



UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias

Número especial, v18, 2023.

11 Congreso Nacional de Enseñanza de la Física y la Astronomía



Crónica de Experiencia

LOS DIAGRAMAS DE PENROSE, UNA PUERTA HACIA LA COMPRENSIÓN DE LA ENERGÍA OSCURA

PENROSE DIAGRAMS, A DOOR TOWARDS THE COMPREHENSION OF DARK ENERGY

DIAGRAMAS DE PENROSE, UMA PORTA PARA A COMPREENSÃO DA ENERGIA ESCURA

Juan Manuel Peña Díaz^{1*}, Tomás David Campo Martínez^{2**}

Peña, J.; Campo, T. (2023). Los diagramas de Penrose, una puerta hacia la comprensión de la energía oscura. *Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias*, Número especial, v18, pp.1-12

Resumen

El siguiente artículo pretende realizar la construcción de los diagramas de Penrose para representar el Universo de De-Sitter, para tener un soporte visual que permita explicar el concepto de *energía oscura*. Se tienen como objetivos: 1. Reconstruir conceptos de la Teoría General de la Relatividad, tales como métrica pseudo-riemanniana y espacio-tiempo. 2. Representar el Universo de De-Sitter por medio de los diagramas de Penrose. 3. Generar interés en los estudiantes acerca de las temáticas de la Teoría General de la Relatividad utilizando un objeto como la energía oscura. En la actualidad los modelos cosmológicos que mejor se acercan a los datos recopilados de las observaciones astronómicas recientes, plantean la existencia de un campo escalar que se opone a la atracción gravitacional entre los cuerpos y que además genera una aparente repulsión entre estos. Este campo está asociado a la constante cosmológica de las ecuaciones de la gravitación de Einstein y se le otorga el nombre de energía oscura debido a la incapacidad de medirla o detectarla. El trabajo utiliza la investigación documental como metodología ya que permite una búsqueda y almacenamiento de información para su análisis y su presentación sistemática, coherente y suficientemente argumentada, a través de un análisis descriptivo-explicativo. Los diagramas de Penrose-Carter permiten por medio de una figura llamativa generar un marco explicativo en el que se abordan temas como la inflación del Universo, la energía oscura y su papel en ella, el fondo cósmico de microondas, etc. El diagrama cumple entonces con dos objetivos planteados, el primero es generar interés debido a su forma y segundo crear una explicación que permita entender el papel de la energía oscura en el modelo inflacionario.

Palabras-Clave: Geometría, variedad, universo, gráfico, luz.

Abstract

The following article pretends to construct the Penrose diagrams to represent the De-Sitter Universe. Likewise, to be a visual support to explain the concept of dark energy.

^{1*} Master Enseigner à l'étranger. Université Jean Jaurès, Francia. juanmanuelpenadiaz11@gmail.com - ORCID <https://orcid.org/0000-0001-8585-3982>

^{2**} Licenciado en Física. Universidad Pedagógica Nacional, Colombia. dfi_tdcampom612@pedagogica.edu.co - ORCID <https://orcid.org/0000-0003-4846-7403>

The objectives are: 1. To reconstruct concepts of the General Theory of Relativity, such as pseudo-Riemannian metric and space-time. 2. To represent the De-Sitter Universe by means of Penrose diagrams. 3. To stimulate the students' interest in General Theory of Relativity subjects, using dark energy as the object of study. At present, the cosmological models that best approximate the data collected from recent astronomical observations propose the existence of a scalar field. This field opposes the gravitational attraction between bodies and generates an apparent repulsion between them. It is associated with the cosmological constant of Einstein's gravitational equations and is called dark energy due to the inability to measure or detect it. The work uses documentary research as a methodology, since it allows a search and storage of information for its analysis and its systematic, coherent and sufficiently argued presentation, through a descriptive-explanatory analysis. Through a striking figure, the Penrose-Carter diagrams generate an explicative framework covering topics such as the inflation of the Universe, dark energy and its role in it, the cosmic microwave background, etc. The diagram thus fulfills two objectives. The first is to generate interest due to its shape. And the second is to explain the role of dark energy in the inflationary model.

Keywords: Physics, graphic, light.

Resumo

No seguinte artigo pretende realizar a construção dos diagramas de Penrose para representar o Universo de De-Sitter, para ter um suporte visual que permita explicar o conceito de energia escura. Têm-se como objetivos: 1. Reconstruir conceitos da Teoria Geral da Relatividade, tais como métrica pseudo-Riemanniana espaço-tempo. 2. Representa o Universo de De-Sitter através dos diagramas de Penrose. 3. Gerar interesse nos estudantes sobre as temáticas da Teoria Geral da Relatividade utilizando um objeto como a energia escura. Atualmente, os modelos cosmológicos que melhor se aproximam dos dados recolhidos das observações astronômicas recentes, apresentam a existência de um campo escalar que se opõe à atração gravitacional entre os corpos e que além disso gera uma aparente repulsão entre eles. Este campo está associado à constante cosmológica das equações da gravitação de Einstein e lhe é concedido o nome de energia escura devido à incapacidade de medi-la ou detectá-la. O trabalho utiliza a pesquisa documental como metodologia, já que permite uma busca e armazenamento de informação para sua análise e sua apresentação sistemática, coerente e suficientemente argumentada, através de uma análise descritivo-explicativo. Os diagramas de Penrose-Carter permitem por meio de uma figura impressionante gerar um quadro explicativo no qual se abordam temas como a inflação do Universo, a energia escura e seu papel nela, o fundo cósmico de microondas, etc. O diagrama então atende a dois objetivos definidos, o primeiro é gerar interesse devido à sua forma e segundo criar uma explicação que permita entender o papel da energia escura no modelo inflacionário.

Palavras-Chave: Física, gráfico, luz.



UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias

Número especial, v18, 2023.

