UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Góndola, Enseñanza y
Aprendizaje de las Ciencias
Número especial, v18, 2023.
11 Congreso Nacional de Enseñanza de la Física y la Astronomía

Crónica de experiencia

SIMULACIÓN DEL PÉNDULO DOBLE COMO HERRAMIENTA PARA LA ENSEÑANZA DEL CAOS

DOUBLE PENDULUM SIMULATION AS A TOOL FOR TEACING CHAOS

SIMULAÇÃO DO PÊNDULO DUPLO COMO FERRAMENTA PARA O ENSINO DO CAOS

Daniel Mauricio Martin Rojas*

Martin, D. (2023). Simulación del péndulo doble como herramienta para la enseñanza del caos. *Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias*, Número especial, v18, pp.1-11

Resumen

En la enseñanza de la física se suelen tener problemas a la hora de explicar un tema, es común que se cometan errores en la explicación o que se den ejemplos que no son adecuados para abordar el tema, de modo que se le complique al estudiante la adquisición adecuada de estos conceptos y se presenten entonces ciertos obstáculos. Para el caso de la teoría del caos, se suele pensar en el ejemplo del efecto mariposa, aunque este ejemplo ilustra bien lo que se entiende por un sistema caótico, puede presentar ciertos malentendidos. A parte de lo anterior, este ejemplo habla sobre el clima, que es un sistema muy complejo y en el cual la variación del estado en el tiempo puede estar dado por muchas variables. Este trabajo tiene como objetivo modelar el comportamiento de un péndulo doble y propone hacer uso de un modelo como este a la hora de dar un ejemplo de un sistema caótico, con el fin de facilitar la adquisición del concepto y evitar malentendidos. Para ello, haciendo uso del lenguaje de programación C++, se simula el comportamiento del péndulo doble con la ayuda de métodos numéricos, se toman como constantes ciertas variables y se procede a realizar pequeñas variaciones en las condiciones iniciales del sistema, de modo que sea posible ilustrar el comportamiento de este. En las gráficas obtenidas se puede observar el comportamiento impredecible y caótico del sistema, además de evidenciar cómo el comportamiento del sistema cambia a medida que aumenta el tiempo para una pequeña variación en las condiciones iniciales. Se hace evidente que es posible explicar, de una manera mejor y más visual, con un sistema simple las características principales de un sistema caótico, sin caer en malentendidos que otros ejemplos, más complejos, puedan causar.

Palabras-Clave: Programación. Aprendizaje. Oscilaciones.

Abstract

In the teaching of physics there are usually problems when it comes to explaining a topic, is common to make mistakes in the explanation or to give examples that are no

* Estudiante de Licenciatura en Física. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Grupo de física informática FISINFOR. Colombia. dmmartinr@udistrital.edu.co. ORCID https://orcid.org/0000-0002-8860-5711

adequate to address the topic, so that it gets harder for the student the appropriate acquisition of these concepts and therefore some obstacles could appear. For the chaos theory, it is usual to think in the example of the butterfly effect, even though this example illustrates in a good way what is meant by a chaotic system, it can present some misunderstandings. In addition to the above, this example talks about the weather, that is a complicated system in which the variation in time of the state could be given for many variables.

This work main objective is to model the behavior of the double pendulum and suggest using a model like this when giving an example of a chaotic system, with the purpose of facilitate the acquisition of the concept and avoid misunderstandings. For this, using the programming language C++, it is simulated the behavior of the double pendulum using numerical methods, it is taken as constant some variables and small variations in the initial conditions are made, in order that its behavior can be observed.

In the obtaining graphs it is possible to see the unpredictable and chaotic behavior of the system, also seeing how the system's behavior changes with the passing of time for an small variation in the initials conditions. It becomes clear that it is possible to explain, in a better and more visual way, with a simple system the principal characteristics of a chaotic system, without entering in misunderstandings that other, more complex, examples can cause.

Keywords: Programming. Learning. Oscillations.

Resumo

No ensino de física geralmente há problemas na hora de explicar um tópico, é comum que erros sejam cometidos na explicação ou que são dados exemplos que não são adequados para abordar o tema, de modo que a aquisição adequada desses conceitos é complicada para o aluno e então alguns obstáculos são apresentados. No caso da teoria do caos, costuma-se pensar no exemplo do efeito borboleta, embora este exemplo ilustre bem o que se entende por um sistema caótico, ele pode apresentar alguns mal-entendidos. Além do acima, este exemplo fala sobre o clima, que é um sistema muito complexo e no qual a variação do estado ao longo do tempo pode ser dada por muitas variáveis.

