UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Góndola, Enseñanza y
Aprendizaje de las Ciencias

DOI: https://doi.org/10.14483/23464712.19553

GÓNDOLA
ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS CIENCIAS

Resultado de Investigación

UMA EXPERIÊNCIA DA ENGENHARIA DIDÁTICA COM AS IDENTIDADES DE FIBONACCI COM O APORTE DO SOFTWARE GEOGEBRA

AN EXPERIENCE OF TEACHING ENGINEERING WITH FIBONACCI IDENTITIES WITH THE CONTRIBUTION OF GEOGEBRA SOFTWARE

UNA EXPERIENCIA DE ENSEÑANZA DE INGENIERÍA CON IDENTIDADES DE FIBONACCI CON EL APORTE DEL SOFTWARE GEOGEBRA

Carla Patrícia Souza Rodrigues Pinheiro*, Francisco Régis Vieira Alves, Daniel Brandão Menezes*****

Cómo citar este artículo: Pinheiro, C.P.S.R., Alves, F.R.V., Menezes, D.B. (2024). Uma experiência da Engenharia Didática com as identidades de Fibonacci com o aporte do software GeoGebra. *Góndola, enseñanza y aprendizaje de las ciencias, 19*(2), 244-258. https://doi.org/10.14483/23464712.19553

Resumo

Diante das pesquisas sobre as sequências classificadas como recorrências lineares, oriundas do recorte de investigação de uma dissertação de Mestrado em desenvolvimento, percebeu-se a importância da sequência de Fibonacci com a criação de novos estudos e, por consequência, novos padrões e identidades. Assim, o objetivo deste trabalho foi desenvolver a sequência de Fibonacci em uma prática de ensino, abordando suas visualizações por meio do software GeoGebra, norteada pela Teoria das Situações Didáticas e pela Engenharia Didática, amparando a prática do professor sobre seu estudo. Sendo duas sequências didáticas aplicadas no Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Ceará com quatro estudantes no curso de Licenciatura em Matemática, na disciplina História da Matemática, na qual ocorreu a coleta de dados. Por fim, o resultado alcançado que foi uma prática de ensino com o aporte do GeoGebra, com base nas dialéticas da Teoria das Situações Didáticas, identificando que o uso deste software durante as situações didáticas promoveu uma prática de ensino para o estudo das identidades de Fibonacci, permitindo uma melhor compreensão do assunto proposto.

Palavras chave: Identidades de Fibonacci. Ensino. GeoGebra.

Recibido: 26 de Junio del 2022; aprobado: 26 de Febrero del 2024

* Mestra em Ensino de Ciências e Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnología do Ceará. Brasil. carla.patricia62@aluno.ifce.edu.br.

** Doutor em Ensino de Matemática. Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnología do Ceará. Brasil. Bolsista de Produtividade em Pesquisa do CNPq - Nível 2. fregis@ifce.edu.br

*** Doutor em Educação em Educação Brasileira. Universidade Estadual do Ceará. Brasil. brandaomenezes@hotmail.com

Abstract
Given the research on sequences classified as linear recurrences, arising from the research section of a Master's thesis under development, the importance of the Fibonacci sequence was realized with the creation of new studies and, consequently, new patterns and identities. Thus, the objective of this work was to develop the Fibonacci sequence into a teaching practice, approaching its visualizations through the GeoGebra software, guided by the Theory of Didactic Situations and Didactic Engineering, supporting the teacher's practice of their study. Two didactic sequences were applied at the Federal Institute of Education, Science and Technology of Ceará with four students in the Mathematics Degree course, in the History of Mathematics discipline, in which data collection took place. Finally, the result achieved was a teaching practice with the contribution of GeoGebra, based on the dialectics of the Theory of Didactic Situations, identifying that the use of this software during didactic situations promoted a teaching practice for the study of Fibonacci identities, allowing a better understanding of the proposed subject.
Keywords: Fibonacci Identities. Teaching. GeoGebra.

Resumen
Dada la investigación sobre secuencias clasificadas como recurrencias lineales, surgida de la sección de investigación de una tesis de maestría en desarrollo, se comprendió la importancia de la secuencia de Fibonacci con la creación de nuevos estudios y, en consecuencia, nuevos patrones e identidades. Así, el objetivo de este trabajo fue desarrollar la secuencia de Fibonacci en una práctica docente, abordando sus visualizaciones a través del software GeoGebra, guiados por la Teoría de Situaciones Didácticas y la Ingeniería Didáctica, apoyando al docente en la práctica de su estudio. Se aplicaron dos secuencias didácticas en el Instituto Federal de Educación, Ciencia y Tecnología de Ceará con cuatro estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas, en la disciplina Historia de la Matemática, en las que se realizó la recolección de datos. Finalmente, el resultado alcanzado fue una práctica docente con el aporte de GeoGebra, basada en la dialéctica de la Teoría de Situaciones Didácticas, identificando que el uso de este software durante situaciones didácticas promovió una práctica docente para el estudio de las identidades de Fibonacci, permitiendo una mejor comprensión del tema propuesto.
Palabras clave: Identidades de Fibonacci. Enseñanza. GeoGebra.

1. Introdução

De acordo com pesquisas, percebe-se que recentemente ocorreu um avanço nas investigações sobre o processo de ensino, com conceitos matemáticos que estão relacionados a Didática da Matemática (Mangueira et al., 2021). Ao mesmo tempo, existe a presença de pesquisadores franceses compondo uma metodologia, que tem como intuito de analisar a dimensão do conhecimento matemático, por meio de situações didáticas associadas ao processo de ensino e de aprendizagem (Artigue,1988).

Com isso, de acordo com a perspectiva destes estudos, observa-se que em relação aos livros da História da Matemática, é explorado o conceito sobre sequência recursiva linear, neste caso a mais conhecida é a sequência de Fibonacci, sendo essa eternizada pelo problema da reprodução de pares de coelhos imortais, trazendo contribuições para o estudo posteriores sobre outras sequências recorrentes e lineares (Pinheiro et. al, 2021)

Com base nessa contextualização, é realizado um estudo pertinente aos aspectos históricos e matemáticos sobre a sequência de Fibonacci, utilizando o *software* GeoGebra, sendo repassado aos estudantes em curso de formação inicial de professores de Matemática. No entanto, durante o processo de transfiguração da sequência de Fibonacci para um conteúdo a ser ensinado, é possível encontrar obstáculos no desenvolvimento e na validação, sendo superados por meio da evolução do processo. Dessa forma, destacam-se os aspectos epistemológicos, cognitivo e didático, como orientação desta investigação, com base na metodologia de pesquisa, Engenharia Didática (ED) e amparada por uma teoria de ensino, Teoria das Situações Didáticas (TSD).