11 Congreso Nacional de Enseñanza de la Física y la Astronomía



Crónica de Experiencia

1. Introducción

La historia de la cosmología ha sido ampliamente estudiada usando la teoría general de la relatividad de Einstein. Hoy en día se sabe que el Universo se encuentra en expansión, pues se ha observado que la distancia entre galaxias se incrementa constantemente y cada vez más rápido.

Usando esta misma teoría en el presente artículo se abordarán algunos conceptos que permiten dotar al Universo de una estructura matemática. Para ello se presentará un breve marco teórico de los elementos fundamentales de la geometría de Riemann que son utilizados para el estudio de las ecuaciones de Einstein. Entre estos, se resalta la importancia de la métrica pseudo-riemanniana, que describe y da características geométricas al Universo, para, así, evidenciar cómo, desde el postulado de invariancia de la luz en marcos inerciales, se redefine la causalidad.

Para este cometido, se usaron textos posgraduales y artículos netamente científicos que permiten conocer los aspectos relevantes de la teoría y sus explicaciones. Adicionalmente, se consultaron algunos textos divulgativos, con el fin de usar ejemplos basados en la literatura de acceso público.

Con esto en mente, se quiere mostrar la solución a las ecuaciones de Einstein mediante el modelo estándar de la cosmología, particularmente con las condiciones de De-Sitter, donde se asume un Universo en expansión, explicando la relación que tiene este con la energía oscura y las implicaciones que trae.

Se decidió usar los diagramas de Penrose-Carter ya que permiten condensar los conceptos abordados en el artículo, demostrando ser una herramienta de

fácil construcción y llamativa, que posibilita la generación un entorno de divulgación y enseñanza de la cosmología relativista.

2. Marco Teórico.

Sea \mathcal{M} un *espacio topológico*³ con una topología $\tau \subseteq \wp(\mathcal{M})$. Se dice que el par (\mathcal{M}, τ) es una variedad topológica si y sólo

1. $\emptyset, \mathcal{M} \in \tau$
2. $\forall U_\alpha \in \tau \mid U_{\alpha \in I} \{U_\alpha\} \in \tau$ y
3. $\forall U_\alpha, U_\beta \in \tau \mid U_\alpha \cap U_\beta \in \tau$

Sea (\mathcal{M}, τ) un espacio topológico. Se dice que este espacio topológico es una *variedad topológica*⁴ si y sólo si \mathcal{M} es espacio de Hausdorff, 2-contable y localmente homeomorfo a \mathbb{R}^n .

Las variedades topológicas pueden ser dotadas de coordenadas localmente por medio de parches coordenados. Al tomar un par de abiertos⁵, esto es, $U \in \wp(\mathcal{M})$ y $V \in \wp(\mathbb{R}^n)$, se define un homeomorfismo⁶ $\varphi: U \rightarrow V$, entonces, se denomina al par (U, φ) como carta coordenada y a U como dominio coordenado y φ como mapa coordenado. Las funciones coordenadas euclidianas son n-tuplas $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, de tal manera que a un punto arbitrario $p \in \mathcal{M}$, se le puede mapear mediante φ como $\varphi(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p))$, para dotar localmente a \mathcal{M} con coordenadas.

Ahora, se toma una colección de cartas coordenadas, $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$, de tal modo que todos los dominios coordenados son un cubrimiento para \mathcal{M} , esto es, que $\mathcal{M} = \cup_{\alpha \in I} U_\alpha$. A esta colección se le denomina atlas, denotado como \mathcal{A} , si y sólo si, para todo $U_\alpha, U_\beta \in \wp(\mathcal{M})$, tal que $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ y

³ Un espacio topológico es una estructura que permite definir continuidad en un conjunto dado.

⁴ Una variedad topológica es un espacio topológico que localmente se comporta como el espacio euclidiano.

⁵ Subconjuntos abiertos.

⁶ Una función continua entre dos espacios topológicos.

$\varphi_\beta: \mathcal{U}_\beta \rightarrow \mathcal{V}_\beta$ son mapas coordenados, entonces, si $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \neq \emptyset$, existe un mapeo

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)$$

denominado como mapa de transición, que permite pasar de \mathcal{V}_α a \mathcal{V}_β continuamente. Si la composición de mapeos $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ es continua e infinitamente diferenciable y, además, tiene inversa infinitamente diferenciable, es denominada como difeomorfismo. Se dice que \mathcal{A} tiene una estructura de suavidad o que es un atlas suave, si y sólo si todos sus mapas de transición son difeomorfismos. De acuerdo a lo anterior, sean \mathcal{M} , una variedad topológica, y \mathcal{A} un atlas suave, tal que al par $(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ se le denomina, naturalmente, como variedad suave.

Sea $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función continua y suave y $\varphi: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ un mapa coordenado suave, tal que la composición $f \circ \varphi^{-1}$ es suave en el abierto $\mathcal{V} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. A esta composición $f \circ \varphi^{-1}$ se le denomina como representación coordenada de f . Existe una colección de funciones continuas y suaves denominada como la clase de funciones infinitamente diferenciables, denotadas como \mathcal{C}^∞ y, en este caso, como el dominio es \mathcal{M} , lo escribimos como $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$. Como f es de esta clase de funciones, se dice que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$.

Se define una curva $\alpha: I \rightarrow \mathcal{M}$, donde I es un intervalo cerrado real, tal que $\alpha(I) \subseteq \mathcal{M}$, para todo $\lambda \in I$, y $\alpha(\lambda_0) = p \in \mathcal{M}$ es un punto en \mathcal{M} . Si la curva α coincide con un intervalo en el dominio de f , se toma un $p \in \mathcal{M}$ por el que pasa α , tal que $\alpha(\lambda_0) = p$, con $\lambda_0 \in I$. Luego, la variación de f respecto a α se obtiene haciendo $f \circ \alpha$, y se toma su primera derivada $(f \circ \alpha)'(\lambda_0)$, que equivale a la pendiente de la recta tangente a α en el punto p y se escribe como $v_{\alpha,p}(f) = (f \circ \alpha)'(\lambda_0)$. Este es un mapeo lineal de la forma $v_p: \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$.

