UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias

DOI: https://doi.org/10.14483/23464712.20239

GÓNDOLA
ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS CIENCIAS
Reflexión documentada

INSTRUMENTO PARA POTENCIAR NOCIONES INTUITIVAS DEL CÁLCULO DE VOLÚMENES DESDE LA PERSPECTIVA DE LOS INDIVISIBLES DE CAVALIERI

INSTRUMENT TO ENHANCE INTUITIVE NOTIONS OF VOLUME CALCULUS FROM THE PERSPECTIVE OF CAVALIERI'S INDIVISIBLES

INSTRUMENTO PARA APRIMORAR NOÇÕES INTUITIVAS DE CÁLCULO DE VOLUME NA PERSPECTIVA DOS INDIVISÍVEIS DE CAVALIERI

Angie Daniela Pinilla Castañeda*, Alejandra Díaz Hernandez Cristian Daniel Castellanos*****

Como citar este artículo: Pinilla, A., Díaz, A., Castellanos, C. (2024). Instrumento para potenciar nociones intuitivas del cálculo de volúmenes desde la perspectiva de los indivisibles de Cavalieri. *Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias*, 19 (1), pp. 88-102. DOI: https://doi.org/10.14483/23464712.20239

Resumen

La enseñanza sistemática y teórica que se ha dado del cálculo en la educación básica y media, responde principalmente al uso y memorización de fórmulas matemáticas totalmente formales, inconexas de la realidad y faltantes de una significativa comprensión. Ante esta situación, el presente artículo centra su interés en el diseño y aplicación de un Instrumento manipulativo tangible teniendo como inspiración la perspectiva de "indivisibles" de Cavalieri, de tal manera que promueva actividades matemáticas e ideas intuitivas hacia procesos de aprendizaje significativo de la integral respecto al cálculo y comparación de volúmenes; caracterizando e interpretando los procesos intuitivos en la enseñanza de la integral, así como las actividades matemáticas emergentes. Lo anterior parte de una metodología cualitativa e interpretativa, mediante la cual se aplica el recurso sobre un grupo de estudiantes de grado once, mediados por diferentes actividades y preguntas orientadoras a lo largo del estudio, mismas que generaron discusión y evidencias de nociones primarias de límite, infinito (potencial y actual) e infinitesimal, vinculadas a la caracterización epistémica de la integral, al dejarse guiar por la percepción y manipulación; asimismo, se expresaron algunas generalizaciones en cuanto al cálculo de volúmenes. Finalmente, se considera que fomentar el uso no solo del recurso diseñado, sino de cualquier tipo de instrumento cuya construcción y manipulación involucren una

Recibido: Diciembre 2022; Aprobado: Septiembre 2023

* Docente Licenciado en Matemáticas, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia, pinillaangie05@gmail.com, https://orcid.org/0000-0003-2142-0832

** Docente Licenciado en Matemáticas; Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia, aleja011799@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-4445-881X

*** Docente Licenciado en Matemáticas; Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia, cristianz300@hotmail.com, https://orcid.org/0000-0003-0668-1217

conexión directa con los desarrollos históricos primarios de manera consciente o inconsciente, genera en los sujetos perspectivas inicialmente intuitivas que potencializan los significados asociados a la integral para el cálculo de volúmenes, dotando igualmente de diferentes sistemas de representación los múltiples conceptos matemáticos puestos en juego para dar respuesta a las preguntas orientadoras durante el desarrollo de la actividad propuesta.

Palabras-Clave: Educación; matemáticas; didáctica; aprendizaje por descubrimiento; intuición; material didáctico.

Abstract

The systematic and theoretical teaching of calculus in elementary and secondary education is mainly based on the use and memorization of mathematical formulas that are totally formal, unconnected to reality and lacking in meaningful understanding. In view of this situation, this article focuses on the design and application of a tangible manipulative instrument inspired by Cavalieri's "indivisible" perspective, in such a way that it promotes mathematical activities and intuitive ideas towards meaningful learning processes of the integral with respect to the calculation and comparison of volumes; characterizing and interpreting the intuitive processes in the teaching of the integral, as well as the emerging mathematical activities. The above is based on a qualitative and interpretative methodology, through which the resource is applied on a group of eleventh grade students, mediated by different activities and guiding questions throughout the study, which generated discussion and evidence of primary notions of limit, infinity (potential and actual) and infinitesimal, linked to the epistemic characterization of the integral, when guided by perception and manipulation; also, some generalizations were expressed regarding the calculation of volumes. Finally, it is considered that encouraging the use not only of the designed resource, but of any type of instrument whose construction and manipulation involve a direct connection with the primary historical developments in a conscious or unconscious way, generates in the subjects initially intuitive perspectives that potentiate the meanings associated to the integral for the calculation of volumes, also providing different representation systems for the multiple mathematical concepts put into play to answer the guiding questions during the development of the proposed activity.

Keywords: Education; mathematics; didactics; learning by discovery; intuition; didactic material.

Resumo

O ensino sistemático e teórico do cálculo no ensino básico e secundário baseia-se principalmente na utilização e memorização de fórmulas matemáticas totalmente formais, sem ligação à realidade e sem compreensão significativa. Perante esta situação, este artigo centra o seu interesse na conceção e aplicação de um instrumento manipulativo tangível inspirado na perspetiva "indivisível" de Cavalieri, de modo a promover actividades matemáticas e ideias intuitivas para processos de aprendizagem significativa do integral no que diz respeito ao cálculo e comparação de volumes; caraterizar e interpretar os processos intuitivos no ensino do integral, bem como as actividades matemáticas emergentes. O exposto baseia-se numa metodologia qualitativa e interpretativa, através da qual o recurso é aplicado a um grupo de alunos do décimo primeiro ano, mediado por diferentes actividades e questões orientadoras ao longo do estudo, que geraram discussões e evidências de noções primárias de limite, infinito (potencial e real) e infinitesimal, ligadas à caraterização epistémica do integral, quando orientadas pela perceção e manipulação; algumas generalizações foram também expressas em termos do cálculo de volumes. Por fim, considera-se que incentivar o uso não só do recurso concebido, mas de qualquer tipo de instrumento cuja construção e manipulação envolva uma ligação direta com desenvolvimentos históricos primordiais de forma consciente ou inconsciente, gera nos sujeitos perspectivas inicialmente intuitivas que potenciam os significados associados ao integral para o cálculo de volumes, proporcionando também diferentes sistemas de representação para os múltiplos conceitos matemáticos postos em jogo para responder às questões orientadoras durante o desenvolvimento da atividade proposta.

