# CONCEPCIONES ACERCA DEL INFINITO MATEMÁTICO EN ESTUDIANTES DE 15 A 17 AÑOS

**Jeferson Alexander Orozco Pinzón**
Maestría en Educación Matemática
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia
jeferson.orozco.pinzon@gmail.com

NORIA
INVESTIGACIÓN EDUCATIVA

# Concepciones acerca del infinito matemático en estudiantes de 15 a 17 años

Jeferson Alexander Orozco Pinzón

**RESUMEN**

Los docentes a diario, dentro de nuestras actividades y temáticas de clase, tratamos —o al menos mencionamos— temas que portan explícita o implícitamente el concepto infinito; pero realmente sabemos qué piensa un docente o un estudiante de grado 11° acerca del infinito o qué piensan del concepto de límite. En este trabajo se dan a conocer las concepciones sobre el infinito que tienen los estudiantes con edades de 15 a 17 años (Grado 11°). Para tal fin, se identifican y categorizan las concepciones del concepto de infinito a partir de dos cuestionarios. Además, se presenta el desarrollo histórico y epistemológico de dicho concepto, que muchas veces en las aulas es relegado a un segundo plano.

**PALABRAS CLAVE**

ilimitado, indefinido, infinito, infinito potencial y actual, concepciones.

**ABSTRACT**

As teachers we are constantly teaching topics that have to do with the concept of -infinite- or at least we have talked about it in our lessons, however, I wonder if we really know ¿what an eleventh grader or a mathematics teacher thinks about the definition of infinite? or ¿what are their notions about the concept of limit?. Due to this, in this research we share the conceptions that mathematics teachers and eleventh graders (15 to 17 years old) have about the concept of infinite. For this purpose, the definitions of infinite are identified and categorized from two surveys; this concept are presented because most of the time they have been set aside in our classroom.

**KEYWORDS**

unlimited, indefinite, infinite, infinite potential and actual, conceptions.

## INTRODUCCIÓN

La noción de infinito tiene orígenes eminentemente filosóficos. El término en sí, lejos de pretender cuantificar, aspiraba a calificar cualquier ente inaccesible o proceso indefinido. Aún ocurre así en determinados contextos. Pero las diversas épocas racionalistas de la historia del pensamiento han intentado definir de manera estricta el alcance de dicho concepto (Martínez, 2009).

Dado que el concepto de infinito ha estado inmerso en el trabajo de célebres matemáticos a lo largo de la historia, de hecho se ha reflexionado sobre el infinito desde épocas muy tempranas en la antigüedad griega y ha sido desde la matemática donde se ha logrado una mejor comprensión de esta temática; entonces, para una mejor lectura y asimilación de este objeto matemático es necesario hacer un recorrido histórico de este concepto, ya que ha tenido un lugar determinante en el desarrollo conceptual de las matemáticas.

Distintos investigadores han trabajado en reconocer los obstáculos y dificultades que posee la enseñanza y aprendizaje del infinito, a causa de que es necesario en la comprensión del cálculo infinitesimal. Son varios los factores que influyen en la concepción de infinito, un factor determinante son las intuiciones que tiene cada sujeto, las cuales son construidas y apoyadas en la experiencia y el conocimiento, además son coherentes con el infinito potencial convirtiéndose en dificultades para entender objetos matemáticos que requieren de un infinito en acto.

Como se ha dicho, se pretende en esta investigación apreciar las concepciones acerca del infinito de estudiantes con edades de 15 a 17 años. Para esto se elaboraron dos cuestionarios, uno con el objetivo de conocer en qué contextos se asocia el concepto de infinito y otro para denotar el infinito en situaciones matemáticas. En este artículo se presenta parte del desarrollo y resultados del trabajo de grado de Maestría en Educación Matemática titulado "Concepciones acerca del infinito matemático en estudiantes de 15 a 17 años". Contó con la participación de 60 estudiantes del colegio Cooperativo Reyes Patria de la ciudad de Sogamoso, Boyacá, entre los meses de septiembre y octubre de 2017.

En la primera parte se presenta el marco teórico que sustenta esta investigación y una sucinta historia del infinito, luego aparece la metodología utilizada, después una descripción y categorización de las concepciones de estudiantes respecto al infinito, evidenciando algunos protocolos; y, por último, se ofrecen conclusiones generales.

## Marco teórico

El estudio de las concepciones del infinito matemático se sustenta en las teorías sobre concepto de Vergnaud (1990b, p.9, citado por D'Amore, 2006), infinito actual e infinito potencial (Dubinsky, Weller, McDonald y Brown, 2005a, p. 346), dificultades y obstáculos (Arrigo y D'Amore, 1999). Vergnaud (1990b) parte de la definición de concepto matemático: Un concepto es una terna de conjuntos (S, I, S) en donde S es el conjunto de situaciones que dan sentido al concepto (el referente), I es el conjunto de los invariantes en los que se basa la operatividad de los esquemas (el significado) y S es el conjunto de representaciones simbólicas usadas para presentar el concepto, sus propiedades y las situaciones a las que se refiere. Igualmente, una concepción estaría formada por esta misma terna, pero considerándola en un momento dado de la evolución del concepto (Vergnaud, 1990b, p. 50).

