UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias

DOI: https://doi.org/ 10.14483/23464712.18873
Este número es asignado por el equipo editorial

GÓNDOLA
ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS CIENCIAS
Resultado de Investigación

TRABAJO DOCUMENTAL DE LOS PROFESORES DE MATEMÁTICA EN SERVICIO UTILIZANDO RECORRIDOS DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN

DOCUMENTARY WORK OF IN-SERVICE MATH TEACHERS USING RESEARCH AND STUDY PATHS

TRABALHO DOCUMENTÁRIO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM SERVIÇO USANDO CAMINHOS DE ESTUDO E PESQUISA

María Rita Otero*, María Paz Gazzola, Viviana Carolina Llanos*****

Otero, M.R.; Gazzola, M. P.; Llanos, V. C. (2022). Trabajo documental de los profesores de matemática en servicio utilizando Recorridos de Estudio y de Investigación. *Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias, v18*, n1, pp. 149-167 DOI: 10.14483/23464712.18873

Resumen

En esta investigación se describe el trabajo documental de 62 profesores de matemáticas en servicio, durante un curso universitario on-line, mientras utilizan un Recorrido de Estudio e Investigación (REI) para organizar la enseñanza, que involucra a las matemáticas propias de la escuela secundaria. Se emplean la Aproximación Documental de lo Didáctico (ADD) y la aproximación instrumental de lo didáctico para describir los esquemas de uso de los profesores en dos tipos de situaciones: estudiar y analizar el REI y luego organizar una enseñanza hipotética a partir de él. Se analizan la totalidad de las respuestas individuales escritas de los profesores para ambas tareas y se reconstruyen los posibles documentos que se generan en cada instancia. La investigación muestra la diversidad y la riqueza del trabajo documental de los profesores y las modificaciones que realizan al recurso, que ocurren principalmente en la situación de organizar la enseñanza y se caracterizan por reducir el cuestionamiento que es inherente a los REI.

Palabras clave: Formación continua. Educación matemática. Enseñanza.

Resumo

Esta pesquisa descreve o trabalho documental realizado por 62 professores de matemática em exercício, durante um curso universitário online, utilizando um

Fecha de envío: / Fecha de aprobación:
* Doctora en Enseñanza de las Ciencias. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Exactas, Niecyt, Tandil, Argentina. CONICET. rotero@niecyt.exa.unicen.edu.ar ORCID: 0000-0002-1682-9142
** Doctora en Enseñanza de las Ciencias, mención Matemática. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Exactas, Niecyt, Tandil, Argentina. CONICET. mpgazzola@niecyt.exa.unicen.edu.ar ORCID: 0000-0002-6115-0817
*** Doctora en Enseñanza de las Ciencias, mención Matemática. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Exactas, Niecyt, Tandil, Argentina. CONICET. vcllanos@niecyt.exa.unicen.edu.ar ORCID: 0000-0003-0433-2654

Percorrido de Estudo e investigação (REI) para organizar o ensino, e que envolve matemática do ensino médio. Os instrumentos da Abordagem Documental à Didática (DDA) e da Didática são usados para descrever os esquemas de uso dos professores em dois tipos de situações: estudar e analisar o REI e, em seguida, organizar um ensino hipotético com base nele. Todas as respostas escritas individuais dos professores para ambas as tarefas são analisadas e os documentos gerados em cada instância são reconstruídos usando tabelas de documentos. A pesquisa mostra a diversidade e riqueza do trabalho documental dos professores e as alterações realizadas no recurso, que ocorrem principalmente na situação da organização do ensino e caracterizam-se por reduzir o questionamento característico do REI.

Palavras chave: Formação continuada. Educação Matemática. Ensino.

Abstract

This research describes the documentary work carried out by 62 mathematics teachers in service during an online university course while using an REI (Recorrido de Estudio e Investigación/Study and Research Tour) to organize teaching that involves high school math. The Documentary Approach of the didactic (ADD) and the instrumental approach of the didactic are the base to describe the schemes of use of the teachers in two types of situations: study and analyze the REI and then organize a hypothetical teaching based on it. We analyzed all the individual teachers' written responses for both tasks, and the documents generated in each instance were reconstructed through documentary tables. The research shows the diversity and richness of the teachers' documentary work and the modifications made to the resource, which occur mainly in the situation of organizing teaching, and it can be characterized by reducing the questioning inherent in REIs.

Keywords: Continuous training. Mathematics education. Teaching.

1. Introducción

Desde hace más de diez años investigamos sobre la enseñanza basada en la indagación mediante Recorridos de Estudio e Investigación (REI) (Chevallard, 2009) en la educación secundaria argentina. Primero, llevamos a cabo experiencias relativamente controladas en las que diseñamos, desarrollamos e implementamos REI. En las más de 25 implementaciones escolares que hemos realizado, los docentes eran investigadores del equipo que diseñó estos recursos, ya que los REI son ajenos a la escuela argentina (Otero y Corica, 2012; Otero, et al., 2012, 2014; Parra et al., 2013; Llanos y Otero, 2013, 2015; Gazzola et al., 2013; Donvito et al., 2014; Costa et al., 2014; Parra y Otero, 2017; Salgado y Otero, 2020 Gazzola y Otero, 2021). Luego, investigamos en los cursos iniciales y continuos de formación docente, cómo enseñarles los conceptos básicos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico y cómo ellos podrían enseñar usando REI. La distancia entre las prácticas habituales de los docentes y el tipo de enseñanza que se pretende con un REI, diseñado conforme al paradigma del cuestionamiento del mundo (Chevallard, 2013), es muy grande. Nuestra investigación tiene como objetivo que los docentes desarrollen algunos gestos didácticos propios de la enseñanza en el paradigma del cuestionamiento del mundo, al menos durante la formación inicial y continua.

En nuestros primeros trabajos (Otero et al., 2019) desarrollamos y analizamos en dos cohortes de docentes en formación a nivel universitario, un REI codisciplinar en física y matemáticas, donde la pregunta generatriz era ¿por qué se cayó la Piedra Movediza de Tandil? Esta pregunta alude al movimiento, pérdida de equilibrio y caída de una famosa roca oscilante, ubicada en la ciudad argentina que lleva ese nombre. Una de las principales dificultades identificadas fue la casi nula experiencia con el modelado matemático, físico o ambos que tenían los estudiantes de la facultad de ciencias exactas. Esto se relacionaría con una concepción de modelado más ligada a la idea de aplicación que a una concepción de modelado orientada a la generación de nuevo conocimiento. Pocos artículos hacen referencia a cómo los docentes utilizan y transforman un REI mientras enseñan con ellos (Wozniak, 2015; Matheron, 2008). En un estudio de caso (Gueudet, Lebaud, Otero, & Parra, 2018) analizamos el trabajo documental de una profesora de la escuela secundaria francesa que utilizaba un REI relacionado con el funcionamiento de las antenas parabólicas. Este problema se refiere a la construcción de las tangentes a una curva a partir de la geometría analítica e intervienen algunas propiedades de la geometría sintética y analítica, y además la reflexión de la luz sobre diferentes superficies estudiadas por la óptica geométrica y ondulatoria. Continuando con esta investigación, Parra y Otero (2022) identificaron y clasificaron los invariantes operatorios presentes en el caso mencionado, mostrando que, si bien esta docente quería enseñar con un REI por iniciativa propia, los invariantes operatorios que engendraban su actividad no eran compatibles con gestos didácticos propios del paradigma del cuestionamiento del mundo en el que se inscribe este recurso, tales como formular nuevas preguntas y responderlas, entrar y salir del tema, explorar disciplinas y delimitar áreas de estudio.

