

CONFRONTACIÓN EXPERIMENTAL DE TRES MODELOS TEÓRICOS DE CAÍDA LIBRE

EXPERIMENTAL CONFRONTATION OF THREE THEORETICAL MODELS OF FREE FALL

Carlos Eduardo Díaz

karloses1@hotmail.com

RESUMEN

En este artículo se presenta el diseño y aplicación de una práctica de laboratorio en la cual se empleó la técnica de fotografía estroboscópica para registrar la caída de cuerpos con forma esférica y cúbica, se compararon los resultados experimentales con tres modelos teóricos (esferas). También, a partir de los valores obtenidos de los objetos de forma cubica nos aproximamos a la formulación de su modelo teórico. En los modelos teóricos para los cuerpos esféricos se contemplan los dos tipos de fuerza de arrastre que corresponden a un intervalo bien definido del número de Reynolds y al empuje

Palabras claves: Estroboscopio, fuerza de arrastre, ley de Stokes, número de Reynolds.

ABSTRACT

This paper presents a design and application of a laboratory practice in which the stroboscopic photography technique was used to record the fall of spherical and cubic bodies. The experimental results were compared with three theoretical models (spheres). Also, from the values obtained from cubic-shaped objects we approach the formulation of its theoretical model. In theoretical models for spherical bodies the two types of drag forces corresponding to a well-defined range of the Reynolds number and pushing force are contemplated.

Keywords: Stroboscope, drag force, Stokes law, Reynolds number.

1. INTRODUCCIÓN

La practica experimental tiene como fin contrastar diversos modelos teóricos del fenómeno de caída libre a través de la experimentación utilizando la fotografía estroboscópica. El establecimiento de las condiciones para el cual uno u otro modelo se ajusta a los resultados obtenidos, permite ampliar nuestra visión de los fenómenos naturales que generalmente están representados por modelos ideales. El conocimiento adquirido de la construcción, la formulación de hipótesis y condiciones que contempla un modelo teórico determinado, además de someterlo a una confrontación experimental del mismo y con otros modelos, diverge en la comprensión del sentido de nuestra labor científica y docente.

El primer modelo al que se hace referencia constituye el modelo de caída libre que es bien conocido y se estudia en la mecánica newtoniana o en cinemática. Este tiene como prescripción la siguiente ecuación que relaciona la velocidad instantánea del cuerpo con el tiempo:

$$v = v_o \pm at \quad (1)$$

Como una segunda aproximación para representar mejor la caída libre se consideran dos tipos de fuerzas, a saber: una fuerza que es debida a la presencia del medio en el cual se mueve el cuerpo y que se denomina *resistencia viscosa o fuerza viscosa*. Esta fuerza generalmente es una función complicada de la velocidad, pero para esta primera aproximación se considerará una dependencia en primer orden respecto a aquella. La segunda fuerza comprende el empuje del aire o fuerza buyante que puede expresarse en términos del volumen, la densidad del cuerpo y del aire ρ^* . Así, la segunda ley permite establecer la siguiente ecuación diferencial:

$$mg_s - kv = m \frac{dv}{dt} \quad (2)$$

$$\text{con } g_s = g \left[1 - \frac{\rho^* V}{m} \right] = g \left[1 - \frac{\rho^*}{\rho} \right]$$

Cuya solución para una esfera se presenta a continuación:

$$v = \frac{mg_s}{6\pi\eta r} - \frac{mg_s}{6\pi\eta r} e^{6\pi\eta r \frac{t}{m}} \quad (3)$$

El tercer modelo comprende las tres fuerzas mencionadas en el anterior modelo, solo que ahora se

modifica la forma de la fuerza resistiva haciéndola dependiente a la segunda potencia de la velocidad. De igual forma puede establecerse la misma ecuación diferencial (2) tan solo modificando el termino de la fuerza resistiva y poniendo la velocidad a una segunda potencia.

$$mg_s - \beta v^2 = m \frac{dv}{dt}$$

Su solución completa es:

$$v = \sqrt{\frac{mg_s}{\frac{1}{2}C_d\rho^*S}} \left[\frac{e^{\sqrt{\frac{2g_s C_d \rho^* S}{m}} t} - 1}{e^{\sqrt{\frac{2g_s C_d \rho^* S}{m}} t} + 1} \right] \quad (4)$$

Donde C_d es el coeficiente de arrastre que para esferas es de 0.4, S un factor geométrico que para esferas es el diámetro y ρ^* la densidad del aire.