Palavras-Chave: Educação; matemática; didática; aprendendo pela descoberta; intuição; material didático

1. Introducción

La cotidianidad del ser humano se ve usualmente permeada por diferentes tipos de problemas, algunos de estos suponen una necesidad inmediata de los objetos ligados a las matemáticas, particularmente al cálculo. En este sentido, la apropiación de los objetos matemáticos requieren de una comprensión no solamente algorítmica sino conceptual, vinculando los aspectos más elementales del objeto ligados a la intuición, pues si bien, un sujeto puede aplicar conceptos matemáticos a ejercicios mecánicos y dar soluciones a los mismos, no sucede lo mismo cuando debe aplicarlos a otros contextos, es así como una verdadera comprensión surge cuando el objeto matemático es utilizado en múltiples contextos, transponiendo y adaptando los conceptos adquiridos previamente y no solamente en situaciones particulares.

Por tanto, en el aprendizaje del cálculo se manifiestan diversas dificultades frente a la óptima comprensión de elementos propios de este, como lo son las nociones de infinito, límite, continuidad y los conceptos de derivada e integral. Frente a esta última, se ha evidenciado que el proceso de enseñanza-aprendizaje se basa en un enfoque puramente teórico, en la repetición de fórmulas y la memorización de leyes y propiedades, donde el estudiante no comprende el origen de su uso, la importancia y la aplicación de la misma en la geometría o en la vida real. Ante esto, Llorens y Santonja (citados en Cantoral y Cabañas, 2011) exponen que, para los estudiantes, la integral:

> No comporta ningún proceso de convergencia ni tampoco ningún aspecto geométrico. Es, por tanto, un proceso puramente algebraico, más o menos complicado y, siempre, autocontenido, de modo que un estudiante puede conocer distintos métodos de integración e, incluso, saber aplicarlos con cierta soltura (integrales por partes, de funciones racionales, trigonométricas, etc.) y, al mismo tiempo, no ser capaz de aplicarlos al cálculo de un área o ignorar por completo qué son las sumas de Riemann, etc. (p. 21-22)

De este modo, la significación del objeto se ve arraigada a mecanismos de enseñanza repetitivos que dificultan una transversalidad de los conceptos, así pues, la perspectiva de objetos matemáticos como la integral, lejos de guardar sentido para el estudiante, resultan abstractos y aplicados solamente en condiciones específicas, pues para ellos no existe relación alguna entre, por ejemplo, las integrales definidas y el área, dado que se mantiene solo un enfoque algebraico y sistemático del concepto.

Es entonces, precisamente en la educación secundaria cuando se manifiesta de manera directa una matemática formal en el sentido algebraico, la cual genera que el estudiante comprenda las nociones desde una perspectiva abstracta y un razonamiento en términos proposicionales, dirigidos por reglas lógicas como: principios, leyes, teoremas y fórmulas, para emplearlos en situaciones particulares, dejando de lado la intuición, la experiencia y las conjeturas que permitieron que esa matemática formal sea lo que es ahora y, a su vez, ocasionando una comprensión como un proceso mecánico y no como un aprendizaje significativo y constructivo. Dado lo anterior, recae la importancia de posibilitar estos procesos desde la enseñanza de los elementos iniciales del cálculo, buscando preponderantemente nuevas orientaciones en las metodologías empleadas para el abordaje de la integral en el aula, como puede ser el potencializar las prácticas matemáticas a partir de elementos desarrollados a lo largo de la historia, donde el estudiante pueda generar perspectivas de intuición y formalización en el desarrollo de este.

Bajo esta idea, durante el seminario de "didáctica del cálculo" de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, se diseña un instrumento/actividad didáctica que fomenta los razonamientos intuitivos de los estudiantes a partir de la manipulación de recursos tangibles, elaborados específicamente para orientar las concepciones de los objetos matemáticos hacia los planteamientos desarrollados por Cavalieri respecto al cálculo de volúmenes. En este sentido, el presente artículo centra su estudio en la construcción de un instrumento tangible, que inspirado bajo perspectivas históricas-epistémicas de los razonamientos Cavalieri, busca enseñar a estudiantes de grado once el concepto de integral, con el fin de promover en los alumnos elementos intuitivos propios del objeto matemático en cuestión. Asimismo, se analizan las actividades matemáticas que surgen en la manipulación del instrumento, según la clasificación de Giaquinto (2005) y los procesos de intuición.

En este sentido, se plantea un análisis de los procesos llevados a cabo por los estudiantes durante la aplicación de la actividad/instrumento, siendo esta una propuesta didáctica enfocada al cálculo de volúmenes de sólidos, que vincule los primeros acercamientos intuitivos de los estudiantes de este objeto, hasta llegar a unas primeras generalizaciones del concepto de la integral para el cálculo de volúmenes, favoreciendo sobre todo los procesos mentales a partir de la manipulación de materiales didácticos concretos, pues como lo afirma Gómez (2000):

> Tenemos intuición porque tenemos representaciones mentales de los objetos matemáticos. Adquirimos estas representaciones no por memorización de fórmulas verbales, sino a través de reiteradas experiencias (en el nivel elemental, la experiencia de la manipulación de objetos materiales; en un nivel superior, la experiencia de resolver problemas y de descubrir cosas por nosotros mismos). (p.30)

De acuerdo con lo anterior, estás primeras representaciones mentales intuitivas a partir de objetos tangibles y la experimentación con los mismos, darán paso a tener una comprensión significativa del estudio de volúmenes de sólidos, cuando este se manifieste en un nivel superior.