Para definir obstáculo, Arrigo y D'Amore (1999) afirman que "obstáculo no es en sí mismo asimilable a un error; el obstáculo es una idea que, en el momento de la formación de un concepto, fue eficaz para afrontar problemas precedentes (incluso solo cognitivos), pero que se revela ineficaz cuando se intenta aplicarla a una nueva situación" (p. 4). En este sentido, estos dos autores declaran los obstáculos y dificultades más importantes que se han observado alrededor de la enseñanza y aprendizaje del concepto de infinito:

**"La enseñanza del infinito no aparece como tal en el currículum de educación básica ni de educación media"**

- Obstáculos epistemológicos:

• *Dependencia:* convicciones intuitivas que llevan a los estudiantes a pensar que en un segmento largo existan más puntos que en uno corto (Arrigo y D'Amore, 1999, p.4).
• *Aplastamiento:* todos los conjuntos infinitos tienen la misma cardinalidad (Arrigo y D'Amore, 1999, p.4).
• *Aceptaciones intuitivas de dependencia y aplastamiento se hallan en contradicción entre ellas:* la dificultad que encuentra el estudiante para darse cuenta cuándo dos afirmaciones están en contradicción; y aún más, la casi total indiferencia que demuestra si se da cuenta de dicha contradicción (Arrigo y D'Amore, 1999, p.5).
• *Concepción del infinito potencial vs Concepción del infinito actual:* este debate ha inspirado diferentes investigaciones, por ejemplo las de Moreno y Waldegg (1991), Shama y Movshovitz Badar (1994). Se han hallado, en verdad, resultados a veces contradictorios; pero está probado que la evolución de la concepción actual del infinito matemático es más lenta y se da en modo contradictorio a lo largo del curso del currículo escolar y gracias a un proceso de maduración y sistematización cognitiva de los aprendizajes. Este tipo de dificultad no se encuentra solo entre estudiantes, sino también entre profesores (en formación), lo que refuerza la necesidad de tomar siempre más en examen los obstáculos didácticos y los contenidos disciplinares de la formación (D'Amore, B. 2013, p. 26).

- Obstáculos didácticos:
• *Ausencia en el currículum:* la enseñanza del infinito no aparece como tal en el currículum de educación básica ni de educación media (Arrigo y D'Amore, 1999, p.4).
• *Formación del docente:* la concepción que muchos docentes tienen acerca del infinito es la noción intuitiva, debido a la formación del concepto que han desarrollado durante su aprendizaje (Arrigo y D'Amore, 1999, p.4).
• *Discurso docente:* derivado de los dos puntos anteriores, algunos docentes huyen de realizar una construcción del concepto en los estudiantes, lo que lleva a dar por

entendido en muchas ocasiones el concepto con toda la problemática que ello conlleva (Arrigo y D'Amore, 1999, p.4).

• *Deslizamiento:* no se acepta una demostración en la cual se pasa de un objeto de discurso a otro; por ejemplo, se habla de hechos geométricos y se pasa a consideraciones aritméticas. Otra pauta sería la dificultad de aceptar la correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números naturales (□) y el subconjunto de los números cuadrados (Arrigo y D'Amore, 1999, p.4).

## Infinito potencial e infinito actual

En cuanto a infinito potencial e infinito actual, se han hecho bastantes investigaciones dentro de la didáctica de la matemática. Algunas posturas:

El ***infinito potencial*** es la concepción de infinito como un proceso (Dubinsky et al., 2005a, p. 346). Este proceso se construye empezando por los primeros pasos (por ejemplo 1, 2, 3 en la construcción del conjunto de los números naturales) que se refieren a una concepción acción. Repetir estos pasos (por la adición de 1 repetidamente) al infinito, requiere de la interiorización de estas acciones en un proceso. El ***infinito actual*** es el objeto mental que se obtiene de la encapsulación de este proceso (Dubinsky et al., 2005a, p. 346).

Una posición coherente con las anteriores definiciones de infinito actual y potencial es la siguiente: "actual" significa que el infinito está presente en un acto único, todo a la vez, como un dato de hecho; mientras que "en potencia", significa que, a pesar de que una situación aparezca como finita en el instante en el cual se refiere, existe la seguridad de que se puede ir más allá del límite establecido (que, por lo tanto, no es definitivo): "Una cosa viene de otra sin fin, y cada una de ellas es finita, pero siempre hay nuevas" (Arrigo, D'Amore y Sbaragli, 2011, p.28).

## Sucinta historia del infinito

Conocer algo de la historia y epistemología del infinito nos ayudará a entender mejor el objeto matemático que estamos tratando. Para este recorrido histórico del infinito tendremos como base los siguientes documentos: el primer capítulo del libro de Arrigo, D'Amore y Sbaragli (2011) y Breve historia del infinito de Zellini, P. (1980), Ortiz, J. R., (1994).

**"[...] "actual" significa que el infinito está presente en un acto único, todo a la vez, como un dato de hecho;"**

Las primeras contemplaciones sobre el infinito se remontan a la cultura griega con su fundador Tales de Mileto (624 a. C. aprox. - 545a. C. aprox.), considerado el primer filósofo y matemático de la historia. Tales y posteriormente algunos de sus alumnos, Anaximandro de Mileto (610 a. C. – 547 a. C.) y Anaxímenes de Mileto (586 a. C. aprox. – 547 a. C. aprox.), se expresan acerca del término arjé (idea de indeterminación) y ápeiron (sin límite, sin confín) para referirse al principio de todas las cosas, Anaximandro empleó también la palabra ápeiron como sinónimo de Dios. Investigaciones como Ortiz (1994) sostienen que en tiempos de Anaximandro los términos "infinito", "ilimitado" e "indeterminado" eran considerados como sinónimos, actualmente estos términos tienen distintos significados (Arrigo, D'Amore y Sbaragli, 2011, p.15).

Se dice que también Pitágoras (580 a. C. aprox. – 504 a. C. aprox.) fue alumno de Tales de Mileto, este alumno crea la escuela pitagórica donde se tiene como ideal representar el universo solo a través de números naturales o racionales; pero esta idea cae cuando descubren las magnitudes inconmensurables y tratando de demostrar la inconmensurabilidad se da origen a los números irracionales.

Dentro de la escuela eleática fundada por Parménides de Elea (entre el siglo VI a. C. y el siglo V a. C.) se destaca Zenón de Elea (siglo V a. C.), quién con sus paradojas, por ejemplo "Aquiles y la Tortuga", anulaba y ponía en duda la existencia del movimiento, la validez del espacio y el transcurrir del tiempo (Zellini, 1980, p. 39).

