GUÍA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DEL ANÁLISIS TENSORIAL A PARTIR DE LA GEOMETRÍA DE LA RELATIVIDAD GENERAL

DIDACTIC GUIDE FOR TEACHING TENSORIAL ANALYSIS FROM GEOMETRY OF GENERAL RELATIVITY

David Arévalo[1] y Wilson Gutiérrez[2]

RESUMEN

En la siguiente guía didáctica se presenta una forma para el trabajo, análisis y desarrollo de aspectos generales en el análisis tensorial como herramienta matemática para la interpretación y desarrollo de la relatividad general. Esta se presenta con dos componentes, la primera es una descripción del tema a desarrollar, y la segunda es una secuencia de trabajo en clase.

Palabras clave: Análisis tensorial, enseñanza de la física

ABSTRACT

In this didactic guide we make a proposal to work, analyze and develop general aspects about tensor analysis as a mathematical tool in order to explain general relativity. This guide has two components, the first one is a description of the relativity concept, and the second one is a sequence of activities to develop in class.

Keywords: Tensorial analysis, physics teaching.

1. DESCRIPCIÓN DEL TEMA A DESARROLLAR

OBJETIVOS

Objetivo General

El objetivo que motiva a trabajar con el cálculo tensorial es conseguir que la física sea independiente del sistema coordenado usado para su descripción. En otras palabras, se requiere que bajo una transformación de coordenadas, las ecuaciones que expresan las leyes de la física permanezcan invariantes.

En pocas palabras el cálculo tensorial permitirá estudiar la geometría de algún espacio y a través de este encontrar las ecuaciones de campo de Einstein.

Objetivos Específicos

Introducción

Un espacio euclidiano se caracteriza por el hecho que admite sistemas coordenados cartesianos que lo cubren completamente. Sin embargo, existen espacios de naturaleza más general, tal como una superficie curvada, la cual no permite la existencia de un único sistema coordenado que la cubra completamente.

Iniciamos nuestro estudio generalizando el concepto primitivo de vector, debido al siguiente hecho: Algunas cantidades físicas como la velocidad y la fuerza son representadas indistintamente como vectores. Sin embargo, bajo una transformación de coordenadas, sus componentes transforman de acuerdo a leyes distintas. Por lo tanto, la velocidad y la fuerza son entes de distinto carácter. Esto nos llevara a introducir el concepto de vector contravariante y de vector covariante. Luego, se presentan algunas cantidades que para su especificación requieren más de un índice, como por ejemplo la multiplicación de las componentes de dos vectores (covariantes o contravariantes). Esto motiva a definir el concepto general de tensor como un objeto cuyas componentes transforman según una determinada ley de transformación. Al introducir los conceptos de conexión y métrica, podremos hacer un estudio de las propiedades geométricas de un espacio dado.

Conceptos Fundamentales.

Tensor: Desde 1846 Cauchy abordando el problema de elasticidad y deformaciones introduce u nuevo concepto de la matemática a partir de las tensiones conocido como tensor, el cual se mostraba como una generalización del vector, es decir, que un tensor compuesto de 3-n dimensiones para describir un sistema , siendo ‘n’ el orden del tensor y haciendo salvedad de la necesidad de hablar de 2 tipos de tensores: covariantes y contravariantes, lo cual indica las propiedades de deformación del sistema.

Escalares, vectores y tensores

Presentaremos ahora ciertas entidades matemáticas que pueden ser asociadas sobre una variedad. El caso más simple es una propiedad expresada por un número asociado a un punto P de la variedad, el cual por definición no cambia bajo una transformación de coordenadas (T.C.). Podemos pensar, por ejemplo, en un campo de temperaturas en alguna región del espacio.

Definición: Una función real $\boldsymbol{\varphi}(x^j)$, definida en una región de la variedad M, es llamada campo escalar si bajo una transformación de coordenadas se
verifica:

$$\bar{\phi}(\bar{x}^j) = \phi(x^i). \quad [4]$$

Veamos como transforma la diferencial de un campo escalar **ϕ**. Tenemos $\bar{\phi} = \bar{\phi}(\bar{x}^j)$, luego la diferencial del campo es

Usando la regla de la cadena y las ecuaciones (1) y (4) tenemos:

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^j} = \frac{\partial \phi}{\partial x^l}\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}, \quad [5]$$

$$d\bar{x}^j = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} dx^i. \quad [6]$$

Así tenemos:

$$d\bar{\phi} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^j} d\bar{x}^j = \frac{\partial \phi}{\partial x^l} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} dx^i = \frac{\partial \phi}{\partial x^l} \left(\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \right) dx^i = \frac{\partial \phi}{\partial x^l} \left(\frac{\partial x^l}{\partial x^i} \right) dx^i. \quad [7]$$

De este modo obtenemos:

$$d\bar{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} dx^i = d\phi. \quad [8]$$

Por lo tanto la diferencial de un campo escalar es nuevamente un campo escalar.

