



USO DE LOS SIMULADORES DE PHET Y TRACKER PARA EL ESTUDIO DE MOVIMIENTO OSCILATORIO

USE OF THE PHET AND TRACKER SIMULATORS FOR THE STUDY OF OSCILLATORY MOVEMENT

USO DOS SIMULADORES PHET E TRACKER PARA O ESTUDO DO MOVIMENTO OSCILATÓRIO

Gladys Patricia Abdel Rahim Garzón *, **Pablo Emilio Garzón Carreño ****

Abdel Rahim, G.P.; Garzón, P.E. (2023). Uso de los simuladores de Phet y Tracker para el estudio de movimiento oscilatorio. *Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias*, Número especial, v18, pp.1-15.

Resumen

El objetivo de esta investigación es estudiar los movimientos oscilatorios con y sin fricción usando herramientas tecnológicas como los simuladores de física de PhET y mediante el programa analizador de videos Tracker. Se realizaron dos laboratorios presenciales y dos virtuales con el fin de estudiar la cinemática, dinámica y las energías del sistema oscilatorio con y sin fricción. La técnica consiste en realizar primero el video y analizarlo con Tracker. Con esta herramienta se obtienen las tablas, gráficas y ecuaciones que son comparadas con los textos de física. En esta experiencia se pudo evidenciar que estos dos softwares son muy compatibles ya que se puede obtener con gran exactitud las ecuaciones que se encuentran en los textos de física tradicionales.

Palabras-Clave: Métodos de enseñanza. Ciencia. Tecnología. Ciencia de la naturaleza.

Abstract

The objective of this research is to study oscillatory movements with and without friction using technological tools such as PhET physics simulators and the Tracker video analyzer program. Were made two virtual laboratories were carried out in order to study the kinematics, dynamics and energies of the oscillatory system with and without friction. The technique consists of first making the video and analyzing it with Tracker. With this tool, tables, graphs and equations are obtained that are compared with physics texts. In this experience it was possible to show that these two softwares are very compatible since the equations found in traditional physics texts can be obtained with great accuracy.

Keywords: Teaching methods. Science. Technology. Natural sciences.

* Doctor en Ingeniería, Universidad Nacional de Colombia, Colombia, garahimg@udistrital.edu.co, ORCID. <https://orcid.org/0000-0002-8620-7023>

** Magister en Administración de Empresas, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia. pegarzonc@udistrital.edu.co – ORCID <https://orcid.org/0009-0003-5381-3814>

Resumo

O objetivo desta investigação é estudar os movimentos oscilatórios e sem fricção usando ferramentas tecnológicas como os simuladores de física de PhET e por meio do programa analisador de vídeos Tracker. Realize dois laboratórios presenciais e dois virtuais com o fim de estudar a cinemática, dinâmica e as energias do sistema oscilatório com e sem fricção. A técnica consiste em realizar primeiro o vídeo e analisá-lo com o Tracker. Com esta ferramenta se obtêm as tablas, gráficos e ecuaciones que são descubertos com os textos físicos. Nesta experiência pode-se evidenciar que estes dois softwares são muito compatíveis e que se pode obter com grande exatidão as ecuaciones que se encontram nos textos físicos tradicionales.

Palavras-Chave: Métodos de ensino. Ciência. Tecnologia. Ciências Naturais.

1. Introducción

Los estudiantes de ingeniería eléctrica de la Facultad Tecnológica de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, tienen dificultades en la adquisición de los conceptos del curso de física moderna debido a que dentro de su contenido programático no ven previamente el curso de vibraciones y ondas. En este último curso se estudia la cinemática, dinámica y energía cinética, energía potencial y energía mecánica total de partículas que tienen un movimiento oscilatorio en diferentes medios (sólido, líquido y gaseoso).

Por lo anterior es importante estudiar el movimiento armónico simple de muelles con masa, péndulos, tubos de órgano, circuitos eléctricos o electrones dentro de campos electromagnéticos para comprender que el movimiento armónico simple es, la respuesta de la naturaleza al estímulo sobre cualquier sistema en equilibrio estable.

Pero además es también muy interesante estudiar el Movimiento Armónico Amortiguado, debido a que se tienen en cuenta las fuerzas viscosas (las fuerzas disipativas) como la fricción; éstas fuerzas permiten que una vez entregada la energía al sistema, el sistema vuelve a entregar la energía al medio a través de la fricción, alguna de las aplicaciones del estudio de este movimiento radica en los sistemas de suspensión de los carros, de los puentes, debido a que un carro clásico tiene un resorte que le permite amortiguar los desniveles

(altos o bajos) de una carretera, en este caso se acumula una energía potencial elástica que posteriormente se disipa a través de un cilindro que contiene un material viscoso (ya sea líquidos o gaseosos) que proporciona la fuerza que va a disipar la energía acumulada en el resorte para que el carro logre de nuevo la estabilidad y no quede oscilado; lo mismo ocurre cuando se coloca un sistema de cilindro-resorte en un puente con alto grado de movilidad debido a que se construyen en terrenos que tiene una tendencia sísmica alta, o donde hay mucho flujo vehicular, o mucha autoexcitación aerodinámica debido al viento, etc. Entonces la idea es que la energía acumulada en el resorte se disipe a través de un gas o líquido viscoso.

Entre otras aplicaciones del movimiento amortiguado esta un circuito RLC, el movimiento de la carga eléctrica almacenada en condensador, el movimiento que realiza las moléculas en una red cristalina, etc.

De acuerdo con Abdel, 2021, 2022; Escalante, Laguna, Gomez, Calderon, Cruz, Verguez, Anzelmetti, 2016, donde usan las TIC en el proceso enseñanza-aprendizaje de la física con estudiantes de ciencias e ingeniería e indican las grandes bondades que tienen estas prácticas debido a que se usan para no solo obtener valores de algunas variables, sino que les permite comparar las ecuaciones obtenidas experimentalmente con las dadas en los textos de física. Las herramientas TIC

más usadas en estas investigaciones son: Phet, Tracker, GeoGebra, Desmos o Matlab.

Por lo anterior, se presentan cuatro propuestas de laboratorio oscilatorio las cuales son: dos del sistema masa – muelles con y sin fricción y dos el del péndulo con y sin fricción. Donde se usan Physics Tracker y Simulación de PhET, Interactive Simulations, University of Colorado Boulder, bajo licencia CC- BY-4.0 [CC-BY-4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) para determinar algunas magnitudes física como: el periodo, la frecuencia, la velocidad angular (para cada oscilador), las ecuaciones de movimiento, las energía cinética, energía potencial, energía elástica y energía mecánica. Donde a partir de estos datos se obtuvo otros como la constante elástica y el coeficiente de amortiguamiento.