Aparece una postura autoritaria coherente con la de sus maestros por parte de Aristóteles (384 a. C. – 322 a. C.), quien descubre una doble naturaleza del infinito: "en acto o actual" y "potencial o en potencia"; el Estagirita "prohíbe" el manejo del infinito actual y esta prohibición fue tomada durante mucho tiempo como un principio innegable (Arrigo, D'Amore y Sbaragli, 2011, p.28).

No mucho tiempo después, otro de los matemáticos griegos más sobresalientes, Euclides (siglo III a. C.) trató de una forma cuidadosa el infinito en su texto de Elementos, debido al forzamiento aristotélico. De hecho, muy manso al concebir al infinito en potencia y nunca el infinito actual. Estas son algunas de sus consideraciones: "prolongar continuamente por derecho", "hay más números primos que cualquier cantidad propuesta de números primos", "segmentos cuya longitud la podemos hacer todo lo larga que queramos" (Ortiz, J. R., 1994, p.63).

Seguidamente, Arquímedes de Siracusa (287 a. C. – 212 a. C.), reconoce el trabajo desarrollado anteriormente por Demócrito y Eudoxo de Cnido con relación al método de exhauscíón y lo utiliza para confirmar teóricamente sus intuiciones empíricas. Arquímedes utilizaba el procedimiento de exhauscíón de una manera generalizada al subdividir formas geométricas en infinitesimales (infinito actual) y no tenía interés por el infinito en su aspecto filosófico (Arrigo, D'Amore y Sbaragli, 2011, p.34).

En un entorno cristiano, el filósofo y teólogo Aurelio Agustín de Tagaste (345 - 430) aprueba la posición de Aristóteles al considerar el uso del infinito potencial solo para el hombre; y, por otra parte, considera que el infinito actual es solo manejable por Dios, denotando un conocimiento humano y uno divino (Ortiz, J. R., 1994, p.62).

Al igual que Agustín al denotar el infinito actual, otros célebres dejan ver implícitamente cómo la posición de Aristóteles se mantiene, pero se sacude; en los trabajos de pensadores como Roger Bacon (1214 - 1292), Guillermo de Ockham (1288 aprox. - 1350) y Nicolás de Oresme (1323 - 1382) se distinguen reflexiones acerca del infinito, dejando ver la presencia del infinito en acto, pero en sus conclusiones son prudentes ya que lo eluden. Bacon por ejemplo avala la existencia de una correspondencia entre los puntos de los lados de un cuadrado y los puntos de la diagonal del mismo (hoy llamada correspondencia biunívoca), y afirma que hay una correspondencia similar entre dos semirrectas distintas (Arrigo, D'Amore y Sbaragli, 2011, p.43).

En el siglo XVII, encontramos el procedimiento de Arquímedes ahora llamado "método de los indivisibles" por parte de Bonaventura Cavalieri (1598 - 1647). Otro matemático que trabajó con los mismos procedimientos para estudiar las magnitudes geométricas indivisibles o compuestas por infinitos elementos de área y volumen fue Luca Valerio (1552 - 1618). Cavalieri y Valerio en sus

**"[...] Galileo Galilei (1564 - 1642); él comprobó que existe igual cantidad de números naturales como de sus cuadrados, por medio de una correspondencia biunívoca [...]"**

diferentes trabajos especifican cómo sumando infinitos elementos de volumen de un sólido se obtiene su volumen y sumando los infinitos elementos de área de un cuerpo se consigue su área (Arrigo, D'Amore y Sbaragli, 2011, p.50).

Está muy presente el infinito actual en los trabajos de Galileo Galilei (1564 - 1642); él comprobó que existe igual cantidad de números naturales como de sus cuadrados, por medio de una correspondencia biunívoca (Arrigo, D'Amore y Sbaragli, 2011, p.55). Además, para Galileo los objetos de la naturaleza están formados por infinitas partes pequeñas pero medibles (infinito actual), pero no solo en la naturaleza manifiesta el infinito en acto, sino de igual forma en las líneas, ya que estableció una correspondencia biunívoca entre dos segmentos de diferentes longitudes (ver Figura 1).

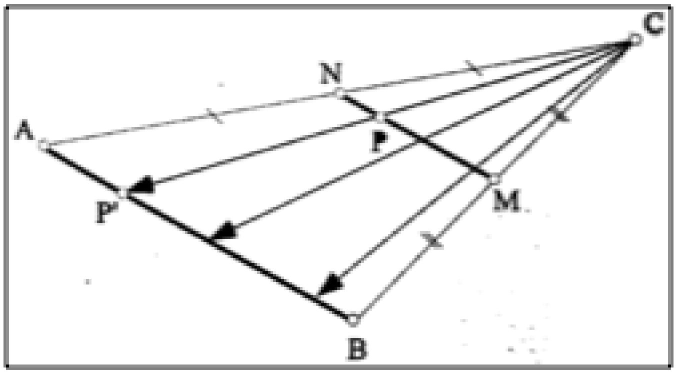



**Figura 1:** *Correspondencia biunívoca entre dos segmentos (Fuente: Arrigo, D'Amore y Sbaragli, 2011, p. 55)*

Seguidamente, Evangelista Torricelli (1608 - 1647), alumno de Galileo, es destacado por ser el precursor del análisis matemático; él demuestra que tal procedimiento de Cavalieri se puede extender a los casos de los indivisibles curvos, también identifica mediante una correspondencia biunívoca que dos circunferencias de diferentes tamaños están compuestas por el mismo número de puntos (véase Figura 2).

