



## ACERTIJO DE CUATRO CUBOS DE PERELMAN: CALIDAD DE LAS REPRESENTACIONES VISUALES Y ARGUMENTACIÓN DE RESPUESTAS VERBALES

### PERELMAN'S FOUR CUBES RIDDLE: QUALITY OF VISUAL REPRESENTATIONS AND ARGUMENTATION OF VERBAL RESPONSES

### ENIGMA DOS QUATRO CUBOS DE PERELMAN: QUALIDADE DAS REPRESENTAÇÕES VISUAIS E ARGUMENTAÇÃO DAS RESPOSTAS VERBAIS

Josip Slisko<sup>✉\*</sup>, José Luis Santana<sup>✉\*\*</sup>, Liliana Vázquez<sup>✉\*\*\*</sup>, María Elena Rodríguez<sup>✉\*\*\*\*</sup>

Cómo citar este artículo: Slisko, J., Santana, J. L., Vázquez, L. y Rodríguez, M. E. (2023). Acertijo de cuatro cubos de Perelman: calidad de las representaciones visuales y argumentación de respuestas verbales. *Góndola, enseñanza y aprendizaje de las ciencias*, 18(3), 475-495. DOI: <https://doi.org/10.14483/23464712.20591>

#### Resumen

La solución de acertijos promueve habilidades de pensamiento de orden superior. En este estudio, se empleó el acertijo de los cuatro cubos de Perelman, que propone equilibrar cubos de madera de distintos tamaños. Investigaciones previas que utilizan dicho acertijo indican que las representaciones visuales facilitan las respuestas correctas. Sin embargo, Perelman solamente responde a partir de la igualdad de volúmenes, sin considerar explícitamente conceptos como densidad o peso. Así, este estudio exploró cómo la representación visual se relaciona con la calidad argumentativa de las respuestas verbales y si estas difieren entre el trabajo grupal e individual. Se pidió a 31 estudiantes completar un cuestionario con dos preguntas. La primera exigía un dibujo y una argumentación de la solución propuesta, mientras que la segunda presentaba la solución de Perelman para ser evaluada. Esto permitió medir la disposición de los estudiantes a aceptar ideas ajenas. Tras responder de manera individual, se formaron equipos de cuatro estudiantes para responder nuevamente. Se diseñaron criterios para clasificar los dibujos como pictóricos o esquemáticos y para identificar conceptos físicos en las argumentaciones. Los resultados demostraron que el trabajo grupal impulsó representaciones esquemáticas en las respuestas visuales. Además, se observó una correlación entre argumentaciones de baja calidad y respuestas incorrectas. Este estudio resalta la necesidad de fortalecer la comprensión de conceptos físicos y su aplicación

Recibido: Marzo de 2023; aprobado: Agosto de 2023

\* Doctor en Filosofía de la Física. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. México. josiplisko47@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5805-4808>

\*\* Doctor en Física Educativa. Universidad de Guadalajara. México. jose.sfajardo@academicos.udg.mx. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7048-2648>

\*\*\* Doctora en Física. Universidad de Guadalajara. México. liliana.vmercado@academicos.udg.mx. ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-1807-707X>

\*\*\*\* Doctora en Ciencia de Comportamiento. Universidad de Guadalajara. México. mariae.rodriguezp@academicos.udg.mx ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5879-0007>

en la resolución de problemas a través de la educación. En última instancia, se destaca la importancia del aprendizaje colaborativo y la instrucción enfocada en la comprensión profunda de los conceptos.

**Palabras clave:** solución de problemas, argumentación, trabajo en equipo, educación científica.

### **Abstract**

Riddle solving promotes higher order thinking skills. In this study, Perelman's riddle four cubes was used, which proposes balancing wooden cubes of different sizes. Previous research using such a riddle indicates that visual representations facilitate correct answers. However, Perelman only responds from the equality of volumes without explicitly considering concepts such as density or weight. Thus, this study explored how visual representation is related to the argumentative quality of verbal responses and whether responses differ between group and individual work. 31 students were asked to complete a questionnaire with two questions. The first required a drawing and argumentation of the proposed solution, while the second presented Perelman's solution for evaluation. This allowed us to measure the willingness of students to accept other people's ideas. After answering individually, teams of four students were formed to answer again. Criteria were designed to classify the drawings as pictorial or schematic and to identify physical concepts in the arguments. The results demonstrated that the group work promoted schematic representations in the visual responses. In addition, a correlation was observed between low-quality arguments and incorrect answers. This study highlights the need to strengthen the understanding of physical concepts and their application in problem solving through education. Ultimately, the importance of collaborative learning and focused instruction on deep understanding of concepts is highlighted.

**Keywords:** Problem solving. Argumentation. Group work. Scientific Education.

### **Resumo**

A resolução de enigmas promove habilidades de pensamento de ordem superior. Neste estudo foi utilizado o enigma de quatro cubos Perelman, que propõe equilibrar cubos de madeira de diferentes tamanhos. Pesquisas anteriores utilizando esse tipo de enigma indicam que as representações visuais facilitam respostas corretas. No entanto, Perelman apenas responde a partir da igualdade de volumes sem considerar explicitamente conceitos como densidade ou peso. Portanto, este estudo explorou como a representação visual está relacionada à qualidade argumentativa das respostas verbais e se as respostas diferem entre o trabalho em grupo e o individual. 31 alunos foram convidados a preencher um questionário com duas perguntas. A primeira exigia desenho e argumentação da solução proposta, enquanto a segunda apresentava a solução de Perelman para avaliação. Isso nos permitiu medir a disposição dos alunos em aceitar as ideias de outras pessoas. Após responderem individualmente, foram formadas equipes de quatro alunos para responder novamente. Foram elaborados critérios para classificar os desenhos em pictóricos ou esquemáticos e para identificar conceitos físicos nos argumentos. Os resultados mostraram que o trabalho em grupo promoveu representações esquemáticas nas respostas visuais. Além disso, foi observada correlação entre argumentos de

baixa qualidade e respostas incorretas. Este estudo destaca a necessidade de fortalecer a compreensão dos conceitos físicos e sua aplicação na resolução de problemas por meio da educação. Em última análise, destaca-se a importância da aprendizagem colaborativa e do ensino focado na compreensão profunda dos conceitos.

**Palavras chave:** Resolução de problemas. Argumentação. Trabalho de grupo. Educação científica.

## 1. Introducción

El *aprendizaje basado en acertijos* provee a los estudiantes herramientas para el desarrollo de habilidades de pensamiento de orden superior, como el crítico, el creativo y el lateral, al proveer desafíos y situaciones tendientes a mejorar la integración de los contenidos (MALHERBE, 2021; REZVANIFARD, RADMEHR, ROGOVCHENKO, 2023). El pensamiento crítico, de acuerdo con LIPMAN (1988), es el “habilitoso, pensamiento responsable que facilita buenos juicios debido a que involucra los aspectos siguientes: 1) basado en el criterio, 2) se autocorrije, 3) es sensible al contexto” (p. 40). Ya desde 1990, el proyecto Delphi de la American Philosophical Association (APA) reunió a 46 expertos que definieron el pensamiento crítico como el que involucra “juicio útil, autorregulatorio que resulta en interpretación, análisis, evaluación e inferencia, así como explicación de lo evidencial, conceptual, metodológico, criteriológico, o consideraciones conceptuales en las que se base el juicio” (FACIONE, 1990 p. 2). Además, involucra seis habilidades esenciales: interpretación, análisis, inferencia, evaluación, explicación y autorregulación (HEARD *et al.*, 2020). Recientes acepciones al término *pensamiento creativo* consideran que es “the competence to engage productively in the generation, evaluation and improvement of ideas, that can result in original and effective solutions, advances in knowledge and impactful expressions of imagination [la competencia para involucrarse productivamente en la generación, evaluación y mejora de ideas, que puedan resultar en soluciones originales y efectivas, avances en el conocimiento y expresiones que impacten la

imaginación]” (OECD, 2019 p. 8). Además de reconocer que existe una asociación entre la creatividad y la toma de decisiones éticas, es un prerrequisito para la cooperación y el trabajo, de ahí que se considere al desarrollo del pensamiento creativo como uno de los objetivos centrales en la educación (PERRI *et al.*, 2009). Lo anterior manifiesta la importancia de estudios encaminados a explicar o identificar este tipo de pensamiento en los estudiantes.

De acuerdo con FISHER (2005), el pensamiento lateral es un tipo de pensamiento creativo; así, el primero es una dimensión del segundo. A través del pensamiento lateral es posible realizar procesos como el manejo de información, la reestructuración de patrones de pensamiento, el desarrollo de nuevas ideas, por mencionar algunos. De Bono lo define como una serie de procesos sobre formas sistemáticas y creativas de pensamiento que producen pensamiento innovador en forma repetida (ASGARI *et al.*, 2022).

Los acertijos, al proveer habilidades útiles y poderosas para desarrollar competencias esenciales para el desempeño en el mundo globalizado –como la resolución de problemas, imaginación, inteligencia–, son una opción atractiva para su uso en el aula. Otra de las características es que no están ligados directamente a un contenido o capítulo en particular, lo que permite abordar su resolución desde una perspectiva multidisciplinar.