Por el punto p pasan infinitas curvas, por lo que todas estas satisfacen que la pendiente de la recta tangente será igual justo en ese punto, entonces, se

define una colección infinita de mapeos lineales v_p denominada como el espacio tangente en p , que se denota como $T_p\mathcal{M}$. Este conjunto satisface la estructura de un espacio vectorial con la adición de pendientes de rectas tangentes y con la multiplicación por escalar. Sus elementos son llamados vectores contravariantes. Por otro lado, la colección de todos los mapeos lineales que van de $T_p\mathcal{M}$ a \mathbb{R} es escrita como $\mathcal{L}(T_p\mathcal{M}, \mathbb{R})$ o $T_p^*\mathcal{M}$ y se denomina como espacio cotangente. También satisface la estructura de espacio vectorial y sus elementos son llamados vectores covariantes.

De lo anterior, se construye al espacio producto tensorial tangente al punto p como un mapeo multilinear denominado producto tensorial, escrito como $(\otimes_{i=0}^r T_p\mathcal{M}) \otimes (\otimes_{j=0}^s T_p^*\mathcal{M})$. Sus elementos son llamados tensores r veces contravariantes y s veces covariantes.

Sea $(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ una variedad suave y una función métrica g que envía un par de vectores tangentes $(v_p, v_q) \in T_p\mathcal{M} \times T_q\mathcal{M}$ en $g(v_p, v_q) \in \mathbb{R}^+$, de tal manera que se puede tomar la distancia entre ellos dos. Decimos que la tripla $(\mathcal{M}, \mathcal{A}, g)$ es una *variedad de Riemann* si, y sólo si, g es una *métrica de Riemann*, esto es, que sea una forma bilineal⁷, simétrica, definida positiva y no degenerada o, explícitamente, que

1. Sean $v_p \in T_p\mathcal{M}$ y $v_q \in T_q\mathcal{M}$, tal que $g(v_p, v_q) = g(v_q, v_p)$.
2. Sean $v_p \in T_p\mathcal{M}$ y $v_q \in T_q\mathcal{M}$, tal que $g(v_p, v_q) \geq 0$.
3. Sean $v_p \in T_p\mathcal{M}$ y $v_q \in T_q\mathcal{M}$, tal que $g(v_p, v_q) = 0$ si y sólo si $v_q = 0$.

Ahora, al ver que es posible dotar de estructura lineal a cada punto de la variedad, entonces se puede considerar a un campo vectorial $X = X^i e_i = X_i e^i$ sobre esta y a la colección de todos los campos vectoriales sobre la variedad se le denota como $(T_p\mathcal{M})$. Se introduce una estructura adicional sobre $(\mathcal{M}, \mathcal{A}, g)$, que consiste en el concepto de conexión.

⁷ Una función bilineal que se envía en el espacio dual.

Una conexión ∇ en un punto $p \in \mathcal{M}$ es una asignación de cada pareja $(X, Y) \in \Gamma(T_p\mathcal{M}) \times \Gamma(T_p\mathcal{M})$, cada uno de clase $\mathcal{C}^r(\mathcal{M})$ (la clase de funciones r veces diferenciables sobre \mathcal{M}), en $\nabla_X Y \in \Gamma(T_p\mathcal{M})$. Se dice que $\nabla_X Y$ es la derivada covariante de Y en la dirección de X en el punto p , si y sólo si,

1. Para cada par de funciones $f, g \in \mathcal{C}^r(\mathcal{M})$ y campos vectoriales $X, Y, Z \in \Gamma(T_p\mathcal{M})$, al menos de clase \mathcal{C}^1 , se satisface que $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$.
2. Para cada par de campos vectoriales $Y, Z \in \Gamma(T_p\mathcal{M})$, al menos de clase \mathcal{C}^1 , y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\nabla_X(\alpha Y + \beta Z) = \alpha\nabla_X Y + \beta\nabla_X Z$.
3. Para cada $f \in \mathcal{C}^r(\mathcal{M})$ y un campo vectorial $Y \in \Gamma(T_p\mathcal{M})$, al menos de clase \mathcal{C}^1 , se satisface que $\nabla_X(fY) = df \otimes Y + f\nabla_X Y$.

Esta derivada es definida como $\nabla_X Y = (\nabla_i Y^j)(e^i \otimes e_j) = \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} + \Gamma_{hi}^j Y^h\right)(e^i \otimes e_j)$, donde Γ_{hi}^j es denominado como símbolo de Christoffel⁸ de segundo tipo.

Vale la pena notar que las componentes de este tensor son entonces definidas como:

$$\nabla_i Y^j = \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} + \Gamma_{hi}^j Y^h \quad (1)$$

Por lo otro lado, se tiene que:

$$\nabla_i Y_j = \frac{\partial Y_j}{\partial x^i} - \Gamma_{ij}^h Y_h \quad (2)$$

Como último concepto de la geometría de Riemann fundamental para este escrito, se considera a la curvatura en un punto $p \in \mathcal{M}$. Entonces, se considera una función R multilineal que envía $Z \in \Gamma(T_p\mathcal{M})$ en $R(X, Y)Z \in \Gamma(T_p\mathcal{M})$, este último definido como:

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (3)$$

donde $\nabla_{[X, Y]} Z = \nabla_{\nabla_X Y} Z - \nabla_{\nabla_Y X} Z$. A la función R se le denomina tensor de curvatura de Riemann o, simplemente, tensor de Riemann, que es asimétrico, pues satisface que para cada $X, Y \in \Gamma(T_p\mathcal{M})$, $R(X, Y) = -R(Y, X)$, y satisface la identidad de Bianchi, esto es, para cada $X, Y, Z \in \Gamma(T_p\mathcal{M})$, $R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X = 0$.