2. Marco referencial.

La enseñanza del cálculo en la educación formal presenta una serie de complicaciones que lleva a dar interpretaciones sumamente abstractas de los conceptos asociados, dificultando su enseñanza y aprendizaje. Respecto a esto, diversos autores como Artigue (2001) o Salinas y Alanís (2009), concuerdan en que la comprensión de la mayoría de los estudiantes frente a un elemento como la integral tiene una serie de vacíos conceptuales que imposibilita su apropiación e interiorización. Del mismo modo, mencionan que el principal factor que determina esta serie de dificultades en el entendimiento de los alumnos, refiere justamente a los métodos de enseñanza empleados por los docentes, los cuales priorizan el tratamiento algorítmico, algebraico y repetitivo. En palabras de Artigue (2003):

> La mayoría de los alumnos piensa que la forma más segura de enfrentarse con éxito a este dominio no es intentar comprender, sino simplemente comportarse mecánicamente. Me gustaría añadir que no tenemos que ver esto como una especie de fatalidad cognitiva. Simplemente observamos las formas económicas de adaptación de nuestros alumnos a prácticas docentes inadecuadas. (p. 124)

Referente a lo anterior, Piccone (2007), retoma los planteamientos de Duval respecto a las representaciones semióticas, pues según este, en la enseñanza de las matemáticas, el dominio de múltiples registros de representación para un mismo objeto es garante de un nivel de comprensión mayor que le permite a los estudiantes el desarrollo de un aprendizaje significativo, así como la reestructuración de su estructura cognoscitiva. Según esto, "para analizar las dificultades en matemáticas, es necesario estudiar las conversiones de representaciones y no los tratamientos, debido a que la capacidad de convertir representaciones implica la coordinación de las mismas" (p. 38).

2.1. Los recursos didácticos en la enseñanza de las matemáticas

Dadas estas consideraciones, es importante contemplar el papel de los recursos didácticos necesarios para la implementación de una propuesta de enseñanza, pues particularmente en la educación matemática, el uso de estos conjuntamente con situaciones problema pertinentes, permite una mejor comprensión de los objetos, facilitando herramientas que orienten los razonamientos a una perspectiva intuitiva, logrando asociar los enfoques numéricos, algebraicos y gráficos en pro de un aprendizaje significativo (García y José, 2013). En este sentido la clasificación propuesta por Godino, Batanero & Font (2003) expone que los recursos didácticos se pueden dividir en dos tipos: el primero se define como "ayudas al estudio" y el segundo como "Materiales manipulativos que apoyan y potencian el razonamiento matemático" (p. 128) Este último se subclasifica en dos tipos de materiales:

- Manipulativos tangibles: Entendiéndose como aquellos donde se desarrolla la percepción táctil (regletas, ábacos, origami, etc.)
- Manipulativos gráfico- textuales-verbales: Aquellos en los que interviene la percepción visual y/o auditiva (gráficos, símbolos, videos, juegos digitales)

Respecto a estos recursos en la educación matemática López, Balletbo y Fernández (2003) expresan que "la manipulación, el tacto, la vista y el dibujo deben permitir al alumno habituarse a las figuras, formas y movimientos de su entorno para posteriormente establecer las abstracciones correspondientes" (p. 27). Por su parte, Moreno y Farah y Bahirahand y Zuraida (Citados en Meza, 2020) afirman que "si en la escuela se utilizan adecuadamente los materiales manipulativos, se lograrán aprendizajes significativos, producto de las interacciones entre el estudiante y los materiales manipulativos, lo cual permitirá, avanzar a una representación gráfica y luego simbólica" (p. 23). Así pues, dentro de la propuesta de enseñanza es necesario facilitar a los estudiantes la posibilidad de contar con diferentes herramientas que les permitan modelar e interpretar una situación problema, pasando desde lo concreto y manipulativo a lo abstracto y formal.

Del mismo modo, las dificultades que involucra el aprendizaje de este concepto (integral) se encuentran mediadas por otro factor como lo es la secuencia de actividades en el contexto. Respecto a esto Artigue (2003) expone que el planteamiento del trabajo a desarrollar por los alumnos debe permitir una misma interpretación para múltiples contextos, de tal manera que estén en condiciones de comparar los procesos de solución desarrollados para su análisis, esto con el objetivo de convertir el proceso integral en una herramienta explícita.

2.2. Procesos intuitivos y perspectiva de Cavalieri en el contexto del cálculo

Referirse a la enseñanza de un concepto matemático como lo es la integral en el cálculo, inherentemente implica el estudio de los procesos coextensivos de intuición y formalización, pese a que la propuesta de actividad no busca el formalismo de la integral, se centra su atención en generar comprensiones intuitivas por parte de los estudiantes que influyan hacia la significación de objetos en el cálculo, pues Armella (2014), critica duramente el programa académico tradicional centrado en el formalismo:

> [...] dicho programa se impulsó desde una epistemología de las matemáticas alejada del naturalismo que animaba a los desarrollos de la primera edad del cálculo. Más adelante podremos regresar al análisis de dicha epistemología, pero de inmediato queremos señalar que ese cambio de marco epistémico, al trasladarse a la enseñanza, generó y sigue generando desequilibrios graves en los procesos de aprendizaje. (p. 190)

Así pues, al priorizar estos elementos de análisis se caería en el recurrente error de la educación tradicional, que invisibiliza el enfoque constructivo del conocimiento para dar paso a elementos refinados, estáticos, abstractos y descontextualizados.

Dado lo anterior, es importante señalar que se entienden estos dos conceptos (intuir y formalizar) como extremos de un mismo proceso coextensivo. No obstante, el instrumento propuesto centra sus alcances en generar perspectivas intuitivas en los alumnos, sin que esto sea un compromiso para desarrollar procesos de formalización en los mismos. De este modo, la intuición está definida como las interpretaciones o juicios iniciales que tiene el individuo frente a una situación problema basado en sus experiencias y conocimientos previos. Respecto a esto, Ruiz (2003) retoma los planteamientos de Kant, afirmando así que “La noción de construcción va unida a la de intuición; hacer matemáticas es construir en la intuición” (p. 493). Igualmente expone que “Kant apunta a la intervención de un objeto en las conexiones deductivas, y llama intuición a la capacidad o condición que hace posible eso.”