Asimismo, empresas de alta tecnología como Google y Microsoft han recurrido, durante sus entrevistas de reclutamiento de personal para seleccionar a los más aptos –entre los que buscan a los más innovadores y que respondan mejor bajo situaciones de estrés–, a este tipo de preguntas (KADOR, 2004;

POUNDSTONE, 2003, 2012). KADOR (2004) menciona, al respecto del uso de estas cuestiones durante esas entrevistas, que su uso “tiene sentido en empresas que enfocan los esfuerzos de reclutamiento más en lo que los candidatos pueden hacer en el futuro que en lo que han hecho en el pasado” (p. vi). Los entrevistadores requieren de los candidatos que sean curiosos, observadores e ingeniosos, que acepten nuevos desafíos, demuestren agilidad mental en condiciones estresantes, aprendan rápido, defiendan su pensamiento y demuestren entusiasmo por las tareas que parezcan imposibles (POUNDSTONE, 2003). Por su parte, el test de reflexión cognitiva (FREDERICK, 2005), frecuentemente utilizado para detectar pensadores rápidos y lentos (KAHNEMAN, 2014) entre los estudiantes de economía, consta de tres famosos acertijos matemáticos. TOPLAK, WEST, STANOVICH (2011) apuntan al respecto que los pensadores rápidos (aquellos que dan tres respuestas incorrectas en el examen) cometen errores con mayor frecuencia en tareas económicas que requieren un adecuado procesamiento de información y toma de decisiones. Estas tendencias educativas apuntan hacia la necesidad de un aumento de la formulación de acertijos matemáticos y cuantitativos en la Enseñanza de las Matemáticas, la Física y la ingeniería, mediante el desarrollo, implementación y evaluación de nuevos diseños didácticos para sus procesos formativos. En el presente trabajo se utiliza el acertijo de los *cuatro cubos* de Perelman. A grandes rasgos, este propone que se balanceen cuatro cubos de madera de distintos tamaños. En estudios previos, en los que se ha trabajado este mismo acertijo (SLISKO, 2005; SLISKO, FORJAN, CRUZ, 2020), se ha encontrado que las representaciones visuales son elementos que facilitan el logro de las respuestas correctas. Sin embargo, estas respuestas no incluyen consideraciones físicas explícitamente. SLISKO (2005) ha argumentado sobre las ventajas de solicitar una respuesta visual a los problemas conceptuales de Física respecto de respuestas escritas o soluciones numéricas. La principal ventaja es que, con ayuda de los dibujos, las ideas de los

estudiantes se revelan de mejor manera. Es decir, el dibujo puede ser un precursor de las funciones psicológicas superiores, ya que permite establecer un vínculo entre la acción práctica y el lenguaje. El dominio del lenguaje es precisamente lo que garantiza el salto del conocimiento sensorial al racional (MONTEALEGRE, 2007).

Este estudio analiza las relaciones entre el tipo de representación (esquemático o pictórico) de las respuestas visuales y la calidad de la argumentación (al incorporar conceptos físicos) de la respuesta al acertijo de los *cuatro cubos* de Perelman. Aunado a esto, busca identificar la relación entre las respuestas individuales y las respuestas grupales.

A partir de lo anterior se plantean las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Qué relación existe entre el tipo de representación visual y la calidad argumentativa de las respuestas verbales?
- ¿Qué relación hay entre las respuestas derivadas del trabajo grupal y las planteadas individualmente?

## 2. Metodología

Con la finalidad de dar respuesta a esas preguntas, se desarrolló un protocolo para la recolección de las respuestas dadas por un grupo de estudiantes al acertijo planteado, lo que sirve para el análisis de los argumentos y de los dibujos elaborados por los participantes, de tal forma que se puedan comparar estos aspectos.

En la presente investigación se utiliza el acertijo de los *cuatro cubos* propuesto, en ruso, hacia 1935 por el célebre soviético divulgador de la ciencia y escritor de libros de Física, Astronomía y Matemáticas para el público en general, Yakov Isidorovich Perelman (SLISKO, FORJAN, CRUZ, 2020). La versión en inglés del mencionado acertijo divulgó en 1984, y en 1988 con una segunda edición del libro: *Fun with maths and physics* (PERELMAN, 1988). La formulación del acertijo se presenta a continuación:

### Four Cubes

Four solid cubes of the same material have different heights: 6 cm, 8 cm, 10 cm, and 12 cm (Fig. 299). Arrange them on the pans of a balance for it to be in equilibrium. (PERELMAN, 1988 p. 340)

[Cuatro cubos sólidos del mismo material tienen diferentes alturas: 6 cm, 8 cm, 10 cm y 12 cm (Fig. 299). Acomódelos en los platos de la balanza de manera que se logre el equilibrio.]

**Fig. 299**



La respuesta dada por Perelman se basa en utilizar los volúmenes de los cubos de tal forma que sean iguales en la suma de un lado y en otro lado de la báscula.

We must place three smaller cubes on one pan, and the largest one on the other. It's easily verified that the balance will be in equilibrium. Let's show that the total volume of the three smaller cubes equals that of the largest one. This follows from the relationship: [Debemos colocar tres cubos pequeños en una balanza, y el más grande en la otra. Es fácil verificar que la balanza estará en equilibrio. Mostremos que el volumen total de los tres cubos pequeños es igual al del cubo más grande. Esto sigue de la relación:]

$$6^3 + 8^3 + 10^3 = 12^3,$$

i.e.

$$216 + 512 + 1,000. \text{ (p. 347)}$$

Sin embargo, una respuesta más completa, que servirá como base para el análisis de la calidad de la

argumentación, involucra el uso correcto de varios conceptos básicos de Física y sus relaciones, considera que esto es correcto debido a que los cubos están hechos del mismo material y, en consecuencia, tienen la misma densidad. Eso implica que, al tener los mismos volúmenes, se tienen las mismas masas y, en consecuencia, los mismos pesos que equilibran la balanza. Es decir:

Los cubos, al estar hechos del mismo material (madera) tienen la misma densidad, lo que implica que, volúmenes iguales corresponden a masas iguales. Además, para equilibrar la balanza, es necesario tener masas iguales en ambos platos, lo que equivale a tener fuerzas gravitacionales (o de peso) iguales. En ese sentido deben colocarse los cubos de menores tamaños de arista en un plato de la balanza y el cubo de mayor tamaño en el otro. Lo cual puede verificarse con la siguiente secuencia de ecuaciones (donde  $w$  representa la fuerza gravitacional que actúa sobre un cubo que es su peso):

$$w_6 + w_8 + w_{10} = w_{12}, \quad (1)$$

$$m_6g + m_8g + m_{10}g = m_{12}g, \quad (2)$$

$$m_6 + m_8 + m_{10} = m_{12}. \quad (3)$$

En (1) se tiene la igualdad de pesos, en el lado izquierdo se tiene la suma de los pesos de tres de los cubos cuyas aristas son: 6 cm, 8 cm y 10 cm; mientras que el lado derecho es el peso del cubo de 12 cm. En (2) se expresa el peso como el producto de la masa de cada cubo por la intensidad del campo gravitacional para la superficie terrestre (9,8 N/kg). En (3), se deja expresada la igualdad en términos de las masas, para lo que únicamente se dividieron ambos lados de la igualdad (2) entre  $g$ . Enseguida se usa la definición de densidad  $\rho = \frac{m}{V}$  para obtener

$$m = V\rho \quad (4)$$

Y, sustituyendo (4) en (3), se tiene

$$V_6\rho + V_8\rho + V_{10}\rho = V_{12}\rho \quad (5)$$

Al considerar que la densidad es la misma independientemente de la masa o el volumen de cada cubo, se tiene que, al despejar, por ejemplo, el volumen del cubo de 12 cm de arista se llega a la siguiente expresión:

$$V_6 + V_8 + V_{10} = V_{12} \quad (6)$$

Por ejemplo:

$$216 \text{ cm}^3 + 512 \text{ cm}^3 + 1,000 \text{ cm}^3 = 1,728 \text{ cm}^3.$$

Cabe mencionar que Perelman no utiliza la conceptualización física presentada en la respuesta anterior.

### a. Participantes

Participaron 31 estudiantes de la Licenciatura en Física de una universidad mexicana, quienes cursaban el primer semestre. Entre ellos eran 9 mujeres y 22 hombres. Se les pidió que respondieran las preguntas primero de forma individual y, después, grupal, al conformar 7 equipos de 4 integrantes cada uno y otro equipo de 3 integrantes.

### b. Tarea experimental

Se presentó a los estudiantes el acertijo *cuatro cubos* de Perelman. Se ha empleado como tarea experimental en investigaciones previas para evaluar las habilidades de pensamiento implicadas en su solución (SLISKO, FORJAN, CRUZ, 2020). Para la presente investigación, el problema se formuló tal como se muestra en la figura 1.

Como se observa en la figura 1, los participantes contestaron a dos preguntas que fueron facilitadas a los estudiantes por medio de un documento impreso. En la primera, debían resolver gráficamente el acertijo. Es decir, tenían que dibujar el acomodo de los cubos en los platos de la balanza, de tal forma que se equilibrara.