Este trabalho visa modelar o comportamento de um pêndulo duplo e se propõe a utilizar um modelo como este ao dar um exemplo de sistema caótico, a fim de facilitar a aquisição do conceito e evitar mal-entendidos. Para isso, usando a linguagem de programação C++, o comportamento do pêndulo duplo é simulado com a ajuda de métodos numéricos, Certas variáveis são tomadas como constantes e pequenas variações são feitas nas condições iniciais do sistema, para que seja possível observar seu comportamento.

Nos gráficos obtidos, pode-se observar o comportamento imprevisível e caótico do sistema, além de observar como o comportamento do sistema muda conforme o tempo aumenta para uma pequena variação nas condições iniciais. Fica evidente que é possível explicar, de forma melhor e mais visual, com um sistema simples, as principais características de um sistema caótico, sem cair em mal-entendidos que outros exemplos mais complexos possam causar.

Palavras-Chave: Programação. Aprendendo. Oscilações.

1. Introducción

La teoría del caos es un fenómeno el cual se estudia y tiene aplicaciones en diferentes ramas de las ciencias, esta teoría ayuda a describir los sistemas cuyo comportamiento es caótico y por lo cual, al cabo de un tiempo determinado, su estado se vuelve impredecible (Bau & Shachmurove, 2002) debido a la imposibilidad de realizar mediciones exactas. Al ser una teoría que se abarca en muchas ramas puede ser de importancia para el estudiante el conocer sobre la misma y poder identificar los sistemas caóticos y las características que los describen teniendo así un mayor entendimiento del tema.

Es común encontrar sistemas caóticos los cuales son muy complejos para poder modelar y comprender, sistemas que tienen muchas variables y su divergencia en un estado futuro puede estar dado por distintas razones. Es por ello que este trabajo tiene como objetivo el proponer un modelo simple y visual como herramienta para la enseñanza de las principales características que definen a un sistema caótico, con ese fin se tomó como modelo el péndulo doble. Haciendo uso del lenguaje de programación C++ se simula el comportamiento caótico de dicho sistema y se resaltan sus características principales, buscando que este funcione como un ejemplo sencillo para ejemplificar un sistema caótico y poder enseñar a través del mismo.

En la enseñanza de las ciencias es de gran importancia hacer uso de herramientas didácticas para lograr un aprendizaje adecuado, y más en la actualidad, gracias a la evolución tecnológica que ha habido, se ha ido incorporando el uso de la tecnología como herramienta para la enseñanza (Castro et al., 2007). De este modo es importante considerar el manejo de herramientas tecnológicas, tales como simulaciones, las cuales sirvan para brindar a la clase un mayor dinamismo en la explicación de los temas y una enseñanza más visual.

En las ciencias, y más específicamente en la rama de la física, algunos temas abordados generan gran confusión y dificultad a los estudiantes, pues las temáticas tratadas en la asignatura son complejas y no del todo comprensibles, tal es el caso de la teoría del caos. Por lo cual es de gran importancia tener en cuenta el empleo de nuevas herramientas para lograr un mejor proceso de aprendizaje en los estudiantes (Jara, 2005), evitando ejemplos y explicaciones confusas. Es necesario buscar la forma en que se facilite al estudiante la adquisición y comprensión de los conceptos y temas tratados en clase, buscar maneras de llamar la atención de los estudiantes para facilitar la comprensión de dichas temáticas, es deber de los maestros el hacer uso de este tipo de herramientas para conseguir facilitar el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

2. Marco de referencia

2.1. Teoría del caos

La teoría del caos tiene sus orígenes con Henri Poincaré, cuando se encontraba trabajando en el problema de los n cuerpos, al intentar dar solución a este se percató que era muy complejo y lo redujo a 3 cuerpos, en 1890 publica los resultados concluyendo que las trayectorias de más de dos cuerpos en interacción parecen aleatorias y que no hay una predicción de su comportamiento final debido a pequeñas perturbaciones en el estado inicial (Espinosa & Ureta, 2014). Nace así el primer ejemplo de un sistema caótico, la interacción entre más de dos cuerpos celestes, y se resalta una de las características principales de dichos sistemas, sensibilidad a las condiciones iniciales.

Mucho después, en los años sesenta, el meteorólogo Edward Lorenz, buscaba un modelo para la predicción de fenómenos atmosféricos, logrando reducirlo a un sistema de tres ecuaciones (Espinosa & Ureta, 2014). Ingresó su modelo a la computadora con ciertos datos iniciales y obtuvo unos resultados, luego tomó unos datos intermedios y repitió el procedimiento, para su sorpresa obtuvo unos resultados muy diferentes. Al realizar ciertas observaciones se dio cuenta que el computador había aproximado los datos iniciales, dejándolos de solo 3 cifras en vez de 6 (Beker, 2003). Lorenz había encontrado un sistema sensible a las condiciones iniciales, tal como el estudiado por Poincaré, pues esa pequeña aproximación fue suficiente para obtener una divergencia en el comportamiento futuro del sistema, el sistema no es predecible.