Assim, o objetivo deste trabalho foi desenvolver a sequência de Fibonacci em uma prática de ensino, abordando suas visualizações por meio do *software* GeoGebra, norteada pela Teoria das Situações Didáticas (TSD) e pela Engenharia Didática (ED), amparando a prática do professor sobre seu estudo.

A partir deste objetivo, utiliza-se as fases da ED, para possibilita uma evolução na investigação científica em Educação Matemática, em que o professor/pesquisador pode desempenhar ações similares as de um engenheiro. Segundo Alves (2017), a ED concilia conhecimentos de diferentes ciências em realizações práticas e planejamentos experimentais bem idealizados, elaborando hipóteses para despertar a aprendizagem em seus estudantes. Dessa maneira, a Engenharia Didática torna possível ao professor investigar conceitos teóricos e relacioná-los com a prática em sala de aula.

Portanto, para o desenvolvimento deste trabalho, a ED traz a possibilidade do planejamento e desenvolvido seguindo suas quatro fases: análises preliminares, concepção e análise a *priori,* experimentação e análise a *posterior*i e validação, descritas ao longo deste trabalho.

Esta pesquisa ocorreu com os sujeitos representados por um grupo de quatro estudantes do 6º semestre de um curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), na disciplina de História da Matemática, sendo desenvolvida em duas sequências didáticas.

A escolha do *software* GeoGebra teve como intuito a visualização geométrica das identidades de Fibonacci, devido a escassez de figuras durante a apresentações das mesmas. Pinheiro et al (2021) afirmam, que essa é uma ferramenta dinâmica e de fácil utilização, configurando-se em um recurso que permite uma abordagem diferenciada, visando realizar uma preparação, organização e concepção de sequências didáticas de ensino, para aplicação das fases da ED.

Logo, nas seções seguintes apresentam-se a Teoria das Situações Didáticas (TSD) como teoria de ensino norteadora das sequências didáticas elaboradas; as fases da Engenharia Didática (ED) para a concepção e organização deste estudo, trazendo a discussão do referencial teórico a partir das análises preliminares, apontando a definição da sequência de Fibonacci e a História da Matemática na formação inicial do professor; a concepção e análise a *priori* de duas situações didáticas, e por fim, apresentam-se os resultados coletados a partir da experimentação realizada, bem como sua análise a *posteriori* e validação, finalizando com as considerações dos autores.

2. Teoria das Situações Didáticas e Engenharia Didática

A teoria de ensino (TSD), utilizada nesta investigação, destaca-se pela a interação entre aprendizagem dos estudantes de Matemática, o objeto de estudo matemático e o professor. Segundo Brousseau (2008), existe uma compreensão de como está organizado o trinômio aluno-saber-professor, bem como o meio (milieu) em que ocorre a situação didática.

Dessa maneira, o trabalho é desenvolvido pelo estudante por meio da situação didática planejada pelo professor, de tal forma que o aluno se aproxime de um investigador, criando suas hipóteses a medida em que o docente propicie situações favoráveis, fazendo com que a ação transforme em conhecimento para si mesmo (Sousa, Azevedo e Alves 2021).

Nesse sentido, a situação didática, segundo Brosseau (2008, p.20), "é um modelo de interação de um sujeito em um meio determinado". Assim, a compreensão da situação didática como uma ação que o professor planeja, com o intuito de criar uma interação entre o estudante e o meio, na qual essa situação provoque uma aprendizagem.

As dialéticas ou fases da TSD que orientam o processo de aprendizagem são definidas, de acordo com Brousseau (2008), como: ação, formulação, validação e institucionalização. Esses pontos serão utilizados durante a experimentação da ED.

Dessa maneira, a Engenharia Didática (ED), que é uma vertente francesa, associa-se ao trabalho didático de um engenheiro, na perspectiva de que para realizar um projeto é necessário se basear em conhecimentos científicos específicos e, ao mesmo tempo, em objetos mais complexos (Mangueira et al, 2021).

Assim, essa metodologia é definida como qualitativa, pois possui uma estrutura para que seja possível o alcance do objeto matemático, por meio de investigações fundamentada em quatro fases: análises preliminares; concepção e análise a priori; experimentação; análise a posteriori e validação. Os pontos estudam problemas provenientes da aprendizagem de matemática por meio de conhecimentos específicos, que será explorada ao longo desta pesquisa.

Com o propósito de transpor o objeto matemático estudado em um conteúdo a ser ensinado, surge o interesse de definir a transposição didática. Portanto, Artigue (2002, p.28), define:

> A possível viabilidade do conteúdo que se deseja promover, considerando as leis que governam o funcionamento do sistema de ensino. Tentando prever as deformações pelas quais é provável que sofram; tenta-se garantir que o objeto possa viver e, portanto, se desenvolver dentro do sistema de ensino sem mudar drasticamente sua natureza ou se tornar corrompido (tradução nossa).

Com esse propósito, utiliza-se a ED para construir uma estrutura teórica responsável por elaborar, desenvolver e analisar situações de ensino propostas. Por consequência, o professor/investigador tem a oportunidade de observar os aspectos epistemológicos, cognitivos e didáticos do objeto de estudo matemático, diante da proposta de ensino aplicada com os estudantes participantes desse processo investigativo. Porém, segundo Pinheiro et. al (2021) alguns obstáculos poderão surgir durante o processo, tendo que superá-los e resolver as restrições identificadas.

Logo, o professor deverá considerar a transposição didática da relação entre o saber matemático e a situação de ensino que será utilizada em sala de aula, na qual considera-se o objeto de estudo matemático, com também o grupo de estudo em análise. Com isso, mostra-se como o trabalho foi estruturado utilizando as quatro fases da ED: análises preliminares, análise a *priori*, experimentação, análise a *posteriori*.

Além disso, para estimular o estudante a participar do processo de ensino, resolvendo as situações didáticas propostas de acordo com o objetivo da pesquisa, foi estabelecido o contrato didático com a turma para a aplicação da situação didática. Segundo Brousseau (1986), o contrato didático é necessário para haja um acordo entre o professor e o aluno, durante as situações de ensino em sala de aula, configurando-se em um sistema de obrigações recíprocas, para que o planejamento ocorra de forma efetiva.