Las respectivas componentes de los términos $\nabla_X \nabla_Y Z$ y $\nabla_Y \nabla_X Z$ son $\nabla_i \nabla_j Z_k$ y $\nabla_j \nabla_i Z_k$. Entonces, (3) puede ser escrito como

$$R_{kij}^h X^i Y^j Z^k = \nabla_i (Y^j \nabla_j Z^h) X^i - \nabla_i (X^j \nabla_j Z^h) Y^i - \nabla_j Z^h (X^i \nabla_i Y^j - Y^i \nabla_i X^j) \quad (4)$$

donde R_{kij}^h son las componentes del tensor de curvatura de Riemann. Por otra parte, la diferencia

$$\nabla_j \nabla_i Z^k - \nabla_i \nabla_j Z^k = R_{kij}^h Z^h \quad (5)$$

expresa la no conmutatividad de la segunda derivada covariante de Z en términos del tensor de Riemann.

Se puede obtener a la traza del tensor de Riemann haciendo la contracción:

$$R_{kij}^i = R_{kj} \quad (6)$$

Esta traza del tensor de Riemann es denominada como tensor de Ricci y se calcula mediante la expresión:

$$R_{kj} = \frac{\partial R_{kj}^i}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ki}^i}{\partial x^j} + \Gamma_{im}^i \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{jm}^i \Gamma_{ik}^m \quad (7)$$

2.1. Modelación del Universo con la métrica de De-Sitter.

El espacio-tiempo, según la teoría de general de la relatividad, es una tripla $(\mathcal{M}, \mathcal{A}, g)$, denominada pseudo-variedad de Riemann si, y sólo si, g es una métrica lorentziana, esto es, que sea una forma bilineal, simétrica, indefinida⁹ y no degenerada. Que sea indefinida quiere decir que no es definida

⁸ Es un término que sirve para corregir a la derivada, esto es, que la derivada se ajuste de forma precisa a la variedad y evalúe los cambios punto a punto sobre esta.

⁹ Que puede ser menor, igual o mayor que cero.

positiva, que implica que $g(v_p, v_q) \geq 0$ y $g(v_p, v_q) < 0$. Este cambio de condición de la métrica implica la conservación del principio de causalidad, pues al tener como límite cósmico a la velocidad de la luz, todos los eventos sucederán a velocidades menores o iguales a esta.

Los postulados de la teoría general de la relatividad plantean lo siguiente:

Sean un abierto en el espacio-tiempo $\mathcal{U} \in \wp(\mathcal{M})$ y un par de puntos $p_1, p_2 \in \mathcal{U}$, entonces, existe una curva *como de luz*¹⁰ que envía a $t \in [0, t_f] \subset \mathbb{R}$ en $\alpha(t) = p \in \mathcal{M}$, donde $\alpha(0) = p_1$ y $\alpha(t_f) = p_2$, es decir, que dos puntos en una región finita del espacio-tiempo se pueden conectar con la luz. A este enunciado se le denomina como causalidad local.

Sea T^{ij} el tensor de momentum-energía, entonces, se satisface que $\nabla_i T^{ij} = 0$ si y sólo si los campos de materia desaparecen en $\mathcal{U} \in \wp(\mathcal{M})$, es decir, que la conservación de materia-energía es local.

Las ecuaciones que describen la dinámica en \mathcal{M} , el espacio-tiempo, son:

$$R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij} + \Lambda g_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ij} \quad (8)$$

Las soluciones de estas ecuaciones pasan a ser una de las principales tareas dentro de este marco teórico. Posteriormente, en dichas soluciones toman un papel aún más protagónico, específicamente en las modelaciones del Universo. En el contexto de la cosmología relativista, la idea de un Universo en expansión ha sido probada por el astrónomo Edwin Hubble (Bryson, 2011, pp. 159) y, años después, el descubrimiento del fondo cósmico de microondas demostró que, sin importar la galaxia en la que se sitúe un observador, siempre se observará que las galaxias vecinas se alejan (Greene, 2005, pp 393), pues se asume que todos los observadores están en igualdad de condiciones para juzgar dichos movimientos¹¹. Las observaciones de

Hubble y la existencia del fondo de microondas evidencian un patrón de homogeneidad del Universo (Greene, 2005, pp 372-420), debido a la detección de ondas electromagnéticas que provienen de todas las direcciones. Además, sin importar hacia donde se haga la medición, se recibe la misma cantidad de radiación, es decir, no hay una dirección privilegiada.

Hawking (2020), dice que gracias a estas observaciones, se dice que el Universo es homogéneo e isotrópico; es decir, un observador, localmente, evidencia que si realiza una traslación, el espacio a su alrededor permanece invariante, y si realiza rotaciones arbitrarias, nuevamente, el espacio permanece invariante.

2.2.1. El modelo estándar de la cosmología y los diagramas de Penrose-Carter.

En la cosmología relativista moderna, se trabaja con el *modelo estándar de la cosmología*, que plantea una colección de soluciones a las ecuaciones de campo que obedecen a la homogeneidad e isotropía del Universo, o, simplemente, el *principio cosmológico*. Las soluciones corresponden a un elemento de línea de la forma:

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 (dr^2 + r^2 d\Omega_2^2) \quad (9)$$

A este elemento de línea se le denomina como *métrica FLRW*¹². Teniendo en cuenta a este modelo, se proponen soluciones que modelan Universos dinámicos, es decir, Universos que parten de un tamaño inicial y que luego se expanden.

Para el caso de De-Sitter, se determina una solución dinámica que describe un Universo en expansión acelerada. Luego, se transforma en una solución estática que permite desarrollar su *diagrama de Penrose-Carter*.