Por otro lado, analizamos durante un curso universitario en línea sobre Didáctica de las Matemáticas, cómo 31 docentes en servicio investigaban la pregunta generatriz del REI sobre las antenas parabólicas y cómo organizaban una posible enseñanza con esa pregunta (Otero y Llanos, 2019). Las principales dificultades de los docentes se relacionaron con su necesidad de controlar el medio didáctico que debe construirse para desarrollar un REI codisciplinar, con la modelación matemática y física, y con el hecho de que el dispositivo es ajeno a la enseñanza habitual. Los docentes debían enfrentarse a dos tipos de situaciones diferentes: estudiar la pregunta que origina el REI (esto incluye desarrollarla y explorarla) y posteriormente, elaborar una propuesta de enseñanza empleando la pregunta. En este último caso, los docentes priorizaron los saberes involucrados en el programa que imparten regularmente en la escuela secundaria. Los resultados evidenciaron que buena parte de las dificultades de enseñar con diferentes REI codisciplinares, de debería a que son dispositivos demasiado diferentes de los recursos que los docentes usan en la enseñanza habitual.

En otros trabajos, propusimos a los docentes el uso de problemas escolares y analizamos sus esquemas de uso en las mismas condiciones mencionadas anteriormente. Los resultados mostraron que los sujetos, que se encontraban en un curso de formación sobre la TAD, donde se cuestionaba la enseñanza habitual de las matemáticas escolares, en las situaciones que según nosotros debían dedicarse al estudio y cuestionamiento, asumían de entrada el papel docente, sin otorgar demasiada importancia al estudio y sin generar cuestionamiento matemático sobre el problema, aunque esto era perfectamente posible. El hecho de que, como primer paso, cada recurso sea vinculado a un tema del programa -que es considerado evidente y transparente- parece inhibir la actividad de estudio y cuestionamiento. Es decir, los docentes asimilan el recurso con los esquemas que tienen disponibles, propios de la enseñanza habitual. Este resultado es consistente con lo que Pastré et al. (2006) sostienen sobre la profesión docente, entre otros aspectos, ellos señalan que los esquemas explican tanto la actividad contingente como la resistencia al cambio. En este caso, los esquemas de utilización de los docentes para este tipo de recursos, parten de una experiencia profesional relativamente extensa y muy consolidada en su comunidad de prácticas y sus esquemas persisten porque son eficientes para el trabajo (Gazzola y Otero, 2022). Por ello, buscando incentivar el estudio del recurso, en la investigación actual se seleccionó un problema que permite enseñar saberes matemáticos diversos del currículo del bachillerato argentino, por medio de un REI que es un recurso propio del paradigma del cuestionamiento del mundo.

En este trabajo se propone a los docentes estudiar el llamado problema de la caja del pastelero (Chappaz & Michon, 2003) que permite generar un REI y realizar actividades de modelado relativamente sencillas, además de habilitar posibles salidas del tema que conducen al estudio de diversas organizaciones matemáticas como funciones polinómicas y racionales de hasta dos variables, nociones geométricas vinculadas a rectángulos estáticos y dinámicos, proporcionalidad, homotecias, el teorema de Tales y Pitágoras y las progresiones y series geométricas. Se emplea la Aproximación Documental de lo didáctico (ADD) con el objeto de comprender el trabajo documental que realizan 62 profesores en la situación de organizar la enseñanza con un recurso tipo REI, que involucra a las matemáticas propias de la escuela secundaria.

2. Los profesores y los recursos

En este trabajo se adopta la noción de recurso propuesta por Adler (2000, 2012) y el marco teórico de la aproximación documental de lo didáctico (ADD) (Gueudet, Pepin, Trouche, 2012; Gueudet, Trouche, 2008) que introdujo dicha noción al ámbito de la didáctica de las matemáticas.

Se denomina recurso a todo aquello que da sentido, apoya, proyecta y regenera el trabajo del profesor, ya sea material o simbólico. La palabra se refiere a cualquier cosa que los profesores usan para trabajar y desarrollar su práctica profesional como: un libro de texto; un software; páginas web y orientaciones curriculares y también a los intercambios con colegas y las producciones de los estudiantes. Un recurso es todo lo que puede apoyar o sostener la actividad del profesor (Adler, 2000).

En el desarrollo profesional de un profesor y en su actividad como tal, los recursos tienen un papel muy importante. Los docentes interactúan permanentemente con recursos de distinto tipo, mejor dicho, con variados conjuntos de recursos, tanto en la formación inicial como en las capacitaciones en servicio y en su tarea cotidiana. Cuando los profesores realizan una cierta tarea de enseñanza, buscan recursos, los seleccionan, los modifican; los llevan al aula y los comparten con sus colegas. Estas interacciones y el producto que generan, reciben el nombre de trabajo documental (Trouche, 2018).

Aquí nos interesamos específicamente en el trabajo documental de 62 profesores en servicio mientras participan de una capacitación en la universidad. Estudiamos las interacciones con un recurso un recurso llamado Recorrido de Estudio e Investigación (REI) (Chevallard, 2013, 2017; Gazzola, 2018; Gazzola, Otero, Llanos, 2020; Llanos, Otero, 2013, 2015; Otero et al. 2014, 2016; Otero, Llanos, 2019; Otero, Llanos, Gazzola, 2012; Parra, Otero, 2017, 2018). El principal objetivo del trabajo, es estudiar la documentación de los profesores a partir de recursos diseñados para la enseñanza por indagación.

2.2. De la aproximación instrumental a la aproximación documental en didáctica de las matemáticas

La aproximación instrumental se introduce y se desarrolla en el campo de la ergonomía cognitiva y la didáctica profesional y fue propuesta por Rabardel (1995) a partir de la Teoría de la Actividad de Vygotsky (1978) y de la Teoría de los Campos Conceptuales (TCC) de Vergnaud (1990, 2013).

En las situaciones en las cuales las personas utilizan un artefacto, que puede ser material o no, tiene lugar un proceso de apropiación, que requiere distinguir entre el artefacto en sí y el instrumento que la apropiación genera. Mediante este proceso, denominado génesis instrumental (Rabardel, 1995), el artefacto se vuelve un instrumento para el usuario. La actividad del usuario y la situación que la promueve son determinantes.

Los instrumentos se generan por las interacciones que ocurren entre un artefacto y los esquemas del sujeto en un cierto tipo de situación. Vergnaud (1998, 2013) define al esquema como la organización invariante de la actividad para una cierta clase de situaciones. De este modo, cuando la actividad en situación se realiza usando artefactos, el sujeto despliega su repertorio de esquemas y organiza una acción instrumentada por medio de un esquema de uso del o los artefactos en cuestión. Un instrumento es entonces una entidad mixta, compuesta al menos por una parte del artefacto más un esquema de uso de dicho artefacto.