2. Fundamentos Teóricos

El estudio del movimiento oscilatorio simple o amortiguado es muy importante debido a que es la respuesta de la naturaleza al estímulo sobre cualquier sistema en equilibrio estable. Cuando un cuerpo en equilibrio estable se mueve, se produce una fuerza neta que lo empuje de nuevo hacia donde estaba generándose un movimiento oscilatorio como los sistemas: masa-muelle y cuerda -masa. Por lo tanto, en esta sección se estudiará la cinemática y dinámica de los sistemas oscilatorios, con y sin fricción (ABDEL, 2015, p.1, SERWAY, 2019, p.365).

2.1. Movimiento Armónico Simple (M.A.S.). Sistema masa – muelle

Si se ubica un sistema muelle-masa en posición vertical éste oscilará alrededor de su posición de equilibrio. En una determinada posición todas las fuerzas que actúan sobre la masa están equilibradas. Sin embargo, cuando el muelle está estirado tiende a tirar de la masa hacia su posición original, cuanto más se desplace la masa mayor será la fuerza neta, el mismo principio funciona a la inversa cuando el muelle este comprimido trata de

empujar la masa hacia su posición original. Por lo tanto, cualquiera que se la dirección en que se mueva la fuerza neta se opone al desplazamiento. En cada punto de su movimiento la fuerza neta es proporcional y de dirección opuesta a la distancia desde la posición de equilibrio a la masa, la ecuación es:

$$F_e = -ky \quad (1)$$

Donde el valor de la constante elástica k depende de la rigidez del muelle. Por la segunda ley de Newton se tiene que:

$$F_{neta} = m \frac{d^2y}{dt^2} \quad (2)$$

Igualando las ecuaciones (1) y (2) se obtiene:

$$-k(\Delta y) = m \frac{d^2y}{dt^2} \quad (3)$$

que corresponde a una ecuación diferencial de segundo del M.A.S.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y = 0 \quad (4)$$

La ecuación (4), se refiere no solo a una ecuación diferencial del sistema masa–muelle, sino a cualquier sistema físico, que al ser perturbado tiende a recuperar su posición de equilibrio con una fuerza proporcional a la perturbación sufrida. Por ejemplo, la presión del aire en un tubo, el péndulo, la flexión de una cuerda de una guitarra, la rotación de un disco duro o átomos en un retículo cristalino.

Donde, la solución a esta ecuación diferencial, es:

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (5)$$

Al comprobar que la ecuación (5) es una solución de la ecuación diferencial del segundo orden en (4), se obtiene la frecuencia natural de oscilación del resorte, así:

$$(6)$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

Cuanto más rígido será el muelle mayor será la frecuencia natural de oscilación y cuanto mayor sea la masa menor será la frecuencia natural de oscilación. Pero sea cual sea la frecuencia esta dependerá de las propiedades mecánicas del sistema tales como la masa y la constante elástica del muelle.

El tiempo requerido para realizar un ciclo completo, no depende de la amplitud de las oscilaciones representada por A en la ecuación (5).

Las ecuaciones de velocidad y aceleración con respecto al tiempo son respectivamente:

$$v(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi) \quad (7)$$

$$a(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) \quad (8)$$

En las oscilaciones del M.A.S, mantienen constante su periodo ($T = \frac{t}{n}$) y la frecuencia natural oscilación ($\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$), indicando que una oscilación la realiza en 2π .

2.2. Movimiento Armónico Simple (M.A.S.). Péndulo

La Figura 1 muestra un péndulo simple y la fuerza neta que actúa sobre la masa mientras ésta se desplaza, así:

$$F_{neta} = -mg \sin\theta \quad (9)$$

Donde m es la masa, g la gravedad y θ es el ángulo medido entre la posición de equilibrio y el punto más alto de la trayectoria. De acuerdo a la ecuación (2) se tiene que

$$-mg \sin\theta = m \frac{d^2S}{dt^2} \quad (10)$$

donde, $dS = Ld\theta$, por lo tanto:

$$(11) \quad [4]$$

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta(t) = 0$$

La solución de la ecuación (11), es:

$$\theta(t) = A\cos(\omega t + \varphi) + B\sin(\omega t + \varphi) \quad (12)$$

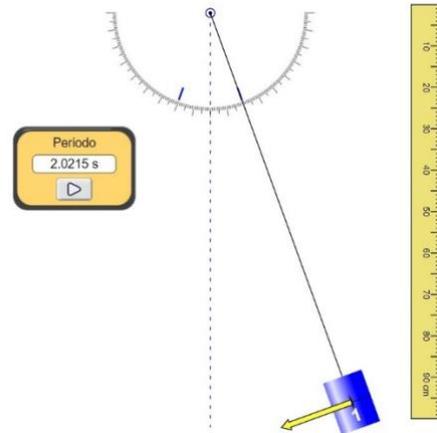


Figura 1. "Lab de Péndulo".

Fuente: Simulación de PhET.

Donde para el péndulo simple, la amplitud es: $A = \theta_0$ y $B = \frac{w_0}{\omega}$, así:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi) + \frac{w_0}{\omega} \sin(\omega t + \varphi) \quad (13)$$

Tradicionalmente, el péndulo se separa de la posición de equilibrio y se suelta indicando que la velocidad angular inicial es cero ($w_i = 0$) y la ecuación de movimiento sería solo el primer término de la ecuación (13).

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (14)$$

Al comprobar si la ecuación (14) es una solución de la ecuación (11), se obtiene la frecuencia natural de oscilación del sistema

$$\omega^2 = \frac{g}{L} \quad (15)$$

2.3. Oscilaciones amortiguadas (masa – Muelle)

En sistemas reales, las fuerzas disipativas como la fricción están presentes en la vida cotidiana y retardan el movimiento en consecuencia la energía mecánica disminuye en el tiempo y se dice que el movimiento es amortiguado (ABDEL, 2015, p. 48; SERWAY, 1996, p.378).

La Figura 4 muestra el montaje experimental casero realizado por este trabajo para el estudio del movimiento amortiguado del sistema masa-muelle.

Al mover la masa de su posición de equilibrio después de un tiempo corto esta se detiene, debido a la fuerza viscosa (que en este caso el aire) que disipa la energía que se acumula en el resorte.