Un diagrama de Penrose-Carter es un diagrama conforme (Rodríguez, 2017), es decir, es una transformación sobre la métrica que conserva los

¹⁰ Que están sobre la superficie del cono de luz de un evento.

¹¹ A esta condición la llaman *principio copernicano*.

¹² Siglas de Friedmann, Lemaître, Robertson y Walker.

ángulos iguales, para este caso específico, los conos de luz van a conservar un ángulo de 90° sin importar el cambio de coordenadas efectuado.

Esto es muy importante ya que sin importar la transformación realizada sobre la métrica¹³, la causalidad no se verá afectada (Rodríguez, 2017); además, los diagramas de Penrose-Carter tienen la característica de contener un espacio infinito dentro de un espacio finito, como lo puede ser una hoja de papel.

En síntesis, se puede decir que un Diagrama Penrose-Carter es una representación de un espacio-tiempo en un espacio finito que preserva los ángulos internos de los conos de luz.

2.2.2. De-Sitter y la energía Oscura.

Einstein propuso un conjunto de ecuaciones sobre las que se concebiría la existencia de un universo estático agregando una constante, como se muestra en (8). Pinto (2020) asegura que agregar esta constante no afecta la física para resolver las ecuaciones, sin embargo, el físico Alexander Friedmann (1888-1925) utilizando las ecuaciones que llevan su nombre (10) y (11), las cuales fueron derivadas de las ecuaciones de campo de Einstein, demuestra que a pesar de la inclusión de esta constante el universo se expande. Las ecuaciones de Friedmann son

$$\frac{1}{a} \frac{d^2 a}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (10)$$

Al resolver estas ecuaciones con las condiciones del Universo de De-Sitter, se obtiene un factor de escala, que es una función que describe el ritmo de crecimiento o decrecimiento del Universo. En este caso, es entonces

$$a(t) = a_0 e^{\mathcal{H}(t-t_0)} \quad (11)$$

En este factor aparece la constante de Hubble, la cual da información sobre el tamaño inicial del Universo visible. Así, la métrica FLRW queda como

$$ds^2 = dt^2 - a_0^2 e^{2\mathcal{H}(t-t_0)} (dr^2 + r^2 d\Omega_2^2) \quad (12)$$

Mohajan (2017) dice que gracias a esta métrica se puede deducir que un Universo sin densidad de energía y sin presión se expande espacialmente. Dicha expansión es observada experimentalmente y su explicación se da gracias a la introducción de una hipótesis denominada como *energía oscura*. Este nombre es debido a que no se conoce su naturaleza, sólo se conocen las consecuencias de su existencia. La energía oscura es entonces un *combustible* que permite al Universo expandirse aceleradamente.

Para entender cómo se expande un universo y qué papel juega la constante de Hubble y el factor de escala en ello, se realiza la gráfica con diferentes valores para cada uno de los factores de $a_0 e^{\mathcal{H}(t-t_0)}$ como se muestra a continuación:

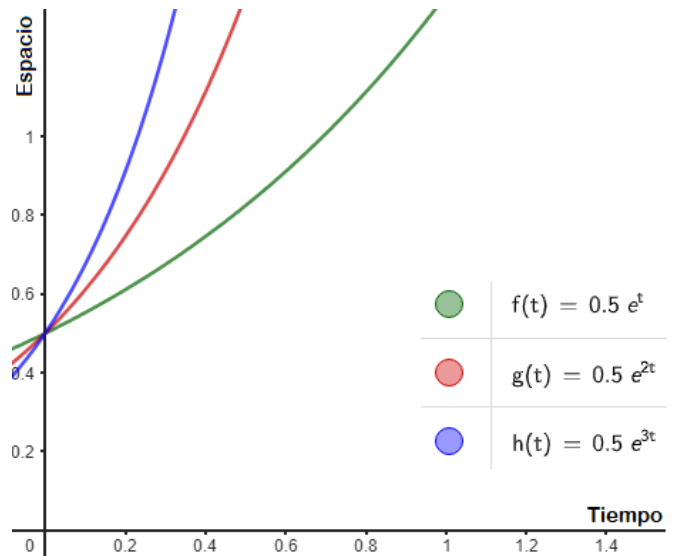


Figura 1. Se reemplaza la constante de Hubble por valores cada vez mayores ($\mathcal{H} = 1,2,3$) mientras el factor de escala se mantiene constante ($a_0 = 0.5$) Fuente: Los Autores.

¹³ Que describe el espacio-tiempo.

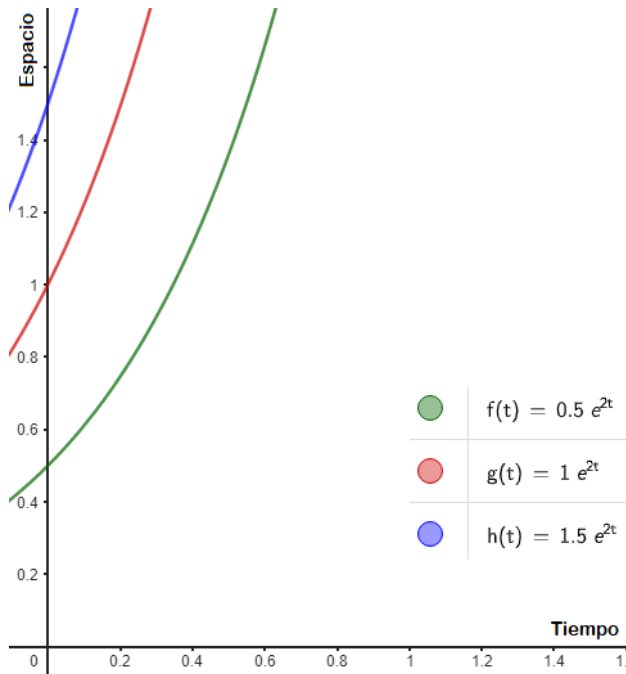


Figura 2. Se reemplaza el factor de escala por valores cada vez mayores ($a_0 = 0.5, 1, 1.5$) mientras la constante de Hubble se mantiene constante ($\mathcal{H} = 2$). **Fuente:** Los Autores.