Este fue el comienzo de lo que hoy se conoce como la teoría del caos, la cual ha sido altamente estudiada a través de los años, los sistemas caóticos tienen unas principales características a saber: la no linealidad y autonomía de las ecuaciones de movimiento, sensibilidad a las condiciones iniciales, y la impredecibilidad de los estados futuros del sistema (Lombardi, 2001) .Esto quiere decir que el comportamiento de dicho sistema no se puede describir por la superposición de dos o más ecuaciones y, además, que dicho sistema no depende explícitamente del tiempo (Lombardi, 2001).

Los sistemas caóticos parecen describir un comportamiento el cual es aleatorio, y el expresar que existe una impredecibilidad del estado futuro de dicho sistema parece reforzar esta idea de un sistema aleatorio, pero en realidad un sistema caótico es uno determinista (Bau & Shachmurove, 2002), es posible, mediante las ecuaciones de movimiento saber cómo dicho sistema se comporta, la impredecibilidad no hace referencia a la imposibilidad de saber cómo será el comportamiento futuro del sistema en teoría, sino en la práctica. En la realidad no existe tal cosa como las mediciones exactas, razón por la cual cualquier imprecisión en los datos iniciales se irá aumentando en gran medida con el paso del tiempo, resultando en un gran error de modo que no es posible realizar predicciones del comportamiento futuro del sistema.

2.2. Péndulo doble

El péndulo doble es un sistema físico el cual consiste en dos péndulos simples, uno va atado a un soporte superior (como un péndulo simple común) y el otro va atado al objeto suspendido del primer péndulo. El péndulo doble es un sistema caótico que fue estudiado de manera formal primeramente por Euler y Daniel Bernoulli (Chen, 2008), las ecuaciones que describían el comportamiento de dichos sistemas son complejas, razón por la cual solamente se pudieron estudiar con extensión una vez se desarrollaron métodos numéricos para la resolución de ecuaciones diferenciales y hubo un desarrollo tecnológico, el cual dio vida a las computadoras (Chen, 2008). Pues tales ecuaciones, como las que describen el movimiento del péndulo doble, no eran fáciles de resolver analíticamente.

Es un sistema que parece simple a plena vista, pero su comportamiento es completamente caótico, conformado por dos cuerpos diferentes es un sistema que posee dos grados de libertad (Lozano et al., 2017), de este modo se necesitará de dos ecuaciones diferenciales para la descripción del movimiento de dicho sistema.

Aunque en principio el péndulo doble no parezca un sistema que posea grandes aplicaciones, este sistema es utilizado, por ejemplo, en el observatorio LIGO, donde se utiliza para la filtración de ruido sísmico. También es utilizado como modelo para el brazo humano en el estudio de optimización del movimiento del brazo para deportes como el golf. (Chen, 2008).

Ecuaciones de movimiento

Para poder obtener las ecuaciones de movimiento para este sistema haremos uso de las ecuaciones de Euler-Lagrange, tomando como coordenadas generalizadas θ_1 y θ_2, primero escribimos las posiciones de los dos objetos colgantes en función de las coordenadas generalizadas.

$$x_1 = l_1 \sin \sin (\theta_1) \tag{1}$$

$$y_1 = -l_1 \cos \cos (\theta_1) \tag{2}$$

$$x_2 = l_1 \sin \sin (\theta_1) + l_2 \sin \sin (\theta_2) \tag{3}$$

$$y_2 = -l_1 \cos \cos (\theta_1) - l_2 \cos \cos (\theta_2) \tag{4}$$

Derivando respecto al tiempo obtenemos las componentes de velocidad.

$$\dot{x}_1 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \cos (\theta_1) \tag{5}$$

$$\dot{y}_1 = l_1 \dot{\theta}_1 \sin \sin (\theta_1) \tag{6}$$

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \cos (\theta_2) \tag{7}$$

$$\dot{y}_2 = \dot{y}_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin \sin (\theta_2) \tag{8}$$

El lagrangiano está definido como:

$$L = T - V$$

Donde T es la energía cinética del sistema y V es la energía potencial, haciendo uso de las ecuaciones (1)-(8) podemos hallar las expresiones de energía.

$$T = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(l_2^2 \dot{\theta}_2 + l_1^2 \dot{\theta}_1 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (\theta_1 - \theta_2) \right)$$

$$V = -mgl_1 \cos \cos (\theta_1) - mg(l_1 \cos \cos (\theta_1) + l_2 \cos \cos (\theta_2))$$

La ecuación de Euler-Lagrange está dada por.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \tag{9}$$

Donde q es la coordenada generalizada, reemplazando el Lagrangiano en la ecuación (9) se obtienen las dos ecuaciones de movimiento.