La génesis instrumental, comprende dos procesos interrelacionados (Rabardel, 1995): instrumentación e instrumentalización. La instrumentalización está relacionada con la personalización del artefacto y la instrumentación con la aparición de esquemas en el sujeto. En la instrumentación las limitaciones y potencialidades de un artefacto condicionan la acción del sujeto que se sirve de él para resolver cierto problema. Un mismo artefacto, puede generar diferentes formas de organización de la actividad en diferentes individuos, que tendrán esquemas de asimilación diferentes y construirán invariantes operatorios distintos. La instrumentación, es un proceso dirigido hacia el sujeto. La instrumentalización en cambio, es un proceso dirigido hacia el artefacto, que puede resultar parcialmente incluido en el instrumento, readaptado, modificado. Por ejemplo, en el caso de la acción instrumentada de diferentes profesores, es posible que con el mismo REI ellos generen diferentes organizaciones de la actividad en la situación de enseñanza, o sea, instrumentos diferentes (Parra, Otero, 2021). Es importante remarcar que estos procesos son dialécticos e inacabados, por más pericia que un profesional posea en el uso de un instrumento, siempre le será posible incrementarla y afianzarla, desarrollando aspectos nuevos.

2.3. Esquemas e invariantes operatorios

La TCC es una teoría pragmática del desarrollo y de la conceptualización de lo real en la acción, que permite analizar la actividad del sujeto en situación, la forma de la actividad, lo que se conserva y lo que cambia, los esquemas que el sujeto pone en juego, y las condiciones pragmáticas y epistémicas que producen el aprendizaje, la conceptualización y el desarrollo en un cierto dominio. Pragmático significa que el sujeto actúa en función de las consecuencias de sus acciones (Otero, 2019, 2021).

Vergnaud (1990, 1998, 2013) propone la existencia de dos formas del conocimiento en interacción permanente y no en oposición, la forma operatoria y la forma predicativa. La primera, le permite al sujeto actuar con cierto suceso en una situación. Según Vergnaud (2013) es un hecho muy positivo que se le otorgue gran importancia a la forma operatoria del conocimiento (Otero, 2019), sin que esto reduzca la relevancia de la forma predicativa, cuya función es identificar los objetos del mundo, reconocerlos, enunciar lo que hacemos, generar textos e incluso libros sobre cómo se hacen ciertas cosas.

Una situación, representa a una clase de situaciones, con especificidades epistemológicas bien definibles. Los sujetos se adaptan a las situaciones que enfrentan, pero en realidad, son los esquemas que ellos utilizan en la situación, lo que resulta modificado durante la adaptación. Así, una clase de situaciones convoca a ciertos esquemas, que se desarrollan en virtud del tipo de situación.

Además de la definición de esquema mencionada antes, Vergnaud (1990, 2013) propone que un esquema está compuesto necesariamente por cuatro clases de componentes: una meta o varias submetas y anticipaciones, las reglas de acción, de captación y control de la información, los invariantes operatorios (conceptos en acto y teoremas en acto) y las posibles inferencias.

Los conceptos y teoremas en acto son la base conceptual implícita o explícita de los esquemas, debido a que permiten seleccionar la información pertinente y, a partir de ella y de la meta a atender, inferir las reglas de acción más adecuadas para abordar una situación. En la TCC, Vergnaud (1990, 2013) sustituye la relación piagetiana sujeto-objeto por la de esquema-situación, donde la noción de esquema es esencial para conocer los gestos, los razonamientos, las operaciones técnicas y científicas, las interacciones sociales y lingüísticas, la afectividad y las emociones. Todos los registros de la actividad están presentes tanto en las situaciones de trabajo y de formación continua como también, en la formación inicial que puede producirse en la escuela.

2.4. Aproximación documental de lo didáctico

La aproximación documental de lo didáctico (ADD) (Gueudet, Trouche, 2008) se basa en el enfoque instrumental de Rabardel (1995) y expande sus nociones a otros contextos en los cuales se realizan nuevas investigaciones (Gueudet, Pepin, Trouche, 2012; Gueudet et al., 2015). La génesis instrumental es redefinida como génesis documental: un proceso que transforma un recurso en un documento para enseñar algo. Aquí, el profesor es el sujeto y los artefactos son los recursos que utiliza en su profesión. La ADD asume que el trabajo nuclear de un profesor es diseñar la enseñanza de un cierto saber a partir de una variedad de recursos, razón por la cual estudia las interacciones entre los docentes y los recursos y sus consecuencias, en un contexto donde hay una gran cantidad de recursos didácticos

Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias
e-ISSN: 2346-4712, Vol. 18, No. 1 (enero-abril, 2023), pp.

disponibles (Gueudet, Pepin, Trouche, 2012; Gueudet et al. 2015). Durante la instrumentación, el profesor desarrolla una actividad sustentada en una multiplicidad de recursos, la ADD otorga gran relevancia al proceso de instrumentalización, ya que los docentes modifican considerablemente los recursos de los cuales se apropian.

Un documento es una entidad mixta, que vincula un conjunto de recursos o partes de ellos y esquemas de uso para tales recursos. Las diversas génesis documentales que los profesores producen a lo largo de su vida profesional, generan conocimientos que les permiten decidir y actuar de manera rápida, afrontar los cambios en una tarea y garantizar resultados productivos y viables. Estas nociones explican la génesis de las formas de acción y su dinamismo, así como su estabilidad y posible resistencia al cambio.

En este trabajo, analizamos la interacción de los profesores con un tipo particular de recurso como un REI. La ADD es un marco teórico prometedor para profundizar en el conocimiento de las modificaciones que los profesores realizan a un REI (instrumentalización) cuando interactúan con dicho recurso de enseñanza, muchas de las cuales desvirtúan considerablemente las características y los fines para los cuales esos dispositivos fueron diseñados (Gueudet, Lebaud, Otero, Parra, 2018; Parra, Otero, 2021).

3. Metodología

Esta investigación se desarrolló en dos cohortes de un curso universitario de didáctica de la matemática con 62 profesores de matemáticas en servicio, que realizaban la carrera Licenciatura en Educación Matemática (LEM) en la modalidad on-line. Los profesores trabajan en diversas regiones y provincias del país y poseen diferentes trayectorias de formación, en instituciones terciarias no universitarias. Si bien la mayoría se desempeña en la enseñanza secundaria, su experiencia profesional es disímil y oscila entre 2 a 36 años.

En el último mes del curso, se propuso a los profesores estudiar una pregunta generatriz y organizar a partir de ella, una enseñanza hipotética, involucrando algunos gestos didácticos del paradigma del cuestionamiento. El objetivo no es que los profesores desarrollen un REI, sino que utilicen el problema "La boîte du pâtissier” de Chappaz y Michon (2003) como un recurso para enseñar. Las situaciones son de dos tipos: a) estudiar y resolver el problema de manera individual y grupal; b) proponer una posible organización de la enseñanza de manera grupal e individual. En este trabajo solo se analizan las respuestas individuales.

Los profesores respondieron todas las tareas propuestas de manera escrita y las cargaron a la plataforma Moodle. Se emplean técnicas de análisis y meta-análisis (Gürtler, Huber, 2007) para identificar en cada protocolo los componentes de los esquemas asociados a cada instrumento: la meta, la submetas y los invariantes operatorios, así como las acciones “observadas” en ellos. El problema se presentó de la siguiente manera:

Problema de las cajas

Hay que construir cajas, siguiendo las instrucciones del video: https://www.youtube.com/watch?v=gxjpF4bUdDY

¿Cuáles son el alto, el ancho y el largo de las cajas que se obtienen si se considera cualquier hoja? ¿Por ejemplo: cómo se calcularía el V, la Sb, el perímetro total, etc.?

¿Cómo podemos realizar cajas anidadas con las hojas A0, A1, A2, etc.?