Se aprecia cómo la constante de Hubble da información sobre la rapidez de expansión del Universo. Si esta es grande, el Universo se expande lentamente. Si no, lo hace rápidamente (Figura 1). En cambio, el factor de escala permite concebir el tamaño que tenía el Universo justo en el momento en que la luz logró moverse libremente a través del espacio, es decir, el tamaño del Universo al momento de la emisión inicial del fondo cósmico de microondas (Figura 2).

La energía oscura está relacionada con la constante de Hubble ya que indica la rapidez a la que se expande el Universo (Tafalla, 2020). Entre mayor sea el valor de dicha constante el Universo se expandirá a un mayor ritmo. Lamentablemente, el valor de la constante de Hubble aún no se determina, lo único que se sabe es que el Universo se encuentra en una etapa inflacionaria y por tanto en una etapa joven del mismo, lo que conlleva a la conclusión que aún hay energía oscura trabajando para expandirlo.

2.2.3. Observador en reposo.

Según Nuwasawa (2019), el universo que describe la solución de De-Sitter es uno que permite realizar una transformación conforme, es decir, la métrica puede ser sometida a un cambio de coordenadas que permite representar la solución en un espacio finito. Para este caso, una hoja de papel, llegando a una métrica de la forma:

$$ds^2 = \frac{l}{\mathcal{H}^2 \cos^2(\tau)} (d\tau^2 - d\chi^2) \quad (13)$$

Si se hace $\mathcal{H} = 1$ se obtiene una región conforme y plana, que corresponde al interior del cuadrado determinado por los intervalos $\chi \in (-\pi, \pi)$ y $\tau \in (-\pi/2, \pi/2)$, donde χ es una variable asociada al espacio, mientras que τ está asociada al tiempo. Lo anterior, arroja el siguiente diagrama:

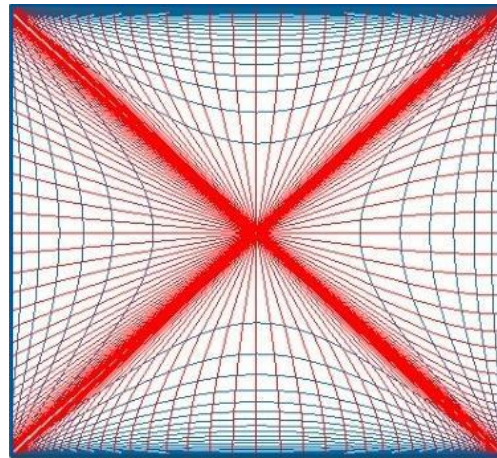


Figura 3. El diagrama está dividido en 4 regiones claramente separadas por horizontes, ubicando observadores en los lados de cada triángulo, ellos solo podrán afectar y observar lo que se encuentre dentro del triángulo del cual hacen parte. **Fuente:** Los Autores.

El Diagrama de Penrose-Carter obtenido (Figura 3) para esta solución permite crear 2 tipos de fronteras espaciales “inalcanzables”, siendo I^+ el infinito futuro, y I^- el infinito pasado. Esto se debe a la naturaleza del tiempo, ya que aún es imposible conocer su inicio o su final, se asume que este seguirá creciendo hasta el infinito y por ende debería provenir de un pasado de la misma naturaleza.

Para el caso del Espacio, es posible pensar en el Universo como una esfera que crece y, por tanto, tiene dos polos. Dichos polos, con el paso del tiempo, estarán desconectados causalmente, ya que la luz es el límite de la rapidez con la cual es posible afectar un suceso. De esta manera, es imposible ahora generar una acción de polo a polo que pueda ser causalmente válida, ya que, para ser así, esta acción debería viajar más rápido que la luz.

2.2.4. Explicación de la frontera cosmológica y su relación con la energía oscura.

El diagrama de De-Sitter (Figura 3) presenta la particularidad de tener fronteras cosmológicas, las cuales se interpretan como regiones que separan la zona de influencia causal que tiene un observador sobre cierto espacio.

Por ejemplo, un observador situado en el polo norte del diagrama tiene dos fronteras cosmológicas que lo “encierran” en un triángulo. Este triángulo representa lo que él puede observar y afectar, es decir su mundo está restringido a ese espacio.

Es algo parecido a nuestra relación con el fondo cósmico de microondas, a pesar de querer observar más allá de él, no es posible. Esta es la frontera observable, el punto más lejano desde el cual se puede recibir información, más allá de dicha frontera, no es posible hacer observaciones.

También es de importante notar que puede pensarse como si el Universo no permitiera interactuar con ciertas regiones por su continua expansión, es decir, si se piensa enviar una señal al borde que tenía el Universo hace 2 horas, debido a su lejanía con la Tierra, este se aleja demasiado rápido y, por esto, la señal enviada jamás llegará, ya que la máxima velocidad a la que puede ir dicha señal es la velocidad de la luz. Para llegar hasta allí, se violaría este principio, es decir, que existe una frontera sobre la cual es imposible ejercer cualquier tipo de influencia.

Estas dos situaciones se pueden explicar con ayuda de los diagramas ya que la frontera cosmológica permite entender que vivir en un Universo en

expansión significa no conocer jamás el Universo completo y, además, no poder relacionarse causalmente a través de él, como si hubiese una especie de censura cosmológica. Eso sí, tal frontera no evita que los cuerpos puedan pasar a través de ella (Greene, 2005, pp 372-420), probablemente, si se está lo suficientemente cerca de ella, sea posible observar lo que se encuentra más allá si se logra traspasarla.