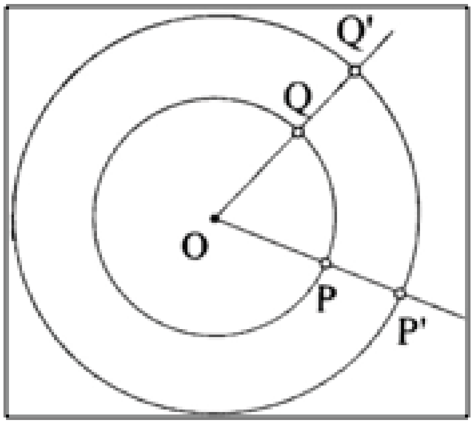



**Figura 2:** *Correspondencia biunívoca entre los puntos de dos circunferencias concéntricas (Fuente: Arrigo, D'Amore y Sbaragli, 2011, p. 63)*

Torricelli y Cavalieri son considerados por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) como los precursores del cálculo infinitesimal, pues desde el trabajo de ellos se comenzaron a forjar los procesos infinitesimales (Arrigo, D'Amore y Sbaragli, 2011, p. 63). Isaac Newton (1642 - 1727) y Leibniz, desarrollaron por separado el "cálculo". Más adelante el capellán de la corte y matemático John Wallis (1616 - 1703) trabaja con atrevimiento en el infinito actual al calcular integrales por medio de series infinitas, Wallis introduce el símbolo ∞ para indicar el infinito (Ortiz, J. R., 1994, p.63).

Desde entonces, matemáticos destacados dejan ver la importancia de una formalización del infinito ya que es encontrado muchas veces en sus investigaciones en las cuales este concepto es tratado sin tanta intransigencia. Por ejemplo: Leonhard Euler (1707 - 1783) estudia series infinitas; Karl Friedrich Gauss (1777 - 1855), a pesar de sus destacados hallazgos en teoría de los números, álgebra y geometría no-euclidiana, muestra su posición al infinito con la siguiente frase "protesto contra el uso de magnitudes infinitas como un todo cumplido (infinito actual), puesto que en la matemática nunca lo ha sido"; Bernhard Bolzano (1781 - 1848) evidencia la correspondencia biunívoca entre dos conjuntos infinitos al sustentar que existen infinitos puntos entre dos semirrectas de diferentes longitudes, pero afirma que en el segmento de mayor longitud hay una infinidad mayor de puntos (Ortiz, J. R., 1994, p.64).

Apoderándose de los aportes de estos y otros grandes matemáticos, aparece un destacado investigador del infinito, Georg Cantor (1845 - 1918). Él da una nueva visión del infinito matemático al encontrar correspondencias biunívocas entre segmentos de distintas longitudes (véase Figura 3), entre un segmento y una semirrecta (véase Figura 4), entre un segmento y una recta (véase Figura 5).

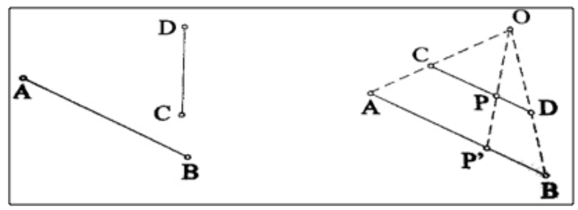



**Figura 3:** *Correspondencia biunívoca entre dos segmentos de diferente longitud (Fuente: Arrigo, D'Amore y Sbaragli, 2011, p. 100)*

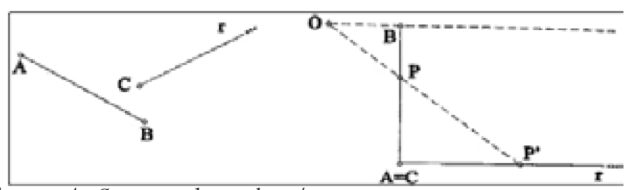



**Figura 4:** *Correspondencia biunívoca entre segmento y semirrecta (Fuente: Arrigo, D'Amore y Sbaragli, 2011, p. 101)*

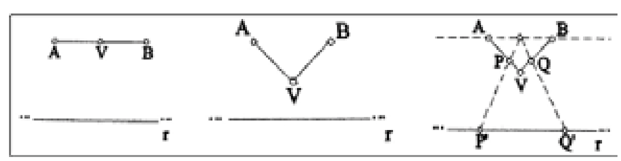



**Figura 5:** *Correspondencia biunívoca entre segmento y recta (Fuente: Arrigo, D'Amore y Sbaragli, 2011, p. 101)*

Georg Cantor encuentra la correspondencia biunívoca entre el cuadrado y su lado, además comprueba que la cardinalidad de los números naturales es igual a la cardinalidad de los números enteros y a la de los números racionales (infinidad numerable); también probó que la cardinalidad de los números reales (infinidad continua) es mayor a la cardinalidad de los números naturales ( □ ), enteros (□) y racionales (Q). A continuación se ilustra la correspondencia biunívoca entre □ y □ (véase Figura 6):

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6… |
| ↕ | ↕ | ↕ | ↕ | ↕ | ↕ | ↕… |
| 0 | +1 | −1 | +2 | −2 | +3 | −3… |

**Figura 6:** *Correspondencia biunívoca entre  y*
*(Fuente: Arrigo, D'Amore y Sbaragli, 2011, p. 110)*

Para ilustrar la correspondencia biunívoca entre el conjunto de números Q con □ . Cada número racional a/b se le puede hacer corresponder a un punto P de coordenadas (a,b) en un plano cartesiano □ X ( □ / {0}) (Arrigo, D'Amore y Sbaragli, 2011, p. 110). Como se muestra en la Figura 7.

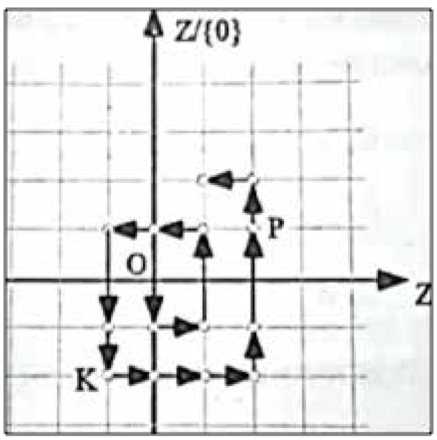



**Figura 7:** *Correspondencia biunívoca entre  y Q*
*(Fuente: Arrigo, D'Amore y Sbaragli, 2011, p. 111)*

A manera de ejemplo, el punto P tiene coordenadas (+2, +1) y corresponde al racional 2, el punto K (-1, -2) es el racional 1/2 . La segunda coordenada debe ser diferente de 0. Formando entonces una sucesión de racionales (0,-1) es el primer elemento, (1,-1) el segundo elemento, el tercer elemento (1,1), etc. Que representan ordenadamente 0, -1, 1,… Esta sucesión "recorre" todos los números Q; es decir, los números racionales se pueden "numerar" y se pueden poner en correspondencia biunívoca con □ (Arrigo, D'Amore y Sbaragli, 2011, p. 111).