En la segunda pregunta se les proporcionó la respuesta al acertijo, pero simulando que era la respuesta de alguien más y que debían juzgar la veracidad

1. Hay cuatro cubos de madera maciza con aristas de 6 cm, 8 cm, 10 cm y 12 cm. En el espacio proporcionado, dibuja la manera en que se deberían poner esos cuatro cubos sobre los platos de una balanza con brazos, iguales para que la balanza esté en equilibrio.  
¿Por qué crees que tu dibujo es correcto?

\_\_\_\_\_

2. Hay gente que piensa que, para equilibrar la balanza, se deben poner los cubos de aristas de 6 cm, 8 cm y 10 cm en un plato, y el cubo con la arista de 12 cm en el otro. ¿Crees que esa solución es la correcta? Escoge tu respuesta y argumentala.

a) Sí, es la correcta \_\_\_\_\_

b) No, no es la correcta \_\_\_\_\_

c) Puede ser tanto correcta como incorrecta \_\_\_\_\_

**Figura 1.** Tarea experimental basada en el acertijo *cuatro cubos* de Perelman.

**Fuente:** elaboración propia.

de dicha respuesta. Esto también nos da información acerca de la apertura a aceptar ideas de otras personas y, sobre ello, complementar o construir una nueva respuesta, que es lo que se discute durante el trabajo grupal.

Se ha reportado (SLISKO, FORJAN, CRUZ, 2020) que los participantes suelen emplear una *respuesta rápida* (incorrecta) que es agrupar en un plato de la balanza los cubos de aristas 10 cm y 8 cm, y en el otro plato a los cubos de 12 cm y 6 cm. Es decir, igualan la suma de las aristas como criterio (no pertinente) de equilibrio. La respuesta correcta demanda que se atienda al volumen de los cubos y, además, se argumente que la igualación de los volúmenes implica la igualación de los pesos, porque se trata de cubos del mismo material. El concepto articulador de los volúmenes con los pesos es el de *densidad*.

### c. Procedimiento

En la presente investigación, se les pidió a los estudiantes que trabajaran de manera individual en la solución del acertijo, al contestar las dos preguntas planteadas (véase figura 1). Se recogió el trabajo de cada estudiante conforme iban terminando. Posteriormente, los participantes fueron asignados a

un equipo de trabajo de manera aleatoria. Se les entregó una nueva hoja con el mismo acertijo y las mismas preguntas, se les pidió que encontraran una sola solución al acertijo mediante una discusión de forma consensuada. Se recogió el trabajo de los estudiantes una vez que trabajaron en grupo.

#### **d. Análisis de datos**

Enseguida se describen los protocolos de evaluación que se diseñaron para juzgar la calidad de las representaciones visuales y de los argumentos escritos. Ambos procedimientos de análisis de datos se elaboraron a partir de referentes teóricos. Debido a que los protocolos se diseñaron *ex profeso*, se validaron mediante su aplicación de manera independiente por parte de cada investigador. La versión final de los instrumentos de calificación atendió al criterio de acuerdo entre jueces de, por lo menos, 80 % (ESCOBAR, CUERVO, 2008; URRUTIA *et al.*, 2014). Es decir, se consideró como un dato válido si todos los investigadores acordaron calificar al dibujo o la respuesta escrita con ese valor.

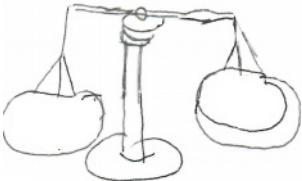
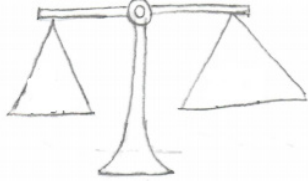



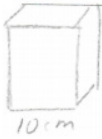

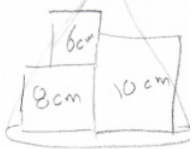
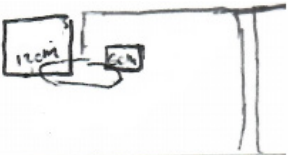
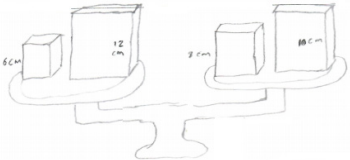
#### ***Evaluación de las representaciones visuales***

El protocolo de análisis de las representaciones visuales de la solución se diseñó con base en el trabajo de HEGARTY, KOZHEVNIKOV (1999). Estas autoras argumentaron que los dibujos elaborados como representación visual de la solución a un problema de razonamiento puede ser categorizado como *esquemática* o *pictórica*. La primera contiene información visual pertinente para encontrar la solución al problema. Las relaciones espaciales adecuadas entre los elementos de la solución son características de una representación esquemática. Por otro lado, según PRESMEG (1986), el uso de imágenes pictóricas concretas puede enfocar el razonamiento en detalles irrelevantes que distraigan la atención de quien resuelve el problema de los elementos principales en la representación original del problema, e incluso puede introducir datos falsos.



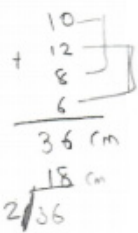
De esta manera, se puede suponer una relación entre los tipos de representaciones hechas por los estudiantes y si la solución es correcta o incorrecta. Para este acertijo, se definieron diversas categorías para calificar y se aplicaron a todos los dibujos por parte de los investigadores de manera independiente para juzgar su pertinencia. Las categorías tomaron en cuenta aquellas relaciones espaciales que se vinculan con la búsqueda de la solución correcta. Por ejemplo, el tamaño de los cubos puede asociarse a la dimensión de volumen como razonamiento puente entre tamaño y peso. Un dibujo en donde se cuide la proporción entre los cubos debe ser categorizado como esquemático porque refleja la atención que pone el estudiante a dichas diferencias en volúmenes. Posteriormente, se compararon las calificaciones otorgadas a los dibujos por cada investigador. A partir de las respuestas idénticas y la discusión de las respuestas diferentes hasta conseguir consenso, se estipularon los rasgos que serían propios de una representación esquemática o pictórica. La descripción de cada rasgo, su justificación y los valores asignados para cada categoría se resumen en la tabla 1. También se han incluido ejemplos tomados de los dibujos de los participantes para ilustrar cada rasgo.

Es importante señalar que un dibujo puede tener mezclados rasgos que se consideran pictóricos y esquemáticos. Es decir, difícilmente se obtendrían dibujos con todas las categorías calificadas como esquemáticas o todas las categorías de tipo pictórico. Por tanto, para calificar a los dibujos, se asignó un valor de cero (0) a los rasgos de una presentación pictórica, y de uno (1) a los rasgos de una representación esquemática. Se sumaron los puntos para las siete categorías. Se clasificó al dibujo como pictórico si la suma estaba entre 0 y 4 puntos, o como esquemático, entre 5 y 7 puntos. Es decir, se consideró, con base en los resultados de HEGARTY, KOZHEVNIKOV (1999), que cuantos más rasgos de un dibujo esquemático estuvieran incluidos en las respuestas visuales, mayor era la probabilidad de contestar al acertijo con la respuesta correcta.

**Tabla 1.** Rasgos considerados para categorizar a los dibujos como pictóricos o esquemáticos

Categoría	Rasgo propio de una representación pictórica (Valor otorgado = 0)	Rasgo propio de una representación esquemática (Valor otorgado = 1)
1. Representación de la balanza.	<p>3D - no es relevante y desvía atención de las relaciones entre los cubos.</p>  <p>Ejemplo: Respuesta G1.</p>	<p>2D - indica que el énfasis estuvo en las relaciones entre los cubos y no en la balanza.</p>  <p>Ejemplo: Respuesta G4.</p>
2. Representación de los cubos.	<p>2D - indica falta de atención a la dimensión de volumen.</p>  <p>Ejemplo: Respuesta G8-4.</p>	<p>3D - indica atención a la dimensión de volumen.</p>  <p>Ejemplo: Respuesta G5-4.</p>
3. Tamaño de los cubos e información de la longitud de las aristas.	<p>Inadecuado - el tamaño del cubo no permitía escribir la longitud de la arista, lo que indica una lectura superficial del problema (se atiende, primero, al número de cubos y no a sus dimensiones).</p>  <p>Ejemplo: Respuesta G4.</p>	<p>Adecuado - el tamaño del cubo permitía escribir la longitud de la arista, lo que indica atención a los datos explícitos proporcionados por el problema y su vinculación con los objetos dibujados.</p>  <p>Ejemplo: Respuesta G6-1.</p>
4. Proporción de los diferentes tamaños de los cubos.	<p>Inadecuado - dibujarlos sin estimar la proporción de tamaños indica falta de atención a los diferentes volúmenes.</p>  <p>Ejemplo: Respuesta G3-3.</p>	<p>Adecuado - dibujarlos en proporción indica atención a la dimensión de volumen como razonamiento puente entre tamaño y peso.</p>  <p>Ejemplo: Respuesta G2.</p>
5. Posición de los cubos con respecto a la balanza.	<p>Fuera de la balanza - indica falta de contacto con la situación física real.</p>  <p>Ejemplo: Respuesta G3-1.</p>	<p>Dentro de la balanza - indica que se hace contacto con la situación física real.</p>  <p>Ejemplo: Respuesta G3-2.</p>



<p>6. Manejo de sombra (claroscuro u opacidad).</p>	<p>Sí - es irrelevante e indica atención no focalizada.</p>	<p>No - indica atención focalizada a los aspectos relevantes del problema.</p>
 <p>Ejemplo: Respuesta G6-4.</p>		 <p>Ejemplo: Respuesta G7.</p>
<p>7. Información textual añadida al dibujo.</p>	<p>Sin información añadida o información referente a la magnitud de las aristas - indica un desempeño vinculado a la información proporcionada.</p>	<p>Información añadida referente a la magnitud de los volúmenes, fórmulas o cálculos propios - indica un desempeño desvinculado de la información proporcionada.</p>
	 <p>Ejemplo: Respuesta G5-4.</p>	<p>Volumen de los cubos</p> <p>6 = 6.6.6 = 216 cm<sup>3</sup></p> <p>8 = 8.8.8 = 512 cm<sup>3</sup></p> <p>10 = 10.10.10 = 1.000 cm<sup>3</sup></p> <p>12 = 12.12.12 = 1.728 cm<sup>3</sup></p> <p>Ejemplo: Respuesta G5.</p>

Fuente: elaboración propia.