En este sentido, refiriéndose a las instancias iniciales del cálculo, siendo estas el trabajo sobre límites, derivadas e integrales (en su estado primitivo), podrían asumirse como pensamientos intuitivos aquellos asociados a los razonamientos deductivos de los individuos frente a una situación problema, tales como la tendencia a un punto, la idea primaria de infinito (potencial y actual) y la sumatoria de secciones planas para completar un sólido, siguiendo los pensamientos de Cavalieri.

Este último autor, usando el concepto de "indivisible" desde la dimensionalidad y la completez de cantidades, buscaba encontrar un procedimiento más general y riguroso del cálculo de áreas de figuras planas y volúmenes de sólidos, para ello, consideraba que las figuras geométricas estaban conformadas por indivisibles de dimensión menor a la inicial. En este sentido, las líneas estaban conformadas por puntos, las figuras planas por rectas equidistantes de una recta dada y los sólidos estaban compuestos por planos paralelos a una determinada base (Barrios, s.f). Por lo cual, la medida de una longitud, una superficie o un volumen estaba relacionado con la suma de pequeñas secciones que pudieran considerarse indivisibles.

2.3. Actividad matemática

Según afirman Ocampo-Arenas, Parra-Zapata y Villa-Ochoa (2020), la actividad matemática es un concepto sumamente amplio que ha sido centro de estudio tanto en aspectos vinculados a las matemáticas escolares, como a la filosofía de las matemáticas, estos autores aseguran que según el enfoque que se dé a este campo las implicaciones en el aula de clase varían.
En este sentido, se consideran los planteamientos de Ponte (2004) quien entiende la Actividad Matemática como las acciones realizadas por los

Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias
e-ISSN: 2346-4712 Vol. 19, No. 1 (enero - abril, 2024), pp. 88-102

estudiantes al enfrentarse con una tarea propuesta por el docente o el alumno, del mismo modo, afirma que la resolución de esta tarea es el objetivo de la actividad matemática. En sus palabras:

> [...] La tarea puede ser formulada por el profesor y propuesta al alumno, puede surgir por iniciativa del propio alumno y hasta puede ser negociada entre el profesor y el alumno. En cualquiera de ambos casos, cuando un alumno está implicado en la actividad matemática, está realizando cierta tarea. El profesor no dispone de medios para intervenir directamente en la actividad del alumno, pero puede y debe preocuparse de la formulación de las tareas, del modo de proponerlas y de dirigir su realización en el aula. (p. 26)

Este planteamiento es respaldado por Obando (2015), para quien la actividad matemática del estudiante y del docente van ligadas, dado que las acciones que los estudiantes realizan son definidas por las tareas que propone el docente.
Es así como la actividad matemática es entendida como el conjunto de acciones que realizan los estudiantes en el abordaje y desarrollo de una situación problema, dichas acciones van ligadas a las capacidades, conocimientos y contextos en los que se desenvuelve el estudiante.
En este sentido, y para fines del presente artículo, se tomará a consideración la caracterización de actividades matemáticas que propone Giaquinto (2005): descubrimiento, explicación, formulación, aplicación, justificación y representación, las cuales describen las acciones llevadas a cabo por los estudiantes ante diversas situaciones matemáticas propuestas.

3. Metodología

Se construye un instrumento didáctico inspirado en los planteamientos de los objetos del cálculo propuestos por Cavalieri, como medio de interacción manipulativa que permita a los participantes producir algunos primeros acercamientos intuitivos del concepto de integral en el cálculo de volúmenes, por lo cual, el trabajo de campo realizado responde principalmente a una investigación con enfoque netamente cualitativo, desde una perspectiva interpretativa, pues, de acuerdo con Maanen (citado en Bohórquez y Ortíz, 2020)
El método cualitativo puede ser visto como un término que cubre una serie de métodos y técnicas con valor interpretativo que pretende describir, analizar, decodificar, traducir y sintetizar el significado, de hechos que se suscitan más o menos de manera natural. (p.4)

Ahora bien Según Vain (2012) se deben considerar dos narrativas: las que hacen los participantes en cuanto a su práctica y los discursos que expresan; y las que hacen los investigadores, a partir de lo que observan , por lo cual "quien investiga puede describir e interpretar situaciones, eventos, personas, interacciones y comportamientos que son observables; incorporando lo que las personas participantes dicen, sus experiencias, actitudes, creencias, pensamientos y reflexiones tal y como los expresan" . (Fraile; Vizcarra, 2009, p. 121)

Asimismo, con el fin de mantener la rigurosidad en el estudio, se planteó previamente una serie de actividades conformadas por preguntas semiestructuradas que fueron discutidas entre los participantes y los moderadores (tabla 1), por lo cual, la técnica implementada para recoger la información se basó en la discusión grupal; Morgan (1998) indica que esta técnica permite recolectar la información por medio de la interacción de un tema particular entre un grupo de participantes y el investigador.

Las argumentaciones y explicaciones realizadas por los participantes en torno a las situaciones problema que planteaba el moderador, fueron también registradas textualmente y analizadas por los observadores. El análisis se basó principalmente, en la caracterización expuesta por Armella (2014) en cuanto a procesos de intuición y en Giaquinto (2005) respecto a las actividades matemáticas.

3.1. Participantes

Se seleccionó un curso particular de grado once pertenecientes al Colegio El Bosque, ubicado en la comuna cinco (San Mateo) del municipio de Soacha, Cundinamarca, cuyo rango de edad se encuentra entre los 17 y 19 años. El desarrollo de la actividad tuvo una duración de tres horas y se realizó de manera grupal, por lo tanto, se obtuvieron 8 equipos de 4 estudiantes, quienes no habían tenido ningún acercamiento durante su educación al concepto de integral.

3.2. Instrumento

La figura 1 presenta el recurso tangible basado en las "torres de Hanói", formado por una tabla y un cilindro en el medio, en el cual se introducen piezas de cartulina en forma de figuras geométricas, el primero, tiene áreas iguales y el segundo presenta círculos cuyos radios varían de una pieza a otra, las alturas de cada pieza de ambos sólidos son del grosor de una cartulina, esto con el fin, de construir un sólido mayor a partir de la introducción de todas las piezas una sobre otra, dichas piezas tienen la particularidad de tener una abertura en el medio, de tal manera que el sólido construido pueda cambiar de forma.