2. Método experimental

Como se mencionó anteriormente se ha empleado la técnica de fotografía estroboscópica para medir las velocidades experimentales de los cuerpos a considerar. Se utilizó una tela negra a la cual se cocieron hilos blanco cada 10 cm a lo largo y ancho de esta para obtener un sistema de referencia adecuado para medir. También, una cámara fotográfica digital y una lámpara estroboscópica. Para lograr un contraste que permitiera identificar los cuerpos en caída, se cubrieron con una capa de pintura blanca, Fig. 1.

Previamente se realizaron fotos de prueba de tal forma que se pudiera graduar tanto la frecuencia de la lámpara estroboscópica como el contraste, el tono y la velocidad de la cámara fotográfica y así lograr obtener la mayor cantidad de imágenes del cuerpo en caída.

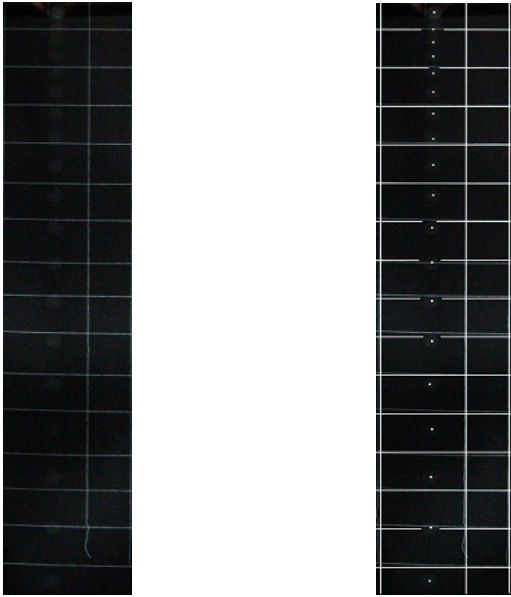


Figura 1: Fotografías estroboscópica de la caída de la esfera de ping pong sin editar y editada. Frecuencia de la lámpara estroboscópica 37 flash/segundo

3. Resultados experimentales

Se han utilizado tres esferas de diferentes materiales, acero, goma maciza y de ping pong. Los cubos que se utilizaron son de acero y plástico (de densidad similar al ping pong). La altura a la cual se dejaron caer los cuerpos fue de 1.50 m. Fue necesario hacer uso del programa Paint para marcar el centro de cada una de las imágenes de la esfera respectiva que aparecían en las fotos estroboscópicas y así tener una medida más adecuada de la distancias recorridas por las esferas.

A continuación se presenta en tablas respectivas las velocidades medidas de las fotografías estroboscópicas y las teóricas proporcionadas por cada modelo. En seguida, se muestran las gráficas de tales datos con el fin de llevar a cabo el análisis respectivo.

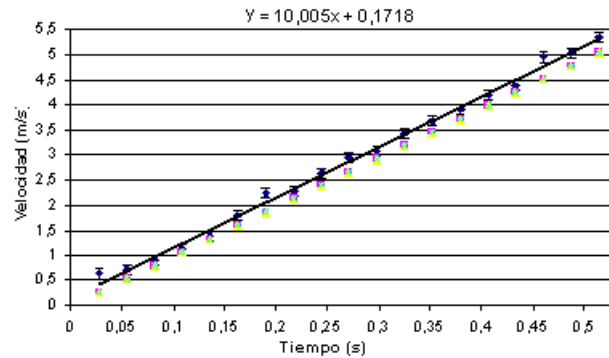


Figura 2: Gráfica de las velocidades medidas y teóricas para la esfera de acero. La línea de tendencia aparece para los datos experimentales.