### Calidad de la estructura argumentativa de las respuestas escritas

La calidad de los argumentos esta puede analizarse con base en el trabajo de CEBERIO, ALMUDÍ, ZUBIMENDI (2014). En él presentan un estudio en el que se plantea una actividad para la evaluación de reportes de investigación a partir de la calidad de la argumentación a partir de la propuesta de SAMPSON, GROOMS, WALKER (2011). En particular, esta última se evalúa según criterios correspondientes con tres elementos críticos: “los componentes de un argumento, lo adecuados que resultan los diversos componentes desde la perspectiva de su contenido científico y la naturaleza de la justificación (cómo las conclusiones son validadas en el argumento)” (CEBERIO, ALMUDÍ, ZUBIMENDI, 2014). Los autores proponen que la evaluación de los argumentos se focaliza en:

- a) lo apropiado de la conclusión, que debe ser correcta;
- b) la pertinencia de los referentes conceptuales

considerados en el argumento, que debe relacionarse con las leyes y principios de la materia; c) la calidad de la prueba, que tiene que ser adecuada y suficiente, y d) la suficiencia del razonamiento, que debe justificar que la prueba soporta la conclusión. (p. 75)

Así, a partir del acertijo planteado a los estudiantes y la respuesta basada en argumentos tanto del tipo de respuesta *experta* considerada por Perelman, y argumentos desde los conceptos de Física dada anteriormente, se tienen los criterios correspondientes para cada aspecto. Estos criterios, diferenciados en tres niveles según la calidad de la respuesta, se muestran en la tabla 2. Se calificaron las respuestas que dieron los participantes a la pregunta 1 del instrumento. Se han incluido respuestas tomadas de los estudiantes para ejemplificar cada categoría. Es importante señalar que no se encontraron ejemplos para todos los niveles de las categorías consideradas.

**Tabla 2.** Elementos considerados para categorizar la *calidad argumentativa* a través de los argumentos esgrimidos por los estudiantes en sus respuestas escritas<sup>1</sup>

Criterios específicos para evaluar la calidad de la argumentación en las respuestas escritas			
Aspecto	Nivel	Criterio	Ejemplo representativo tomado de los estudiantes
Conclusión apropiada	2	La respuesta es correcta y se involucran los conceptos de fuerza (peso) y densidad.	Respuesta G4-4: "Si suponemos que cada $\text{cm}^3$ tiene un peso de 1 g, al obtener el volumen de los cubos nos daremos cuenta que el cubo de 12 cm de arista tiene un peso equivalente al peso de los otros 3 sumados" <sup>2</sup> .
	1	La respuesta es correcta y se considera solamente el volumen de los cubos.	Respuesta G1: "Obteniendo el volumen de cada cubo obtenemos que: $V_6 = 216$ $V_8 = 512$ $V_{10} = 1000$ $V_{12} = 1728$ y aquí nos damos cuenta que si sumamos los volúmenes $V_6, V_8$ y $V_{10}$ da el mismo volumen que el bloque que tiene como arista 12 cm."
	0	La respuesta no es correcta.	Respuesta G1-3: "Porque los cubos tienen un cierto volumen, y para llegar a un equilibrio, tenemos que igualar, tenemos que sumar su volumen de 2 cubos para que sea igual a la otra suma de 2 cubos."
Pertinencia conceptual	2	Cuando los estudiantes, además de considerar los volúmenes, mencionan los conceptos de fuerza (peso) y densidad.	Respuesta G1-3: "No porque el cubo es de la misma densidad y volumen sería un desequilibrio. Por otra parte, la gente piensa que el cubo grande (12 cm) creen que es más grande y pesado que el conjunto 2 (6 cm, 8 cm, 10 cm) pero es incorrecto."
	1	Cuando los estudiantes responden con base en los volúmenes de los cubos.	Respuesta G2-2: "Porque los cubos A (8 cm) y B (10 cm) son proporcionales en volumen los dos juntos con el volumen de C (6 cm) y D (12 cm)".
	0	Si la respuesta es dada a partir de las medidas de las aristas; sin considerar el volumen.	Respuesta G2-1: "Suponiendo que el peso de los cubos es constante y va cambiando según su tamaño. Equilibre sus aristas y están en equilibrio".
Calidad de la prueba (adecuada y suficiente)	2	Distinguir masa, fuerza (peso), densidad y volumen.	No hay ejemplo.
	1	Distinguir densidad, fuerza (peso) y/o volumen.	Respuesta G3-1: "Creí que era el correcto porque puse 18 cm de un lado y 18 cm del otro; pero ya me di cuenta que en $\text{cm}^3$ no son iguales, por lo tanto, la manera correcta es la de abajo."
	0	No identificar volumen, masa, fuerza (peso) y densidad.	Respuesta G3-2: "Porque la cantidad de cubos de un centímetro es la misma en ambos lados de la balanza."
Suficiencia del razonamiento	2	Explicitar que la solución que considera la densidad se basa en la igualdad de masas y fuerzas (pesos).	No hay ejemplo.
	1	Explicitar que la solución que considera los volúmenes es adecuada porque los cubos son del mismo material y por tanto de la misma densidad.	No hay ejemplo.
	0	No explicitar ninguno de los dos razonamientos anteriores.	Respuesta G5: "Dado que ya tenemos los volúmenes definidos, buscar la forma para que ahora la suma de los volúmenes coincida con cada lado de la balanza (cubos 6, 8, 10) = 1728 $\text{cm}^3$ y (cubo 12) = 1,728 $\text{cm}^3$ ".

Fuente: elaboración propia.

<sup>1</sup> Las respuestas de los estudiantes se editaron para presentarlas sin errores ortográficos, tales como tildes, signos de puntuación, letras erróneas, y así facilitar la comprensión en la lectura.

<sup>2</sup> Si bien esta respuesta no menciona explícitamente el concepto de densidad, hace uso de este intuitivamente.

La tabla 3 muestra la calificación obtenida en la calidad argumentativa de una respuesta tipo Perelman. Dicha respuesta, como ya se mencionó, solo refiere la equivalencia de volúmenes. Al tomar como punto de partida los criterios presentados en la tabla 2 para cada una de las cuatro categorías, se asignarían los siguientes puntajes: para la conclusión apropiada y pertinencia conceptual se asigna un punto, porque solo refiere a la equivalencia de volúmenes; para la calidad de la prueba, se asigna un punto, por distinguir al volumen; y, para suficiencia del razonamiento, se asigna 0, porque no explica que la equivalencia de volúmenes es válida en vista de que hay equivalencia de densidades y masas. Así, una calidad argumentativa mayor de 3 puntos sugeriría el uso de argumentos basados en conceptos de Física.

**Habilidad para considerar la opinión de otros**

La pregunta 2 del instrumento ofrece la posibilidad de estimar la habilidad de los estudiantes para

considerar la opinión de otros. En la redacción de esta pregunta, se estipula que alguien más piensa que la respuesta correcta es la presentada, mas no se afirma que lo sea. La habilidad para considerar la respuesta del otro es importante en la socialización y aprendizaje de la ciencia. Es decir, dado que la ciencia es una construcción social (OBREGÓN, 2002; RUIZ, AYALA, 1998), es importante tomar el punto de vista de otros y contrastarlo con el propio. Por ello, se analizaron los cambios en las respuestas de los estudiantes al momento de contestar la pregunta 2, así como los argumentos que esgrimieron para justificar el cambio o permanecer en la respuesta propia.

De manera análoga a cómo se procedió en la respuesta 1, para la respuesta 2 se especificaron criterios para calificar el cambio de postura o permanecer en la respuesta propia.

Según se observa en la tabla 4, las categorías de análisis tomaron en cuenta si atendía o no a la solución ofrecida por otros, si contrastaban dicha solución con la propia, si eso les permitía llegar

**Tabla 3.** Calidad argumentativa de la respuesta de Perelman a partir de los criterios de la tabla 2

Aspecto	Conclusión apropiada	Pertinencia conceptual	Calidad de la prueba	Suficiencia del razonamiento	Total
Evaluación	1	1	1	0	3

Fuente: elaboración propia.