$$(m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 \ddot{\theta}_2 l_1 l_2 \cos \cos (\theta_1 - \theta_2) + m_2 \dot{\theta}_2^2 l_1 l_2 \sin \sin (\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g l_1 \sin \sin (\theta_1) = 0 \tag{10}$$

$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 \ddot{\theta}_1 l_1 l_2 \cos \cos (\theta_1 - \theta_2) - m_2 \dot{\theta}_1^2 l_1 l_2 \sin \sin (\theta_1 - \theta_2) + m_2 g l_2 \sin \sin (\theta_2) = 0 \tag{11}$$

Las ecuaciones (10) y (11) son las ecuaciones de movimiento para los objetos 1 y 2 respectivamente, estas ecuaciones son ecuaciones diferenciales no lineales y las cuales utilizaremos para la modelación de nuestro péndulo doble.

2.3. Método de Runge-Kutta

El método de Runge-Kutta es un método numérico iterativo para la resolución de ecuaciones diferenciales, el cual usa cuatro pasos, en el método de cuarto orden, para hallar la pendiente promedio entre un intervalo de modo tal que se aproxime a la función exacta, el método de Runge-Kutta logra la exactitud de la serie de Taylor sin la necesidad de calcular derivadas (Chapra & Canale, 2006) Para el caso de un sistema de dos ecuaciones diferenciales de segundo orden, el método de Runge-Kutta viene dado por cuatro pendientes k, l, q y m, las cuales se describen tras reducir el sistema a cuatro ecuaciones diferenciales de primer orden. Estas pendientes se obtienen aplicando dos veces el método para ecuaciones diferenciales de segundo orden (Franco, 2016).

3. Metodología

Con el fin de una apropiada realización de la simulación del péndulo doble, primero se realiza el análisis físico para la obtención de las ecuaciones de movimiento mediante la mecánica Lagrangiana, las ecuaciones de movimiento, de los dos objetos, son las mostradas en las ecuaciones (10) y (11). Se evidencia que estas ecuaciones no tienen solución analítica, por lo cual es necesario hacer uso de métodos numéricos para la resolución de estas ecuaciones. En este caso se hace uso del método de Runge-Kutta de cuarto orden para resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales de segundo orden, de este modo es posible obtener una solución de las ecuaciones de movimiento aproximada a la que se obtendría con una solución analítica.

Para poder modelar este sistema se realizó un código en C++ el cual hace uso de las ecuaciones de movimiento y del método de Runge-Kutta con el objetivo de obtener el comportamiento del sistema, es importante recalcar que este es un proceso iterativo y que la precisión del mismo depende del paso y de la cantidad de iteraciones, para este caso la simulación se realizó con un paso de 0.01 y con un número de iteraciones de 3000, de modo que se pueda tener una modelación apropiada del sistema la cual se acomode de mejor manera al comportamiento real que tendría un péndulo doble. Para la realización de la simulación se establecen como constantes ciertos valores escogidos arbitrariamente, en este caso se fijaron los valores de longitud de las cuerdas y la masa de los objetos, las cuales se dejaron con diferente valor para cada péndulo, y además las condiciones iniciales se tienen diferentes para el ángulo inicial, mientras que para la velocidad inicial se mantienen iguales a cero en ambos casos. Se guardan los valores de: tiempo, θ_1, θ_2, ω_1, ω_2, posición x_1, posición y_1, posición x_2 y posición y_2.

En aras de una adecuada visualización del caos se ejecuta el código dos veces, en la primera se toma una condición inicial y se guardan los datos y en la segunda se cambia dicha condición inicial en una cantidad pequeña (tal como en ± 0.02) y se guardan estos nuevos datos. Acto seguido se toman los datos de las dos ejecuciones y se realizan las gráficas de: θ_1 en función del tiempo, θ_2 en función del tiempo y de y_2 en función de x_2. De este modo se puede observar la discrepancia que se presentan entre las dos ejecuciones con pequeña variación en las condiciones iniciales, en las gráficas realizadas no solo se puede visualizar el comportamiento, general, del péndulo doble, sino que también es posible visualizar el caos, es evidente que a medida que el tiempo pasa el comportamiento de los dos sistemas empieza a diferir, dando como resultado comportamientos completamente distintos para los dos casos después de un tiempo determinado. Debido a la cantidad de iteraciones que se realizan, mencionado anteriormente, la cantidad de datos que se obtienen es grande, razón por la cual la representación de los datos se lleva a cabo con gráficas, las cuales son más compactas y mejores tanto para la visualización del comportamiento, como para el análisis de datos.