El sistema a estudiar, es una caja rectangular, construida como se indica en el video, fabricada con una hoja de dimensiones L y H, siendo L la dimensión donde se realizan los dobleces. A partir de la caja desplegada y realizando ciertas consideraciones geométricas, se obtienen sus dimensiones. La dependencia de las magnitudes con las dimensiones de la hoja, permite estudiar funciones polinómicas en dos variables, que geométricamente son superficies en R^3. Las variables se reducen si se parametriza uno o ambos lados de la hoja, o bien la superficie, el volumen o el perímetro de la caja (Figura 1). Es importante notar que, sí L fuera un parámetro, todas las funciones serán lineales, y esto resulta demasiado restringido, razón por la cual, el parámetro debería ser H. Adoptando como parámetro al volumen o a la superficie, se obtienen ecuaciones racionales en dos variables y es posible expresar H en función de L, obteniendo familias de funciones hiperbólicas que representan curvas de isosuperficie y de isovolumen.

Las cajas estarán anidadas si se construyen con series de hojas representadas por rectángulos semejantes, es decir que sus lados homólogos deben ser proporcionales y las dimensiones de las hojas conforman progresiones geométricas. Si además los lados de las hojas conservan la proporción $\frac{H}{L} = \tau$, siendo τ un número irracional, los rectángulos se denominan dinámicos. Un caso particular es el de las hojas de la serie DIN donde $\frac{H}{L} = \sqrt{2}$. La utilidad de esta proporción es que resuelve el problema de la división por dos o de la duplicación de rectángulos semejantes, ya que, al doblar el papel por la mediatriz del lado mayor, se obtienen dos hojas iguales del formato siguiente que conservan la proporción de los lados de su antecesora. Existen otras proporciones notables entre los lados de las hojas, tales como la del número de oro (áureo), cuyo descubrimiento se relaciona con el estudio de la renombrada sucesión de Fibonacci. Si la constante de proporcionalidad entre los lados de los rectángulos es un número racional, estos se llaman estáticos. En ese caso, los sucesivos rectángulos semejantes, también generan cajas anidadas. La forma de construir las hojas DIN, supone además que la proporción entre los lados de cada hoja es la misma que existe entre los lados homólogos de dos hojas sucesivas. Esto involucra interesantes técnicas y propiedades geométricas de los rectángulos vinculadas a la división de segmentos en geométrica sintética. En el modelo propuesto en la Figura 2, se utilizan dos constantes de proporcionalidad, τ se refiere al módulo de los rectángulos, y k es la razón de semejanza entre ellos.

A continuación, presentamos y analizamos los resultados obtenidos con relación a los documentos construidos por los profesores.

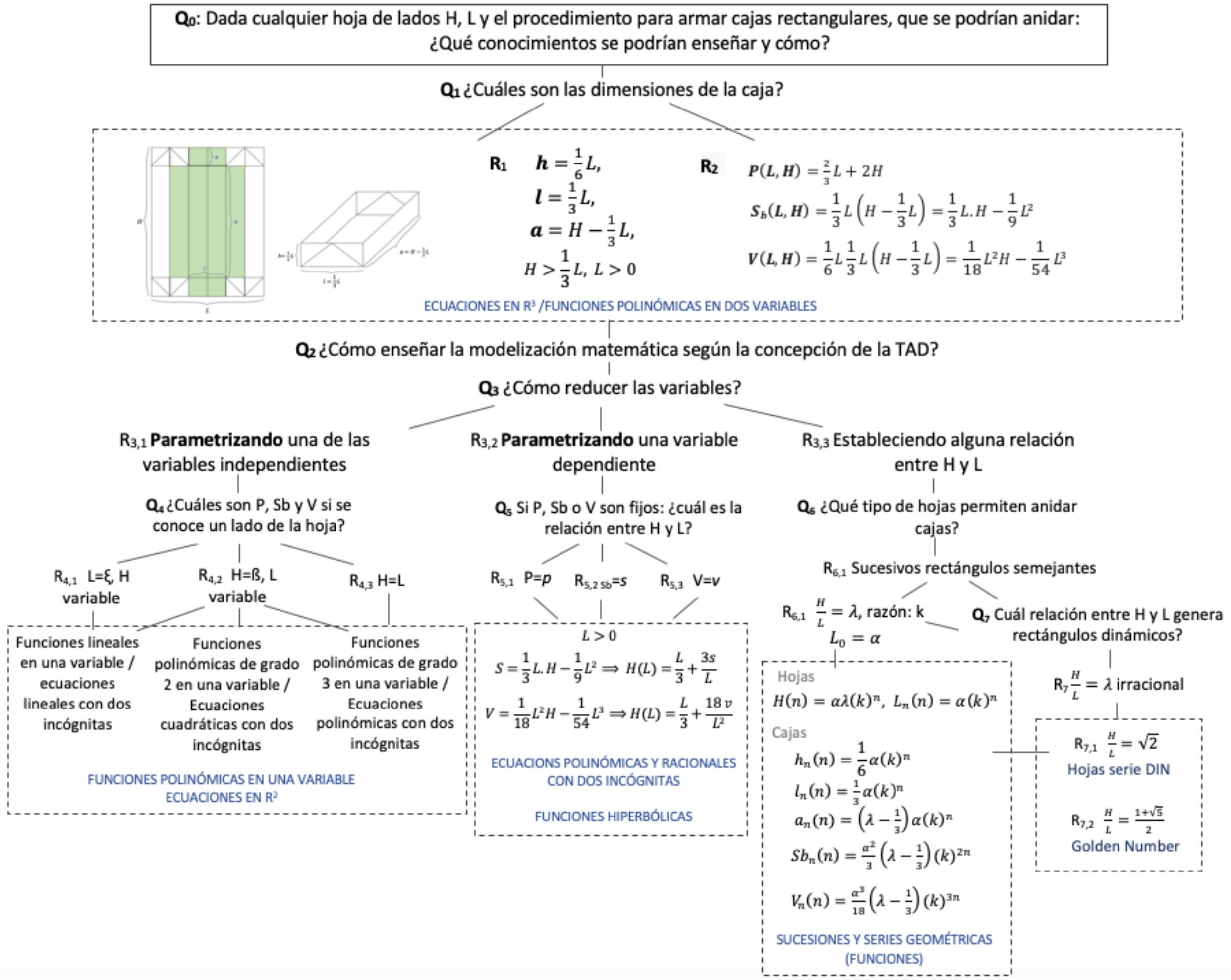

Figura 1. Esquema simplificado de posibles recorridos de enseñanza

Fuente: elaboración del autor

4. Análisis de los resultados obtenidos

Con el objeto de describir la forma en que los profesores interactúan con el recurso, tanto en la instrumentación como en la instrumentalización se analizaron las respuestas individuales de los 62 profesores, que totalizan 124 protocolos. Se construyeron tablas para describir y analizar los diferentes documentos posibles, a partir de las metas y submetas, los recursos a emplear, las acciones identificadas y los invariantes operatorios. Si bien existen al menos tantos documentos como profesores analizados, las tablas agrupan los elementos comunes en términos de los componentes de los esquemas y los recursos. Estas tablas además de describir el esquema de uso, permiten analizar la instrumentalización, es decir, las modificaciones que los profesores introdujeron en el recurso, sobre todo cuando organizaron la enseñanza. El problema de la caja puede considerarse en principio como un mismo recurso global, usado en dos tipos de situaciones diferentes: S1) estudio, S2) enseñanza. En virtud de la relación esquema-situación, esperábamos que se generaran al menos dos tipos de documentos distintos, los datos evidencian este hecho y además variantes documentales para ambas situaciones.