El arreglo formado por las cantidades $\partial \phi / \partial x^i$ es un objeto matemático llamado gradiente de ***φ***, y otorga el incremento de ***φ*** como la suma de los productos $\frac{\partial \phi}{\partial x^i} dx^i$.
Esta entidad, que está asociada a un punto y transforma según la ecuación (5), es el prototipo de lo que se conoce como vector covariante. Por otro lado, el arreglo formado por las diferenciales de las coordenadas es un ente cuya ley de transformación para sus componentes es distinta (ecuación 6) y constituye el prototipo de lo que llamamos vector contravariante.

Invariancia de las ecuaciones tensoriales
Hemos visto que los tensores pueden ser sumados, restados o, más generalmente, linealmente combinados con coeficientes escalares. Podemos formar productos entre tensores y luego contraerlos con tal que los procesos de multiplicación conduzcan a tensores de tipo $\binom{r}{s}$ con r ³1 y s ³1. Y todo esto es posible si y solo si ellos se refieren al mismo punto de M. También se mencionó que un importante tensor de cada tipo es el tensor cero de ese tipo. Dicho tensor es numéricamente invariante debido a que su ley de transformación es lineal y homogénea. Por ejemplo, esto tiene como consecuencia que una ecuación como $S^{kl\dots}_{pq\dots} = T^{kl\dots}_{pq\dots}$ sea independiente del sistema coordenado, ya que esto es equivalente a afirmar que $S^{kl\dots}_{pq\dots} - T^{kl\dots}_{pq\dots}$ es el tensor nulo. Este hecho es el que garantiza el teorema de la invariancia de las propiedades de simetría y antisimetría de los tensores. Obviamente si S y T son de distinto tipo, o bien, si se refieren a puntos distintos, la ecuación carece de todo sentido invariante.

Consideremos ahora un tensor de tipo $\binom{r}{s}$, r vectores covariantes, s vectores contravariantes, y el siguiente producto contraído:

$$S^{kl\dots}_{pq\dots} A_k B_l \dots F^p G^q \dots \quad [9]$$

Entonces, de acuerdo con las reglas de producto externo e interno, esta multiplicación es un escalar.

La proposición inversa es también verdadera: Supongamos que no sabemos si un arreglo de números S::: tiene carácter tensorial, pero sabemos que (9) es
un escalar para cualquier conjunto arbitrario de vectores A...G... Entonces S::: son las componentes de un tensor del tipo definido por sus índices.

En efecto, para probar esto consideremos una transformación particular y llamemos $\bar{S}^{\cdots}_{\cdots}$ a las componentes de S transformadas como si fuera un tensor.

Llamemos $\tilde{S}^{\cdots}_{\cdots}$ a cualquier conjunto de números que comparte con $\bar{S}^{\cdots}_{\cdots}$ la propiedad de hacer (30) un escalar. Es decir tenemos:

$$\bar{S}^{kl\ldots}_{pq\ldots}\bar{A}_k\bar{B}_l\ldots\bar{F}^p\bar{G}^q\ldots = S^{kl\ldots}_{pq\ldots}A_kB_l\ldots F^pG^q\ldots \quad ,$$
$$\tilde{S}^{kl\ldots}_{pq\ldots}\bar{A}_k\bar{B}_l\ldots\bar{F}^p\bar{G}^q\ldots = S^{kl\ldots}_{pq\ldots}A_kB_l\ldots F^pG^q\ldots \quad . \qquad [10]$$

Estas ecuaciones expresan que $\bar{S}^{\cdots}_{\cdots}$ y $\tilde{S}^{\cdots}_{\cdots}$ dejan (9) invariante. Restándolas obtenemos:

$$\left(\bar{S}^{kl\ldots}_{pq\ldots} - \tilde{S}^{kl\ldots}_{pq\ldots}\right)\bar{A}_k\bar{B}_l\ldots\bar{F}^p\bar{G}^q\ldots = 0,$$
$$\bar{S}^{kl\ldots}_{pq\ldots} - \tilde{S}^{kl\ldots}_{pq\ldots} = 0,$$
$$\bar{S}^{kl\ldots}_{pq\ldots} = \tilde{S}^{kl\ldots}_{pq\ldots} \quad . \qquad [11]$$

Es decir, usando la arbitrariedad de los vectores A...G... hemos probado que estos arreglos son iguales y por lo tanto bajo las hipótesis mencionadas S debe
ser un tensor.

2. TEMAS DESARROLLADOS EN LA GUÍA MATERIAL DIDÁCTICO

El material didáctico implementado en el aula de clase consta de un paquete de seis fichas en las cuales cada una de ellas formaba parte de un rompecabezas de ecuaciones propias de la relatividad general. Para el desarrollo de la guía didáctica se hace uso de este material didáctico junto con una guía en la cual el estudiante deba responder a las preguntas planteadas (presentadas más adelante) en el transcurso de la charla dada en el siguiente orden:

a. Justificación de la necesidad del análisis tensorial
b. Exposición del invariante de Lorentz (cuadrivector)
c. Definición del producto interno.
d. Tensores covariantes y contravariantes.
e. Geometría de Riemanniana.
f. La métrica
g. Principio de Equivalencia.
h. Postulado de Gauss en espacios curvos.
i. Derivada de un tensor.
j. Símbolos de Chistofel

k. Tensor de Riemann.
l. Contracción de tensores
m. Tensor de Ricci
n. Derivada covariante del tensor.
o. Ecuaciones de Campo.