La demostración de Cantor, llevada a cabo por el método de reducción a lo absurdo, comprueba que el conjunto de los números reales comprendidos entre 0 y 1 (en consecuencia, todo el conjunto de los números reales) tiene una cardinalidad superior a □ (también de □ y de Q). Cantor supone que la cardinalidad de los números comprendidos entre 0 y 1 es igual a la de □ (infinito numerable); por lo tanto, todos estos números se pueden expresar en forma decimal en la siguiente lista numerable:

$$0, a_{11}\, a_{12} \dots a_{1n} \dots$$

$$0, a_{21}\, a_{22} \dots a_{2n} \dots$$

$$0, a_{n1}\, a_{n2} \dots a_{nn} \dots$$

Ahora Cantor analiza un número que tiene la siguiente forma decimal:

$$0, b_1\, b_2 \dots b_n \dots$$

Colocando las siguientes condiciones:
$b_1 \neq a_{11}, b_2 \neq a_{22}, \dots, b_n \neq a_{nn}, \dots;$
entonces el número $0, b_1\, b_2 \dots b_n \dots$

- No está en incluido en la lista anterior de todos los reales.
- Es un número real comprendido entre 0 y 1, dada la forma en que se escribió.

Entonces se encuentra una evidente contradicción, al suponer el haber escrito todos los números reales comprendidos entre 0 y 1. Demostrando que el conjunto de los números reales comprendidos entre 0 y 1 no puede tener la misma cardinalidad de□, pues llegaría a un absurdo (Arrigo, D'Amore y Sbaragli, 2011, p. 112).

Posteriormente, Cantor establece la hipótesis del continuo que enseguida será la hipótesis generalizada del continuo y crea los números transfinitos; un planteamiento de la hipótesis del continuo es: no existe una cardinalidad comprendida entre la cardinalidad de los números naturales (infinito numerable) y la cardinalidad de los números reales (infinito continuo), la hipótesis del continuo generalizada es la versión general de este enunciado sin particularizar el caso de los números naturales. Los números transfinitos son números cardinales u ordinales denotados con la primera letra del alfabeto hebreo, para indicar el infinito numerable se usa $\aleph_0$(alef cero) y el cardinal transfinito sucesivo $\aleph_1$(alef uno) que corresponde al infinito continuo, esta sucesión entre transfinitos permite continuar en la lista ordenada $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, \ldots, \aleph_n,$ … o expresada de otra manera $\aleph_0, 2^{\aleph_0}, 2^{2^{\aleph_0}}, 2^{2^{2^{\aleph_0}}},$ … llamada por Cantor como "sucesión de los números cardinales transfinitos" (Arrigo, D'Amore y Sbaragli, 2011, p.116).

Las genialidades de Cantor llevaron a que fuese admirado por su amigo Richard Dedekind (1831 - 1916), pero también odiado por otros matemáticos como Leopold Kronecker (1823 - 1891) y Henri Poincaré (1854 - 1912); Kronecker lo tildó de "charlatán", "renegado" y "corruptor de la juventud", Poincaré refiriéndose a los números transfinitos dijo que eran una "Enfermedad" de la cual algún día las matemáticas serían curadas (Arrigo, D'Amore y Sbaragli, 2011, p.91).

Tiempo después Kurt Gödel (1906 - 1978); probó que, si añadimos la hipótesis del continuo a los axiomas de la teoría de conjuntos usual, no surgen contradicciones con la teoría cantoriana (es igual para la hipótesis del continuo generalizada). Paul Cohen (1934 - 2007) introdujo las técnicas de forcing con las que probó que tampoco surgen contradicciones si se añade la negación de la hipótesis del continuo a los axiomas de la teoría de conjuntos usual (es igual para la hipótesis del continuo generalizada) (González, 2000, p. 316).

Como se trató de describir en este estudio epistemológico del concepto infinito, a la humanidad le ha costado muchos siglos dominar este concepto, tanto así que en la actualidad aún no es del todo aceptado el infinito en acto, como se evidencia más adelante en el análisis de resultados de la presente investigación.

## Metodología

La investigación fue de tipo cualitativo y con un enfoque fenomenológico hermenéutico (Fiorentini y Lorenzato, 2010), que se "fundamenta filosóficamente en la fenomenología y en el proceso hermenéutico de la interpretación. Además, parte de la suposición de que la solución de problemas educativos pasa inicialmente por la búsqueda de interpretación y comprensión de los significados atribuidos por los implicados (los sujetos que viven el fenómeno). Eso puede suceder por medio de un proceso de investigación que consiste en revelar mecanismos y significados ocultos, alcanzando, así, la esencia de los fenómenos" (p. 39).

> **"[...] el concepto infinito, a la humanidad le ha costado muchos siglos dominar [...], tanto así que en la actualidad aún no es del todo aceptado el infinito en acto [...]"**

Este trabajo se desarrolló en el colegio Cooperativo Reyes Patria de la ciudad de Sogamoso durante el mes de septiembre de 2017, la temática que estaban trabajando los estudiantes eran derivadas de funciones trigonométricas; por lo tanto, ya se había tratado el tema de límites y continuidad. Participaron todos los estudiantes matriculados (60) en grado undécimo para el año 2017, y cuyas edades varían entre los 15 y 17 años, sus niveles socioeconómicos se clasifican en medio y alto. La institución es de carácter privado.