La fuerza viscosa ($R = -bv$) es proporcional a la velocidad y el signo menos indica que la fuerza se opone a la velocidad que lleva la masa y b es la constante de amortiguamiento que, de varios factores como la viscosidad, o el cambio de presión o el cambio de la temperatura del medio, de estos cambios depende que el sistema se vuelva más o menos viscoso. Otra de las fuerzas que actúa sobre la masa en movimiento es la fuerza restauradora (Ley de Hooke) del sistema que es $F_e = -ky$. Luego la fuerza neta que actúa sobre la masa es igual a la fuerza de Hooke más la fuerza viscosa y de acuerdo a la segunda ley de Newton, se tiene que:

$$-ky - bv = ma$$

Escribiendo la ecuación (16) en forma diferencial, así:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dy}{dt} + \frac{k}{m} y = 0 \quad (17)$$

En la ecuación (16) se observan cinco diferentes parámetros, pero si definimos la frecuencia de oscilación natural del resorte ($w_0^2 = \frac{k}{m}$) y el factor

de amortiguamiento ($\gamma = \frac{b}{2m}$) la ecuación (17) queda:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\gamma \frac{dy}{dt} + w_0^2 y = 0$$

Por lo que la proporción de w_0^2 y γ no varía en el proceso ósea se mantienen constantes. Es importante notar que γ no tiene ninguna justificación física solo se introduce dentro de la ecuación diferencial (17) para que a la hora de ser resuelta sea más sencilla. Esta ecuación es útil para definir vocabulario, no para resolver. Por lo que usamos la siguiente ecuación auxiliar, así:

$$r^2 + 2\gamma r + w_0^2 = 0 \quad (19)$$

Donde,

$$r = \frac{-2\gamma \pm \sqrt{(2\gamma)^2 - 4(1)(w_0^2)}}{2} = \frac{-2\gamma \pm \sqrt{4\gamma^2 - 4w_0^2}}{2}$$

Las raíces de la ecuación (19) son:

$$r = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - w_0^2} \quad (20)$$

Donde la ecuación que soluciona la ecuación (18) es:

$$y(t) = e^{-\gamma t} [A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}] \quad (21)$$

Donde A_1 y A_2 son constantes que dependen de las condiciones iniciales. Analizando la ecuación (21) para tres casos, los cuales depende de lo que esta dentro de la raíz cuadrada de la ecuación (20). Así, el movimiento sobre amortiguado $\gamma^2 > w_0^2$ donde el sistema se amortigua muy rápidamente, el movimiento críticamente amortiguado donde $\gamma^2 = w_0^2$ donde el sistema deja de oscilar y el movimiento sub amortiguado $\gamma^2 < w_0^2$ donde el sistema realiza varias oscilaciones antes de detenerse.

De acuerdo a las gráficas obtenidas en los experimentos se consideró que era un movimiento sub amortiguado debido a que la viscosidad del aire es más baja que la frecuencia de oscilación natural del resorte.

Como $\gamma^2 < w_0^2$ y de acuerdo a la ecuación (20) se tiene que $\sqrt{(-1)(w_0^2 - \gamma^2)}$ y sustituyendo en la ecuación (21), se obtiene:

$$y(t) = e^{-\gamma t} \left[A_1 e^{\left(\sqrt{(-1)(w_0^2 - \gamma^2)}\right)t} + A_2 e^{\left(-\sqrt{(-1)(w_0^2 - \gamma^2)}\right)t} \right] \quad (22)$$

Sustituyendo $i = \sqrt{-1}$ en la ecuación (22) así:

$$y(t) = e^{-\gamma t} \left[A_1 e^{i\sqrt{(w_0^2 - \gamma^2)}t} + A_2 e^{-i\sqrt{(w_0^2 - \gamma^2)}t} \right] \quad (23)$$

Sustituyendo $w^* = \sqrt{w_0^2 - \gamma^2}$ en la ecuación (23), se tiene:

$$y(t) = e^{-\gamma t} [A_1 e^{iw^*t} + A_2 e^{-iw^*t}] \quad (24)$$

Dependiendo de las condiciones iniciales A_1 y A_2 se define la ecuación (24), como:

$$y(t) = A_0 e^{-\gamma t} \text{sen}(w^*t + \varphi) \quad (25)$$

Donde φ la constante de fase inicial. Derivando (25) con respecto al tiempo, se obtiene:

$$v(t) = A_0 e^{-\gamma t} [-\gamma \text{sen}(w^*t + \varphi) + w^* \text{cos}(w^*t + \varphi)] \quad (26)$$

Cuando el amortiguamiento es muy débil se tiene que si $w^* = \sqrt{w_0^2 - \gamma^2}$ con $\gamma^2 \ll w_0^2$ por lo que $w^{2*} \approx w_0^2$. Por lo que se puede definir un cuasi

periodo $(T = \frac{2\pi}{w^*})$ cuando el amortiguamiento es muy débil.

3. Montajes Experimentales

En esta sección se describe los montajes experimentales realizados. La Figura 2, muestra el simulador cuerda -masa titulado "Lab del Péndulo" de Simulación de PhET, Interactive (18) ions, University of Colorado Boulder, bajo lic :- BY-4.0 [CC-BY-4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) y la Figura 3 muestra el experimento casero masa-muelle. El primer experimento se grabó con el computador y el segundo con un celular común. Es necesario hacer lo videos ya que Tracker es un analizador videos que permite construir modelos dinámicos en el ambiente Java, creado en el marco del proyecto Open Source Physics (OSP).

Las Figuras 2 y 3 muestran el montaje experimental que hay que tener presente para usar Tracker, las cuales son:

1. Plano cartesiano: Nos permitirá ubicar la trayectoria de la partícula.
2. Vara de calibración: que consiste en colocar una regla, esto permite que el programa de simulación tome una medida estándar y a partir de esa medida puede derivar la escala a la cual se está realizando el experimento.
3. Tabla de datos: la tabla sintetiza los datos de la trayectoria.
4. Graficas: una vez obtenida la trayectoria total de la partícula, el programa puede hacer las gráficas y se pueden cambiar las variables en los ejes.

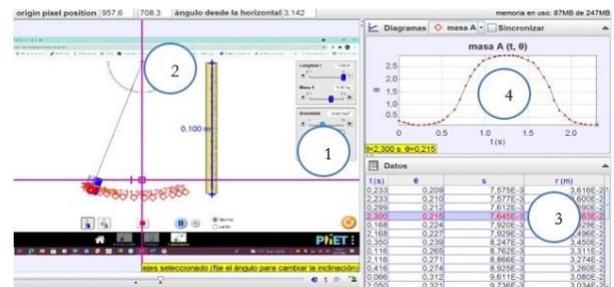


Figura 2. Lab de Péndulo.

Fuente: Simulación de PhET.

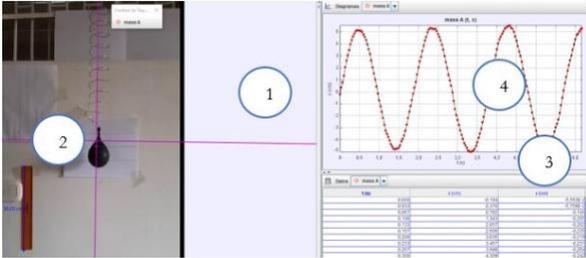


Figura 3. Montaje del sistema masa – Muelle. Fuente: Los Autores.

4. Resultados del Sistema masa-muelle

4.1. Cinemática de un M.A.S. (Sistema masa-muelle)

La Figura 4 muestra el montaje experimental casero del sistema masa-muelle. Se observa una regla y una hoja de papel que contiene tres líneas horizontales que corresponde a la guía que permite limitar el desplazamiento vertical de la masa.



Figura 4. Montaje del sistema masa – Muelle.

Fuente: Los Autores.

La Tabla 1 muestra los datos del periodo, la frecuencia y la frecuencia angular; datos extraídos del Tracker.