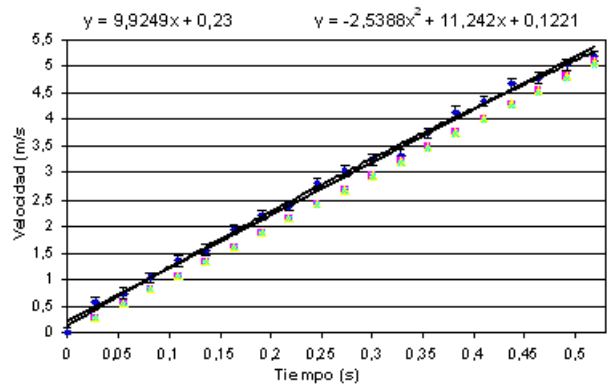


Figura 3: Gráfica de las velocidades medidas y teóricas para la esfera de goma. La línea de tendencia aparece para los datos experimentales.

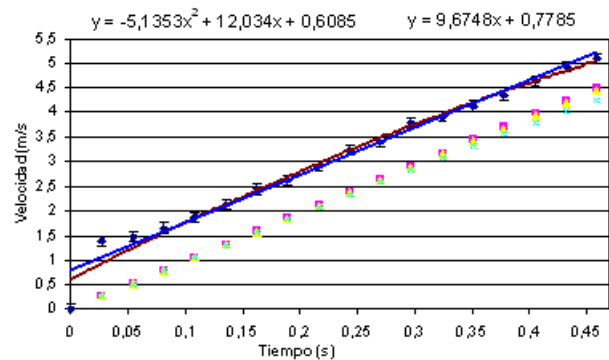


Figura 4: Gráfica de las velocidades medidas y teóricas para el ping pong. La línea de tendencia aparece para los datos experimentales.

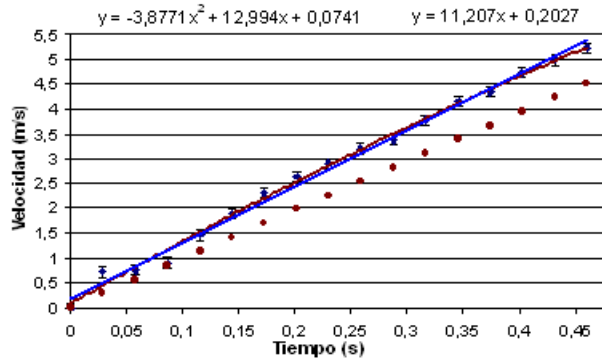


Figura 5: Gráfica de las velocidades medidas para el cubo de acero. Se obtuvieron las líneas de tendencias: lineal (azul) y cuadrática (rojo)

Velocidades experimentales y teóricas (m/s)				
Tiempo (s)	Medidas	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3
0,0271	0,6399	0,2655	0,2649	0,2655
0,0543	0,7199	0,5321	0,5309	0,5325
0,0814	0,9200	0,7977	0,7958	0,7987
0,1085	1,1199	1,0633	1,0608	1,0649
0,1356	1,3999	1,3288	1,3258	1,3311
0,1627	1,7999	1,5944	1,5907	1,5973
0,1898	2,2399	1,8600	1,8557	1,8634
0,2169	2,2799	2,1256	2,1207	2,1295
0,2440	2,6399	2,3912	2,3856	2,3955
0,2711	2,9599	2,6567	2,6506	2,6614
0,2982	3,0799	2,9223	2,9156	2,9273
0,3253	3,4399	3,1879	3,1805	3,1931
0,3524	3,6800	3,4535	3,4455	3,4588
0,3795	3,9199	3,7191	3,7105	3,7245
0,4066	4,1999	3,9846	3,9754	3,9900
0,4337	4,3999	4,2502	4,2404	4,2554
0,4608	4,9599	4,5158	4,5053	4,5208
0,4879	5,0399	4,7814	4,7700	4,7860
0,5150	5,3599	5,0470	5,0353	5,0511