**Tabla 4.** Elementos considerados para categorizar la capacidad de escucha del otro a partir de los argumentos esgrimidos por los estudiantes para cambiar o no su respuesta al acertijo

Criterios específicos para calificar la justificación para el cambio o no de postura a partir de la respuesta sugerida por otro			
Aspecto	Nivel	Criterio	Ejemplo representativo tomado de los estudiantes
Cambio en la dirección apropiada	2	Hay cambio de respuesta de incorrecta a correcta.	<p>Respuesta G3-2:<sup>1</sup></p>

Criterios específicos para calificar la justificación para el cambio o no de postura a partir de la respuesta sugerida por otro			
Aspecto	Nivel	Criterio	Ejemplo representativo tomado de los estudiantes
Cambio en la dirección apropiada	1	No hay cambio de respuesta porque esta es correcta.	Respuesta G1: "En el paso anterior [pregunta 1 del instrumento] comprobamos que es correcto, pues ya obtuvimos el volumen de cada bloque y los comparamos hasta obtener un equilibrio de volúmenes".
	0	No hay cambio de respuesta a pesar de que esta es incorrecta.	Respuesta G4-3: "No creo que sea la respuesta correcta [la ofrecida en la pregunta 2 del instrumento], ya que por las dimensiones de los cubos y el material con los que están hechos, a mi parecer pueden pesar más los 3 cubos que solo uno, aunque ese cubo sea el de dimensiones más grandes."
Considerar explicaciones alternativas para incorporar argumentos nuevos	2	Ofrece nuevos argumentos y estos son pertinentes.	Respuesta G-7: "Pusimos a prueba la sugerencia [solución presentada en la pregunta 2] y sí funcionó, no tomamos en cuenta solo las aristas, sino que tomamos en cuenta el volumen".
	1	Ofrece argumentos nuevos, pero no son pertinentes.	Respuesta G4-3: [Mencionó al tamaño en la respuesta 1. Mencionó al tamaño vinculado al material y el peso en la respuesta 2]
	0	No ofrece argumentos nuevos.	Respuesta G5-4: "No se equilibran los cm."
Identificar la pertinencia de los argumentos del otro	2	Hace referencia a que la solución del otro se basa en los conceptos de fuerza, masa o densidad (independientemente de si la conclusión es correcta o no).	Respuesta G2-2: "Si se piensa que los cuatro cubos son del mismo material, entonces la masa de los tres cubos será mayor que el cubo de arista 12".
	1	Hace referencia a que la solución del otro se basa en el concepto de volumen (independientemente de si la conclusión es correcta o no).	Respuesta G2-1: "Porque están calculando el volumen e intentando que queden equilibrados, pero eso no es lo que nos pide."
	0	No hace referencia a que la solución del otro se basa en los conceptos de fuerza, masa, volumen o densidad (independientemente de si la conclusión es correcta o no).	Respuesta G3-3: [Dejó en blanco el espacio correspondiente].
Contrastar la solución propia con la del otro	2	Explicita que probó la solución del otro y la comparó con la suya propia (independientemente de si la conclusión es correcta o no).	Respuesta G2: "Esta forma de pensar es válida, pues al principio de la actividad solo realizamos la suma de la medida de las aristas, pero esto no era correcto; pues tan solo sumamos una medida. Después de analizarlo con detenimiento, nos dimos cuenta de que el volumen es un valor que depende de 3 medidas y solo consideramos una. $(6 \text{ cm})^3 = 216 \text{ cm}^3$ $(8 \text{ cm})^3 = 512 \text{ cm}^3$ $(10 \text{ cm})^3 = 1000 \text{ cm}^3$ $(12 \text{ cm})^3 = 1728 \text{ cm}^3$ Realizando las operaciones coincidimos en la forma de pensar en el punto 2 [pregunta 2 del instrumento]."
	1	Explicita que probó la solución del otro, pero no la comparó con la suya propia (independientemente de si la conclusión es correcta o no).	Respuesta G1-3: "Por otra parte la gente piensa que el cubo grande (12 cm) creen que es más grande y pesado que el conjunto 2 (6 cm, 8 cm, 10 cm) pero es incorrecto".
	0	No explicita que probó la solución del otro.	Respuesta G2-3: "Pienso que la suma de cada medida elevada al cubo mantiene la misma relación que la suma de las medidas sin ser elevadas."

Fuente: elaboración propia.

a nuevos argumentos y si cambiaban su postura en la dirección correcta. Un valor de 0 en las cuatro categorías implica falta de capacidad para *escuchar* al otro. Cuanto mayor sea el puntaje, podría suponerse que el estudiante cuenta con más herramientas conceptuales para poder comparar su respuesta de manera crítica y cambiarla si la ha identificado como incorrecta.

### 3. Resultados

En la presente investigación se buscaba identificar el tipo de representación en las respuestas visuales que los estudiantes dibujaron como solución al acertijo propuesto. También se proponía evaluar la calidad de los argumentos en las respuestas escritas. Esta calidad argumentativa se relaciona con el uso correcto de conceptos básicos de física y sus relaciones (fuerza gravitacional, peso, masa, volumen y densidad). Se esperaba encontrar relaciones entre el tipo de representación visual, los argumentos y la solución ofrecida por los estudiantes. Un último aspecto de interés fue la contribución de las respuestas individuales para la elaboración de la respuesta grupal con énfasis en la capacidad de escucha del otro. Por cuestiones de espacio, las calificaciones de las respuestas visuales, la calidad argumentativa y la capacidad de escucha del otro se presentan en el anexo A.

Para empezar, se expone el condensado de todas las calificaciones a los tres aspectos mencionados en la tabla 5. A partir de esta información, se discuten los hallazgos relevantes para responder a las preguntas de investigación.

La tabla 5 contiene las respuestas que los alumnos registraron para las dos preguntas de la figura 1. En la columna “Respuesta a pregunta 1” se registran las respuestas y se clasifican como correctas o incorrectas, dependiendo del dibujo que usaron los estudiantes para atender a la instrucción de lograr el equilibrio en la balanza. La columna “Respuesta a pregunta 2” indica las respuestas que los estudiantes dan a la segunda pregunta del planteamiento, donde se sugiere un arreglo de 3 cubos (6 cm, 8 cm, 10 cm)

a 1 (12 cm) para lograr el equilibrio en la balanza. La columna “Autocorrección” da cuenta de si los alumnos, tanto de forma grupal como individual, utilizan la propuesta planteada en la pregunta 2 para reflexionar sobre esta posibilidad y autocorregirse, de ser el caso. La columna tipo de respuesta visual hace referencia a la categoría de dibujo tipo esquemático (E) o tipo pictórico (P). Las columnas “Calidad argumentativa” y “Capacidad de escucha del otro” arrojan los puntajes que alcanzan las contribuciones grupales e individuales, con base en los criterios de las tablas 2 y 4. Los resultados de las tres últimas columnas están desglosados en el anexo A. De la observación y comparación entre los dibujos grupales e individuales es posible identificar similitudes estilísticas que hacen suponer cuál participante estuvo a cargo de dibujar la respuesta grupal. En la tabla 5, se señala con un asterisco al participante cuyo dibujo fue la fuente para realizar el dibujo grupal.

#### a. Calidad de las respuestas visuales

Con respecto al tipo de respuesta visual, puede afirmarse lo siguiente. Se obtuvieron y analizaron un total de 39 respuestas: 31 individuales y 8 grupales. Se registraron 10 respuestas individuales del tipo esquemático (32 %); de estas, 6 son incorrectas y 4 son correctas; 21 son del tipo pictórico (68 %), de las cuales 20 son incorrectas y 1 es correcta (véase tabla 5). Con respecto a las respuestas grupales, se tiene que 7 de los 8 equipos lograron dibujos del tipo esquemático (87,5 %) con 6 respuestas correctas y 1 incorrecta. Solamente el equipo 8 entregó una representación pictórica que tiene respuesta incorrecta. Es decir, el trabajo grupal favoreció la elaboración de respuestas visuales al acertijo como representaciones esquemáticas, las cuales se han definido como aquellas que contienen rasgos pertinentes para la solución del problema.