Tabla 1. Datos extraídos del programa Tracker.

| Datos tomados del Tracker | | |
|---------------------------|-------------------|----------------------|
| Periodo | $T = \frac{t}{n}$ | 1,9 s |
| Frecuencia | $f = \frac{1}{T}$ | 0,52 Hz |
| Frecuencia angular | $w = 2\pi f$ | 3,30 $\frac{rad}{s}$ |

Fuente: Los Autores.

La Figura 5 muestra las Figuras de posición vertical, la velocidad trasversal y aceleración trasversal en función del tiempo.

$$y(t) = 0,049\text{sen}(3,33t - 0,013) [\text{m}] \quad (27)$$

$$v_y(t) = 0,163\text{cos}(3,33t - 0,013) \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right] \quad (28)$$

$$a_y(t) = -0,54\text{sen}(3,33t - 0,005) \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right] \quad (29)$$

Donde, la amplitud, la velocidad máxima y la aceleración, son: $A = 0,049 \text{ m}$, $v_{m\acute{a}x} = \pm 0,163 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y $a_{m\acute{a}x} = \pm 0,54 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, respectivamente. Además, en las gráficas se puede apreciar que mientras la posición y la aceleración es un valor máximo, la velocidad es cero y viceversa.

Con las ecuaciones de movimiento se obtiene la frecuencia natural de oscilación $w = 3,33 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ y la ecuación (6) se obtiene la constante elástica, así:

$$k = 0,25 \text{ kg} \left(3,33 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 = 2,77 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

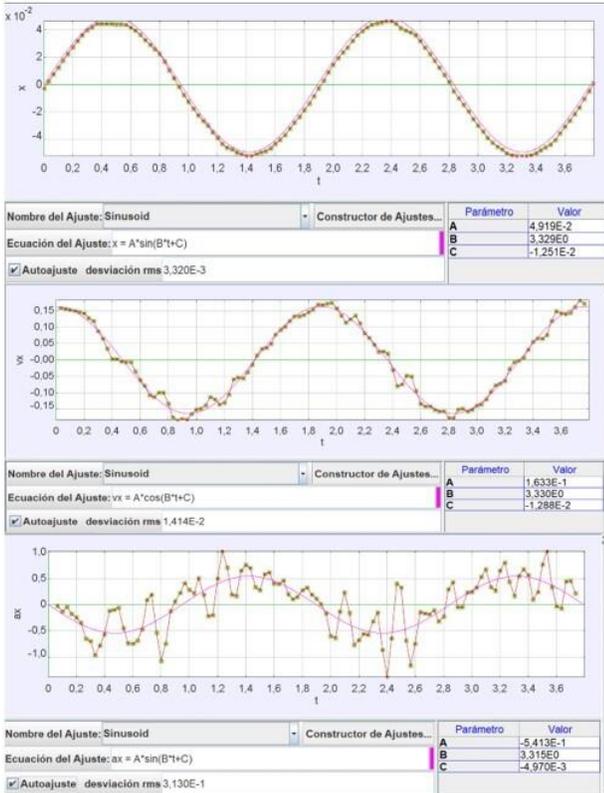


Figura 5. Gráficas de posición, velocidad, y aceleración transversal como funciones del tiempo del sistema masa – Muelle.

Fuente: Los Autores.

Si la velocidad angular es $\omega = 3,33 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ se obtiene la frecuencia con que oscila el sistema, así:

$$f = \frac{3,33 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{6,28 \text{ rad}} = 0,53 \text{ Hz}$$

4.2. Energía total del M.A.S. (Sistema masa-muelle)

Para determinar la energía total del sistema de debe calcular la energía cinética, la energía potencial gravitacional y la energía potencial elástica.

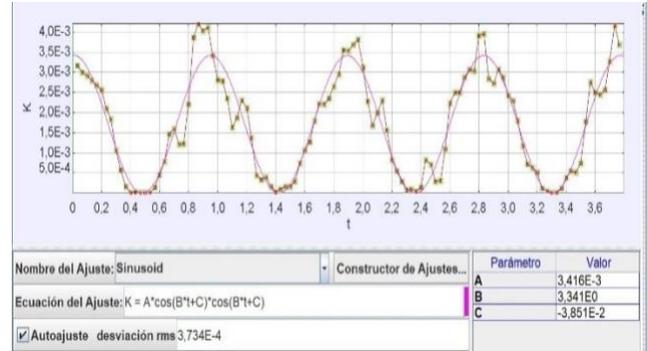


Figura 6. Energía cinética en función del tiempo. Fuente: Los Autores.

La energía cinética del sistema se puede obtener de dos formas. La primera usando la ecuación $K(t) = \frac{1}{2}mv^2$ y sustituyendo la ecuación (28), se obtiene:

$$K(t) = \frac{1}{2}m[0,163\cos(3,33t - 0,013)]^2 \quad (30)$$

Por lo tanto, la energía cinética, es:

$$K(t) = \frac{1}{2}m(0,026\cos^2(3,33t - 0,013)) \quad (31)$$

La segunda forma de obtener $K(t)$ es realizar la gráfica de $K(t)$ vs t y realizar el ajuste como se muestra en la Figura 6, la cual es:

$$K(t) = (3,416 \times 10^{-3})\cos^2(3,34t - 0,038) \quad (32)$$

Donde la energía cinética máxima es: $K_{max} = 3,416 \times 10^{-3}$ [J] cuando $\cos^2(3,33t - 0,038) \approx 1$.

Tomando la amplitud de la ecuación (27) junto con la definición de energía cinética máxima ($K_{max} = \frac{kA^2}{2}$) se obtiene la constante elástica del resorte, así:

$$k = \frac{2K_{max}}{A^2} \quad (33)$$

Sustituyendo los valores, obtenemos:

$$k = \frac{2 \left(3,416 \times 10^{-3} \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right)}{(0,049 \text{ m})^2} = 2,84 \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$$

La energía potencial es almacenada en el resorte se determina a partir del trabajo hecho por el sistema contra la fuerza restauradora.

$$W = \int_{x_0}^x kx \, dx = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}kx_0^2 \quad (34)$$

De aquí la energía potencial se define como:

$$E_p(t) = \frac{1}{2}kx^2 \quad (35)$$

Sustituyendo la ecuación (27) en la ecuación (35), obtenemos:

$$E_p(t) = \frac{1}{2}k[0,049\text{sen}(3,33t - 0,012)]^2 [J] \quad (36)$$

$$E_p(t) = \frac{1}{2}k(2,4 \times 10^{-3}\text{sen}^2(3,33t - 0,012)) [J]$$

La constante obtenida usando el software es: $k = 2,77 \frac{N}{m}$ por lo tanto la energía potencial es:

$$E_p(t) = (3,3 \times 10^{-3})\text{sen}^2(3,33t - 0,013) [J] \quad (37)$$

La energía total se obtiene sumando las ecuaciones (32) y (37), así si la energía mecánica es: $E_M = K + E_p$, por lo tanto:

$$E_M(t) = [(3,416 \times 10^{-3})\text{cos}^2(3,33t - 0,038) + (3,3 \times 10^{-3})\text{sen}^2(3,33t - 0,013)] [J]$$