El propósito de este instrumento, es conducir a los estudiantes a generar perspectivas intuitivas de conceptos propios del cálculo que se han generado a lo largo de la historia como los desarrollos de Cavalieri (1598-1647) respecto al cálculo y comparación de volúmenes a partir de "indivisibles".

Figura 1: recurso manipulativo tangible, elaboración propia

4. Hipótesis respecto a los objetos matemáticos.

La propuesta realizada está enfocada inicialmente en el cálculo de volúmenes a partir del concepto de “indivisibles” desarrollado por Bonaventura Cavalieri, con base a esto, se pretende que el estudiante construya por medio de materiales manipulativos tangibles diferentes sólidos cuyo volumen esté conformado por “infinitas áreas”.
Progresivamente, mientras el alumno estudia el sólido y teniendo en cuenta algunas preguntas orientadoras, se pretende que este encuentre sentido a los objetos matemáticos que emergen en la exploración del sólido y logre expresar algunas generalidades frente al cálculo de volúmenes a partir de la sumatoria de sus "indivisibles". La tabla 1 presenta la secuencia de actividades, preguntas que se realizan y el resultado esperado en cada momento.

5. Resultados

5.1. Procesos De Intuición

Como se planteó anteriormente, para realizar una óptima interpretación e identificación de las actividades matemáticas manifestadas por los estudiantes, es pertinente analizar los procesos intuitivos asociados a los elementos iniciales del cálculo durante la construcción de su significado. De este modo, a continuación se presenta una comparación frente a los planteamientos que propone Cavalieri frente al cálculo de volúmenes a partir de indivisibles y los resultados obtenidos. La figura 2 presenta uno de los pensamientos intuitivos más recurrentes en el grupo de estudiantes para hallar la altura de cada pieza, determinando cuántas fichas conforman un Xcm y dividir X centímetros entre la cantidad encontrada.

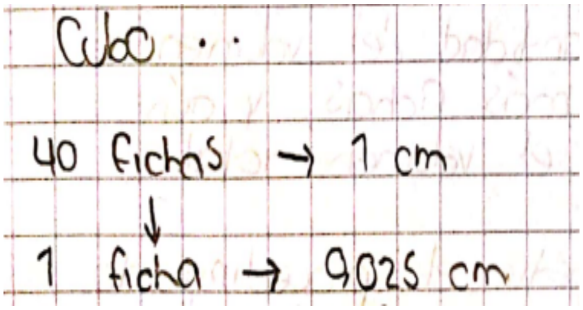


Figura 2: Altura de una pieza. **Fuente:** propia

Tabla 1. Secuencia de actividades e hipótesis de aprendizaje

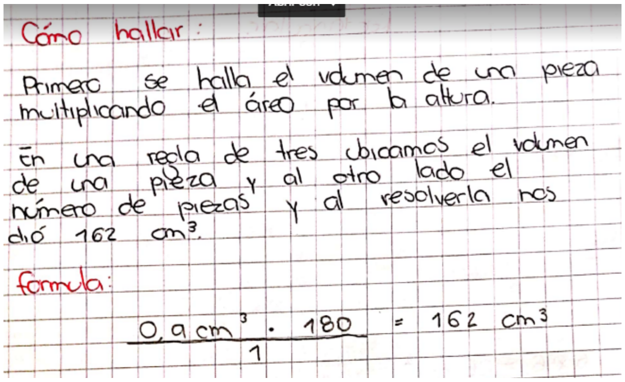
Momentos	***Propósito***	***Preguntas de discusión grupal***	***Hipótesis Respecto A Los Objetos Matemáticos***
1	- Se identifican los conocimientos previos de los alumnos respecto al cálculo de áreas y volúmenes. - Se brinda a los estudiantes el primer recurso descrito en la figura 1, de tal forma, que puedan tener una primera interacción.	- ¿Qué es un sólido?, ¿Qué es el volumen?, ¿Cómo se puede calcular el volumen? - ¿Para qué crees que sirve este recurso? - ¿Qué se puede realizar con el recurso?	Primer vistazo al recurso y su relación con aspectos de la geometría.
	- El moderador solicita crear un sólido a partir de las piezas dadas.	- ¿Cómo se podría calcular el volumen del sólido construido sin tener en cuenta las fórmulas tradicionales? - Si se desplazan las piezas, ¿El sólido resultante tiene un volumen diferente al inicial?	Inferencias iniciales sobre la conservación del volumen del sólido y un primer acercamiento a la idea de indivisibles.
2	**-** Los estudiantes interactúan con el recurso, mientras discuten sobre las preguntas planteadas por el moderador.	- Si la altura de las piezas, pudiera dividirse cada vez más, ¿Qué pasaría con los valores de esta? - ¿Aumentaron las piezas que conforman el sólido? - ¿Cuál sería el volumen del sólido mayor?	Conjetura que el volumen del sólido está conformado por una cantidad sucesiva de sólidos cuya forma será igual al sólido mayor y cuyas alturas cada vez tenderán a 0. El volumen del sólido está conformado por una cantidad sucesiva de sólidos menores, de modo que entre más pequeña sea la altura de cada indivisible, más indivisibles conformarán el sólido total.

	- Primeros acercamientos intuitivos. Los estudiantes encuentran una relación entre la suma de los volúmenes de cada pieza, y el volumen total del sólido construido.	- Describe la hipótesis o generalidad a la que has llegado respecto a la relación entre el volumen de las piezas y el volumen total del sólido	Surge la idea que al dividir un objeto infinitamente, se obtendrán objetos infinitamente pequeños sin llegar a tener medida cero. El número de piezas que conforman el sólido asciende progresivamente a infinito sin cambiar el volumen del sólido total. Suma cada "indivisible" para hallar el volumen del sólido. Se espera que establezca generalizaciones entre los sólidos infinitesimales que conforman el sólido mayor y volumen de este último
3	Se brinda a los estudiantes el segundo recurso descrito en la figura 1, de tal forma que puedan construir un sólido con radios de diferentes tamaños.	- ¿Cuáles diferencias encuentras entre este sólido y el sólido construido al inicio? - ¿El volumen de todas las piezas es el mismo?	Articula ideas de variación de magnitudes a los conceptos desarrollados previamente a fin de encontrar una forma general para calcular el volumen del segundo sólido.
	- El moderador presenta en un software dinámico "GeoGebra" como las figuras de diferente tamaño (radio variante) conforman un sólido mayor.	- Teniendo en cuenta las ideas obtenidas en los sólidos anteriores, ¿cómo podrías calcular el volumen del sólido total?	