Se producen las tres gráficas debido a que el caos, la discrepancia entre los dos sistemas con condiciones iniciales diferentes, se puede estudiar en todos los casos, tanto en el movimiento angular del objeto uno, como en el del objeto dos. Además de esto se realiza la gráfica de y_2 en función de x_2 para poder visualizar la órbita, o trayectoria, que el objeto dos tiene, es decir, el comportamiento que se observaría para el péndulo doble si se realizara el experimento en la realidad.

Esta práctica se realiza con el fin de poder brindarle a los docentes una herramienta que pueda servir para presentarle a los estudiantes el concepto de caos y las principales características de estos sistemas de una forma visual y no tan confusa, mediante un sistema simple como el péndulo doble. Las gráficas se realizan con dos condiciones iniciales diferentes, pero cercanas, para que se le pueda recalcar al estudiante que estos sistemas, al paso de un tiempo determinado, comienzan a tener diferencias en su comportamiento y por ello se vuelve impredecible. El profesor es libre de escoger en qué nivel académico desea implementar este instrumento, pues se pueden dar concepciones muy básicas en torno a la teoría del caos (como las mostradas en este artículo) con el fin de identificar los sistemas caóticos y entender sus propiedades, o es también posible realizar una profundización mayor en estos temas y llegar a conceptos más complejos que también competen a la teoría del caos. Es importante considerar el uso de implementos como estos para así llevar al aula herramientas de enseñanza basadas en TICs, brindando al maestro y al estudiante un acercamiento a las tecnologías, las cuales los rodean todos los días en su entorno cotidiano.

4. Resultados

Con el código realizado[1] se obtuvieron los datos de tiempo, posición y velocidad angular y posición en x y en y para los dos objetos. Para los datos mostrados a continuación se estableció la longitud de la cuerda 1 en 2.0 metros, la longitud de la cuerda 2 en 1.5 metros, la masa 1 en 1.0 kg y la masa 2 en 0.5 kg, además se varía una sola condición inicial, de modo que el sistema no se vea altamente afectado por variar más de una condición a la vez.

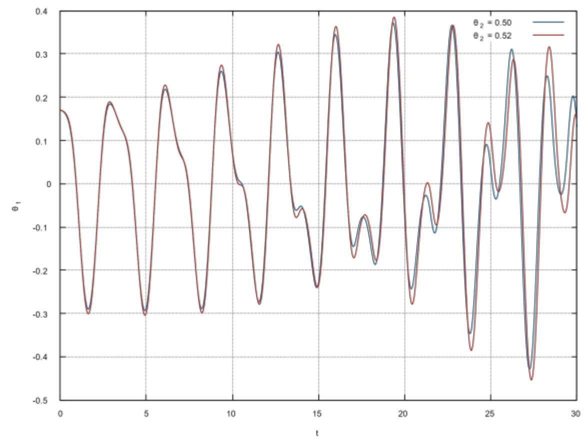

Figura 1. Gráfica de θ_1 en función del tiempo para una variación de la condición del ángulo inicial del objeto 2. **Fuente:** autor.

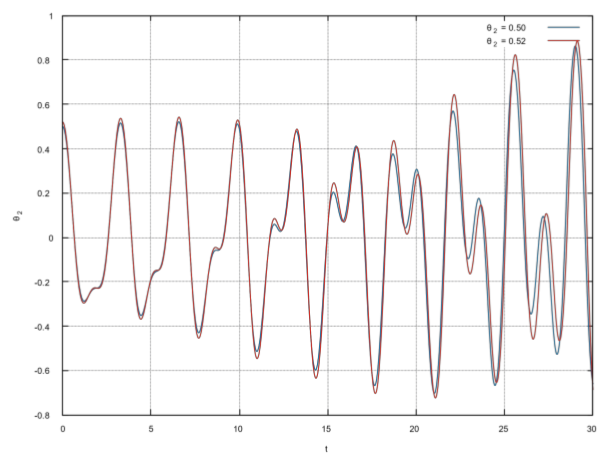

Figura 2. Gráfica de θ_2 en función del tiempo para una variación de la condición del ángulo inicial del objeto 2. **Fuente:** autor.

1 El código se puede encontrar en: https://github.com/DanielM22/PenduloDoble.git

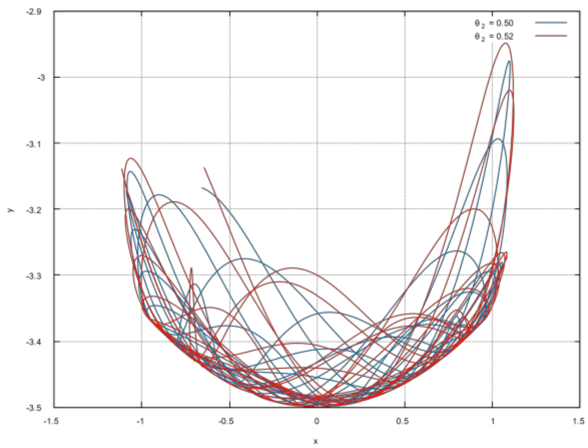

Figura 3. Gráfica de y_2 en función de x_2 para una variación de la condición del ángulo inicial del objeto 2. **Fuente:** autor.