Greene (2005) asegura que esta censura delimita la región del espacio sobre el cual la física conserva sus simetrías (pp 372-420), ya que, según las observaciones, la física que es válida en la Tierra lo es también en el Universo observable. Sin embargo, no se puede afirmar lo mismo más allá de esa frontera. Esto también asegura que los relojes ubicados en cualquier parte del Universo observable funcionan de la misma manera, gracias a la homogeneidad del mismo.

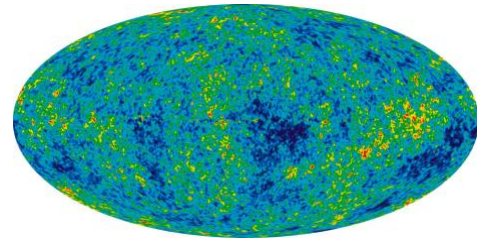


Figura 4. El fondo cósmico de microondas es nuestra frontera de observación, más allá de este punto no podemos apreciar mucho más. **Fuente:** (Riveirio, 2020).

3. Metodología de análisis documental.

En el presente artículo se expone cómo se estudia teóricamente una solución cosmológica a las ecuaciones de Einstein para un Universo en expansión.

Para ello, utilizando el análisis documental (Castillo, 2004), se reunieron diversos artículos que abordan suposiciones como la existencia de la energía oscura, que llevan a la construcción de la solución de De-Sitter, para desde allí lograr explicar esta solución y su relación con la energía oscura mediante una representación gráfica.

Se ha dedicado la mayor parte de los esfuerzos a explicar cualitativamente el papel que juegan las diferentes constantes y conceptos de la teoría respecto a lo observado y medido por el ser humano, teniendo a los documentos consultados como aquellos que nos permitieron realizar el diagrama y revisar los conceptos y las explicaciones que se hallan en el presente artículo.

Esta producción académica se encuadra como proyecto del *Semillero Estudiantil de Investigación en Física-Matemática*¹⁴, de la Universidad Pedagógica Nacional, el cual busca atraer personas interesadas en problemas de la Físico-Matemática, para, así, hacer divulgación y crear una red de estudiantes que se interesen por la Física y sus diferentes métodos de estudio.

4. Reflexiones en torno al Diagrama Penrose-Carter de la solución de De-Sitter.

La existencia de la energía oscura supone un desafío en la comprensión del funcionamiento del sistema inflacionario del Universo. De-Sitter aporta una solución a las ecuaciones de Einstein, la cual predice que incluso si el Universo no dispone de masa o energía dentro de él, este igualmente puede expandirse.

La existencia de una constante en la métrica permite una expansión sin masa o energía en el Universo, y por lo tanto esta constante puede significar que existe otro tipo de fuente diferente a cualquier otra que se conozca y además es una energía que permite la expansión acelerada del Universo.

De igual manera, esta solución predice que el Universo tuvo un radio específico que permitió a la luz poder moverse libremente tal y como lo demuestra la existencia del fondo cósmico de microondas, así que probablemente también existe una región del Universo a la que no se tiene acceso, ya que se encuentra en un lugar el cual existió una

expansión pero no había luz “libre” que permitiera observar.

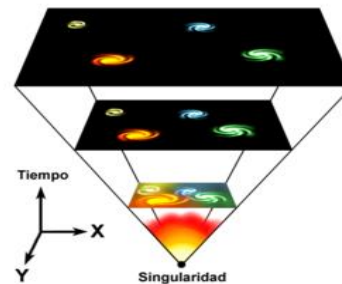


Figura 5. Todo el espacio que se extendió desde la singularidad hasta que fue posible el movimiento de la luz representa una frontera, ese espacio no es posible observar. **Fuente:** (Campos, 2020).

4.1. Sobre la importancia de ejemplos gráficos para la enseñanza de la Cosmología.

Según Contreras (2004), teniendo en cuenta que las características de este Universo hablan de un Universo que se expande pero que es cerrado, es entonces un Universo del cual no se puede conocer más allá de cierto punto en el espacio (p. 59). Es decir, su frontera funciona como la superficie de un globo que es inflado; una persona dentro del globo podrá conocer justo hasta la superficie interna del globo, pero a partir de allí termina su Universo observable.

El diagrama Penrose-Carter expresa esto haciendo posible la representación de la métrica de De-Sitter sobre una hoja de papel. Esta analogía es pensada como un puente cognitivo que facilita el aprendizaje (Díaz y Hernández, 1999, pp 40-44). En este diagrama se ubica un observador en el lado derecho de cuadrado y se asume que el triángulo en el que se encuentra encerrado es el Universo que puede observar, ya que dispone de dos fronteras las cuales restringen su acceso hacia otras regiones del Universo, esta frontera, además de definir lo que puede observar, define también la región de influencia que tiene dicho observador. Es decir, si el

¹⁴ Para más información, enviar un correo a: seinfismat@gmail.com.

observador quisiera afectar un suceso más allá de esa frontera no podría hacerlo (Figura 6).

La interpretación del diagrama se hace pensando en que tiene dos polos, ya que se piensa como un Universo cerrado, como lo es la superficie de la Tierra. Se utilizan las letras I^+ para definir el infinito futuro y I^- para definir el infinito pasado (Figura 6), es decir son la representación del “principio del tiempo” y el “final del tiempo”.

El diagrama permite definir las fronteras como el fondo cósmico de microondas, si se ubica un observador en la parte derecha del cuadrado (Polo Sur), siendo la frontera superior el horizonte futuro (Klemm y Vanzo, 2004), es decir, es hasta allí donde es posible afectar un suceso en el futuro y la frontera inferior el horizonte pasado (Klemm y Vanzo, 2004), siendo lo más al pasado que podemos observar (fondo cósmico de microondas). Permite además entender esta frontera como la imposibilidad de conocer una región de la cual no es posible obtener información debido a que la luz no tenía la libertad de movimiento suficiente para observar.