A partir disto, nas seções seguintes foram descritas as etapas da ED relacionadas à situação didática proposta, referente às Identidades da sequência de Fibonacci, analisando o que foi exposto pelos estudantes.

3. Análises preliminares

Nas análises preliminares foi realizada uma investigação a partir de referenciais teóricos sobre a sequência de Fibonacci, em que se fez uma sondagem histórica sobre o modo como ocorre sua abordagem na disciplina de História da Matemática. Neste caso, foi feito um levantamento bibliográfico especificamente em relação a origem da sequência de Fibonacci, buscando reconhecer aspectos didáticos do trabalho com este tema no âmbito da sala de aula. Sabe-se que nesta fase ocorre um resgate dos conhecimentos prévios da vida escolar.

Nessa seção inicia-se a construção do referencial teórico, baseado no conteúdo das identidades de Fibonacci em uma visualização por meio do *software* GeoGebra, com o aporte na ED e TSD. Desse modo, são investigadas e analisadas algumas situações de ensino em particular ao objeto matemático em estudo, com o propósito de atingir o objetivo proposto.

Para construir o campo epistêmico-matemático foram explorados de Alves (2016), Engenharia Didática (ED) para a generalização da sequência de Fibonacci: uma experiência no curso de licenciatura. Oliveira, Alves e Paiva (2017) Identidades Bi e Tridimensionais para os Números de Fibonacci na Forma Complexa. Catarino (2017), traz uma abordagem para a classe dos Polinômios Bivariados de Fibonacci (PBF): Elementos Recentes sobre a Evolução de um Modelo. Oliveira (2019) com uma Investigação dos Polinômios Bivariados e Complexos de Fibonacci Amparada na Engenharia Didática: uma Aplicação da Teoria das Situações Didáticas (TSD) e Os números Gaussianos de Fibonacci e relações recorrentes bidimensionais. Mangueira e Alves (2020), mostram os números híbridos de Fibonacci e Pell.

Assim, a partir desse levantamento bibliográfico referente ao objeto de estudo que são as identidades de Fibonacci por uma visualização no GeoGebra. Contudo, a sequência de Fibonacci recebe esse nome devido à relação com o seu criador, um italiano matemático chamado Leonardo de Pisa, que nasceu aproximadamente em 1175 e faleceu em 1250 (Dunlap, 2003, p.35).

Segundo Dunlap (2003) o termo Fibonacci é abreviação de filho de Bonaccio, seu pai. Fibonacci agregou conhecimentos nos campos da Álgebra e Aritmética, com suas viagens que realizou no território europeu (Posamentier &Lehmann,2007, p.22). Porém, mesmo apresentando diversos trabalhos nessas áreas da Matemática, Leonardo de Pisa se eternizou através do problema que descreve a reprodução dos coelhos imortais (Wells,2005, p.101). O problema proposto foi o seguinte:

> Um homem coloca um par de coelhos em um cercado, a fim de que estes se reproduzam. Quantos pares de coelhos existirão neste cercado, ao final de um ano, sabendo que a natureza desses coelhos é tal qual que a cada mês, cada par reproduz outro par, que se torna produtivo do segundo mês em diante? (Boyer, 2006, p.174).

Com a resolução do problema citado acima, encontra-se a seguinte sequência: (1,1,2,3,5,8,13,21,34,55....). A sequência apresentada indica que quando se pensa no número de casais de coelhos de um determinado mês, basta somar o número de casais de coelhos do mês anterior com o número de casais anteriores. Segundo Hefez (2003, p.27) tem-se estabelecida a lei de recorrência conhecida como sequência de Fibonacci, definida como:

Definição 1: $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \;\; para\; n \geq 1$. Sendo $F_1 = 1 \; e \; F_2 = 1$.

Assim, considere a sequência numérica como x_n, em que o termo geral é dado pela razão entre os dois termos consecutivos, ou seja, $x_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$, que também é conhecida com a razão áurea. Ademais, a definição dessa razão é "uma linha reta é cortada na razão extrema e média quando, assim como a linha toda está para a maior parte, a maior parte está para a menor parte" (Ramos, 2013, p.32).

Para provar a razão áurea, tem-se uma divisão do um segmento AB em duas partes, ou seja, AC e CB. Desse modo, considerando que $AC = x$ e CB$= 1$, então $AB = x + 1$, na qual, AB$> AC > CB$, assim:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB} \Rightarrow \frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$$

Logo, pode-se ver que as raízes da equação $x^2 + x - 1 = 0$ são $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. A raiz $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803 \ldots$

*Definição 2***.** a Razão Áurea ou o número de ouro, é representada por uma constante irracional tal que,

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Desse modo, a sequência de Fibonacci está relacionada as definições e identidades sobre o retângulo, triângulo e espiral de Razão Áurea. Assim, Catarino (2017), relatam que a sequência de Fibonacci pode ser representada por $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, no qual o $n = 0{,}1{,}2{,}3\ldots$, é uma relação de recorrência de segunda ordem, inicialmente pleiteado pelo matemático francês François Édouard Anatole Lucas (1842-1891), que elaborou algumas identidades de Fibonacci exploradas por Koshy (2001).

Também pode ser reescrita como: $F_{n+1} = F_{n+2} - F_n$. Em particular:

$$F_1 = F_2,$$

$$F_2 = F_3 - F_1$$

$$F_3 = F_4 - F_2$$

$$F_4 = F_5 - F_3$$

$$\vdots$$

$$F_{2n-1} = F_{2n} - F_{2n-2}$$

$$F_{2n} = F_{2n+1} - F_{2n-1}$$

$$F_{2n+1} = F_{2n+2} - F_{2n}$$

Para ilustrar esses números de Fibonacci utiliza-se trapézio, paralelogramos e triângulo, relacionando os comprimentos laterais e bases destas figuras, conforme a (Figura 1).

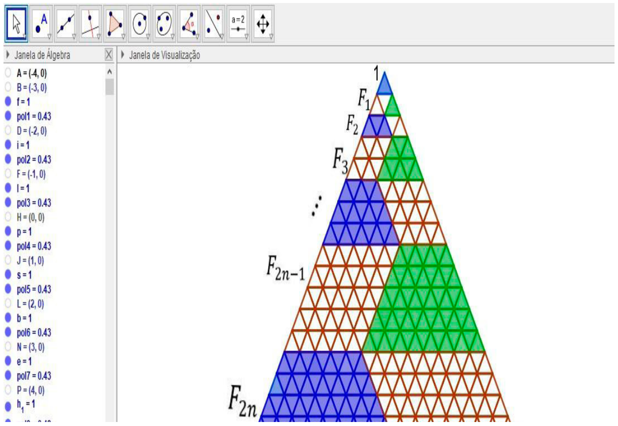

Figura 1. Números de Fibonacci representados por trapézio.
Fonte: elaborado pelos autores (2022).