Cuadro 1: Velocidades experimentales para la esfera de acero. $m = 67,5$ g, $r = 1,27$ cm y $f = 36,8$ ciclos/segundo

4. Análisis de resultados

4.1. Esferas

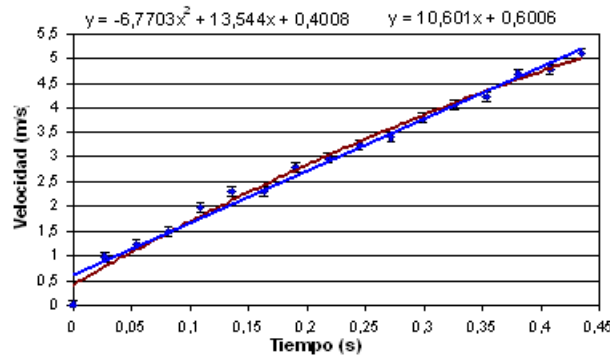


Figura 6: Gráfica de las velocidades medidas para el cubo de plástico. Se obtuvieron las líneas de tendencias: lineal (azul) y cuadrática (rojo)

Como bien se aprecia del cuadro 1 y su respectiva gráfica que concierne a la esfera de acero, las velocidades experimentales siempre se mantienen por encima de los valores teóricos. Entre los modelos teóricos, se puede ver que hay una variación entre las velocidades a partir de la tercer cifra significativa. Además, el último modelo teórico se mantiene siempre por encima de los otros dos, lo cual no se esperaba ya que este modelo comprende una relación para el arrastre más aproximado al real, en cuanto a que considera es la inercia en lugar de la fuerza viscosa del aire. A pesar de tales condiciones, la línea de tendencia que se aproxima a los valores experimentales permiten ver que la pendiente es parecida a la de la gravedad, difiere de la utilizada en el modelo teórico 1 por un 2 por ciento, lo cual está dentro del error sistemático. Este comportamiento es claro ya que al ser de una gran densidad respecto al medio, este último ofrece menos resistencia.

	Velocidades experimentales y teóricas (m/s)			
Tiempo (s)	Medidas	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3
0,0273	0,5752	0,2675	0,2681	0,2681
0,0547	0,7339	0,5360	0,5363	0,5362
0,0820	1,0314	0,8036	0,8045	0,8042
0,1093	1,3488	1,0711	1,0726	1,0721
0,1366	1,5472	1,3386	1,3408	1,3397
0,1639	1,9241	1,6062	1,6089	1,6070
0,1912	2,2019	1,8737	1,8771	1,8740
0,2185	2,3804	2,1413	2,1452	2,1406
0,2458	2,7970	2,4088	2,4134	2,4067
0,2731	3,0350	2,6763	2,6815	2,6724
0,3004	3,2532	2,9439	2,9497	2,9375
0,3277	3,3326	3,2114	3,2178	3,2020
0,3550	3,7491	3,4790	3,4859	3,4658
0,3823	4,1458	3,7465	3,7540	3,7289
0,4096	4,3442	4,0140	4,0222	3,9913
0,4369	4,6815	4,2816	4,2903	4,2528
0,4642	4,7807	4,5491	4,5584	4,5135
0,4915	5,0385	4,8167	4,8265	4,7732
0,5188	5,1972	5,0842	5,0946	5,0320

Cuadro 2: Velocidades experimentales para la esfera de goma. $m = 8,2$ g, $r = 1,245$ cm y $f = 36,5$ ciclos/segundo