En la S1, según se consideren la construcción de la caja y sus dimensiones asociadas o la anidación con las hojas DIN A, se observa la emergencia de dos documentos en el primer caso y tres en el segundo. Por su parte, en la S2 se identificaron tres documentos en el primer caso y dos en el segundo.

Tabla 1. Documentos generados en S1

Situación 1 Estudio					
Caja (N=62)					
META	Submetas	Recurso	Acción identificada	IO	f
Encontrar las fórmulas para la caja	Escribir las fórmulas a partir de medidas específicas	Hojas específicas	Establecer medidas específicas para el largo y el ancho de la hoja	Las fórmulas se obtienen a partir de los números.	11/62
			Armar la caja		
			Calcular numéricamente las dimensiones el alto, largo y ancho de la caja.		
			Escribir numéricamente las operaciones realizadas para obtener las dimensiones de la caja		
			Formular las dimensiones de la caja a partir de las operaciones numéricas		
	Escribir las fórmulas a partir de la caja desarmada	Caja desplegada. Justificaciones geométricas	Armar la caja	Las fórmulas surgen del análisis de la caja desplegada.	51/62
			Desarmar la caja		
			Analizar geométricamente los pliegues.		
			Formular las relaciones entre la hoja y los lados de caja		
			Formular el perímetro, la superficie de la base y el volumen de la caja.		
Cajas anidadas (N=61)					
Anidar cajas	Anidar cajas sin tomar en cuenta las hojas DIN, usando hojas arbitrariamente menores	Hojas de cualquier tamaño, arbitrariamente menores.	Buscar hojas de tamaños sucesivamente menores	Las cajas se anidan si se construyen con hojas cada vez menores.	24/61
			Calcular los lados de la caja		
			Analizar si esos valores son sucesivamente menores		
			Concluir si se pueden anidar.		
	Anidar cajas con hojas de la serie DIN, calculando numéricamente las dimensiones de la caja	Valores de los lados de cada hoja DIN A, obtenidos en internet.	Obtener los valores de las hojas de la serie A	Las cajas se anidan si las magnitudes calculadas son sucesivamente menores.	14/61
			Calcular numéricamente la dimensión elegida		
			Analizar si el orden de la magnitud elegida se corresponde con el orden de las hojas		
			Concluir que las cajas se anidan.		
	Anidar cajas encontrando las relaciones proporcionales de los lados de las hojas DIN A.	Normas ISO216. Proporcionalidad. Teorema de Tales	Obtener la razón de proporcionalidad entre los lados de las hojas DIN A.	Los lados proporcionales determinan sucesiones geométricas para las hojas y las cajas.	23/61
			Escribir las sucesiones (de las hojas, de lados de la caja, del perímetro, superficie, volumen.)		
			Concluir que las cajas se anidan.		

Fuente: Elaboración del autor

En la primera parte de la situación de estudio, la meta común es encontrar las fórmulas de las dimensiones de la caja en función del alto y el ancho de la hoja. Los documentos se diferencian por la manera en que los profesores llegan a esas fórmulas. Por un lado, algunos recurren a hojas específicas y escriben numéricamente las operaciones realizadas para obtener las dimensiones de la caja. En este caso se destaca el IO: "Las fórmulas se obtienen a partir de los números". Por otro lado, los restantes recurren a la caja desplegada y a las relaciones geométricas como un modelo del cual obtienen las fórmulas. El IO característico es aquí: "*Las fórmulas surgen del análisis de la caja desplegada*".

En la segunda parte de la situación uno la meta común es anidar cajas, en este caso, se generan tres documentos diferentes. En el primero, los profesores no toman en cuenta las hojas de la serie y se basan en hojas arbitrariamente más pequeñas, asumiendo que la disminución de las dimensiones calculadas justifica la anidación. El IO identificado es "*Las cajas se anidan si se construyen con hojas cada vez menores*". En el segundo, se adoptan las medidas de los lados de cada hoja de la serie y se calculan numéricamente una o varias dimensiones de la caja, que comparadas permiten validar la anidación. Se identifica el IO "*Las cajas se anidan si las magnitudes calculadas son sucesivamente menores*". En el tercer documento, los profesores asumen y buscan justificar la existencia de constantes de proporcionalidad entre las diversas dimensiones de las hojas seriadas, generando sucesiones geométricas tanto para las hojas como para las cajas. Se reconoce el IO "*Los lados proporcionales determinan sucesiones geométricas para las hojas y las cajas*".

En la Tabla 2 y la Tabla 3, se presentan separadamente los documentos que se desarrollaron en la situación dos. A diferencia de lo ocurrido en S1, el recurso fue fragmentado por los profesores, ya que algunos (N=29) solo lo usaron para enseñar funciones polinómicas, y otros, solo sucesiones geométricas (N=33), como se aprecia en las metas colocadas en la tabla referidas a la construcción de la caja o a las cajas anidadas. En el primer caso, los profesores proponen enseñar funciones polinómicas desde lineales hasta cúbicas y se generan los tres documentos siguientes.

Tabla 2. Documentos generados en S2 con el recurso caja

S2 Enseñanza (N=62)						
Caja (N=29)						
META	Submetas	Recurso	Acción identificada	IO		f
Enseñar Funciones Polinómicas de grado 1, 2 y 3	Los estudiantes tienen que encontrar las fórmulas armando las cajas	Hojas con medidas conocidas.	Pedir a los estudiantes que armen las cajas siguiendo el video.	Los estudiantes obtienen las fórmulas a partir de los números.	Los temas nuevos se inician con un problema.	12/29
			Entregar una tabla para que los estudiantes completen los valores de la hoja y la caja.			
			Pedir a los estudiantes encontrar relaciones entre la caja y la hoja a partir de los números, si no lo logran, lo realiza el profesor.			

	con hojas cuyos lados establece el profesor.		El profesor fija un lado de la hoja para que los estudiantes encuentren las fórmulas de: (Alto, ancho y largo de la caja (Función afín) o Perímetro (Función afín) o Superficie (Función cuadrática) o Volumen (Función cúbica)	Para enseñar las funciones del programa, hay que reducir a una variable fijando un lado cualquiera de la hoja.	Lo más important e es llegar a la fórmula	
			Definir la o las funciones que corresponda			
	Los estudiantes tienen que encontrar las fórmulas armando las cajas, dado el lado de la hoja con dobleces.	Las hojas se entregan a los estudiantes y se informa la medida del lado por el cual se hacen los dobleces.	Pedir a los estudiantes que armen las cajas siguiendo el video.	Las fórmulas se obtienen con la caja desplegada. Para estudiar las funciones del programa, hay que reducir a una variable fijando el lado de la hoja por el cual se realizan los dobleces. Calculando cualquier dimensión se enseña función afín.		4/29
			Pedir a los estudiantes que desarmen la caja y analicen los pliegues.			
			Escribir las fórmulas para la caja: alto, ancho, largo, perímetro, superficie de la base, volumen. (Todo lineal)			
			Definir función 'lineal' (afín).			
	Los estudiantes tienen que encontrar las fórmulas armando las cajas, dado el lado de la hoja sin dobleces.	Las hojas se entregan a los estudiantes y se informa la medida del lado por el cual **no se hacen los dobleces**.	Pedir a los estudiantes que armen las cajas siguiendo el video.	Las fórmulas se obtienen con la caja desplegada. Para estudiar las funciones del programa, hay que reducir a una variable fijando el lado de la hoja por el cual **no se realizan los dobleces**. Las funciones polinómicas hasta el grado 3 se enseñan calculando todas las dimensiones de la caja.		13/29
			Pedir a los estudiantes que desarmen la caja y analicen los pliegues.			
			Pedir a los estudiantes que encuentren las fórmulas de: alto, ancho y largo de la caja (Función afín) y, además: (1) Perímetro (Función afín) (2) Superficie (Función cuadrática) (3) Volumen (Función cúbica)			
			Definir la o las funciones que corresponda			