Observando os lados do paralelogramo estão relacionados aos números consecutivos de Fibonacci, já no topo, os lados inclinados e base do trapézio correspondem aos três números consecutivos dessa sequência. Assim, o próximo passo é mostrar as identidades relacionadas aos números dessa sequência escritas por Oliveira, Alves e Paiva (2017).

Identidade 1. A soma dos números de Fibonacci, até a ordem 2n, de índice ímpar, está descrita como $\sum_{l=1}^{n} F_{2l-1} = F_{2n}$;

Identidade 2. A soma dos números de Fibonacci, até a ordem 2n, de índice par e não nulo pode ser descrita por $\sum_{l=1}^{n} F_{2l} = F_{2n+1}$-1;

Identidade 3. A soma dos n primeiros números de Fibonacci, até a ordem n, de índice maior que zero, teremos $\sum_{l=1}^{n} F_l = F_{n+2}$-1;

Identidade 4. A soma dos n primeiros quadrados números de Fibonacci, até a ordem n, de índice maior que zero pode ser descrito por $\sum_{l=1}^{n} (F_l^2) = F_n . F_{n+1}$.

Logo, com o propósito de investigar e analisar essas definições e identidades matemáticas, foram selecionados alguns desses conceitos e as relações com trapézios, triângulos e paralelogramos para a realização da transposição didática dessa sequência, na qual os trabalhos em que foram pesquisados somente contam a Matemática Pura.

Dessa forma, foram elaboradas situações didáticas amparadas pela TSD, pretendendo que os estudantes compreendam o estudo matemático desse objeto como um todo, além de estimular a intuição e a investigação das conjecturas elencadas pelos alunos.

4. Concepções das situações didáticas

Na fase de concepção e análise a priori, segundo Pinheiro et al. (2021), ocorre a elaboração das situações didáticas, pensadas para responder os questionamentos ou hipóteses levantadas a partir da análise preliminar a partir das variáveis, que são: o estudo da sequência e da espiral de Fibonacci por meio de definições geométricas. Essas podem fornecer ao professor/pesquisador subsídios para a construção da situação didática e, a partir da vivência, permitir que os alunos superem os obstáculos encontrados no processo de aprendizagem.

A concepção da situação didática parte das identidades de Fibonacci, com a finalidade de serem transformadas em objetos de conhecimentos a serem explorados em sala de aula, pois a visualização de forma geométrica dessas identidades por meio do software GeoGebra vem sendo estudado recentemente. Apesar disso, é feito um levantamento de hipóteses didáticas sobre a sequência de Fibonacci, fundamentado na ED com o amparo da TSD, com um propósito de formular conjecturas, investigar e explorar as definições e identidades para um contexto de sala de aula. Segundo BROSSEAU (1986), esse fato é determinado como transposição didática.

Com isso, as variáveis podem ser definidas como macro didática ou micro didática. Neste trabalho a micro didática é a utilizada, onde o professor prever o comportamento dos estudantes, elencando os possíveis obstáculos encontrados no percurso didático, sendo necessário a conexão entre as identidades de Fibonacci e as situações didáticas.

Também é importante destacar que nessa exploração do objeto matemático são necessários conhecimentos básicos, como operações algébricas envolvendo soma ou subtração usado para a simplificação dos termos semelhantes, validando as identidades por meio de demonstrações matemáticas (Oliveira e Paiva,2017).

5. Análise a *priori*

De acordo com que foi exposto, no campo epistémico matemático em torno das identidades de Fibonacci e sua recorrência, foram elaboradas duas situações didáticas de ensino, fundamentada na TSD, pensando nos possíveis comportamentos dos estudantes, nas fases de ação, formulação, validação e, por fim, as contribuições realizadas pelo professor na fase da institucionalização.

Considerando as definições das identidades de Fibonacci estudadas anteriormente nas análises preliminares, segue as construções das seguintes situações didáticas propostas.

Situação didática 1: Tomando como base a Sequência de Fibonacci, como provar as identidades 1, 2 e 3 por meio de uma visualização geométrica?

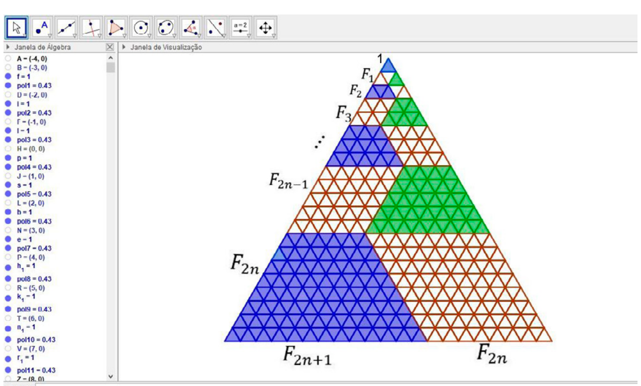

Figura 2. Os números de Fibonacci na forma geométrica.
Fonte: Elaborada pelos autores (2022).

Nessa primeira situação didática, na situação da ação, os estudantes devem buscar os números de Fibonacci através da (Figura 2) proposta no GeoGebra, ainda observando as relações que podem ser encontradas a partir de um triângulo equilátero, paralelogramo ou trapézio.

Durante a formulação, os estudantes devem trabalhar com a relação de diferença entre os números de Fibonacci, realizando uma exploração das identidades, substituindo esses termos na fórmula, na qual irá encontrar um padrão para as provas das três identidades propostas.

Na fase da validação, os estudantes devem demonstrar como os somatórios das identidades 1,2 e 3 são representados respectivamente por esses resultados: F_{2n}, F_{2n+1}-1 e F_{n+2}-1.

Por fim, o professor deve retornar à situação didática, na fase da institucionalização, e conferir as respostas dos estudantes, ressaltando que por meio de uma figura pode-se provar três identidades fazendo uma ligação entre elas, gerando uma nova visualização geométrica para as propriedades propostas.

Situação didática 2: Tomando como base as identidades propostas na situação anterior, como provar a identidade 4 que está relacionada a soma dos quadrados por meio de uma visualização geométrica?