La figura 2 muestra la respuesta verbal ofrecida por el participante 4 del grupo 4, cuya representación visual obtuvo la calificación más alta. Como se

Tabla 5. Respuestas individuales y grupales a las preguntas de la figura 1

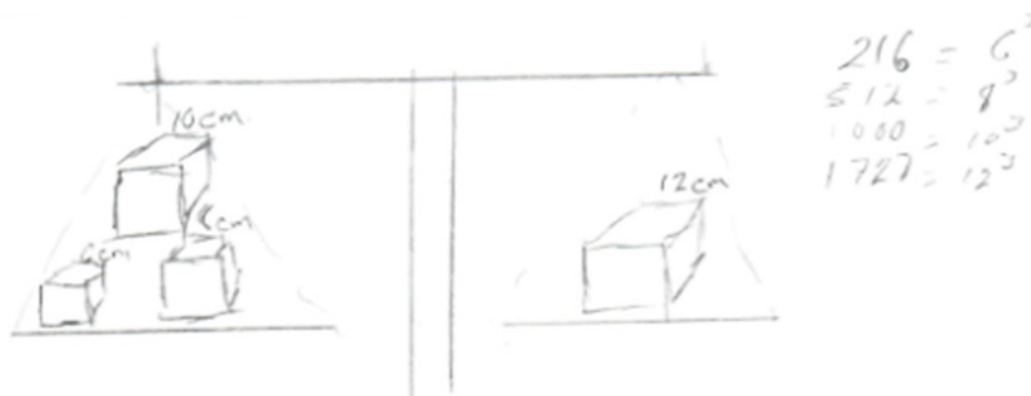
Grupo o participante	Respuesta a pregunta 1	Respuesta a pregunta 2	Autocorrección	Tipo de respuesta visual	Calidad argumentativa	Capacidad de escucha del otro
1	correcta	correcto	no	E	3	4
*1-1	incorrecta	incorrecto	no	E	1	0
1-2	incorrecta	incorrecto	no	P	0	0
1-3	incorrecta	incorrecto	no	P	3	2
1-4	incorrecta	incorrecto	no	P	2	0
2	correcta	correcto	sí	E	3	5
2-1	incorrecta	incorrecto	no	P	0	4
*2-2	incorrecta	incorrecto	no	P	2	1
2-3	incorrecta	incorrecto	no	E	0	1
2-4	incorrecta	incorrecto	no	P	1	2
3	correcta	correcto	no	E	3	5
3-1	correcta	correcta	sí	E	3	3
3-2	incorrecta	correcta	sí	E	1	3
*3-3	incorrecta	incorrecto	no	P	0	2
4	correcta	correcto	no	E	3	3
*4-1	incorrecta	correcto ambiguo	no	E	0	1
4-2	correcta	correcto	no	E	3	2
4-3	incorrecta	incorrecto	no	P	0	0
4-4	correcta	correcto	no	E	5	2
5	correcta	correcto	no	E	3	3
5-1	correcta	correcto	no	E	3	3
*5-2	correcta	correcto	no	P	3	2
5-3	incorrecta	incorrecto	no	P	0	1
5-4	incorrecta	incorrecto	no	P	0	0
6	incorrecta	incorrecto	no	E	0	2
*6-1	incorrecta	ambiguo	no	P	0	1
6-2	incorrecta	incorrecto	no	P	0	0
6-3	incorrecta	ambiguo	no	P	0	4
6-4	incorrecta	incorrecto	no	P	0	0
7	correcta	correcto	si	E	3	6
7-1	incorrecta	incorrecto	no	E	0	1
7-2	incorrecta	incorrecto	no	P	0	0
*7-3	incorrecta	ambiguo	no	P	0	1
7-4	incorrecta	incorrecto	no	P	2	1
8	incorrecta	incorrecto	no	P	0	1
8-1	incorrecta	incorrecto	no	P	2	1
8-2	incorrecta	incorrecto	no	E	0	1
*8-3	incorrecta	ambiguo	no	P	0	1
8-4	incorrecta	incorrecto	no	P	0	0

\* indica el dibujo que los autores consideran como fuente para realizar el dibujo grupal.

Fuente: elaboración propia.

observa, la representación tridimensional solo la llevó a cabo para los cubos, no para la balanza. Además, la anotación del dato de la arista ocurre de manera pertinente. Los cubos están colocados dentro de los platillos de la balanza y se han dibujado considerando la proporcionalidad de sus tamaños.

Las anotaciones adicionales sugieren el cálculo del volumen a partir de la arista de los cubos. Todos estos elementos indican atención a los aspectos relevantes de la solución. Por ello, no sorprende que este participante haya respondido al acertijo con la respuesta correcta.



**Figura 2.** Ejemplo de representación esquemática con el puntaje más alto observado para una contribución individual (respuesta G4-4).

**Tabla 6.** Promedios de la calidad de los argumentos de los integrantes de cada equipo

Grupo	Aspecto				Nivel	
	CA	PC	CP	S	Individual promedio	Grupal
G1	0,00	0,75	0,75	0,00	1,50	3
G2	0,67	0,33	0,33	0,00	1,33	3
G3	0,67	0,33	0,33	0,00	1,33	3
G4	0,75	0,50	0,75	0,00	2,00	3
G5	0,50	0,50	0,50	0,00	1,50	3
G6	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0
G7	0,00	0,25	0,25	0,00	0,50	3
G8	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0

Fuente: elaboración propia.

### b. Calidad argumentativa

De la tabla 5 se destaca el hecho de que la calificación grupal para la calidad argumentativa no excede a la individual, a excepción del equipo 4 cuyo integrante 4-4 obtuvo la máxima calificación en este rubro. También, en los equipos que no lograron la respuesta correcta (equipos 6 y 8), la calidad argumentativa de todos los integrantes fue cero con excepción del 8-1, de ahí que se puede inferir la necesidad de una calidad argumentativa individual no nula que enriquezca la respuesta grupal.

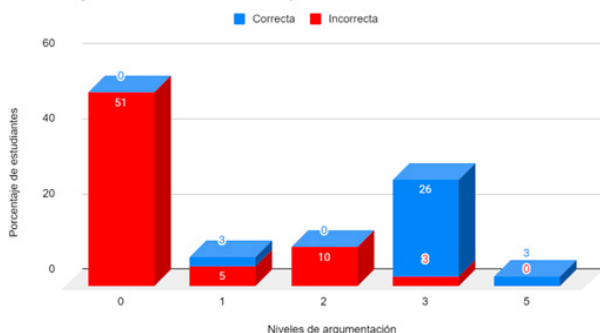
Las relaciones entre la calidad argumentativa individual y grupal se detallan en la tabla 6, en la que se

recogen los promedios correspondientes a la calidad de los argumentos presentados por los miembros de cada grupo, calculados según las categorías mostradas en el anexo A. Los aspectos considerados con una escala de 0 a 2 son: la conclusión adecuada (CA), la pertinencia conceptual (PC), la calidad de la prueba (CP) y la suficiencia del razonamiento (S). La columna “nivel individual promedio” es la suma de los promedios de cada aspecto para las respuestas individuales. La última columna contiene la calificación de la calidad argumentativa a partir del trabajo grupal (tomada de la tabla 5). Esto nos sirve para identificar el nivel que alcanzan los argumentos debido a la contribución de sus miembros.

Según la tabla 6, la calidad de la argumentación individual, en promedio, mejora cuando se trabaja en equipos. Esto es, a manera de ilustración, en el grupo 2, cada estudiante tiene un nivel de argumentación promedio de 1,33; sin embargo, con el trabajo en equipo, el nivel de argumentación alcanzado es 3. Caso digno de mención es el del grupo 4, en el que se encuentra el estudiante cuyo nivel de argumentación llega a 5, gracias a él, el promedio individual llega al 2 y, con el trabajo en equipo, sube a 3. Sin embargo, esto a costa de una disminución en la calidad de argumentación individual.

La figura 3 muestra la relación entre el nivel de argumentación y el tipo de respuesta que dieron al acertijo: correcta o incorrecta. Para ello, se calcularon los porcentajes de estudiantes que contestaron con una calificación dada de calidad argumentativa separándolos según si habían dado o no la respuesta correcta. Hay que recordar que una respuesta experta tipo Perelman implica una calidad argumentativa de 3 que, como se expone en la introducción, está basada en equivalencia de volúmenes y no en equivalencia de masas. Esto último implica una calidad argumentativa mayor a 3. Así, la baja calidad argumentativa parece estar asociada a respuestas incorrectas, mientras que una calidad argumentativa igual o mayor de 3 (basada en conceptos de Física) está asociada a respuestas correctas.

Porcentaje de estudiantes con respuestas correctas e incorrectas

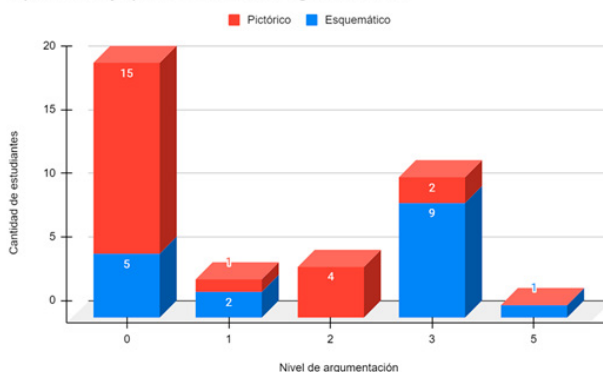


**Figura 3.** Relación entre el nivel de argumentación y el porcentaje de estudiantes que obtuvieron respuestas correctas e incorrectas.

**Fuente:** elaboración propia.

Asimismo, se hizo una comparación entre el nivel de argumentación y el tipo de dibujo pictórico o esquemático elaborado (figura 4). Como se observa, hay un punto de cambio en las proporciones de respuestas esquemáticas y pictóricas en la calidad argumentativa igual a 3 que se ha asignado a la respuesta experta tipo Perelman. Así, la baja calidad argumentativa parece estar asociada a representaciones pictóricas (con énfasis en aspectos estéticos no pertinentes), mientras que una calidad argumentativa igual o mayor de 3 (basada en conceptos de Física) está asociada a representaciones esquemáticas (con énfasis en los elementos gráficos pertinentes para la solución del acertijo).

Tipo de dibujo por cada nivel de argumentación



Nota: se incluyen las respuestas tanto individuales como grupales.