Fuente: Elaboración del autor

El primer documento se basa en que los estudiantes armen la caja con hojas cuyas medidas establece el profesor y calculen numéricamente los lados, para luego obtener las fórmulas a partir de los números. Aquí se identifica el IO: "*Los estudiantes obtienen las fórmulas a partir de los números*". Dependiendo qué función o funciones decida enseñar, el profesor fija un lado de la hoja y deja el otro libre, para que supuestamente los estudiantes encuentren desde los números el perímetro de la caja, o la superficie de la base o el volumen. Una vez obtenida la fórmula, la enseñanza de la función continúa de la manera tradicional. Aquí se identifican además el IO: "*Para enseñar las funciones del programa, hay que reducir a una variable, fijando un lado cualquiera de la hoja*".

El segundo documento está dirigido a que los estudiantes encuentren las fórmulas armando las cajas y teniendo como dato el lado de la hoja con dobleces. En este caso el docente considera fundamental desplegar la caja una vez armada para obtener las fórmulas, que serán siempre lineales, razón por la cual solo podrán enseñar la función afín. Los IO identificados son: "*Las fórmulas se obtienen con la caja desplegada*", "*Para estudiar las funciones del programa, hay que reducir a una variable fijando el lado de la hoja por el cual se realizan los dobleces*", "*Calculando cualquier dimensión se enseña función afín*".

El tercer documento se orienta a que los estudiantes encuentren las fórmulas armando las cajas y teniendo como dato el lado de la hoja sin dobleces. También aquí, el docente considera fundamental desplegar la caja una vez armada para obtener las fórmulas. Lo más relevante es que según la magnitud calculada, se pueden enseñar las funciones polinómicas lineales, cuadráticas y cúbicas. Los IO identificados son: "*Las fórmulas se obtienen con la caja desplegada*", "*Para estudiar las funciones del programa, hay que reducir a una variable fijando el lado de la hoja por el cual no se realizan los dobleces*", "*Las funciones polinómicas hasta el grado 3 se enseñan calculando todas las dimensiones de la caja*".

En la Tabla 3 se presentan los documentos desarrollados en la situación dos con relación a las cajas anidadas. En este caso, los profesores construyen primero la caja para obtener las fórmulas de los lados y lo hacen ahora, usando la caja desplegada. La meta es enseñar sucesiones geométricas que a partir de las hojas DIN A. Se identifican aquí dos tipos de documentos, que dependen de la manera en que los profesores proponen "justificar" la sucesión de las hojas. Un número no despreciable de ellos, busca una supuesta justificación numérica, a partir de las peculiares medidas de las hojas. La mayoría propone una auténtica justificación, que se basa en consideraciones geométricas empleando el teorema de Thales para arribar a la o las constantes de proporcionalidad que surgen al considerar distintas dimensiones sucesivas de las hojas o de las cajas, que, involucra números irracionales en ciertos casos.

Tabla 3. Documentos generados en S2

<table>
<tr><th colspan="7">S2 Enseñanza (N=62)</th></tr>
<tr><th colspan="7">Cajas anidadas (N=33)</th></tr>
<tr><th>META</th><th>Submetas</th><th>Recurso</th><th>Acción identificada</th><th colspan="2">IO</th><th>%</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Enseñar Sucesiones geométricas con la formula del término enésimo</td><td>Justificar numéricamente la serie DINA</td><td>Medidas de hojas sucesivas de la serie DINA</td><td>Pedir a los estudiantes mirar el video, armar la caja, desarmarla y analizar los pliegues.
Pedir a los estudiantes que escriban la fórmula del: alto, ancho y largo de la caja, superficie de la base y el volumen o alguno de ellos.
Entregar a los estudiantes las medidas de las hojas A (o de algunas sucesivas) y pedirles que numéricamente encuentren la relación entre los lados.
Pedir a los estudiantes calcular numéricamente las magnitudes de las cajas que se construyen con las hojas DIN A y escribir la sucesión de números.
Pedir a los estudiantes que analicen si los valores encontrados son sucesivamente menores (se pueden anidar).
Generalizar a partir de las medidas y formular las sucesiones de la caja: alto, ancho, largo, superficie de la base, volumen.
Definir sucesión geométrica por el término enésimo.</td><td>Los números son la primera vía de acceso a las fórmulas.
Los estudiantes tienen que “comprobar” numéricamente la relación entre los lados de las hojas DINA.
El profesor es quien debe definir la sucesión por la fórmula del término enésimo.</td><td rowspan="2">Los temas nuevos se inician con un problema.
Lo más importante es llegar a las fórmulas.</td><td>13/33</td></tr>
<tr><td>Justificar la proporción entre los lados y las áreas de las hojas DIN A con el Teorema de Thales</td><td>Normas ISO 216. Proporcionalidad. Teorema de Thales</td><td>Pedir a los estudiantes que armen cajas siguiendo el video. Se asume que los lados de las hojas no son conocidos
Pedir a los estudiantes que desarmen la caja y escriban las fórmulas: alto, ancho, largo, perímetro, superficie de la base, volumen.
Pedir a los estudiantes que justifiquen la razón de proporcionalidad entre las hojas DINA.
Pedir a los estudiantes formular el término enésimo de algunas o todas las sucesiones posibles relacionadas con las hojas DINA y la caja.
Definir sucesión geométrica por el término enésimo.</td><td>La razón entre los lados de las hojas DIN A se justifica geométricamente (Thales)
Hay que formular el término enésimo para cada sucesión.
El profesor es quien debe definir la sucesión por la fórmula del término enésimo.</td><td>20/33</td></tr>
</table>

Fuente: Elaboración del autor

En el caso numérico, los IO son: “*Los números son la primera vía de acceso a las fórmulas*”, “*Los estudiantes tienen que ‘comprobar’ numéricamente la relación entre los lados de las hojas DINA*”, “*El* *profesor es quien debe definir la sucesión por la fórmula del término enésimo*".

En el otro caso, basado en las constantes de proporcionalidad propuestas por las normas ISO 216 y en el teorema de Thales, los IO son: "*La razón entre los lados de las hojas DIN A se justifica geométricamente (Thales)*", "*Hay que formular el término enésimo para cada sucesión*" y "*El profesor es quien debe definir la sucesión por la fórmula del término enésimo*".

En todos los documentos generados en la situación dos, se identifican los IO: "*Los temas nuevos se inician con un problema*", "*Lo más importante es llegar a las fórmulas*". Es decir que los profesores usarían este tipo de recurso para enseñar un tema del programa, a modo de introducción y luego seguirían de manera relativamente tradicional. También se identifica la relevancia que otorgan a la obtención de las fórmulas y que se asumen como los garantes de su pertinencia. Esto obstaculiza la enseñanza por indagación y evidencia la ausencia de cuestionamiento del saber en la práctica profesional habitual.