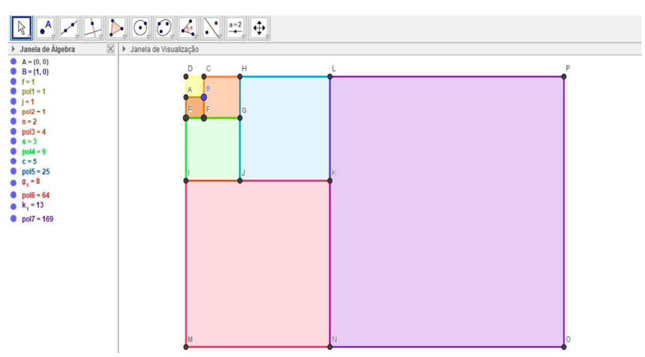

Figura 3. A soma dos quadrados de Fibonacci.
Fonte: Elaborada pelos autores (2022).

Nesta segunda situação didática, na parte da ação, os estudantes devem atribuir os números de Fibonacci a cada quadrado representado através da (Figura 3) proposta no GeoGebra, observando as relações que podem ser encontradas a partir dos quadrados e retângulos.

Durante a formulação, os estudantes devem trabalhar com a relação de diferença entre os números de Fibonacci, como foi feito anteriormente realizando uma exploração das identidades 1, 2 e 3, substituindo esses termos na fórmula, no qual irá encontrar um padrão para a prova da identidade 4 proposta, $\sum_{l=1}^{n}(F_l^2) = F_n . F_{n+1}$.

Na fase da validação, os estudantes devem demonstrar como os somatórios dos quadrados são relacionados ao produto dos dois termos consecutivos, fazendo a relação com a razão áurea a imagem visualizada no GeoGebra.

Por fim, na fase da institucionalização, o professor deve retornar à situação didática, conferindo as respostas dos estudantes, ressaltando que a razão áurea está presente em toda parte, e que a imagem proposta pode provar a identidade por meio de propriedade geométricas e como essas identidades são importantes para estudos futuros.

6. Experimentação

Após estas etapas, foi realizada a fase da experimentação, por meio das duas sequências didáticas, com a coleta de dados sobre o comportamento dos estudantes mediante a prática da atividade proposta, a partir da observação de elementos importantes em um contexto didático-metodológico. No caso desta pesquisa, as situações didáticas propostas apresentadas, foram as identidades da sequência de Fibonacci por meio do software GeoGebra, a partir de uma perspectiva geométrica.

Nessa fase da ED, foram realizadas as aplicações das situações didáticas, para a consolidação da transposição didática. Nesse momento é posto em prática o que foi planejado na análise a *priori*.

Durante a experimentação, coletamos e organizamos um corpus de pesquisa variado, composto por produção dos alunos, registro de perguntas, dúvidas e erros constatados durante o acompanhamento de suas ações e diários de classe dos ministrantes. A análise desse material é essencial para a etapa da validação (Carneiro,2005 p. 105)

Com isso, nesta fase foi aplicada duas situações didáticas durante três encontros (duração cinquenta minutos cada), em um grupo de quatro estudantes denominados de A1, A2, A3 e A4, do Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologias do Ceará (IFCE), *campus* Fortaleza, no ano de 2022. Essa atividade foi incorporada na disciplina História da Matemática, no curso de Licenciatura em Matemática, no primeiro semestre do ano referido.

Assim, as atividades planejadas foram desenvolvidas em três encontros da seguinte forma:

No primeiro encontro foi formalizado o contrato didático, bem como o contexto histórico em relação a sequência de Fibonacci. No segundo e terceiro encontro foram aplicadas as duas situações didáticas.

No primeiro momento, foi feito um contrato didático, no qual estabelece um acordo de convivência com os estudantes participantes. A respeito do contrato didático, deve-se conhecer como uma "uma relação que determina – explicitamente em pequena parte, mas sobretudo implicitamente – aquilo que cada parceiro, professor e aluno tem a responsabilidade de gerir e pelo qual será, de uma maneira ou de outra, responsável perante o outro" (Brousseau, 1986 apud Almouloud, 2007, p. 89).

Ademais, esse contrato existe poucas regras evidentes, enquanto "as implícitas são elaboradas a partir de natureza intrínseca da Matemática, como formalismo, abstração e rigor, além de considerar as diferenças habituais de concepções dos professores de Matemática" (Oliveira, 2018, p.38).

A respeito da escolha do recurso tecnológico foi escolhido o software GeoGebra, pois segundo Ribeiro e Souza (2016) é uma ferramenta dinâmica, que propõe ao processo de ensino e de aprendizagem uma interação a partir do controle das ações desenvolvidas durante o processo de estudo de uma maneira gradual, de acordo com a necessidade do estudante.

Dessa forma, essa ferramenta tende a dinamizar a geometria, podendo manipular os objetos através da tela do computador ou de aparelhos celulares. Além disso, "incentiva a continuidade da busca pela compreensão do objeto de estudo, pois o próprio software auxilia na percepção visual e dinâmica das ações, que são manipuláveis com certo grau de permissividade" (Ribeiro e Souza,2016, p.3).

Para a coleta de dados durante essa fase foram utilizados pelo professor gravador e celular, com o intuito de capturar as imagens, áudios e vídeos dos estudantes durante as resoluções das situações didáticas, com o consentimento dos estudantes participantes. Vale ressaltar que as atividades propostas foram elaboradas e analisadas fundamentadas na TSD.

7. Análise a posteriori e validação

Nesta fase são analisados os dados coletados durante a experimentação das situações didáticas desenvolvidas pelos estudantes, investigando as identidades de Fibonacci, com o intuito de resolver as situações didáticas propostas para efetivar a transposição didática. Nesse momento a TSD ampara as discussões dessas situações, sendo explorada cada fase dessa teoria de ensino.

À vista disso, inicialmente são apresentadas as situações didáticas e a orientação aos estudantes que possam interagir entre si, pois a partir dessas discussões os alunos buscarão formular uma estratégia de resolução, para depois validá-la (Oliveira, 2018). Consequentemente, após essa análise, é realizada a validação dos dados obtidos, fazendo um confronto entre os resultados discutidos pelos estudantes e a proposta da análise a priori. Dessa forma os dados serão validados ou contestados.

As situações didáticas expostas direcionam os estudantes a conhecerem os números de Fibonacci e suas representações geométricas, para depois associá-los às identidades propostas. Os alunos também conhecerão a relação de recorrência e a razão áurea para encontrar as demonstrações necessárias para as identidades.