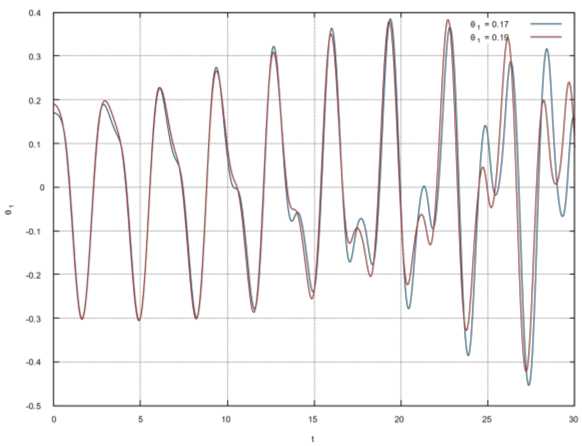

Figura 4. Gráfica de θ_1 en función del tiempo para una variación de la condición del ángulo inicial del objeto 1. **Fuente:** autor.

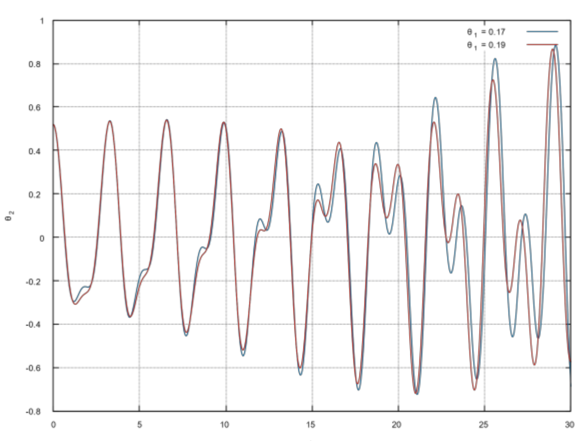

Figura 5. Gráfica de θ_2 en función del tiempo para una variación de la condición del ángulo inicial del objeto 1. **Fuente:** autor.

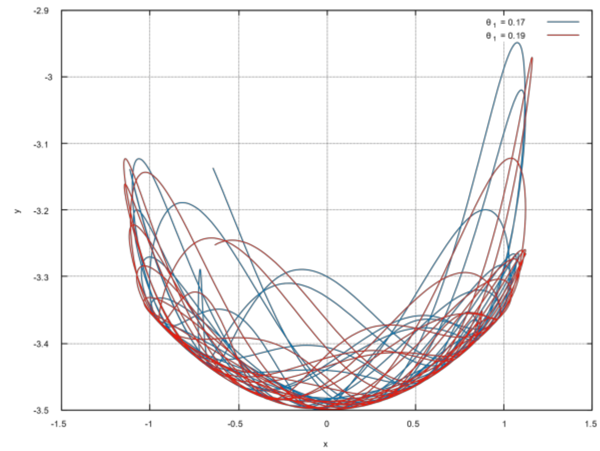

Figura 6. Gráfica de y_2 en función de x_2 para una variación de la condición del ángulo inicial del objeto 1. **Fuente:** autor.

En las gráficas mostradas en las figuras 1-3 las condiciones iniciales de θ_1, ω_1 y ω_2 se mantuvieron fijas, el ángulo inicial del objeto 1 se fijó en 0.17 radianes, y las velocidades angulares tanto del objeto 1 como del objeto 2 se fijaron en 0.0 rad/s.

Para el caso de las gráficas mostradas en las figuras 4-6 se fijaron las condiciones iniciales de θ_1, ω_1 y ω_2. El ángulo inicial del objeto 2 se fija en un valor de 0.52 radianes, y al igual que en el caso anterior las velocidades angulares de los dos objetos se fijaron ambas en 0.0 rad/s.

4.1. El efecto mariposa

A estas alturas del documento es posible notar que la analogía del efecto mariposa describe estas características de sensibilidad a las condiciones iniciales e impredecibilidad del sistema, pero esta analogía hace referencia a un sistema que es mucho más complejo que el péndulo doble, el clima. En el marco de la teoría del caos se podría decir que una variación pequeña, tal como el aleteo de una mariposa, si pueda resultar en un comportamiento completamente diferente como lo sería un huracán. Pero eso está mal, no es posible afirmar que fue dicho cambio el que causó el huracán, pues al ser un sistema tan complejo tiene muchas variables que pueden afectar el estado final del mismo, puede que todas estas variables hayan contribuido al cambio que se obtiene en el comportamiento del sistema y no sea solo el cambio en una condición inicial.