Distribución de preguntas, propósitos e hipótesis frente a los objetos matemáticos emergentes. **Fuente:** propia

Una vez obtenido el volumen de cada pieza, cinco de los ocho equipos de estudiantes exponen estrategias similares para determinar el volumen total del sólido (cilindro, paralelepípedo triangular y rectangular); esta consiste en multiplicar el valor obtenido del volumen de cada lámina por la cantidad total de láminas que conforman el sólido (figura 3). Lo anterior, lleva a interpretar estos razonamientos en el marco de la práctica de Cavalieri, pues, aunque se les preguntaba directamente por el volumen del sólido construido, los estudiantes mantienen la perspectiva de que estos estaban conformados por las diferentes piezas, mismas que para este caso son consideradas como los "indivisibles", y que al sumar todos los volúmenes o al multiplicar el volumen de una pieza por la cantidad de fichas determinan el volumen del sólido.

Por otra parte, los grupos faltantes consideraron hacer uso de la fórmula "tradicional" para hallar el volumen de los paralelepípedos. Estos grupos, al contrario de los anteriores, cambian la perspectiva de un sólido estructurado de múltiples piezas a un sólido como única pieza.



Cómo hallar:

Primero se halla el volumen de un pieza multiplicando el área por la altura.

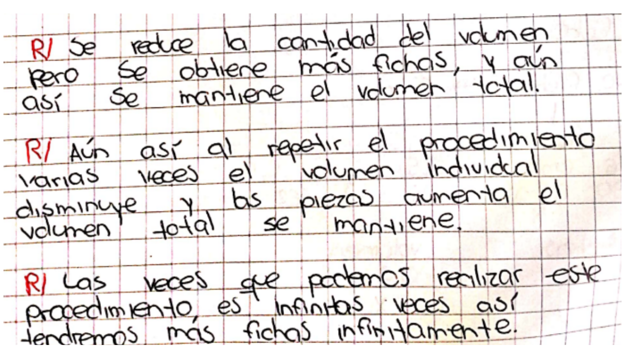
En una regla de tres ubicamos el volumen de una pieza y al otro lado el número de piezas y al resolverla nos dió 162 cm^3.

formula:

$$\frac{0,9\,cm^3 \cdot 180}{1} = 162\ cm^3$$

Figura 3: Estrategias para el cálculo del volumen. **Fuente:** propia

Posteriormente, cuando se les pregunta a los estudiantes acerca de la división de las alturas de cada pieza, se obtienen pensamientos intuitivos que dan indicios de la noción de infinito actual e infinito potencial (figura 4). Puesto que, por un lado, exponen que la altura de estas fichas puede dividirse un número "infinito" de veces, aunque la altura sea cada vez menor, asumiendo la perspectiva del infinito como un conjunto estático de elementos (infinito actual). Por otro lado, los argumentos que surgen por parte de los estudiantes respecto a la cantidad de las piezas que conforman el sólido en este proceso, refiere a una aproximación a la idea de infinito potencial, pues argumentan que al dividir estas piezas deberán aumentar en cantidades cada vez mayores para completar el mismo sólido.



R/ Se reduce la cantidad del volumen pero se obtiene más fichas, y aún así se mantiene el volumen total.

R/ Aún así al repetir el procedimiento varias veces el volumen individual disminuye y las piezas aumenta el volumen total se mantiene.

R/ Las veces que podemos realizar este procedimiento, es infinitas veces así tendremos más fichas infinitamente.

Figura 4: Aproximaciones a la idea de infinito. **Fuente:** propia

Además de las respuestas obtenidas anteriormente, refiriéndose hacia el infinito potencial y actual, se obtuvo una respuesta más puntual por parte de uno de los alumnos quien afirma que este proceso de división puede realizarse de forma infinita, pero esto implica que la altura de la pieza se acercara cada vez más a cero, lo que evidencia una noción muy intuitiva de la tendencia o límite así como de la idea de indivisible; lo anterior teniendo en cuenta que se plantean alturas tan pequeñas que en últimas sean indistinguibles de 0. Por otro lado, en lo referente a la tendencia, el estudiante plantea una perspectiva dinámica de una variable (altura de las piezas), acercando está cada vez más a un valor estático, en este caso el 0.

Ahora bien, respecto al momento número tres, cuando se construye la figura curva y se pregunta por las diferencias de los sólidos construidos a lo largo de la sesión, los estudiantes hacen afirmaciones respecto a lo que pueden observar, lo que se puede caracterizar como un proceso intuitivo, dado que, estas respuestas aluden al cambio de tamaño de las figuras y volúmenes, además, expresan estos tamaños y longitudes de radio como una "variación" refiriendo al cambio.

Asimismo, a la hora de ingeniar una estrategia para determinar el volumen de la figura curva, los grupos exponen que: primero, se podrían agrupar las circunferencias con "mismo tamaño", luego, se calcula el volumen de cada cilindro que se forme y finalmente, se suman los cilindros obtenidos para hallar el volumen del solido total. Estas ideas dadas por los estudiantes se consideran como procesos inicialmente intuitivos, puesto que, se dejan guiar por la percepción al clasificar las circunferencias según el tamaño (figura 5), pero no tienen en cuenta que, aunque el cambio sea milimétrico las circunferencias no son iguales.

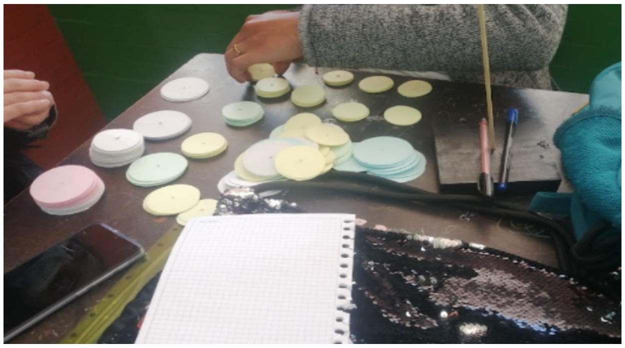


Figura 5: Clasificación de piezas por tamaño. **Fuente:** propia

Finalmente, respecto a la significación del objeto se puede decir que, en un primer momento los estudiantes logran construir una perspectiva intuitiva de acumulación, dado que, concretan la idea de sumar los volúmenes de las piezas para determinar el volumen del sólido total. Esto lo hacen gracias a sus conocimientos previos, como las fórmulas de área, volumen, entender que una suma iterada se puede abreviar en una multiplicación, y la noción de acumulación en el cálculo.