Na situação didática 1, o objetivo é encontrar relação geométrica dos números de Fibonacci para provar as identidades 1, 2 e 3. Com isso, foi apresentada a lei de recorrência para encontrar os números de Fibonacci, construindo os conhecimentos para a resolução da atividade proposta. Dessa maneira, os estudantes observaram a imagem da (Figura 2), fazendo a relação com paralelogramos, trapézios e triângulos aos números de Fibonacci, conforme a (Figura 4).

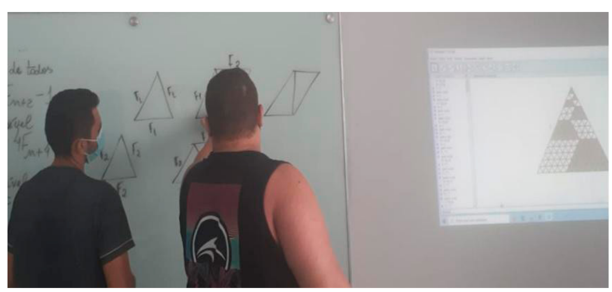

Figura 4. Fase da ação dos estudantes A1 e A2-situação didática 1.
Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Assim, os estudantes A1 e A2 conseguem observar que a (Figura 2) corresponde à identidade 3, que é a soma dos n primeiros números de Fibonacci, até a ordem n, de índice maior que zero, e que ao unir as imagens de cor verde (Figura5) e de cor azul (Figura 6), tem-se as respectivas representações geométricas das identidades 1 e 2.

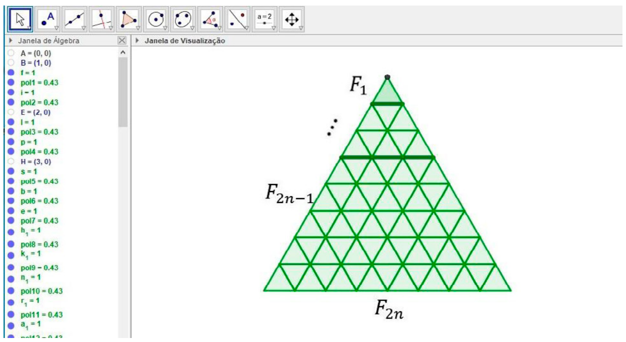

Figura 5. Representação geométrica da identidade 1.
Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Na (Figura 5) é mostrada a representação geométrica da soma dos números de Fibonacci, até a ordem 2n, de índice ímpar, que faz parte da fase da formulação. Também existe a união das imagens de cor azul, conforme a (Figura 6), para a construção geométrica da soma dos números de Fibonacci, até a ordem 2n, de índice par e não nulos.

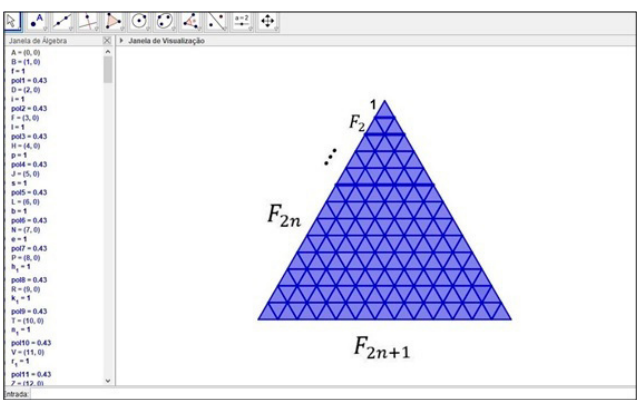

Figura 6. Representação geométrica da identidade 2.
Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Dessa forma, o estudante A3 percebeu que para provar as identidades 1, 2 e 3, precisava uma nova manipulação algébrica utilizando a *Definição1*, com o objetivo de tentar demonstrar as propriedades propostas. Conforme a (Figura 7).

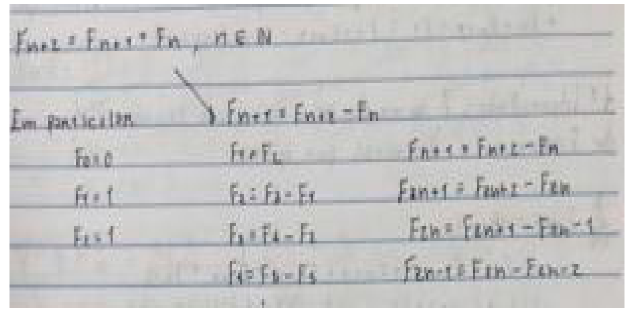

Figura 7. Fase da formulação do estudante A3- situação didática 1.
Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Assim, o estudante A4 que estava com dificuldade de realizar tal prova das identidades propostas consegue compreender a demonstração a partir da substituição dessas relações no somatório de cada identidade, ver (Figura 8).

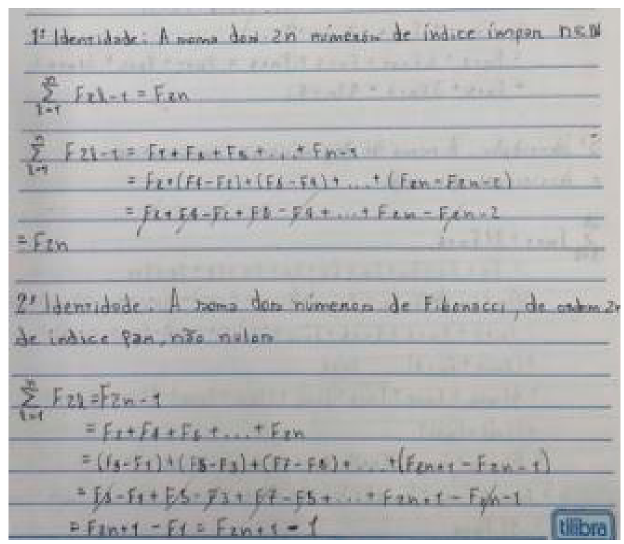

Figura 8. Fase da validação do estudante A3- situação didática 1.
Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Utilizando a lei de recorrência mostrada na fase de formulação conforme a (Figura 7), o estudante A3 substitui as diferenças em cada termo, aparecendo assim os números opostos de Fibonacci para eliminação, chegando ao resultado final, como pode-se observar na (Figura 8). Com o mesmo raciocínio, esse estudante faz a prova da identidade 3, a soma dos n primeiros termos de Fibonacci, até a ordem n, para maiores que zero, conforme a (Figura 9).