Dentro del estudio de las concepciones del infinito se plantean dos etapas que validarán el objetivo planteado.

*Etapa 1: concepciones acerca del infinito por parte de estudiantes.* Lo que se quiere en esta primera parte es conocer las ideas mentales que tienen los estudiantes en cuanto al infinito, para ello se aplica un cuestionario (ver anexo A) con cuatro preguntas abiertas donde notaremos en qué contextos asocian el concepto para luego categorizar dichas respuestas.

*Etapa 2: identificación del infinito en matemáticas por parte de los estudiantes.* Se desarrolla un segundo cuestionario (véase anexo B) con cuatro preguntas, tiene como objetivo ver el infinito en un contexto matemático y determinar si el estudiante puede establecer una correspondencia biunívoca en situaciones que tienen implícito el infinito.

## Resultados

A continuación se presenta un análisis de las respuestas por parte de los estudiantes, a cada una de las preguntas de los cuestionarios de los anexos A y B.

### Etapa 1: concepciones acerca del infinito en estudiantes

Luego de aplicado el primer cuestionario (véase Anexo A), se analizan las respuestas significativas en cada una de las cuatro preguntas que conforman dicho cuestionario, como se muestra a continuación.

*Pregunta 1.* Podrías decirme: ¿Qué es el infinito? y ¿Por qué es infinito?
**Estudiante 1.** "Es lo ilimitado porque no tiene un fin, ni es contable o sea nunca se acaba"
**Estudiante 2.** "Es aquello que no tiene fin y tampoco se tiene percepción de su inicio"
**Estudiante 3.** "Infinito porque no acaba y no se puede contar al no tener terminación"
**Estudiante 4.** "Es algo cuya magnitud es extremadamente extensa como para hallar su final"
**Estudiante 5.** "Es algo indeterminado que no sabemos su final"

Además de las confusiones entre infinito, ilimitado e indefinido, es de notar que los estudiantes consideran otra naturaleza a este concepto ya que se les dificulta explicarlo; en todas las afirmaciones se ve un claro proceso que nunca termina (infinito potencial), y al tratar de argumentar el ¿por qué es infinito? vuelven a contestar que es un proceso sin fin, sin límite, sin terminación (infinito potencial).
Solo cuatro estudiantes, ante esta primera pregunta, contestaron en un ámbito matemático, pero también se encuentra claramente implícito el concepto de infinito en potencia, como se muestra en las siguientes respuestas:

**Estudiante 1.** "El infinito es el límite indefinido de una función"
**Estudiante 2.** "El infinito es un número inalcanzable"
**Estudiante 3.** "Los límites infinitos se presentan cuando la variable crece o decrece sin cota, esto en la rama del cálculo. Es en un concepto más general el término que no tiene fin"

El infinito potencial hace referencia a un proceso que nunca termina, en las respuestas de esta pregunta se nota que los estudiantes sin intención aplican el infinito numerable cuando se usan palabras como: "incontable" o "no se pude terminar de contar".

*Pregunta 2.* ¿Cómo explicarías a una persona el concepto de infinito?
Algunos estudiantes escriben algo muy similar a la pregunta 1, siendo coherentes a su postura potencial hacia el infinito y dejando ver la dificultad al argumentar respecto a este concepto. Por otra parte, varios estudiantes mostraron distintos contextos que utilizarían a la hora de explicar el infinito, como se puede evidenciar en algunas de las siguientes respuestas:

**Estudiante 1.** "La esencia o el alma de una persona es infinita habitando en un cuerpo finito"
**Estudiante 2.** "Al sentir amor hacia otra persona, y decir que ese amor es infinito"
**Estudiante 3.** "Ve al fin del universo, o, cuenta los números"

Las anteriores ideas están muy lejos del concepto de infinito, también dificultarían el aprendizaje del mismo, además reflejan distintos obstáculos didácticos como el discurso docente o la formación docente, pues se ha permitido que cada estudiante cree una errónea concepción al no reflexionar sobre este tema durante sus anteriores años de escolaridad.

*Pregunta 3:* Escribe cinco frases que contengan la palabra infinito.
A continuación, se categorizan las respuestas que han dado los estudiantes a esta pregunta y a las preguntas 1 y 2, se citan las más significativas y reiteradas.

*Categoría A, los sentimientos:*
"Amo a mi mamá hasta el infinito", "te quiero hasta el infinito", "mi odio hacia Uribe es infinito", "mi amor por ella es infinito", "el amor por el aprendizaje debería ser infinito", "el saber y el sentir son infinitos".

*Categoría B, Las matemáticas:*
"Los números son infinitos", "un número sobre cero es infinito", "límite cuando x tiende al infinito", "el infinito se representa ($\infty$)", "número dividido en 0 es infinito" "infinito son todos los valores que se tienen en $[7, \infty)$", "las soluciones del sistema de ecuaciones son infinitas".

*Categoría C, La mística:*
"La paciencia de Dios es infinita", "el ser humano no es infinito", "el espíritu santo es infinito", "la vida es infinita", "el alma es infinita".

*Categoría D, El universo:*
"El universo es infinito", "el espacio exterior es infinito", "el infinito tiene galaxias", "existen infinitas estrellas".

Categoría E, Las ciencias naturales:
"Los átomos son infinitos", "masa infinita", "fuerza infinita", "las cargas positivas y negativas son infinitas", "los granos de arena son infinitos", "el circuito es infinito", "el tiempo es infinito".

Otra frase de las más usadas en este punto fue "Hasta el infinito y más allá", haciendo referencia a Buzz un personaje cinematográfico de la saga Toy Story.

**Etapa 2:** identificación del infinito en matemáticas Dentro de las cuatro preguntas correspondientes al segundo cuestionario (véase Anexo B), se encuentra que ninguno de los 60 estudiantes puede establecer una correspondencia biunívoca entre segmentos de distintas longitudes, entre segmento y semirrecta, entre segmento y recta o entre circunferencias de distintos radios. Se evidencian las respuestas que más se repiten y las más significativas e interesantes, ya que arrojan bastante información para entender la percepción que tienen los estudiantes en cuanto al infinito matemático.