Al presentar una analogía como esta a los estudiantes, estos pueden pensar que las variaciones en las condiciones iniciales en un sistema caótico no son tan graves, pues todos los días las mariposas baten sus alas, pero no siempre hay huracanes. O se podría pensar algo contrario, creer que con un cambio tan pequeño los sistemas son muy volátiles, razón por la cual estos sistemas caóticos son totalmente aleatorios y no es posible determinar el estado de estos en ningún intervalo de tiempo, pues se tendrán cambios muy grandes.

4.2. Sensibilidad a las condiciones iniciales

En las gráficas obtenidas se realizaron cambios en las condiciones iniciales, las primeras gráficas (figuras 1-3) presentan una variación en la condición inicial del ángulo θ_2 en una cantidad de 0.02 radianes, siendo esta una variación pequeña, pero de igual forma se hace evidente que el comportamiento del sistema difiere con el tiempo. Observando estas gráficas se puede notar que el comportamiento inicial se mantiene cerca, pero luego de un tiempo estos empiezan a distinguirse, se empieza a evidenciar un comportamiento diferente.

De igual forma las gráficas restantes (figuras 3-6) presentan una variación en la condición inicial del ángulo θ_1 en la misma cantidad de 0.02 radianes, al igual que en la variación de la condición inicial de θ_2 el sistema describe un comportamiento que al pasar el tiempo comienza a diferir dada la condición inicial.

Esto describe con exactitud a lo que se refiere la sensibilidad a las condiciones iniciales, pues, como se mencionó anteriormente, en las gráficas mostradas solamente se varió una condición inicial, ya sea $\theta_2(0)$, para el caso de la primera simulación, o $\theta_1(0)$, para el caso de la segunda simulación, todos los demás datos que podrían afectar el comportamiento del sistema, tales como masa, longitud e incluso otras condiciones iniciales se dejaron constantes. De este modo se puede ver que lo único que varía entre los dos sistemas es una condición inicial en una cantidad pequeña, e incluso así se puede notar que el sistema está cambiando, discrepando uno con el otro a medida que pasa el tiempo, es decir, el sistema es sensible a las condiciones iniciales.

4.3. Impredecibilidad del sistema

Al igual que con la sensibilidad a las condiciones iniciales, la característica de impredecibilidad parece notarse en el comportamiento general del sistema, al lucir como un comportamiento aleatorio, pero esta no es la esencia de la característica de impredecibilidad de los sistemas caóticos, la esencia yace en que, incluso existiendo unas ecuaciones de movimiento para este sistema, en la realidad no es posible realizar predicciones del estado futuro de este sistema, pues el hecho de que este sea sensible a las condiciones iniciales, logra que sea imposible predecir el comportamiento del sistema, debido a la imposibilidad de lograr un grado de precisión tal, que sea posible establecer la condición inicial en un punto determinado.

Esta impredecibilidad es otra característica importante de los sistemas caóticos, se puede ejemplificar en las gráficas mostradas anteriormente, pues puede que se realice una predicción la cual describa un comportamiento como la línea azul, pero, a la hora de realizar el experimento, la precisión falle y se termine obteniendo un comportamiento como el descrito por la línea roja.

4.4. Comportamiento casi aleatorio en un sistema determinista

Como se mencionó anteriormente tenemos un sistema que es determinista, pues existen ecuaciones las cuales describen y hacen posible la modelación de este, como se evidencia en las gráficas, se simula el comportamiento del sistema para unas condiciones dadas en cualquier tiempo. Pero al mismo tiempo dicho sistema posee un comportamiento que parece aleatorio, esto se puede evidenciar en las gráficas obtenidas al observar como el actuar, en general, del sistema parece ser aleatorio, esta propiedad puede ser mejor ilustrada con las gráficas de la trayectoria del objeto (figuras 3 y 6) pues estas representan el comportamiento que se percibiría, del objeto 2, si se realizará el experimento. Se puede observar que se trata de un comportamiento que parece totalmente aleatorio, es decir, no parece que se pudiera describir por unas ecuaciones.

Con los puntos resaltados anteriormente se propone a los docentes hacer uso de esta herramienta para brindar una clase, en la cual, se desee realizar una explicación de la teoría del caos, se puede hacer esta práctica de la forma como es presentada en este artículo; presentar a los estudiantes el sistema que se va a estudiar (en este caso el péndulo doble) y luego hacer uso de las gráficas para resaltar las propiedades primordiales de los sistemas caóticos. Este ejemplo de sistema caótico es más sencillo que uno climático y, por ende, puede presentar una mejora a la hora de brindar un ejemplo de caos, desde el cual se pretende explicar las propiedades de estos sistemas.