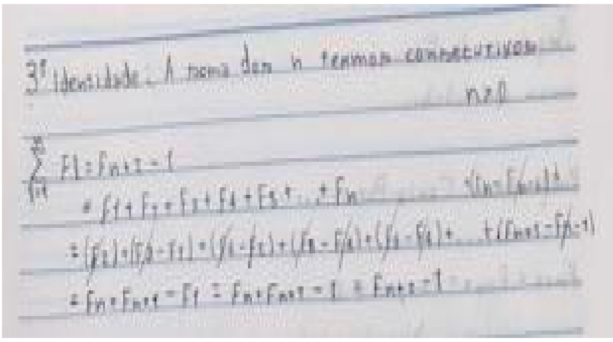

Figura 9. Fase da validação do estudante A3- situação didática 1.
Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Dando continuidade às resoluções, temos a *situação didática 2*, em que os estudantes se deparam com a imagem apresentada na (Figura 3), na qual é fator essencial para prova da identidade 4.

Na (Figura 10), mostra-se a fase da ação e formulação do estudante A4, associando os números de Fibonacci a cada lado de um quadrado, bem como aplicando a propriedade geométrica que é o cálculo da área do quadrado, ou de um retângulo.

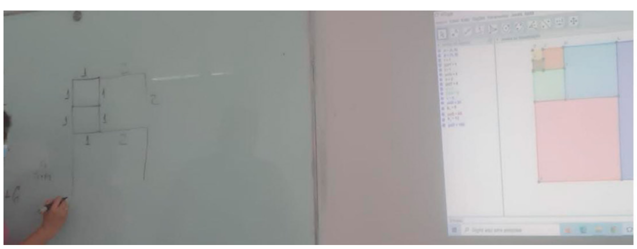

Figura 10. Fase da ação e formulação do estudante A4- situação didática 2.
Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Dessa forma, os estudantes A4 e A2, conseguem visualizar que o mesmo raciocínio utilizado no problema anterior, pode ser aplicado para demonstração da identidade 4, conforme a (Figura 11).

Por fim, o estudante A3 novamente valida a identidade 4, com a ajuda dos demais dos colegas, substituindo as diferenças em cada termo ao quadrado, para posteriormente eliminar os opostos. Assim, é possível gerar a prova da propriedade que traz o somatório dos quadrados igual ao produto de dois números consecutivos maiores que zero, conforme a (Figura 12).

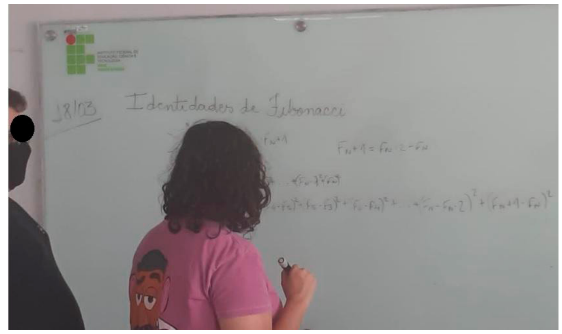

Figura 11. Fase da ação e formulação dos estudantes A4 e A2- situação didática 2.
Fonte: Dados da pesquisa (2022).

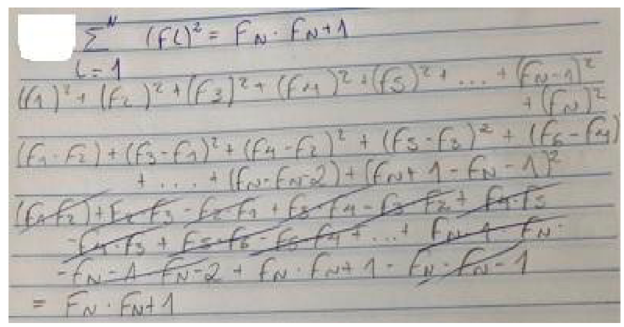

Figura 12. Fase da validação do estudante A3 – situação didática 2.
Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Por fim, a institucionalização é realizada pelo professor ao final de cada resolução das situações didáticas propostas, analisando e apresentando cada identidade construída nas partes anteriores. Logo, o docente mostra a real intenção da atividade que era conhecer as relações com os números de Fibonacci, e que a identidade 4 é uma releitura da espiral de Fibonacci, como mostra a (Figura 13).

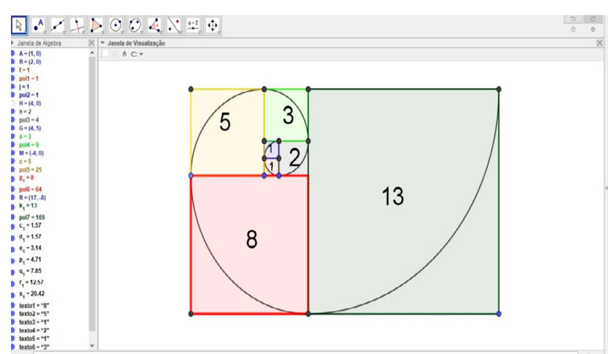

Figura 13. Espiral de Fibonacci.
Fonte: Elaborada pelos autores (2022).

Os estudantes levantaram uma discussão sobre a razão áurea, assunto explorado quando se fala das belezas encontradas na natureza. O professor também acrescentou que essa razão é utilizada nas construções de obras arquitetônicas.

Bem como na tecnologia, como nos televisores e aparelhos celulares, pois a razão áurea é encontrada nas medidas de seus lados, este resultado é conhecido também como o número da perfeição, induzindo o ser humano ter uma visão agradável, a partir deste número, gerando um aumento no consumo.

Os estudantes conseguiram finalizar as resoluções das situações didáticas relacionando as identidades de Fibonacci, por meio de uma visualização geométrica. Dessa forma a validação da pesquisa é feita de imediato, uma vez que os dados coletados e analisados são resultados das aplicações das situações didáticas envolvendo professor e estudantes. Vale ressaltar que a validação foi interna, isto é, não houve comparação dos dados coletados com resultados externos.

Portanto, a validação interna é feita através do confronto das situações didáticas pré-estabelecidas na análise a *priori* com os dados coletados e analisados na análise a *posteriori,* percebendo que os estudantes conseguiram compreender as identidades de Fibonacci por meio de uma visualização geométrica, descobrindo novas informações, que apontam os aspectos cognitivos e didáticos, fazendo uma efetivação da transposição didática e do contrato didático estabelecido.