5. Discusión

En la situación de estudio, un número muy grande de profesores resuelve el problema de construir y modelar la caja a partir de la hoja desplegada, es decir, parecen asumir que el modelo matemático surge de analizar los pliegues realizados geométricamente. Sin embargo, en la situación de enseñanza, los profesores que pretenden enseñar funciones polinómicas, se vuelcan hacia los números, y los manipulan, a veces de manera inconducente, como si siempre fuera posible "generalizar" las fórmulas "observando" los números y/o las operaciones realizadas con ellos. También se observa que, si bien los profesores formulan en su estudio el problema en dos variables y en la enseñanza, las fórmulas en su resultado final aparecen en dos variables, ellos no se cuestionan al respecto. Sin embargo, en la situación dos, la mayoría decide reducir las expresiones a una variable. Unos pocos fijan el lado por donde se realizan los dobleces, lo cual los conduce a una dificultad didáctica de porte: que todas las expresiones sean de primer grado, aun cuando se trate de una superficie o un volumen. Los restantes, que fijan el otro lado, habilitan así el tratamiento de funciones polinómicas hasta el grado tres. Sin embargo, esto no surge de un análisis previo de su parte. En los documentos de la situación de enseñanza, el problema se reserva solo para el momento inicial, y luego la enseñanza discurre como siempre, los profesores se consideran responsables por la expresión definitiva de las fórmulas cómo la manera excluyente de definir los conceptos.

Si bien la noción de función es omnipresente en el saber enseñado en la escuela secundaria, principalmente se enseñan las funciones polinómicas de primer y segundo grado en una variable. En este caso, se produce un encuentro con la "definición", y más específicamente con la expresión algebraica polinómica y los parámetros asociados. Se realizan representaciones gráficas y ocasionalmente se varían los parámetros, sin considerar a las familias de funciones. Los parámetros se interpretan en términos de características de la gráfica cartesiana. Si bien algebraicamente, las funciones de una variable son ecuaciones en R^2, las técnicas ecuacionales se reducen a una variable, igualando a cero la variable dependiente. Al dejar de lado las ecuaciones en dos variables, se reduce considerablemente la potencialidad del cálculo algebraico a estudiar y se enmascaran las relaciones de equivalencia que permiten justificar las técnicas ecuacionales. Así, las técnicas para resolver ecuaciones se presentan como un conjunto de reglas "per se" inmotivadas e injustificadas (por ejemplo, se hablará aquí de "reglas del pasaje de términos", aún en los primeros cursos universitarios).

En el caso de la caja y en este contexto, no resulta extraño que los profesores tampoco se hayan preguntado cómo se hubieran podido reducir las variables. Ellos no analizaron qué podría enseñarse si fijaban alguna de ellas. Tampoco ninguno de los 62 profesores consideró que, parametrizando el perímetro, o el volumen o la superficie de la base, hubieran podido estudiarse incluso, las funciones hiperbólicas de grado tres. Es decir que, con relación al esquema de la Figura 1, los profesores siguieron solo el camino clásico. Es importante considerar aquí, que este proceder no sería atribuible a una limitación de los conocimientos matemáticos de los profesores, sino más bien a que sus esquemas tienen invariantes operatorios muy consolidados, que son ajenos al cuestionamiento del saber a enseñar, porque no es considerado necesario.

De este modo, cuando en una situación profesional de enseñanza surge la posibilidad de utilizar un recurso como el propuesto, que constituye una novedad para los profesores, sus esquemas los conducen a vincularlo directamente con el saber matemático escolar contenido en el programa, antes de estudiarlo y analizarlo en profundidad. Esto se debería a que, en la práctica profesional habitual, no se cuestiona el saber a enseñar. Es decir que el análisis matemático-didáctico del saber a enseñar o del enseñado, no es una actividad habitual en el ámbito de las prácticas socioculturales de la profesión de profesor. En este sentido, consideramos que como formadores debemos ser mucho más explícitos acerca de la actividad pretendida en las primeras situaciones de estudio del recurso.

Con relación a la cuestión de la anidación de las cajas, durante el estudio, como primera respuesta, los profesores no relacionan esta pregunta con las sucesiones geométricas. Sus metas se refieren a cómo justificar la anidación, mientras solo una tercera parte recurre a obtener las constantes de proporcionalidad relacionadas con las hojas DINA, a partir de argumentos geométricos. Las sucesiones geométricas aparecen mayoritariamente en la situación de enseñanza, puesto que la mitad de los documentos se refieren a ellas, luego de que los profesores interactuaron entre sí y con los docentes del curso. Esto evidencia que las sucesiones no se encuentran en principio en el "radar" de los profesores de secundaria. Además,

Resulta auspicioso que aún sin disponer de esquemas para enseñar el tema del programa sucesiones geométricas, porque no lo hacen habitualmente, un número relevante de profesores decida intentar una propuesta de enseñanza. En los documentos en los cuales se intenta una justificación numérica de las características de las hojas DINA, se advierte una opción por los números cómo manera de obtener las fórmulas. Si bien es conocido que este es un dominio familiar a los estudiantes, el problema requiere ser modelado algebraicamente, y resultan forzados, inapropiados e incluso dirigidos arbitrariamente los procedimientos que los profesores proponen para acceder a las fórmulas numéricamente. Contrariamente, en los documentos que tratan la proporcionalidad entre las hojas, de manera geométrica y algebraica, las propuestas son matemática y didácticamente más apropiadas. Se observa también que, aunque la recurrencia de la sucesión sea más evidente para los estudiantes en cualquiera de las alternativas, los profesores solo consideran la definición de la sucesión por la fórmula del término enésimo.

6. Conclusión

En esta investigación analizamos el trabajo documental de 62 profesores de matemática en servicio con REI, que es un tipo de recurso prototípico propuesto por la TAD, diseñado para realizar enseñanza por indagación. La interacción de los profesores con el recurso genera diversos documentos de gran riqueza matemática y didáctica, que dependen de la adaptación de sus esquemas a las situaciones de estudio y de enseñanza. La aproximación instrumental y documental permiten explicar a partir de la dominancia de ciertos esquemas, la distancia entre el cuestionamiento del saber enseñado que realizan los profesores y el cuestionamiento esperado por en este caso, los formadores. Esta diferencia, es un obstáculo de porte para introducir a los profesores en el ámbito de la enseñanza por indagación con recursos como los REI, concebidos para estudiar preguntas, como el utilizado en esta investigación. En este sentido, lo sucedido con las sucesiones geométricas resulta auspicioso y revela la potencialidad del recurso seleccionado, luego de varios intentos. Además, habida cuenta de que las prácticas ligadas al estudio del saber a enseñar son ajenas a las actividades habituales de los profesores, es muy importante insistir explícitamente en el tipo de actividad matemático-didáctica que en este caso, los formadores esperamos que se desarrollen en ellas.

7. Referencias

Adler, J. (2000) Conceptualising resources as a theme for teacher education. **Journal of Mathematics Teacher Éducation**, 3, pp. 205-224.

Adler, J. (2012) Knowledge resources in and for school mathematics teaching. In Gueudet, G.; Pepin, B.; Trouche, L. (eds.). FROM TEXT TO 'LIVED' RESOURCES: MATHEMATICS CURRICULUM MATERIALS AND TEACHER DEVELOPMENT. Springer. NY, pp. 3-22.

