrio maior (16 x 14) e, por fim, na terceira, as representações espaciais visualizadas superaram as planas (10 x 16). Como não é possível realizar entrevistas com os participantes para dirimir dúvidas, pode-se intuir que a atenção dos indivíduos esteve concentrada no processo imaginativo, principalmente no momento em que começaram a associar mais as imagens com os elementos geométricos estudados nas disciplinas de Geometria e, principalmente, na de Geometria Analítica.

Conclui-se que habilidades criativas e imaginativas associadas à visualização urgem ser introduzidas no processo de ensino de professores que irão atuar na escola básica e, até mesmo, no ensino superior. Pode ser que, dessa forma, as representações geométricas e as algébricas caminhem juntas em um processo que tende a desenvolver o pensamento geométrico. Em outro artigo, pretende-se fazer um estudo análogo com as outras três imagens, bem como aplicar em um grupo de nacionalidade brasileira e, posteriormente, estabelecer correlações. Acredita-se que explorações desta natureza, envolvendo o que se encontra ao redor do indivíduo, são relevantes para um novo fazer matemático/geométrico no que diz respeito ao ensino.

8. Referências

AGUIAR BARRERA, M. E.; GUTIÉRREZ PULIDO, H. y GUTIÉRREZ GONZÁLEZ, P.. Diseño y aplicación de un cuestionario sobre la práctica docente del profesorado de matemáticas en ingeniería y ciencias. **Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias** 13(1), 33-54. doi: http://doi.org/10.14483/23464712.11732. 2018

ANTON, H. **Cálculo: um novo horizonte**. 6 ed. v1, v2. Porto Alegre: Bookman. 2000.

ARCAVI. A. The role of visual representation in the learning of mathematics. **Proceedings...** In: NORTH AMERICAN CHAPTER OF THE PME, 1999. Disponível em: <http://www.clab.edc.uoc.gr/aestit/4th/PDF/26.pdf>. Acesso em: 30 jan. 2021. 1999.

BOLDEN, D.S.; HARRIES, A.V.; NEWTON, D.P. Pre-service primary teachers 'conceptions of creativity in mathematics'. **Educational studies in mathematics**., 73 (2). pp. 143-157. 2010.

COSTA, C. **Visualização, veículo para a educação em geometria**. Disponível em: <httpwww.spce.org.ptsemCC.pdf.pdf>. Acesso em: 12 fev. 2021. 2000.

COSTA, J.O., Sutil, N. y Pereira Alves, J.A. Paisagens sonoras, música e indústria cultural: problematização na formação inicial de professores de física. **Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias**,14(2), 322-339. DOI: http://doi.org/10.14483/23464712.13852. 2019.

DEL GRANDE, J. Percepção espacial e geometria primária. In: LINDQUIST, M.M.; SHULTE, A.P. **Aprendendo e Ensinando Geometria**. São Paulo: Atual, pp. 156-167. 1994.

EVES, H. **Estudio de las geometrias** Tomo I. Traduzido por: SIPERSTEIN, S. B. de. UTHEMA, México. 1969.

FISCHBEIN, E. **Intuition in science and mathematics**: an educational approach. London: Mathematics Education Library. 1987.

FREUDENTHAL, H. **Revisiting mathematics education**. China Lectures. Mahematics Education Library. London: Kluwer Academic Publischer. 1973.

GUZMÁN, M. **El rincón de la pizarra, ensayos de visualização en análisis matemática: elementos básicos del análise**. Madrid: Pirámide. 1997.

HONG, E., O'Neil, H. F., PENG, Yun . Effects of Explicit Instructions, Metacognition, and Motivation on Creative Performance, Creativity. **Research Journal**, 28:1, 33-45, Disponível em <http://dx.doi.org/10.1080/10400419.2016.1125252>. Acesso em 11 mar. 2021. 2016.

JONES, K. **Spatial thinking and visualization**. In: Thinking and Learning geometry. The Royal Society. English translation published by NCTM, 1991. Disponível em: <http://eprints.soton.ac.uk>. Acesso em: 10 fev. 2021. 1991.

KLEIN, F. **Matemática desde un punto de vista superior**. Madrid: [s.n]. v1 e 2. 1927.

LEIVAS J.C.P. (2009). **Imaginação, intuição e visualização: a riqueza de possibilidades de abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática**. –Curitiba, 2009, 294 f.

LEIVAS, J.C.P. (2020). Uma viagem sob o olhar de um geômetra**. Pesquisa e Ensino**. Barreiras (BA), Brasil v1, 2020, pp. 1-21.

PIAGET, J. ; INHELDER, B. **A representação do espaço na criança**. Porto Alegre: Artes Médicas. 1993.

PRESMEG, N. C. Visualization and mathematical giftedness. **Educational Studies in Mathematics,** v17, n3, pp. 297-311. 1986.

RODRÍGUEZ, P. L.; CORTÉS, L. A. ANALYSIS OF CREATIVITY INDICATORS BY MEANS OF AN AWARD EXAMINATION OF ANALYTICAL GEOMETRY SUBJECT. **ALME 33 -Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**. v33, n1, pp. 443-452. Acesso em 14 mar. 2021. 2020.

SEVERINO, A.J. **Metodologia do trabalho científico**. 24. ed. Revista e atualizada. São Paulo: Cortez, 2016.

SKEMP, R. R. **Psicología del aprendizaje de las matemáticas**. 2ª ed. Madrid: Edições Morata. 1993.

TALL, D. **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer. 1991.