Por otro lado, para el último momento planteado en la sesión (respecto al sólido curvo), los estudiantes dan indicios de una generalidad al querer transponer el procedimiento de "sumas de volúmenes" que se generó con los prismas iniciales, al cálculo del volumen del sólido curvo. La idea empleada para determinar el volumen de este sólido se queda justamente como "ideas intuitivas primarias", pues, todas las estrategias se basan en las percepciones (lo que observan, lo que deducen desde la construcción) y sus conocimientos previos.

5.2. Actividades matemáticas

Para fines del presente estudio se tomará a consideración la caracterización de actividades matemáticas que propone Giaquinto (2005) y se analizarán cuáles de estas fueron relevantes en la aplicación del instrumento frente a las situaciones propuestas para el cálculo de volúmenes, puesto que, el conjunto de estudiantes que participó en la propuesta no reflejo haber utilizado todas las actividades matemáticas.

Tabla 2. Actividades matemáticas

Componente	*Definición*	*Evidencia*
Descubrimiento	Revelar propiedades de los objetos matemáticos en la resolución de una situación.	Cuando la altura de los sólidos menores es dividida constantemente en la mitad, el número de fichas se incrementará infinitamente, su altura tenderá a cero y el número de fichas, aunque son infinitas serán infinitamente pequeñas (figura 4).
Explicación	*Objetiva:* La posibilidad de argumentar con base en los conocimientos matemáticos construidos en el desarrollo de otra situación	Aplica una relación de proporción, entendida como "regla de tres", estableciendo una relación entre el volumen de cada sólido menor y el número total de los mismos (figura 3). Ejecuta la fórmula de volumen de un prisma triangular ($\acute{a}rea\ de\ la\ base \cdot altura$), tomando la regla para medir su altura y las medidas de su base para determinar su área.
	Subjetiva: posibilidad de argumentar el razonamiento realizado en el desarrollo de una situación	Para calcular el volumen de un sólido, se efectúa la suma sucesiva de los sólidos menores o "indivisibles" que lo conforman,

		pues pese a que se conoce la expresión simbólica para hallar el volumen de un prisma rectangular y el de un cilindro, los estudiantes optan en una primera instancia por contar uno a uno los sólidos menores.
Formulación	Construcción y enunciación de algoritmos que permitan el desarrollo de diferentes situaciones parecidas o análogas a la que se está resolviendo	Hallar el volumen de uno de los sólidos menores, teniendo en cuenta el área de la base y su altura, para finalmente, multiplicar el número de sólidos menores con el área de la base (figura 3). Clasificar las fichas dependiendo del tamaño; seguido, se calcula el volumen de cada monto, para finalmente sumar los volúmenes de cada uno y así determinar el volumen del sólido mayor (figura 5).
Aplicación	Posibilidad de aplicar las conclusiones producto de la práctica matemática a otro tipo de situaciones	La intención inicial de transponer los conocimientos adquiridos durante el cálculo del volumen del primer sólido, al cálculo del volumen del segundo sólido.
Justificación	Acondicionamiento al modelo que permite justificar matemáticamente propiedades o definiciones de un objeto matemático	No se evidencia, pues refiere particularmente a elementos arraigados a los procesos de formalización
Representación	Sistemas de símbolos y sistemas de diagramas: La adopción de sistemas de representación propios de los objetos matemáticos	El uso de sistemas de representación vinculados a los desarrollos algebraicos y aritméticos.

Evidencia de las actividades matemáticas emergentes durante la aplicación del instrumento. **Fuente:** Propia.

Finalmente, con todo lo descrito anteriormente se puede decir que, si bien, los diferentes grupos de trabajo desarrollaron en el transcurso del taller diferentes actividades matemáticas para el cálculo de volúmenes, se hizo evidente las perspectivas intuitivas de los estudiantes por medio de la actividad de descubrimiento, que de igual forma representa una instancia inicial en posteriores procesos de formalización pues, permite revelar y eventualmente justificar propiedades de los objetos matemáticos.

6. Conclusiones y reflexiones finales

Los elementos descritos anteriormente inmersos en los desarrollos llevados a cabo por los estudiantes, dejan ver algunas consideraciones respecto a la enseñanza del cálculo de volúmenes, considerando el surgimiento de ideas intuitivas gracias a la manipulación del instrumento basado en perspectivas histórico-epistémicas de Cavalieri. Este enfoque en la creación de propuestas de aprendizaje, posibilita la construcción del concepto matemático a partir de la evolución de estrategias de solución planteadas por los mismos individuos, además, fomenta perspectivas intuitivas en el aprendizaje significativo del cálculo de volúmenes y nociones infinitesimales en el cálculo.

Una reflexión crítica orientada al papel del docente, la implementación de la actividad y la pertinencia de la misma, permite reconsiderar elementos dentro de la propuesta que posibilitan llevar a cabo dichos procesos:

- Extender la propuesta a más sesiones, teniendo en cuenta las particularidades de la población a la que se orienta el recurso, de forma tal que los estudiantes logren evolucionar las estrategias finales propuestas para el cálculo del volumen de un sólido de revolución, así como contemplar la aplicabilidad de sus procedimientos en otras situaciones.
- Diseñar y aplicar preguntas que fomenten en los estudiantes las actividades de

formulación y justificación a fin de establecer procesos generales en sus desarrollos.

- Fomentar el uso de los diferentes sistemas de representación a fin de dar un mayor entendimiento a los objetos matemáticos puestos en juego.