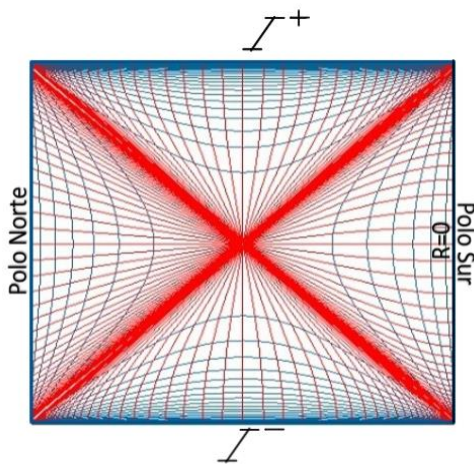


Figura 6. Se ubica un observador en el lado derecho del triángulo ($R=0$) y se definen dos fronteras que delimitan su Universo observable y su zona de influencia. **Fuente:** Los autores.

El diagrama de la solución de De-Sitter tiene la característica de ser muy llamativo por su forma y sus colores, por lo que permite cumplir con el

objetivo de generar curiosidad sobre lo que es y lo que significa.

5. Conclusiones

Desarrollar las Matemáticas fundamentales que subyacen a la teoría general de la relatividad, permite abordar de manera precisa la estructura de variedad de Riemann con la que se dota al espacio-tiempo, que, en la cosmología, es el Universo mismo.

Encontrar maneras diferentes para abordar temas como la Teoría General de la Relatividad se hace necesario, si se quiere que la Física despierte interés y permita su divulgación en personas que no tienen el tiempo o simplemente quieren comprender sin la necesidad de seguir los cursos y temáticas propias para desarrollar una teoría, para ello es posible usar los diagramas de Penrose. Estos utilizan conceptos como Universo visible, fondo cósmico de microondas y su relación con la idea de un Universo en expansión, homogéneo e isotrópico utilizando rectas y curvas. Bien dijo el Nobel de Física en 1954 Max Born, los diagramas en Física toman una importancia muy fuerte debido a lo complejas que se han vuelto las teorías (Fuchs, 1967, p. 7).

La simplificación de los conceptos por medio de líneas y curvas permite una nueva representación de conceptos más amena a la comprensión gracias al uso de la analogía geométrica, que acompañada con la llamativa forma de los diagramas cumple con la tarea de generar interés para, por medio de él, explicar lo que tiene para decir el diagrama.

6. Referencias

- Bryson, B. (2011). *Une histoire de tout, ou presque*. Paris: Éditions Payot y Rivages.
- Campo, F. (2020). Figura 5. [Imagen] *Cosmo noticias*. <http://www.cosmonoticias.org/charla-el-big-bang-en-la-universidad-de-antofagasta/>.
- Castillo, L. (12 de octubre de 2020). Tema 5.- Análisis documental. Universidad de Valencia. <https://www.uv.es/macass/T5.pdf>.
- Contreras, C. (2004). *La Teoría Del Big Bang Y La Doctrina De Nagarjuna: El vacío o sūnyatā como síntesis ontológica de todo cuanto existe* [Tesis de

- Doctorado, Universidad Autónoma de Barcelona]. <https://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/5162/ccr1de1.pdf;sequence=1>
- Díaz B., F. y Hernández R., G. (1999). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo*. McGraw Hill, México.
- Fuchs, W. (1967). *El libro de la Física Moderna*. Barcelona: EDICIONES-OMEGA, S.A
- Greene, B. (2005). *La magie du Cosmos*. Paris: Éditions Robert Laffont, S.A.
- Mohajan, H. (2017). A Brief Analysis of de Sitter Universe in Relativistic Cosmology. *Journal of Scientific Achievements*, 2(11), 1-17.
- Numasawa, T. & Yoshida, D. (2019). Global spacetime structure of compactified inflationary universe. *Classical and Quantum Gravity*, 36(19). DOI: 10.1088/1361-6382/ab38ed.
- Hartman, T. (1 de octubre de 2022). *Lecture Notes on Classical de Sitter Space*. Cornell University <http://www.hartmanhep.net/GR2017/desitter-lectures-v2.pdf>.
- Hawking, S. & Ellis, G. (1973). *The Large-Scale Structure of Space-Time*. Cambridge University Press.
- Hawking, S. (2020). *Une brève histoire du temps*. France: Éditions Flammarion.
- Klemm, D. Vanzo, L. (2004). Aspects of Quantum Gravity in de Sitter Spaces. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, (11), 1-36. DOI: 10.1088/1475-7516/2004/11/006.
- Lang, S. (2000). Introduction to Differentiable Manifolds. *Springer*, 2(1), pp. 20-21.
- Lee, J. M. (2012). Introduction to Smooth Manifolds. *Springer*.
- Tafalla, M. (2022, 1 de octubre). LA EXPANSIÓN ACELERADA DEL UNIVERSO. Anuario del Observatorio Astronómico de Madrid. <http://astronomia.ign.es/rknowsys-theme/images/webAstro/paginas/documentos/Anuario/Laexpansionaceleradadeluniverso.pdf>.
- Riveirio, A. (2020). Figura 4. [Imagen] AstroBitácora. <https://www.astrobitacora.com/radiacion-microondas-y-mancha-fria/>.
- Rodríguez, J. (2017). Introducción a los diagramas conformes de Carter-Penrose (Tesis de Maestría) Universidad Michoacán de San Nicolás de Hidalgo, Ciudad: Morelia. Recuperado de: http://bibliotecavirtual.dgb.umich.mx:8083/jspui/bitstream/DGB_UMICH/1236/1/IFM-M-2017-1177.pdf.
- Pinto, A. (2020). *Espacio-Tiempo de Anti de Sitter*. Paris Physics Master Université de Paris - Sorbonne Université.