La Figura 7 muestra la energía cinética y potencial elástica en función del tiempo. Donde el valor máximo de estas energías es: $\sim 0,0031 J$. Por definición la energía mecánica del sistema masa-muelle se tiene que:

$$E_M = \frac{kA^2}{2} \quad (38)$$

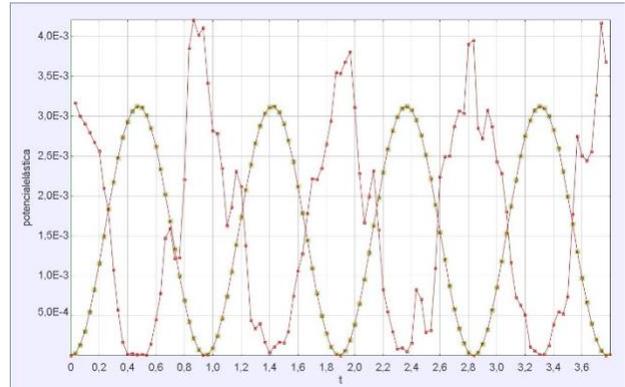


Figura 7. Gráficas energía cinética y potencial elástica en función del tiempo del sistema masa – muelle. Fuente: Los Autores.

Tomando la amplitud de la ecuación (27) y el valor de la constante elástica calculado con el software se obtiene:

$$E_M = \frac{kA^2}{2} = \frac{2,77 \frac{kg}{s^2} (0,048m)^2}{2}$$

$$E_M = 3,3 \times 10^{-3} [J]$$

Valor muy similar a los valores máximos de las ecuaciones (32) y (35).

La Figura 8 se muestran dos parábolas una cóncava hacia arriba que corresponde a la energía potencial elástica y otra cóncava hacia abajo que corresponde a la energía cinética. Es una imagen típica de muchos textos de física (SERWAY, 2019, p.221).

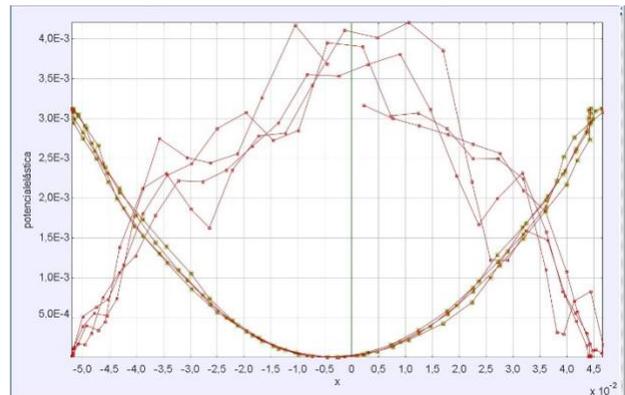


Figura 8. Gráficas energía cinética (cóncava hacia abajo) y potencial elástico en función de la posición (cóncava hacia arriba).

hacia arriba) del sistema masa–muelle. **Fuente:** Los Autores.

El ajuste de estas gráficas de la Figura 8 son respectivamente:

$$E_p(x) = 1,30x^2 + 0,0082x[J] \quad (39)$$

$$K(x) = -1,440x^2 - 0,0083x + 0,0034[J] \quad (40)$$

Además, se puede apreciar que en el punto $x = 0,0024$ m toda la energía es cinética es $K = 0,0041$ J, en los puntos $x = 0,04$ m y $x = 0,036$ m la energía cinética es igual a la energía potencial ($E_p = K = 0,00179$ J) y en los puntos $x = -0,052$ m y $x = 0,046$ m toda la energía potencial elástica es $E_p = 0,0046$ J.

4.3. Cinemática de un oscilador amortiguado (Sistema masa-muelle)

La Figura 4 muestra el montaje experimental del sistema masa–muelle usado para hacer el video. Los datos se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2. Datos que se pueden extraer del programa Tracker.

| Datos tomados del Tracker | | |
|---------------------------|-------------------|------------------------------------|
| Periodo | $T = \frac{t}{n}$ | 0,699 s |
| Frecuencia | $f = \frac{1}{T}$ | 1,43 Hz |
| Frecuencia angular | $w = 2\pi f$ | 8,97 $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ |

Fuente: Los Autores.

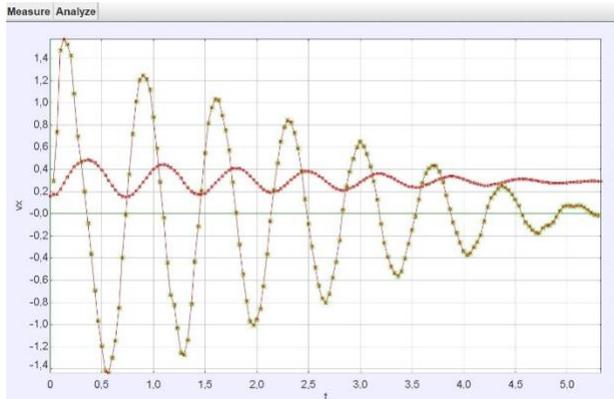


Figura 9. Amortiguamiento subcrítico de posición (amplitud menor) y velocidad (amplitud mayor) vs tiempo.

Fuente: Los Autores.

La figura 9 muestra la posición y la velocidad en función del tiempo del amortiguamiento subcrítico, la cual se puede apreciar que ambas funciones decrecen exponencialmente al transcurrir el tiempo. La Figura 10 muestra los valores máximos de las amplitudes de la posición en función del tiempo.

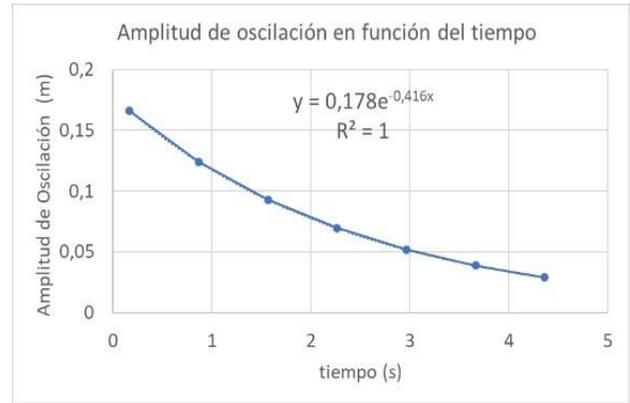


Figura 10. Gráfica de la amplitud de oscilación subcrítico vs. tiempo. **Fuente:** Los Autores.