Del cuadro 2 y su respectiva gráfica, se encuentra que las velocidades experimentales siempre son un poco más grande que aquellas de los datos teóricos. De los mismos valores proporcionados por los modelos teóricos, se encuentra que el modelo 1 y 2 difieren tan solo en la tercera cifra significativa y entre el modelo 2 y el 3, hasta la cuarta cifra para la mayoría de los valores. Considerando esta pequeña diferencia se puede observar que los valores del modelo 3 es menor que los otros dos, lo cual si esta de acuerdo con las consideraciones teóricas. De la ecuación de la línea que se aproxima a los valores experimentales se puede ver que su pendiente es muy parecida al valor teórico de la gravedad de 9.8. Así, aunque la densidad de la esfera de goma es mucho menor que la esfera de acero, su densidad es mayor a la del medio y por tanto la resistencia que ofrece este último no es tan apreciable. Aunque no es posible determinar que modelo teórico representa bien los valores experimentales, es posible ver de la gráfica que los últimos valores experimentales no siguen la línea de tendencia que se dibujó. Por

	Velocidades experimentales y teóricas (m/s)			
Tiempo (s)	Medidas	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3
0,0270	1,3875	0,2646	0,2624	0,2624
0,0540	1,4679	0,5292	0,5249	0,5246
0,0810	1,6489	0,7938	0,7873	0,7863
0,1081	1,8901	1,0593	1,0497	1,0472
0,1351	2,1314	1,3239	1,3122	1,3070
0,1621	2,4331	1,5885	1,5746	1,5655
0,1891	2,6141	1,8531	1,8370	1,8224
0,2162	2,9157	2,1187	2,0993	2,0776
0,2432	3,2375	2,3833	2,3617	2,3306
0,2702	3,3983	2,6479	2,6241	2,5814
0,2972	3,7804	2,9125	2,8864	2,8297
0,3243	3,9211	3,1781	3,1487	3,0752
0,3513	4,1423	3,4427	3,4111	3,3178
0,3783	4,3434	3,7073	3,6734	3,5573
0,4054	4,6450	3,9729	3,9357	3,7936
0,4324	4,9467	4,2375	4,1980	4,0263
0,4594	5,1075	4,5021	4,4602	4,2555

Cuadro 3: Velocidades experimentales para el ping pong. $m = 3,7$ g, $r = 1,88$ cm y $f = 37$ ciclos/segundo

tanto, es posible esperar que de haberse obtenido más velocidades experimentales, se encontraría la tendencia a la velocidad terminal que se contempla en los modelos 2 y 3.

En el cuadro 3 y su respectiva gráfica encontramos los valores experimentales y teóricos de las velocidades de la esfera de ping pong. Fácilmente se observa que hay un incremento abrupto en el primer intervalo de tiempo, lo que no es consecuente con la razón del incremento de los otros valores de las velocidades experimentales. En este caso, los valores experimentales se alejan bastante de los resultados teóricos, por tal razón no es posible hacer una afirmación acerca de cual modelo representa mejor el fenómeno real. Aunque en la gráfica se presenta la curva que se aproxima a los valores experimentales, no es posible establecer si la tendencia podría ser a una velocidad terminal, ya que si bien, la línea de ajuste nos permite ver que el valor de la gravedad es muy similar al del primero modelo e incluso al de la gravedad efectiva g_s . Los modelos teóricos de la esfera de ping pong proporcionaron valores que difieren solo por la tercer y cuarta cifra significativa, manteniendo el tercer modelo por debajo de los

Tiempo (s)	Medidas
0,0288	0,7170
0,0576	0,7548
0,0864	0,9057
0,1152	1,4687
0,1440	1,8870
0,1728	2,3022
0,2016	2,6418
0,2304	2,9060
0,2592	3,2080
0,2880	3,3589
0,3168	3,7741
0,3456	4,1515
0,3744	4,3402
0,4032	4,7176
0,4320	4,9818
0,4608	5,2269

Cuadro 4: Velocidades experimentales para el cubo de acero. $m = 57$ g, $L = 1,91$ cm y $f = 34,7$ ciclos/segundo

demás como era de esperar.