A medida que la charla avanza se les dice a los estudiantes que preguntas estaban en capacidad de resolver según los conceptos y principios básicos enunciados en la charla; en el instante que se les daba esa opción se abría la posibilidad de que el primer grupo que tuviera la respuesta correcta la divulgara públicamente para sumar un total de dos puntos por esa respuesta correcta, pero simultáneamente se permitía que otros grupos participaran de la puntuación si tenían también la respuesta correcta. En ese aspecto antes de que cualquier otro grupo divulgara la respuesta, uno de los integrantes del grupo expositor se acercaba a los grupos que tuvieran la respuesta para verificar que esta estuviese correcta, y en ese caso se le asignaba 1 punto, en el caso de que no fuera el primer grupo, el cual ganaba el derecho a divulgarla públicamente y sumar un punto adicional. Por respuesta correcta también se le otorgaba una ficha del rompecabezas al grupo. El grupo ganador tenía que responder al menos seis preguntas correctas de las 9 propuestas, lo cual le daba el derecho de acceder a la totalidad de fichas del rompecabezas, lo que a su vez le permitía acceder a un premio adicional si el rompecabezas era correctamente descifrado. Otro aspecto importante de la dinámica es que el primer grupo ganador de puntos tiene que esperar durante un número finito de turnos para poder volver a participar por la suma del punto adicional, ello con el fin de que otros grupos tengan la posibilidad de alcanzar una buena cantidad de puntos y de fichas.
Este juego de fichas se hace con el propósito de mostrar que el pensamiento de los estudiantes corresponde a ideas muy cercanas a la geometría euclidiana y del plano, y la estructura del rompecabezas exige que por lo menos se piense el problema en el espacio tridimensional, ya que la naturaleza de las entidades tensoriales es del orden n-dimensional.

PREGUNTAS PROPUESTAS.
1. ¿Cuál es el principio de covariancia en física?
Rta:/ Las leyes de la física deben tomar la misma forma en todos los sistemas de coordenadas.
2. ¿Cómo se denomina la línea recta en un espacio curvo ?
Rta:/ Geodesica
3. Enuncia brevemente y con tus palabras el Principio de Equivalencia
Rta:/ En cualquier punto del espacio-tiempo bajo un campo gravitatorio arbitrario, es posible elegir un ‘sistema de coordenadas localmente inercial ’ tal
que, dentro de una región los suficientemente pequeña alrededor del punto en cuestión, las leyes de la naturaleza toman la misma forma que un sistema
cartesiano de coordenadas no acelerado y en ausencia de gravitación.
4. ¿Cuál es el ángulo ente dos tensores U y V de primer orden, en un espacio generalizado?

Rta:/ $$Cos\theta = \frac{g_{ij}U^iV^j}{\sqrt{\left[g_{ij}U^iV^j\right]\left|g_{ij}U^iV^j\right|}}$$

5. ¿Cómo se escribe el tensor de curvatura de Riemann en el espacio plano?

Rta:/ $R^{a}{}_{bcd} = 0$

6. ¿Qué contracciones son posibles al tensor de curvatura de Riemann?

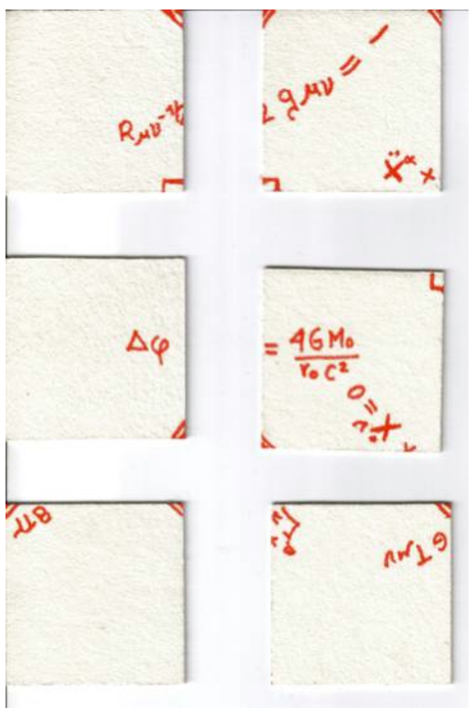
Rta:/ El tensor de Ricci

7. Escribir un nuevo tensor a partir de un tensor antisimétrico

8. Resolver $T^{\mu\nu}_{\;\;\;;\nu}$ (derivada covariante del tensor materia energía) = 0

9. ¿Qué significado físico tiene la derivada covariante del tensor materia energía?

ROMPECABEZAS



[1] E-mail: jdaarevalo@gmail.com

[2] E-mail: wagutierrezg@gmail.com