Por otra parte, elementos complementarios en la planeación de la actividad, como lo son los recursos didácticos de tipo manipulativo tangible, representan un potenciador en el entendimiento y análisis de los estudiantes. A lo largo de la puesta en práctica de la actividad/instrumento, quedó en evidencia que este tipo de recursos permiten:

- Construir e interpretar el concepto matemático (en este caso particular: cálculo de volúmenes, límite, tendencia, infinito potencial y actual, infinitesimal) a partir de la interacción y manipulación.
- Estudiar los elementos desde una perspectiva dinámica y variada, desvinculada de las matemáticas estáticas que han predominado en la enseñanza.
- Tener apoyos físicos a los recursos digitales usualmente utilizados en la enseñanza de este tipo de conceptos.
- Centrar el interés, fomentar la motivación y participación.

En síntesis de todo lo descrito, se considera necesario repensar la enseñanza desde un reconocimiento de las nociones primarias desarrolladas en la génesis de los conceptos matemáticos, así como de las prácticas y actividades matemáticas que permitieron estos avances, a fin de proponer rutas de aprendizaje coherentes con las experiencias e intuiciones elementales.

7. Referencias

ARTIGUE, M. (2003). Reaction. Learning and teaching analysis: What can we learn from the past in order to think about the future? In D. Coray, F. Furinghetti, H. Gispert, B. R. Hodgson & G. Schubring (Eds.), *One hundred years of l'enseignement mathématique: moments of mathematics education in the twentieth century*. Monograph No. 39 (pp. 211–223). Genova, Italia: L'Enseignement

BOHÓRQUEZ, A. R. V., & Ortíz, J. J. A. (2020). La interactividad de las herramientas tecnológicas en el desarrollo del pensamiento lógico en educación básica secundaria. *Revista de Ciencias de la Comunicación e Información*, 1-17.

BOSCH, MARIANNA (2000). Un punto de vista antropológico: la evolución de los "elementos de representación" en la actividad matemática. En Climent, Nuria de los Ángeles; Contreras, Luis Carlos; Carrillo, José (Eds.), *Cuarto Simposio de Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 15-28). Huelva: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

DUVAL, RAYMOND (2016). Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. En Duval, Raymond; Sáenz-Ludlow, Adalira (Eds.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas Énfasis*. (pp. 61-94). Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

FUSTER, J. L. L., & GÓMEZ, F. J. S. (1997). Una interpretación de las dificultades en el aprendizaje del concepto de integral. *Divulgaciones Matemáticas*, 5(1/2), 61-76.

GARCÍA RETANA, JOSÉ ÁNGEL (2013). La problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo para ingeniería. *Revista Educación,* 37 (1),29-42 [fecha de Consulta 23 de agosto de 2022]. ISSN: 0379-7082. Disponible en: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=44028564002

GIAQUINTO, M. (2005). Mathematical Activity. En P. Mancosu, K. F. Jørgensen, & S. A. Pedersen (Eds.), *Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics* (pp. 75-87).

GODINO, J., & BATANERO, M. (1994). *Significado Personal y material de los objetos matemáticos*. Departamento de Didáctica de la Matemática, 14(3), 325–355. https://www.researchgate.net/publication/255723170

GODINO, JUAN D. (1999). Implicaciones metodológicas de un enfoque semiótico-antropológico para la investigación en

Educación Matemática. En Ortega, Tomás (Ed.), *Actas del III SEIEM (pp. 196-212*). Valladolid: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

GÓMEZ CHACÓN, I. M. (2000). *La intuición en Matemáticas*. Educar (44). pp. 30-34. ISSN 1510-1185 Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil.

MEZA SÁNCHEZ, M. (2020). *Efectos del programa "Matemática Manipulativa" en la resolución de problemas aditivos de enunciado verbal en los estudiantes del segundo grado.*

MORENO ARMELLA, LUIS (2014). Intuir y formalizar: procesos coextensivos. *Educación Matemática*, 185-206. ISSN: 0187-8298. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40540854010

MORGAN, D. L., & KRUEGER, R. A. (1998). *The focus group guidebook.* Sage.

OBANDO, GILBERTO (2015). *Sistema de prácticas matemáticas en relación con las razones, las proporciones y la proporcionalidad en los grados 3° y 4° de una institución educativa de la educación básica.* [Doctorado tesis], Universidad del Valle. http://funes.uniandes.edu.co/10598/

OCAMPO-ARENAS, M. C., PARRA-ZAPATA, M. M., & ALEXANDER VILLA-OCHOA, J. (2020). Comprensiones e implicaciones de la Actividad Matemática en las investigaciones en Educación Matemática: resultados de una revisión de literatura. In E. Serna (Ed.), *Revolución en la Formación y la Capacitación para el Siglo XXI* (pp. 69–77). Medellín: Instituto Antioqueño de Investigación.

PAULIN, J. F. V. & RIBEIRO, A. J. (2019). Ensino e Aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo: algumas reflexões a partir de uma revisão sistemática de literatura
Teaching and Learning of the Fundamental Theorem of Calculus: some reflections from a systematic literature review. *Educação Matemática* Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, 21(2). https://doi.org/10.23925/1983-3156.2018v21i2p239-263

PICCONE, D. F. B. (2007) Os registros de representação semiótica mobilizados por professores no ensino do Teorema Fundamental do Cálculo. *Educação Matemática Pesquisa. Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática.* V 9, 2

PONTE, J. P. (2004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. In J. Giménez, L. Santos, & J. P. Ponte (Eds.), *La actividad matemática en el aula (pp. 25-34). Barcelona:* Graó.

RUIZ, Á. (2003). *Historia y Filosofía de las matemáticas.* San José, Costa Rica: Universidad Estatal a Distancia.

SALINAS, PATRICIA, & ALANÍS, JUAN ANTONIO. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo dentro de una institución educativa. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 12(3), 355-382. Recuperado en 24 de agosto de 2022, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362009000300004&lng=es&tlng=es.

VAIN, P. D. (2012). El enfoque interpretativo en investigación educativa: algunas consideraciones teórico-metodológicas. *Revista de educación*, 4(4), 37-45.

VIZCARRA, M. TERESA, & FRAILE, ANTONIO (2009). La investigación naturalista e interpretativa desde la actividad física y el deporte. *Revista de Psicodidáctica,* 14(1),119-132. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=17512723008