La gráfica de la Figura 10 se ajusta a una ecuación exponencial, así:

$$A(t) = 0,1786 e^{-0,416t} [J] \quad (41)$$

Esta ecuación corresponde a la primera función de la ecuación (25), donde se deduce que la amplitud inicial es $A_0 = 0,178$ m y el factor de amortiguamiento es $\gamma = 0,416 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ de donde $\gamma^2 < w_0^2$, osea $0,17 < 80,46$. Por lo tanto se concluye que éste es un oscilador sub-amortiguado. Donde la frecuencia angular de la oscilación amortiguada es:

$$w^* = \sqrt{\left(8,97 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 - \left(0,416 \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2}$$

$$w^* = \sqrt{80,46 \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2} - 0,17 \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2}}$$

$$w^* = 8,96 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

De acuerdo a las ecuaciones (25) se tiene que la posición y velocidad trasversal en función del tiempo es:

$$y(t) = 0,1786e^{-0,416t} \text{sen}(8,96t) [\text{m}] \quad (42)$$

$$v(t) = 0,1786e^{-0,416t} [-0,416\text{sen}(8,96t) + 8,96\text{cos}(8,96t)] \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \quad (43)$$

4.4. Energía total de un oscilador amortiguado (Sistema masa-muelle)

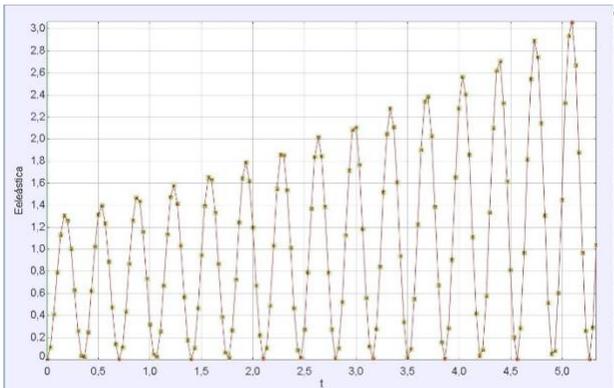


Figura 11. Gráficas de la energía potencial elástica vs. tiempo.

Fuente: Los Autores.

La Figura 11 muestra la energía potencial elástica en función del tiempo. Donde la frecuencia natural del resorte es $\omega = 8,97 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ y se determina la constante elástica del resorte, así:

$$k = \omega^2 m = \left(8,97 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 (1 \text{ kg}) = 80,46 \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$$

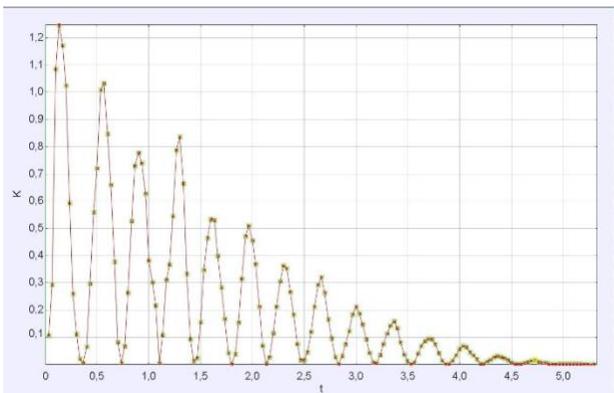


Figura 12. Gráficas de la energía potencial elástica vs. tiempo.

Fuente: Los Autores.

Por definición, la energía potencial elástica es:

$$E_p(t) = \frac{ky^2}{2}, \text{ sustituyendo valores, obtenemos:}$$

$$E_p(t) = \frac{80,46}{2} (0,1786e^{-0,416t} \text{sen}(8,96t))^2 [J]$$

$$E_p(t) = 1,28 e^{0,173t} \text{sen}^2(8,96t) [J] \quad (44)$$

En la Figura 12 se observa la energía cinética en función del tiempo donde muestra, que la amplitud de la energía disminuye a medida que aumenta el tiempo.

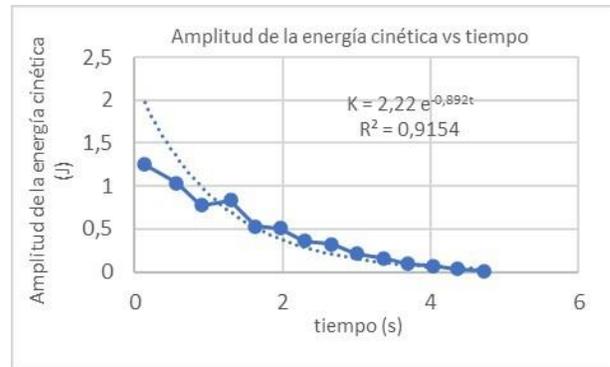


Figura 13. Gráfica de la amplitud de la energía cinética vs. tiempo.

Fuente: Los Autores.

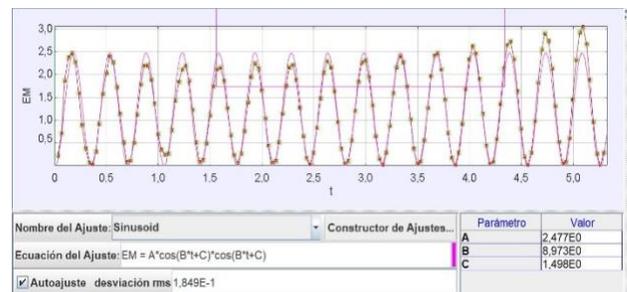


Figura 14. Gráfica de la amplitud de la energía cinética vs. tiempo.

Fuente: Los Autores.

La Figura 13 muestra la gráfica de los máximos valores de la energía cinética en función del tiempo donde el ajuste correspondiente es:

$$(45)$$

$$K(t) = 2,22e^{-0,892t}$$

La Figura 14 muestra la energía mecánica en función del tiempo ($E_M = K + E_{elástica}$), cuya ecuación obtenida con el simulador es:

$$E_M(t) = 2,47\cos^2(8,96t + 1,5)[J] \quad (46)$$

La Figura 15 se observa los valores máximos de las amplitudes de la energía mecánica (que se tomaron de la figura 14) en función del tiempo.

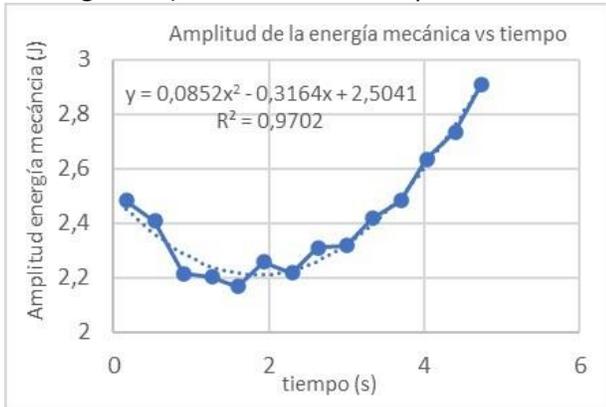


Figura 15. Amplitud de la energía mecánica vs. tiempo
Fuente: Los Autores.