**Figura 4.** Respuestas de los estudiantes por cada tipo de dibujo en relación con el nivel de argumentación. Fuente: Elaboración propia.

### c. Capacidad de escucha del otro

En la tabla 5 pueden establecerse relaciones entre el trabajo individual y grupal, a partir de las calificaciones de la capacidad de escucha del otro y la iniciativa tomada al momento de dibujar la respuesta grupal. La calificación de la capacidad de escucha del otro fue mayor en las respuestas grupales que el máximo de la calificación individual, con excepción del equipo 6. En este, el participante 6-3 logró una calificación de 4 y la respuesta grupal alcanzó solo una nota de 2. Esto



sugiere que el trabajo grupal, aunque no promueve una mayor calidad argumentativa, favorece la capacidad para tomar en cuenta los puntos de vista de los otros.

Por último, respecto a los dibujos grupales, de la tabla 5 se observa que quien estuvo a cargo de dibujar la respuesta grupal (señalado en la tabla con asterisco) no tenía las mejores notas en respuesta correcta, tipo de respuesta visual, nivel de argumentación ni en capacidad de escucha del otro. Intuitivamente, se podría pensar que quien dibuja la respuesta grupal es quien asume el liderazgo de la dinámica en grupo. Sin embargo, con los datos recabados no es posible explorar las relaciones de poder de la dinámica del grupo que promueven liderazgo.

#### 4. Discusión y conclusiones

La presente investigación muestra la comparación entre las respuestas individuales y grupales durante la solución del acertijo de Perelman de estudiantes universitarios. Estas respuestas, desde una perspectiva del aprendizaje de la Física, deben evidenciar conocimientos relativos a conceptos como fuerza gravitacional, peso, masa, volumen y densidad, así como la relación entre estos. Es decir, un estudiante con conocimiento tanto del lenguaje de la física como los conceptos antes mencionados, incorpora en su respuesta al acertijo estos y sus relaciones de una manera satisfactoria. Lo anterior da cuenta del nivel de logro de las competencias científicas del estudiante, puesto que incorpora habilidades para la comunicación, conocimientos factuales, identificación y procesamiento de información, análisis de enunciados científicos, solución de problemas tanto de forma individual como en equipo.

Respecto a la relación entre las respuestas visuales y la calidad argumentativa, se tiene que un nivel alto de argumentación está asociado con representaciones visuales de tipo esquemático. Estas dejan de lado detalles estéticos para centrarse en aspectos relevantes para la solución del problema.

Adicionalmente, se encontraron pistas de las variables que parecen favorecer que se encuentre una respuesta correcta al acertijo de manera individual y grupal. Los resultados sugieren que una representación esquemática del problema está relacionada con el establecimiento de respuestas correctas. Sin embargo, no se encontró evidencia para suponer una relación bidireccional entre ellos. Es decir, la mayoría de las respuestas que fueron correctas implican una representación esquemática del problema, pero elaborar un dibujo esquemático no asegura que se llegue a la respuesta correcta. Lo mismo puede decirse con respecto a la calidad de la argumentación y la respuesta correcta.

En cuanto a la pregunta 2 del instrumento empleado, en la que se plantea a los estudiantes la respuesta tipo Perelman y se les cuestiona si creen que esa es la solución correcta, la mención de la respuesta correcta (sin especificar que lo fuera) promovió el cambio de respuesta en algunos participantes. Además, en un equipo favoreció su autocorrección. Sin embargo, su efecto no pareció relevante, debido a la ambigüedad con que se presentó. Esto sugiere que la búsqueda de la respuesta correcta está influenciada por relaciones de poder basadas en la autoridad, prestigio o experticia de otros. Vale la pena señalar que los argumentos presentados no alcanzan la calidad de la respuesta experta, lo que indica que el desarrollo de aprendizajes de los conceptos físicos y la habilidad para utilizarlos de forma individual o en equipo deben ser reforzados por parte de los docentes, aunque, tampoco Perelman dio una respuesta con este nivel de rigurosidad.

A través del análisis de los trabajos que los estudiantes entregaron en físico, no es posible entender cómo algunos grupos llegaron a la respuesta correcta, pues ninguno de sus integrantes aportó una contribución correcta en su desempeño individual. Puede inferirse, para los grupos que lograron una respuesta correcta, ya que algunos de sus miembros lo hicieron, que estos últimos lograron convencer quizás al resto del equipo para seleccionar la respuesta correcta. Un futuro estudio en este tenor implicaría la grabación

en video de las interacciones de los equipos, lo que arrojaría información acerca del proceso adoptado para llegar a una respuesta grupal.

Diversos estudios indican lo valioso y enriquecedor del trabajo colaborativo como estrategia de aprendizaje en un contexto educativo (JARAMILLO, QUINTERO, 2021; REYES, SAAVEDRA, AGUAYO, 2019). De ahí la relevancia de incluir actividades colaborativas para resolver problemas, como la que se propuso en este trabajo. A manera de consideraciones para investigaciones futuras, se destaca que en las interacciones grupales se tendrían que establecer reglas y lineamientos para el antes, durante y después de la actividad colaborativa: analizar los estilos de aprendizaje de los estudiantes, para así formar los grupos de manera heterogénea, dar un seguimiento a los procesos de interacción, evaluar los resultados de forma cuantitativa y cualitativa a través de instrumentos que no solo arrojen luz sobre si se obtuvieron las respuestas correctas, sino que además permitan evaluar el desempeño de los participantes de forma individual y cómo es que perciben la interacción y el desempeño de sus compañeros (REYES, SAAVEDRA, AGUAYO, 2019). Así como la forma en que la actividad colaborativa abona a generar un ambiente que motive al aprendizaje entre pares.

#### a. Limitaciones de la presente investigación y futuras investigaciones

No se puede tener acceso a detalles de la discusión y sugerir para una futura investigación que debería intentarse metodología que incluya videos y audio.

## 5. Referencias

- ASGARI, M.; JAVADIPOUR, M.; SALEHI, K.; ZAREI, A. Review of the intended curriculum of the second elementary course based on compliance with the criteria and indicators of De Bono's Lateral Thinking in science textbooks. **Research in Teaching**, Kurdistán: Irán, v. 10, n. 1, pp. 80-49. 2022. <https://www.doi.org/10.34785/I012.2022.003>
- CEBERIO, M.; ALMUDÍ, J. M.; ZUBIMENDI, J. L. Análisis de los argumentos elaborados por estudiantes de cursos introductorios de Física universitaria ante situaciones problemáticas. **Enseñanza de las Ciencias. Revista de Investigación y Experiencias Didácticas**, Barcelona: España, v. 32, n. 3, pp. 71-88. 2014. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1112>
- ESCOBAR, J.; CUERVO, A. Validez de contenido y juicio de expertos: una aproximación a su utilización. **Avances en Medición**, Bogotá: Colombia, v. 6, n. 1, pp. 27-36. 2008.
- FACIONE, P. **Critical thinking: A statement of expert consensus for purposes of educational assessment and instruction (The Delphi Report)**. American Philosophical Association. Newark: EE. UU. 1990.
- FISHER, R. **Teaching children to think**. Nelson Thornes. Cheltenham: Reino Unido. 2005.
- FREDERICK, S. Cognitive reflection and decision making. **Journal of Economic Perspectives**, Nashville: EE. UU., v. 19, n. 4, pp. 25-42. 2005. <https://doi.org/10.1257/089533005775196732>
- HEARD, J.; SCOLAR, C.; DUCKWORTH, D.; RAMALINGAM, D.; TEO, I. **Critical thinking: Skill development framework**. Australian Council for Educational Research. Melbourne: Australia. 2020. [https://research.acer.edu.au/ar\\_misc/41](https://research.acer.edu.au/ar_misc/41)
- HEGARTY, M.; KOZHEVNIKOV, M. Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. **Journal of Educational Psychology**, Washington: EE. UU, v. 91, n. 4, pp. 684-689. 1999. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.91.4.684>
- JARAMILLO, B.; QUINTERO, S. Trabajando en equipo: múltiples perspectivas acerca del trabajo cooperativo y colaborativo: **Educación y Humanismo**, Barranquilla: Colombia, v. 23, n. 41, pp. 205-233. 2021. <https://doi.org/10.17081/eduhum.23.41.4188>
- KADOR, J. **How to ace the brainteaser interview**. McGraw-Hill. Nueva York: EE. UU. 2004.
- KAHNEMAN, D. **Thinking, fast and slow**. Farrar, Straus and Giroux. Nueva York: EE. UU. 2011.
- LIPMAN, M. Critical thinking: What can it be? **Educational Leadership**, Tecumseh: EE. UU., v. 46, n. 1, pp. 38-43. 1988. [https://files.ascd.org/staticfiles/ascd/pdf/journals/ed\\_lead/el\\_198809\\_lipman.pdf](https://files.ascd.org/staticfiles/ascd/pdf/journals/ed_lead/el_198809_lipman.pdf)