*Pregunta 1.* ¿Consideras que hay más puntos en el segmento AB que en el segmento CD?

La respuesta más usual es considerar el segmento CD con mayor cantidad de puntos al tener mayor longitud, como se puede ver en la Figura 8. Otros estudiantes respondieron que en los dos segmentos hay la misma cantidad de puntos, pero haciendo referencia a los puntos de los extremos de los segmentos (véase Figura 9).

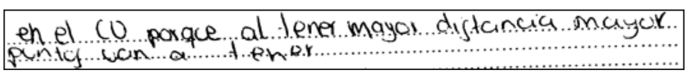



***Figura 8:*** *Evidencia de las respuestas de algunos estudiantes a la pregunta 1, Anexo B (Fuente: Elaboración propia)*


***Figura 9:*** *Evidencia de las respuestas de algunos estudiantes a la pregunta 1, Anexo B (Fuente: Elaboración propia)*

En la Figura 8 se denota un claro ejemplo de obstáculo epistemológico llamado dependencia, este obstáculo está presente en la mayoría de estudiantes al considerar que en un segmento de mayor longitud existen más puntos que en uno de menor longitud. Para la Figura 9 se evidencian obstáculos de tipo didáctico como la formación docente y el discurso docente, al ser varios estudiantes quienes responden de esta misma manera.

*Pregunta 2.* ¿Consideras que hay más puntos en el segmento AB que en la semirrecta s?

La respuesta más común es considerar la semirrecta con mayor cantidad de puntos respecto al segmento, claro ejemplo de dependencia. Al igual que la pregunta 1 de este segundo cuestionario, los estudiantes omiten la continuidad de puntos y solo tienen en cuenta los que delimitan, se observan obstáculos de tipo didáctico como formación docente y discurso docente (ver Figura 10).

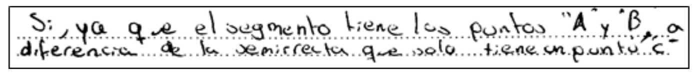



***Figura 10:*** *Respuesta de los estudiantes, a la pregunta 2, Anexo B (Fuente: Elaboración propia)*

*Pregunta 3.* ¿Consideras que hay más puntos en el segmento AB que en la recta r?

Se resalta un alto número de estudiantes que consideran que hay más puntos en la recta que en el segmento, es decir, obstáculo epistemológico dependencia, un ejemplo de estas respuestas se pueden ver en la Figura 11. Otros estudiantes tuvieron en cuenta solo los puntos que delimitan el segmento, así, "hay más puntos en el segmento que en la recta", o aún, llegaron a concluir que "la recta no tiene puntos" (véase Figura 12). Algo que hace probable que el docente en algún momento creó un obstáculo de tipo didáctico (discurso docente).

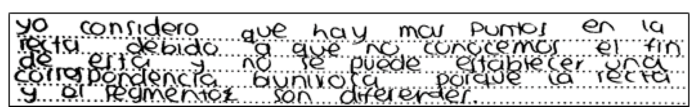



***Figura 11:*** *Respuesta de los estudiantes, a la pregunta 3, Anexo B (Fuente: Elaboración propia)*

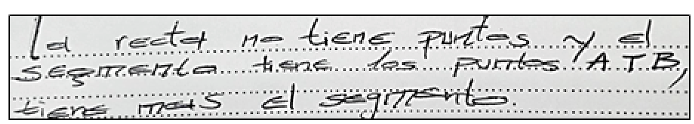



***Figura 12:*** *Respuesta de los estudiantes, a la pregunta 3, Anexo B (Fuente: Elaboración propia)*

*Pregunta 4.* ¿Consideras que hay más puntos en la circunferencia de radio **R** o en la circunferencia de radio **s**?

Al igual que en las respuestas de las tres preguntas anteriores, la respuesta más usual a la pregunta 4 es afirmar que la circunferencia de radio mayor tiene más puntos (dependencia), varios estudiantes afirman que tienen igual cantidad de puntos, pues solo tienen en cuenta los puntos que se resaltan, llegando a considerar el centro como parte de la circunferencia.

Se observó en Etapa 2 la influencia de algún docente durante la formación de este grupo de estudiantes en el área de matemáticas, al notar varias veces la similitud en sus respuestas al tener en cuenta solo los puntos resaltados en cada una de las situaciones ilustradas omitiendo la continuidad de puntos.

## Conclusiones

En el presente artículo se han conocido y analizado las concepciones que tienen los estudiantes de 15 a 17 años del colegio Cooperativo Reyes Patria, acerca del concepto de infinito, los instrumentos de recolección de datos fueron eficaces. Además de las síntesis dadas durante cada una de las etapas del trabajo, se resaltan nuevamente algunos apartes que se han concebido con el desarrollo de esta investigación:

• Con la indagación para conocer las concepciones en cuanto al infinito, se observó que el infinito potencial tiene gran aceptación entre los estudiantes, estas nociones llegan a ser impedimentos a la hora de aprender un infinito actual el cual ayudaría a un aprendizaje más significativo de otros objetos matemáticos.

• El análisis del infinito no es un tema explícito de enseñanza en la vida escolar, lo que lleva a que cada estudiante tenga dificultad en el momento de argumentar en esta temática, llegando a crear un concepto intuitivo del infinito.

• Gracias al aporte de célebres matemáticos a lo largo de la historia se puede entender el infinito, es entonces en las matemáticas donde se debe estudiar este objeto abstracto para llegar a una mejor asimilación de este concepto.

• Se hace evidente la necesidad de propuestas didácticas que ayuden a la comprensión del infinito en la formación de próximos docentes y de igual manera que esté de una manera explícita el objeto matemático en el currículum escolar. De este modo se cambian nociones erróneas acerca del infinito y se afrontan más situaciones referentes al infinito actual dentro del aula de clase.