5. Resultados del péndulo

5.1. Cinemática (Sistema masa-cuerda)

Se uso el laboratorio virtual de la página de Phet colorado titulado “Lab de péndulo”. En este laboratorio, se realizó la experiencia con una longitud del péndulo de $L = 1m$ y junto a él se colocó, una regla de 10 cm, para calibrar la imagen en la pantalla. Seguidamente se obtuvo la lectura de las imágenes con Tracker. Finalmente se lograron extraer las gráficas y ecuaciones de la posición, velocidad y aceleración angular como funciones del tiempo, como se indican en la Figura 16. Donde los ajustes de las gráficas, son:

$$\theta_r(t) = [0,26\text{sen}(3,13t - 6,21)]\text{rad} \quad (47)$$

$$w(t) = [0,805\text{cos}(3,13t - 6,21)]\frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (48)$$

$$\alpha(t) = [-2,52\text{sen}(3,14t - 6,29)]\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \quad (49)$$

Donde, la amplitud angular, la velocidad angular máxima y la aceleración angular, son:

$$A = 0,26 \text{ rad},$$

$$w_{m\acute{a}x} = \pm 0,805 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\alpha_{m\acute{a}x} = \pm 2,52 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Es importante mostrar que cuando los valores de la velocidad angular es cero, la aceleración y la posición angular toman un valor máximo y viceversa.

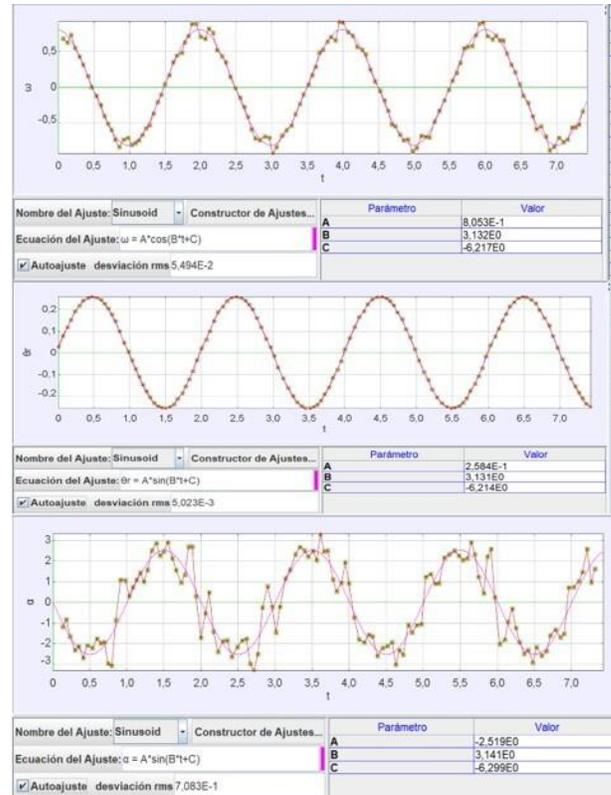


Figura 16. Gráficas de las ecuaciones de movimiento del sistema masa – cuerda.

Fuente: Los Autores.

Con las ecuaciones de movimiento obtenidas con Tracker se obtiene la frecuencia angular ($w = 3,13 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$), por definición se tiene que la gravedad es $g = Lw^2$, luego:

$$g = 1\text{m} \left(3,13 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

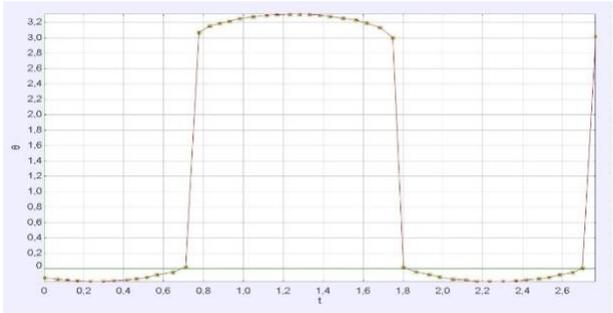


Figura 17. Gráficas del ángulo del péndulo en función del tiempo, el plano cartesiano que se tomó para realizar esta gráfica. **Fuente:** Los Autores.

La figura 17 muestra el ángulo del péndulo en función del tiempo. La coordenada horizontal (eje x positivo) se tomó como se indica en la Figura 3. Tracker toma el ángulo $\theta_0 = 10^0 = 0,174 \text{ rad}$, luego al caer lo toma como $\theta = 0^0 \text{ rad}$ en $t = 0,710 \text{ s}$, pero cuando la masa pasa al IV cuadrante, Tracker no sigue la continuidad de los grados, sino que toma el ángulo de $\theta_0 = 170^0 = 2,932 \text{ rad}$.

5.2. Cinemática de un oscilador amortiguado (Sistema masa-cuerda)

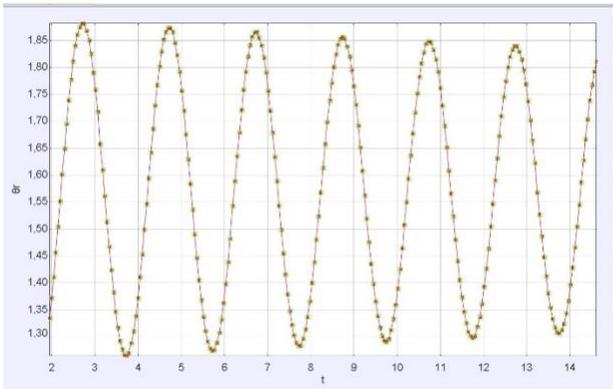


Figura 18. Gráfica de posición, angular como funciones del tiempo del sistema masa – cuerda de un oscilador sub amortiguado.

Fuente: Los Autores.

La Figura 18 muestra la posición angular como función del tiempo donde observa que la amplitud disminuye al aumentar el tiempo, así:

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-\gamma t} \cos(w^*t + \varphi)$$

Para determinar la función $\theta(t) = \theta_0 e^{-\gamma t}$ se realizó la Figura 19, donde el ajuste de esta gráfica, es:

$$\theta_{m\acute{a}x} = 1,88e^{-0,002t} \quad (50)$$

Esta ecuación corresponde a la primera función de la ecuación (25), donde se deduce que la amplitud inicial es $\theta_0 = 1,88 \text{ rad}$ y el factor de amortiguamiento es $\gamma = 0,002 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ de donde sabemos que $\gamma^2 < w_0^2$, y como $4 \times 10^{-6} < 9,79$ se concluye que éste es un oscilador sub amortiguado. Donde la frecuencia angular de la oscilación es:

$$w^* = \sqrt{\left(3,13 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 - \left(0,002 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2}$$

$$w^* = \sqrt{9,79 \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2} - 4 \times 10^{-6} \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2}}$$

$$w^* = 3,12 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$



Figura 19. Gráfica de la amplitud del eje y en función del tiempo del oscilador subcrítico

Fuente: Los Autores.