4.2. Cubos

La figura 5 muestra los valores experimentales de las velocidades para el cubo de acero. Se puede observar que la recta de ajuste a los datos muestra una pendiente que difiere cerca de un 12 por ciento de la aceleración de la gravedad 9,8. Esto permite contemplar que el comportamiento puede ser similar al modelo 2 o 3. De las curvas de ajuste vemos que la cuadrática se ajusta bien en el intervalo de tiempo mostrado, más aun si se tiene en cuenta el punto de corte con el eje y . Si se compara la caída de la esfera de acero con la del cubo de acero, se puede ver que son diferentes en cuanto a que la primera obedece más al primero modelo, mientras que la segunda no. De la gráfica, así como de la tabla se puede observar que los cambios en las velocidades al inicio de la caída no tienen una razón constante ya que el cubo empieza a girar justo cuando se deja caer, de forma tal que el área de sección transversal que esta en contacto con el fluido (en este caso el aire) cambia, haciendo variar la fuerza de arrastre y por tanto la velocidad. Más adelante se ve que los cambios en las velocidades no es tan variable, ya que para este

Tiempo (s)	Medidas
0,0271	0,9799
0,0543	1,2199
0,0815	1,4999
0,1086	1,9799
0,1358	2,3000
0,1630	2,3000
0,1902	2,7799
0,2173	2,9799
0,2445	3,2599
0,2717	3,3999
0,2989	3,7999
0,3260	4,0599
0,3532	4,2199
0,3804	4,6999
0,4076	4,7799
0,4347	5,1188

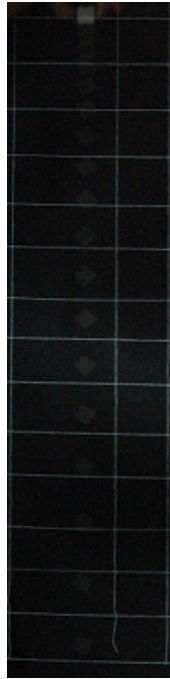
Cuadro 5: Velocidades experimentales para cubo de plástico. $m = 9$ g, $L = 3$ cm y $f = 36,8$ ciclos/segundo

momento el cubo se mantiene únicamente en una posición.

Esto mismo ocurre con el cubo plástico, el cual se aprecia en la fotografía de la Fig. 7. Para las curvas de ajuste (Fig. 6) se tiene una recta que posee una pendiente similar al valor estándar de la gravedad y una curva que es más cóncava que la curva del cubo de acero y del ping pong, pero que aun así, no permite establecer el verdadero comportamiento de la caída del cubo. Al comparar la gráfica de los datos experimentales del ping pong y la Fig. 6, se observa que las velocidades del cubo de plástico son un poco mayor que las velocidades de las esferas. Esto es posible debido a que la masa de los dos cuerpos difieren, así como su densidad.

5. Conclusiones

Como se ha visto, todas las caídas de los cuerpos comprenden entre 16 y 19 medidas y que a pesar que son mayor a las necesarias para realizar un estudio del primer modelo, no son suficientes para observar un fenómeno como el esperado para la esfera de ping pong, es decir alcanzar una velocidad ter-



el análisis de resultados experimentales únicamente desde la forma de los cuerpos.

Figura 7: Fotografía estroboscópica de la caída del cubo de plástico.

minimal o la tendencia bien clara a esta. Los cambios abruptos de las velocidades medidas se deben a los inconvenientes en establecer exactamente la distancia recorrida en los primeros tiempos de caída, es decir establecer si es necesario considerar una velocidad inicial, lo cual repercute en los valores de las velocidades, logrando un ajuste más adecuado de los valores teóricos con los experimentales. El lograr un contraste fuerte de los objetos en caída es necesario para aportar a la solución del anterior inconveniente.

Es necesario comprender condiciones claras de los parámetros tenidos en cuenta en los modelos teóricos para los cuales estos últimos pueden diferir entre ellos, de tal forma que una vez superado el inconveniente mencionado en el anterior párrafo, pueda identificarse con más claridad a que modelo se ajusta mejor los datos experimentales.

Es necesario también, hacer coincidir lo más posible el tipo de material y la masa de los cuerpos esféricos y los cúbicos. Esto con el fin de descartar discordancias debido a estos factores y enfocarse en