Chappaz, J.; Michon, F. (2003) Il était une fois…. La boite du pâtissier. **Grand N**, 72, pp.19-32.

Chevallard, Y. (2009). La notion de PER: problèmes et avancées. http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2013) Éléments de didactique du développement durable. Leçon 1. Enquête codisciplinaire & EDD. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Didactique_du_DD_2012-2013_1.pdf

Chevallard, Y. (2017) ¿Por qué enseñar matemáticas en secundaria? Una pregunta vital para los tiempos que se avecinan. **Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española**, 20(1), pp. 159-169.

Costa, V; Arlego, M; Otero, M. R. (2014). Enseñanza del Cálculo Vectorial en la Universidad: propuesta de Recorridos de Estudio e Investigación. **Revista de Formación e Innovación Educativa Universitaria**, 7(1), pp. 20-40.

Donvito, A.; Otero, M. R.; Sureda, P. (2014). Actitudes de la Pedagogía de la Investigación en el marco de la TAD: un análisis en tres escuelas secundarias. **IKASTORRATZA e-Revista de Didáctica**, 12, pp. 1-27.

Gazzola, M. P.; Llanos, V. C.; Otero M. R.; (2013). Research and Study Paths in the Teaching of Mathematics at Secondary school relative to the Rational Functions. **Journal of Arts & Humanities**, 2(3), pp. 109-115.

Gazzola, M. P. (2018) Diseño, implementación y análisis de un Recorrido de Estudio e Investigación codisciplinar en matemática y física en la Escuela Secundaria. 305. Tesis doctoral. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Tandil.

Gazzola, M. P.; Otero, M. R.; Llanos, V. C. (2020) Acciones didácticas en el desarrollo de un Recorrido de Estudio y de investigación que involucra a la matemática y a la física en la escuela secundaria. **Perspectiva Educacional**, 59(1), pp. 52-80. doi: 10.4151/07189729-Vol.59-Iss.1-Art.1006

Gazzola, M. P.; Otero, M. R. (2022) Instrumentalización de problemas escolares de los profesores de matemática en servicio. **PNA**, 16(4), pp. 281-307.

Gueudet, G.; Trouche, L. (2008) Du travail documentaire des enseignants : genèses, collectifs, communautés. Le cas des mathématiques. **Education et didactique**, 2(3), pp. 7-33.

Gueudet, G.; Lebaud, M.P.; Otero, R.; Parra, V. (2018) Travail documentaire des professeurs et parcours d'étude et de recherche: une étude de cas en Première S. **Recherche en Didactique des Mathématiques**, 38(3), pp. 275-314.

Gueudet, G.; Pepin, B.; Trouche, L. (2012) **From Text to 'Lived' Resources: Mathematics Curriculum Materials and Teacher Development**. Springer, New York: estados Unidos.

Gürtler, L.; Huber, G.L. (2007) Modos de pensar y estrategias de la investigación cualitativa. **Liberabit**, 13(13), pp. 37-52.

Llanos, V. C.; Otero, M. R. (2013) La pédagogie de l'enquête et du questionnement du monde: une étude longitudinale dans l'école secondaire argentine. **Review of Science, Mathematics and ICT Education**, 7(1), pp. 27-46.

Llanos, V. C.; Otero, M. R. (2015) Inserción de un REI en la escuela secundaria: el caso de las funciones polinómicas de segundo grado. **Relime**, 18(2), pp. 245-275.

Matheron, Y. (2008). Le projet AMPERES. **Cahiers pédagogiques**, 466, pp. 55-57.

Otero, M. R.; Corica, A. (2012). Estudio sobre las Praxeologías que se Proponen Estudiar en un Curso Universitario de Cálculo. **Revista BOLEMA**, 26(42B), pp. 459-482.

Otero, M. R.; Gazzola, M. P.; Llanos, V. C.; Arlego, M. (2016) Co-disciplinary Physics Mathematics research and study course (RSC) within three study groups: teachers-in-training, secondary school students and researchers. **Review of science, mathematics and ICT education**, 10(2), pp. 55-78.

Otero, M. R.; Llanos, V. C.; Gazzola, M. P. (2012) La pedagogía de la investigación en la escuela secundaria y la implementación de Recorridos de Estudio e Investigación en matemática. **Revista Ciencia Escolar: enseñanza y modelización**, 1(2), pp. 31-42.

Otero, M. R.; Llanos, V. C.; Parra, V.; Sureda, P. (2014) Pedagogy of research and questioning the world: teaching through research and study paths (RSP) in secondary school. **Review of science, mathematics and ICT education**, 8(1), pp. 7-32.

Otero, M. R. (2019). **Competencias ¿para qué?** Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Tandil.

Otero, M. R. (2021) **La Formación de Profesores. Recursos para la enseñanza por indagación y el cuestionamiento**. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Tandil.

Otero, M. R.; Llanos, V. C. (2019) Formación de profesores de matemática en servicio: La organización de una enseñanza basada en preguntas. **REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education**, 8(2), pp. 193-225. doi: 10.4471/redimat.2019.3618

Parra, V.; Otero, M. R., Fanaro, M. A. (2013). Los Recorridos de Estudio e Investigación en la Escuela Secundaria: resultados de una implementación. **Revista BOLEMA**, pp. 27(47), 847-874.

Parra, V.; Otero, M. R. (2017) Enseñanza de la matemática por recorridos de estudio e investigación: indicadores didáctico-matemáticos de las "dialécticas". **Educación Matemática**, 29(3), pp. 9-50.

Parra, V.; Otero, M. R. (2018) Antecedentes de los Recorridos de Estudio e Investigación (REI): características y génesis. **Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias**, 13(2), pp. 1-18.

Parra, V.; Otero, M. R. (2021) Operational Invariants and Instrumentalization of Artefact Study and Research Path for High School: A Case Study. Acta scientiae, 23(6), 334-362. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6167

Pastré P., Mayen P. y Vergnaud G. (2006). La didactique professionnelle. **Revue française de**

pédagogie, 154, pp. 145-198. https://doi.org/10.4000/rfp.157

Rabardel, P. (1995) **Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains**. Paris: Armand Colin.

Salgado, D. P.; Otero, M. R. (2020). Enseñanza por investigación en un curso de matemática de nivel universitario: los gestos didácticos esenciales. **Educação Matemática Pesquisa**, 22, pp. 532-557.

Trouche, L. (2018) Comprender el trabajo de los docents a través de su interacción con los recursos de su enseñanza - una historia de trayectorias. **Educación Matemática**, 30(3), pp. 9-40.

Vergnaud, G. (1990) La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, 10 (23), pp. 133-170.

Vergnaud, G. (1998) A comprehensive theory of representation for mathematics education. **Journal of Mathematical Behavior**, 17(2), pp. 167-181. https://doi.org/10.1016/S0364-0213(99)80057-3

Vergnaud, G. (2013) Pourquoi la théorie des champs conceptuels ? **Infancia y aprendizaje**, 36(2), pp.131-161.

Vygotsky, L. S. (1978) **Mind in society: The development of higher psychological processes**. Harvard University Press.

Wozniak, F. (2015) La démarche d'investigation depuis la théorie anthropologique du didactique : les parcours d'étude et de recherche, **Recherches en éducation**, 21. https://doi.org/10.4000/ree.7578