De acuerdo a las ecuaciones 25 y 50 se obtiene:

$$\theta(t) = 1,88e^{-0,002t} \cos(3,46t) \quad (51)$$

5.3. Energía total M.A.S (Sistema masa-cuerda)

La Figura 21 muestra la gráfica de energía cinética y la energía potencia gravitacional en función del

tiempo. Donde el valor mayor de la energía potencial gravitacional y cinética son respectivamente, $E_p = 0,061 \text{ J}$ (en $t = 2,69 \text{ s}$) y $K = 0,0063 \text{ J}$ (en $t = 2,19 \text{ s}$). El punto donde las dos energías son iguales es $E_p = K = 0,005 \text{ J}$ (en $t = 2,245 \text{ s}$).

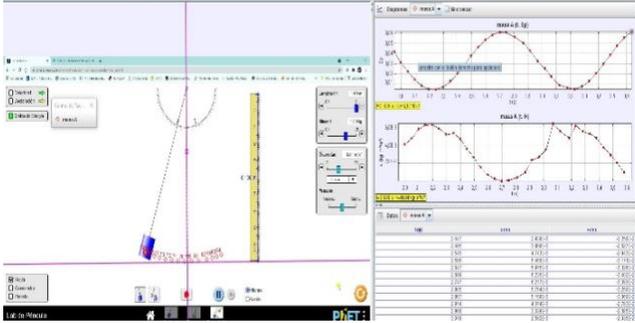


Figura 21. Sistema de referencia que se tomó para realizar las gráficas de la energía.

Fuente: Los Autores.

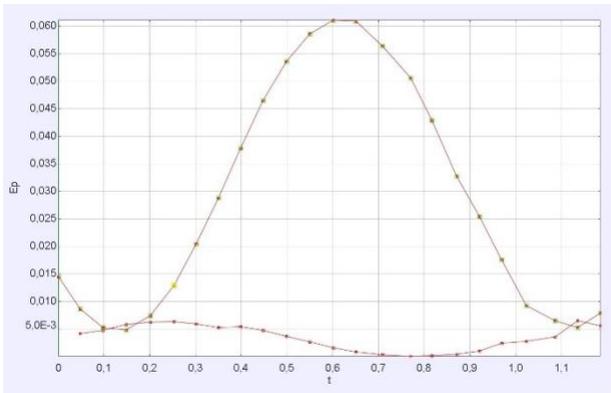


Figura 20. Gráficas energía cinética de menor amplitud y la energía potencial de mayor amplitud.

Fuente: Los Autores.

Se puede notar que al sumar éstas dos energías no dan un valor constante, porque la energía potencial gravitacional es mucho mayor que la energía cinética. Pero, si se puede apreciar que en $t = 2,69 \text{ s}$, la $E_p = 0,0611 \text{ J}$ y la $K = 0,000002 \text{ J}$. El hecho de que al sumar la energía cinética más la energía potencial no de un valor constante es por los efectos de fricción que se incluyeron en la simulación.

6. Consideraciones finales

Estudiamos el M.A.S y el oscilador sub amortiguado con los sistemas masa-muelle y el péndulo usando Tracker y Phet Colorado. Donde las gráficas y ecuaciones obtenidas dan información de otras magnitudes física tales como: la frecuencia de oscilación, la velocidad angular, la constantes elástica, el factor de amortiguamiento, ecuaciones de movimiento (posición, velocidad y aceleración como funciones del tiempo) y aplicar la ley de la conservación de la energía con y sin fricción.

Las gráficas que se obtuvieron de la energía mecánica en el sistema masa- muelle y en el péndulo sin fricción, cumplen con la Ley de la conservación de la energía mecánica, ósea en cada punto de la gráfica la energía era la misma, pero cuando hay fricción este valor en cada punto era diferente debido a la fricción.

Con estos cuatro experimentos se muestra la importancia que tiene este tipo de herramientas en el proceso enseñanza–aprendizaje de la física, ya que a partir de un laboratorio en tiempo real se pueden extraer datos, ecuaciones y gráficas que al ser ajustadas dan un margen de error mínimo, como se pudo observar en las gráficas de la amplitud de oscilación en función del tiempo.

Por lo tanto, podemos concluir que Tracker es una herramienta computacional muy poderosa en el estudio de sistemas oscilatorios y sistemas amortiguados, ya que de un video se puede extraer mucha información que junto con los textos de física se puede realizar un excelente análisis de dichos movimientos.

7. Referencias

- Abdel Rahim Garzón, G. P. y Moreno Villate, M. A. (2022). Uso de Tracker como herramienta de análisis en experimentos caseros para el aprendizaje de la física mecánica. *Revista Educación En Ingeniería*, 17(34),1-17.
<https://doi.org/10.26507/rei.v17n34.1203>
- Abdel Rahim Garzón, G. P. y Moreno Villate, M. A. (2021). Cálculo de las ecuaciones del movimiento

parabólico usando Tracker. *Revista Educación En Ingeniería*, 17(33), 45-51.

<https://doi.org/10.26507/rei.v16n32.1183>

<https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6019783>

Abdel Rahim Garzón, G. P., & Moreno Villate, M. A. (2021). Determinación del coeficiente de fricción dinámico con Tracker. *Revista Latin-American Journal of Physics Education*, 16(1), (1303-1, 1303-9).

http://www.lajpe.org/mar22/16_1_03.pdf

Abdel Rahim Garzón, G. P. (2015). *Conceptos básicos de vibraciones y ondas*. Editorial. Fondo de publicaciones de la Universidad Distrital, [En línea]. Disponible en:

<https://editorial.udistrital.edu.co/detalle.php?id=81&f=6>

Escalante-Martínez, J.E., Laguna-Camacho, J.R., Gómez-Aguilar, J.F., Calderón-Ramón, C., Cruz-Orduña, M.I., Varguez-Fernández, R., & Anzelmetti-Zaragoza, J.C. (2016). Análisis del coeficiente de amortiguamiento viscoso en un sistema masa-resorte-amortiguador utilizando PPLANE y GEOGEBRA. *Revista mexicana de física E*, 62(2), 66-72. Recuperado en 07 de septiembre de 2022, de

http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1870-35422016000200066&lng=es&tlng=es.

Enrique, C., Yanitelli, M., & Giorgi, S. M. (2020). Análisis del discurso de estudiantes de ingeniería respecto de una actividad didáctica mediada por TIC sobre Movimiento Oscilatorio. In *XV Congreso Nacional de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología (TE&ET 2020)* (Neuquén, 6 y 7 de julio de 2020).

Geogebra, [En línea]. Disponible en:

<https://www.geogebra.org/m/pse7aqyd>

Physics Tracker, [En línea]. Disponible en:

<http://www.cabrillo.edu/~dbrown/tracker/>

R. Simulación de PhET, Interactive Simulations, University of Colorado Boulder, bajo licencia CC- BY-4.0 [CC-BY-4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/), [En línea]

<https://phet.colorado.edu>

Serway, R. A., & Jewett, J. W. (2009). *Física: Para ciencias e ingeniería con Física Moderna* (4a. ed.--). México D.F.: Cengage.

Víctor, R., Montero G., Román Á., & García Alfred. (2017). Simulación experimental para la enseñanza del movimiento oscilatorio. *Revista Latin-American Journal of Physics Education*, 16(1), (1303-1, 1303-9).