• Las concepciones de los estudiantes en cuanto al infinito son distintas en cada uno de ellos, dejando ver la falta de reflexión que hay en las aulas de clase hacia este concepto.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arrigo, G., y D'Amore, B. (1999). Lo veo, pero no lo creo: Obstáculos epistemológicos y didácticos en el proceso de comprensión de un teorema de Georg Cantor que involucra al infinito actual. *Educación matemática*, 11(1), 5-24.

Arrigo, G., D´Amore, B., y Sbaragli, S. (2011). *Infiniti infiniti.* Trento: Erickson. [Versión en idioma español: (2011). Infinitos infinitos. Bogotá: Magisterio].

D'Amore, B., Arrigo, G., Bonilla Estévez, M., Fandifio Pinilla, M.I., Piatti, A., Rodríguez Bejarano, J., Rojas Garzón, P.J., Romero Cruz, J.H. y Sbaragli S. (2006). *El "sentido del infinito"*. *Epsilon,* 22(2), 65, 187–216.

D'Amore, B. (2013). La didáctica del infinito matemático. 4to Seminario Taller en Educación Matemática: La enseñanza del cálculo y las componentes de su investigación, 23.

Dubinsky, E., K. Weller, M. McDonald y A. Brown (2005a). *Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An Apos-based analysis: Part 1*, Educational Studies in Mathematics, 58, 335-359.

Fiorentini, D y Lorenzato, S. (2010). *Investigación en educación matemática.* Campinas, Brasil: Autores asociados.

González, M. (2000). La hipótesis del continuo. *Números*, (43-44), 315-318.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2010). *Metodología de la investigación.* México, DF: McGraw Hill.

Jato Canales, S. (2012). *El infinito en las Matemáticas de la Enseñanza Secundaria.* (Tesis de Maestría). Universidad de Cantabria, España.

Martínez, J. L. (2009). Modelos Intuitivos y Esquema. Salamanca.

Moreno, L., and Waldegg, G. (1991). The conceptual evolution of actual mathematical infinity. Educational Studies in Mathematics, 22, 211-231.

Ortiz, J. R. (1994). El concepto de infinito. *Revista de la ASOVEMAT (Asociación Matemática Venezolana),* 1(2), 59-81.

P, A. D. (1976). Psicologia Educativa. Mexico: Trillas.
Zellini, P. (2004). *Breve historia del infinito.* Madrid: Ediciones Siruela.

## ANEXO A. Cuestionario: Nociones acerca del infinito

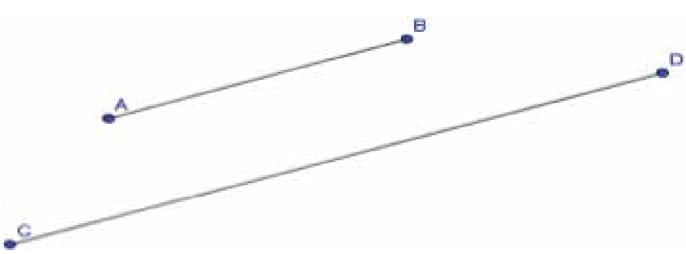
| | | |
|---|---|---|
| | COLEGIO COOPERATIVO REYES PATRIA<br>2017 | |
| Cuestionario: NOCIONES ACERCA DEL INFINITO | DOCENTE: Jeferson Alexander Orozco Pinzón | GRADO: ONCE |
| AREA: MATEMATICAS | ASIGNATURA: Matemáticas | PERIODO: IV |

1. Desde tu percepción podrías decirme: ¿Qué es el INFINITO? y ¿Por qué es infinito?
2. ¿Cómo explicarías a una persona el concepto de INFINITO?
3. Escribe cinco frases que contengan la palabra infinito.

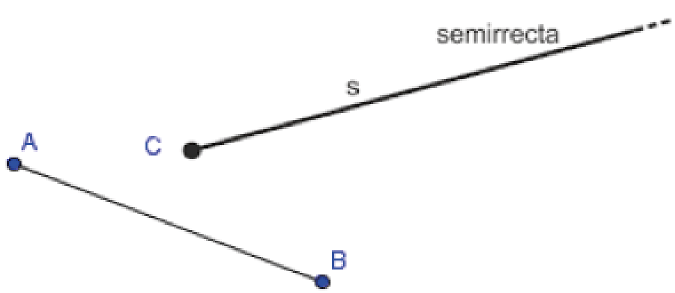
ANEXO B. Cuestionario: correspondencia biunívoca

| | | |
|---|---|---|
| | COLEGIO COOPERATIVO REYES PATRIA | |
| Cuestionario: CORRESPONDENCIA | DOCENTE: Jeferson Alexander Orozco | GRADO: |
| AREA: MATEMATICAS | ASIGNATURA: Matemáticas | PERIODO: |

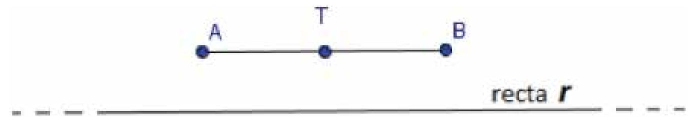
1. ¿Consideras que hay más puntos en el segmento AB que en el segmento CD? ¿Puedes establecer una correspondencia biunívoca entre los puntos del segmento AB y el segmento CD?




2. ¿Consideras que hay más puntos en el segmento AB que en la semirrecta **s**? ¿Puedes establecer una correspondencia biunívoca entre los puntos del segmento AB y la semirrecta **s**?




3. ¿Consideras que hay más puntos en el segmento AB que en la recta **r**? ¿Puedes establecer una correspondencia biunívoca entre los puntos del segmento AB y la recta **r**?




4. ¿Consideras que hay más puntos en la circunferencia de radio **R** o en la circunferencia de radio **s**? ¿Puedes establecer una correspondencia biunívoca entre los puntos de la circunferencia de radio **R** y la circunferencia de radio **s**?