8. Considerações Finais

Este trabalho é uma parte de uma dissertação de mestrado que vem sendo desenvolvida, responsável por investigar as identidades das sequências recorrentes lineares por meio de visualização geométrica, com um destaque à sequência de Fibonacci. Com base no campo epistêmico-matemático, determinado pela Matemática Pura, foi realizada uma transposição didática de definições e identidades, planejado e desenvolvido um plano didático, com um propósito de transformar esses conteúdos em assuntos a serem ensinados em sala de aula — no caso em uma turma de Licenciatura em Matemática, na disciplina História da Matemática.

Ressaltando que para aplicar as duas situações didáticas, a utilização do software GeoGebra foi de suma importância, pois este recurso tecnológico facilitou a compreensão dos estudantes nos momentos da ação e formulação das hipóteses para resolução dos problemas propostos.

Dessa maneira, a pesquisa foi realizada por meio de um levantamento bibliográfico sobre a sequência de Fibonacci e suas identidades, bem como sobre a Engenharia Didática e a Teoria das Situações Didáticas. Em seguida, a experimentação, onde os estudantes relacionam os números de Fibonacci com as definições e identidades, utilizando as fases da TSD, elencando suas dificuldades encontradas durante o percurso didático, nos momentos das soluções e validações das situações didáticas, sendo assim objetivo alcançado dessa pesquisa.

Por fim, espera-se que este trabalho possa ocasionar pesquisas futuras, com outras sequências recorrentes lineares, ou em outras instituições de ensino que tenham cursos de formação inicial para professores. Dessa forma poderia ser feita uma avaliação externa com a mesma metodologia de pesquisa e amparada por essa teoria de ensino.

9. Referências

Almouloud, S. A. (2007). Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos. *REVEMAT*. Florianópolis (SC), 11(2), 109-141. https://doi.org/10.5007/1981-1322.2016v11n2p109

Alves, F. R. V. (2016). Engenharia Didática para a generalização da sequência de Fibonacci: uma experiência num curso de licenciatura. Educação Matemática Pesquisa: *Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, 18(1). https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/20879

Alves, F. R. V.& Catarino, P. M. M. C. (2017). A Classe dos Polinômios Bivariados de Fibonacci (PBF):Elementos Recentes sobre a Evolução de um Modelo. *Revista Thema*, 14(1),112-136. https://doi.org/10.15536/thema.14.2017.112-136.425

Artigue, M. (2002). *Didatical engineering as a framework forthe conception of theaching products*.In : Didactics of Mathematicsas a discipline , 13 ed, Mathematics Education Library,27-40.

Artigue, M. (1988) Ingénierie didactique. Recherches en Didactique des Mathematiques, 9(3), 281-308.

Brousseau, G. (2008) *Conteúdos e Métodos de Ensino*. In: SILVA, Benedito Antônio da. Introdução ao Estudo das Situações Didáticas. Tradução de: Camila Bogéa. São Paulo: Ática, pp.128.

Brousseau, G. (1986). *Theorisation des phénomènos d" enseignement des mathématiques*. Tese (Doutorado) — These détat, Univesité de Bordeaus I.

Boyer, C. B. (2006). *História da Matemática*. Tradução: Elza F. Gomide. 2 ed. São Paulo: Ed Edgard Blücher,

Carneiro, V. C. G. (2005). Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática. *Zetetike*, Campinas: UNICAMP, 13(23), 85-118. https://doi.org/10.20396/zet.v13i23.8646981

Dunlap, R. A. (2003). *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers*. World Scientific.

Hefez, A. (2003). Elementos de Aritmética. Rio de Janeiro: SBM.

Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas numbers with applications*, Wiley, New York.

Mangueira, M.C.dos S.& Alves, F.R.V. (2020). Números híbridos de Fibonacci e Pell.*Revista Thema*, 17(3), 831-842. https://doi.org/10.15536/thema.V17.2020.831-842.1353

Mangueira, M.C.dos S.& Vieira, R.P.M; Alves, F.R.V.; CATARINO, P.M.M.C. (2021). Uma experiência da Engenharia Didática no processo de hibridização da sequência de Leonardo. *Revista Binacional Brasil Argentina*. 10(2) dez/2021, 271-297. https://doi.org/10.22481/rbba.v10i02.9560

Oliveira, R. R. de. (2018). *Engenharia Didática sobre o Modelo de Complexificação da Sequência Generalizada de Fibonacci: Relações Recorrentes N-dimensionais e Representações Polinomiais e Matriciais*. Dissertação (Mestrado) — Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará (IFCE).

Oliveira, R.R.de & ALVES, F.R.V. (2019). Os números Gaussianos de Fibonacci e relações recorrentes bidimensionais. *Revista: THEMA*, 16(4), .745-754. https://doi.org/10.15536/thema.V16.2019.745-754.133

Oliveira, R. R., Alves, F. R. V.& Paiva, R. E. B. (2017). Identidades Bi e Tridimensionais para os Números de Fibonacci na Forma Complexa. *Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, 11ic,91-106. https://10.21167/cqdvol11ic201723169664rrofrvarebp91106.

Pinheiro, C.P.S.R., Alves, F.R.V., Sousa R.T.& MARINS, A.S. (2021). Engenharia Educacional na abordagem da Sequência de Lucas com a contribuição do GeoGebra: uma experiência no ensino remoto. *Unión: Revista Ibero-Americana de Educação Matemática*, ISSN-e 1815-0640, (63). (Edição dedicada a: Educação Matemática na Pandemia). https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/401

Posamentier, A. S.& Lehmann, I. (2007). The fabulous Fibonacci umbers. New York: Prometheus Books.

Ramos, M. G. O. (2013). A Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Ilhéus: UESC, 93p. http://www.biblioteca.uesc.br/biblioteca/bdtd/201160277D.pdf

Ribeiro, T.N. & Souza, D.N. (2016). A Utilização do software GeoGebra como ferramenta pedagógica na construção de uma unidade de ensino potencialmente significativa (UEPS)ReviSeM,(1), 36 – 51. https://doi.org/10.34179/revisem.v1i1.4507

Sousa, R. T., Azevedo, I. F., & ALVES, F. R. V. (2021). Transposição Didática por meio do GeoGebra como suporte ao ensino de Geometria Analítica. Unión – Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 17(62), 1-20. https://doi.org/10.23925/2237-9657.2020.v9i1p59-75

Wells, D. (2005). Prime Numbers: the mysterious figures in the Math. New Jersey: John Wiley and Sons. Inc.