En el aula es posible realizar la práctica con los estudiantes al hacerlos partícipes en la elección de los valores de las condiciones iniciales, es importante recalcar que la simulación, el código, se presenta como herramienta para dar lugar a una explicación, razón por la cual los estudiantes no deberán programar ni preocuparse por los detalles del código. El maestro puede presentar las gráficas de movimiento, recalcándoles que todas las demás variables se mantienen constante y además, hacerles notar cómo estas se encuentran cerca al principio, pero a medida que transcurre el tiempo se separan estas soluciones, de modo que se entienda desde ese punto las características como sensibilidad a las condiciones iniciales, impredecibilidad y comportamiento casi aleatorio en un sistema determinista, además de la propia teoría; siguiendo las justificaciones y las observaciones que se dieron en los puntos anteriores.

5. Conclusiones

Mediante la simulación es posible ilustrar las características principales de los sistemas caóticos de una manera visual, mediante las gráficas mostradas en las figuras 1-6, dando a entender a los estudiantes lo que es la teoría del caos y a poder identificar las características diferenciadoras que hacen que un sistema sea caótico.

El efecto mariposa es una analogía que describe muy bien las características principales de los sistemas caóticos, pero puede presentar confusiones o malinterpretaciones en los estudiantes a la hora de explicar con este ejemplo, por ello se propone hacer uso de la herramienta aquí expuesta, ya que el péndulo doble es un sistema simple con el cual se puede explicar las características definitorias de los sistemas caóticos. Además, el realizar una simulación logra que se pueda ejemplificar estas características de manera visual, logrando llegar a los estudiantes de una manera más fácil.

El docente tiene como labor facilitar el proceso de aprendizaje del alumno, esto se puede lograr mediante el uso de ejemplos simples e ilustrativos, en lugar de ejemplos complejos que puedan llevar a genera mayor confusión a la hora de enseñar. Por esta razón se propone este modelo para que el docente haga uso de este, del modo aquí presentado, a la hora de enseñar la teoría del caos, de tal forma que se facilite tanto para el docente como para el estudiante el proceso de enseñanza y aprendizaje. Como se ha mencionado anteriormente en el documento, este artículo propone el uso de este modelo y una forma de empleo viable para la enseñanza del caos, queda por fuera de los límites de este escrito la evaluación de dicho método en las aulas de clase, es decisión del maestro el cómo darle uso a este modelo para aplicarlo a la enseñanza y qué temas, dentro de la teoría del caos, desea exponer a sus alumnos con ayuda de esta herramienta.

En el presente artículo solamente se propone el uso del péndulo doble para ilustrar lo que es un sistema caótico y explicar las principales características como la sensibilidad a las condiciones iniciales, impredecibilidad del sistema, y el supuesto comportamiento aleatorio del sistema. Pero la enseñanza mediante este ejemplo se puede extender a más conceptos, tales como: espacio de fase, atractores extraños, exponente y tiempo de Liapunov; conceptos que se pueden ejemplificar con la propia simulación, ya sea con gráficas (gráfica de $\dot{\theta}$ en función de θ) o valores obtenidos de los datos. Razón por la cual este ejemplo puede ser de mayor utilidad de lo aquí expuesto, pues haciendo uso del mismo ejemplo simple de sistema caótico se pueden abordar temas que son más técnicos y complejos, convirtiéndola en una excelente herramienta tecnológica para poder dar a los estudiantes una buena idea de lo que es la teoría del caos y poder abordar temas que son complejos, de una manera gráfica e ilustrativa.

6. Referencias

Bau, H., & Shachmurove, Y. (2002). *Chaos Theory And Its Application*.

Beker, V. (2003). *La teoria del caos: una explicacion simple de un fenomeno complejo.*

Castro, S., Guzmán, B., & Casado, D. (2007). Las tic en los procesos de enseñanza y aprendizaje. *Laurus*, *13*(23), 213–234.

Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2006). *Métodos numéricos para ingenieros* (5th ed.). McGraw-Hill Education.

Chen, J. (2008). *Chaos From Simplicity: An Introduction to the Double Pendulum.*

Espinosa, A. E., & Ureta, C. (2014). La creación de la metáfora “el efecto mariposa.” *Ciencia*, *65*(4), 67–73.

Franco, Á. (2016). *Sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden*. Curso Interactivo de Física En Internet. http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica_/numerico/diferencial/sistema_segundo.html

Jara, S. (2005). Investigación en la enseñanza de la física. *Sinéctica*, *27*, 3–12.

Lombardi, O. (2001). La teoría del caos y sus problemas epistemológicos. *Revista de Filosofía*, *57*, 91–109.

Lozano, A., Ortiz, P., Díaz, J., & Mejia Fontanot, E. (2017). *La Dinámica del Péndulo Doble*.