- MALHERBE, K. Puzzle based learning in undergraduate studies. **International Journal for Innovation Education and Research**, Dhaka: Bangladesh, v. 9, n. 11, pp. 383-397. 2021. <https://doi.org/10.31686/ijer.vol9.iss11.3525>
- MONTEALEGRE, R. La solución de problemas cognitivos: una reflexión cognitiva sociocultural. **Avances en Psicología Latinoamericana**. Bogotá: Colombia, v. 25, n. 2, pp. 20-39. 2007.
- OBREGÓN, D. La construcción social del conocimiento: los casos de Kuhn y de Fleck. **Revista Colombiana de Filosofía de la Ciencia**, Bogotá: Colombia, v. 3, n. 7, pp. 41-58. 2002.
- ORGANISATION FOR ECONOMIC CO-OPERATION AND DEVELOPMENT (OECD). **PISA 2021 Creative Thinking Framework (Third Draft)**. 2019. Recuperado de <https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA-2021-creative-thinking-framework.pdf>
- PERELMAN, Y. I. **Fun with maths and physics. Brain teasers, tricks and illusions**. Mir Publishers. Moscú: URSS. 1988. <https://archive.org/details/FunWithPhysicsAndMaths-English-BrianTeasersTricksIllusions/mode/2up>
- PERRI, D. F.; CALLANAN, G. A.; ROTENBERRY, P. F.; OEHLERS, P. F. Education and training in ethical decision making: Comparing context and orientation. **Education+ Training**, Bradford: Reino Unido, v. 51, n. 1, pp. 70-83. 2009. <https://doi.org/10.1108/00400910910931841>
- POUNDSTONE, W. **How would you move Mount Fuji?: Microsoft's cult of the puzzle-how the world's smartest companies select the most creative thinkers**. Little, Brown and Company. Nueva York: EE. UU. 2003. <https://ndtpm.files.wordpress.com/2012/01/how-would-you-move-mount-fuji.pdf>
- POUNDSTONE, W. **Are you smart enough to work at Google?** Little, Brown and Company. Nueva York: EE. UU. 2012. [https://www.academia.edu/20077893/Are\\_You\\_Smart\\_Enough\\_to\\_Work\\_at\\_Google](https://www.academia.edu/20077893/Are_You_Smart_Enough_to_Work_at_Google)
- PRESMEG, N. C. Visualisation in high school mathematics. **For the Learning of Mathematics**, New Westminster: Canadá, v. 6, n. 3, pp. 42-46. 1986. <http://www.jstor.org/stable/40247826>
- REYES TORRES, G. A.; SAAVEDRA, J. H.; AGUAYOVERGARA, M. Aprendizaje basado en equipos en un curso de Ingeniería en Educación Superior. **Revista Educación**, San Pedro de Montes de Oca: Costa Rica, v. 44, n. 1, pp. 361-380. 2019. <https://doi.org/10.15517/revedu.v44i1.38316>
- REZVANIFARD, F.; RADMEHR, F.; ROGOVCHENKO, Y. Advancing engineering students' conceptual understanding through puzzle-based learning: A case study with exact differential equations. **Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA**, Oxford, Inglaterra, v. 42, n. 2, pp. 126-149. 2023. <https://doi.org/10.1093/teamat/hrac005>
- RUIZ, R.; AYALA, F. **El método en las ciencias. Epistemología y darwinismo**. Fondo de Cultura Económica. México. 2015.
- SAMPSON, V.; GROOMS, J.; WALKER, J. Argument-driven inquiry as a way to help students learn how to participate in scientific argumentation and craft written arguments: An exploratory study. **Science Education**, Hoboken: EE. UU., v. 95, n. 2, pp. 217-257. 2011. <https://doi.org/10.1002/sce.20421>
- SLISKO, J. Sacándole más jugo al problema de la corona. Primera parte: el tratamiento conceptual. **Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias**, Cádiz: España, v. 2, n. 3, pp. 364-373. 2005.
- SLISKO, J.; FORJAN, M.; CRUZ, A. C. Equilibrium of four cubes on a balance: Exploring high-school students' answers and different ways of challenging their "fast thinking". **Latin-American Journal of Physics Education**, Ciudad de México: México, v. 14, n. 2, art. 2301. 2020.
- TOPLAK, M. E.; WEST, R. F.; STANOVICH, K. E. The cognitive reflection test as a predictor of performance on heuristics-and-biases tasks. **Memory & Cognition**, Chicago, EE. UU., v. 39, n. 7, 1275-1289. 2011. <https://doi.org/10.3758/s13421-011-0104-1>
- URRUTIA, M.; BARRIOS, S.; GUTIÉRREZ, M.; MAYORGA, M. Métodos óptimos para determinar validez de contenido. **Revista Cubana de Educación Médica Superior**, La Habana: Cuba, v. 28, n. 3, pp. 547-558. 2014.

**Anexo A.**

**Calificaciones obtenidas según los protocolos de evaluación para respuestas visuales, calidad argumentativa y habilidad de escucha del otro**

Grupo o participante	Tipo de respuesta visual <sup>a</sup>									Calidad argumentativa <sup>b</sup>				Capacidad de escucha del otro <sup>c</sup>					
	Puntaje según las categorías							Total	TIPO	Puntaje según las categorías				Total	Puntaje según las categorías				Total
	1	2	3	4	5	6	7			8	9	10	11		12	13	14	15	
1	0	1	1	1	1	1	0	5	E	1	1	1	0	3	1	0	1	2	4
1-1	0	1	1	1	1	0	1	5	E	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
1-2	0	1	1	1	1	0	0	4	P	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1-3	1	0	0	1	0	1	0	3	P	0	2	1	0	3	0	0	1	1	2
1-4	0	1	1	1	1	0	0	4	P	0	1	1	0	2	0	0	0	0	0
2	1	0	1	1	1	1	0	5	E	1	1	1	0	3	2	0	1	2	5
2-1	0	1	0	1	1	0	0	3	P	0	0	0	0	0	0	1	2	1	4
2-2	1	0	0	1	1	0	0	3	P	0	1	1	0	2	0	0	0	1	1
2-3	1	0	1	1	1	1	0	5	E	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
2-4	1	0	0	0	1	1	0	3	P	0	0	1	0	1	0	0	1	1	2
3	1	0	1	1	1	1	0	5	E	1	1	1	0	3	1	1	2	1	5
3-1	1	0	1	1	0	1	1	5	E	1	1	1	0	3	2	0	0	1	3
3-2	0	1	1	1	1	1	0	5	E	1	0	0	0	1	2	0	0	1	3
3-3	1	0	0	0	1	1	0	3	P	0	0	0	0	0	0	1	1	0	2
4	1	0	1	1	1	1	0	5	E	1	1	1	0	3	1	0	1	1	3
4-1	1	0	1	1	1	1	0	5	E	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
4-2	1	1	0	0	1	1	1	5	E	1	1	1	0	3	1	0	0	1	2
4-3	0	0	1	1	1	0	0	3	P	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4-4	1	1	1	1	1	0	1	6	E	2	1	2	0	5	1	0	0	1	2
5	1	0	1	1	1	1	1	6	E	1	1	1	0	3	1	0	1	1	3
5-1	1	0	1	0	1	1	1	5	E	1	1	1	0	3	1	0	1	1	3
5-2	1	0	0	1	1	1	0	4	P	1	1	1	0	3	1	0	0	1	2
5-3	0	1	0	0	1	1	0	3	P	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
5-4	1	1	0	0	1	0	0	3	P	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	1	1	1	1	1	0	0	5	E	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2
6-1	0	1	1	1	1	0	0	4	P	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
6-2	1	1	0	0	1	1	0	4	P	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6-3	0	1	1	1	1	0	0	4	P	0	0	0	0	0	0	1	2	1	4
6-4	0	1	0	0	1	1	0	3	P	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	1	0	1	1	1	1	0	5	E	1	1	1	0	3	2	1	1	2	6
7-1	1	0	1	1	1	1	0	5	E	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
7-2	1	0	0	1	1	1	0	4	P	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7-3	0	0	1	1	1	1	0	4	P	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
7-4	0	1	1	1	1	0	0	4	P	0	1	1	0	2	0	0	0	1	1
8	1	0	0	0	1	1	0	3	P	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
8-1	1	0	0	1	1	1	0	4	P	0	1	1	0	2	0	0	0	1	1
8-2	1	0	1	1	1	1	0	5	E	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
8-3	0	0	1	1	1	1	0	4	P	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
8-4	1	0	0	1	1	1	0	4	P	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Notas:

<sup>a</sup>: Resultados obtenidos de aplicar los criterios de la tabla 1.

<sup>b</sup>: Resultados obtenidos de aplicar los criterios de la tabla 2.

<sup>c</sup>: Resultados obtenidos de aplicar los criterios de la tabla 4.

P = representación pictórica y E = representación esquemática.

Categorías:

1. Representación de la balanza.
2. Representación de los cubos.
3. Tamaño de los cubos e información de la longitud de las aristas.
4. Proporción de los diferentes tamaños de los cubos.
5. Posición de los cubos con respecto a la balanza.
6. Manejo de sombra (claroscuro u opacidad).
7. Información textual añadida al dibujo.
8. Conclusión adecuada.
9. Pertinencia conceptual.
10. Calidad de la prueba.
11. Suficiencia del razonamiento.
12. Cambio en la dirección apropiada.
13. Considerar explicaciones alternativas para incorporar argumentos nuevos.
14. Identificar la pertinencia de los argumentos del otro.
15. Contrastar la solución propia con la del otro.

