



**Estudio del sistema masa-resorte
utilizando Mathematica**

**Study of the spring-mass system
using Mathematica**

**Estudo do sistema mola-massa
usando Mathematica**

NORIA
INVESTIGACIÓN EDUCATIVA
ISSN-E2590-5791

Jhonatan Cardozo

Leyton Jean Piere Castro

José Herman Muñoz

Artículo de investigación

Estudio Del Sistema Masa-Resorte Utilizando Mathematica

Study of The Spring-Mass System Using Mathematica

Estudo Do Sistema Mola-Massa Usando Mathematica

Jhonatan Cardozo

Facultad de Ciencias, Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia.

jcardozon@ut.edu.co

Leyton Jean Piere Castro

Facultad de Ingeniería Agronómica, Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia.

ljpcastroc@ut.edu.co

José Herman Muñoz

Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia.

jhmunoz@ut.edu.co

Resumen

En este trabajo se realiza un estudio completo sobre oscilaciones libres, amortiguadas y forzadas del sistema masa-resorte utilizando pocos comandos del paquete Mathematica y un conocimiento mínimo de ecuaciones diferenciales ordinarias. Se obtiene la solución a la ecuación de movimiento y se grafica la posición, la velocidad, la aceleración, las energías cinética, potencial y total en función del tiempo, y la trayectoria en el espacio de fase para los tres tipos de oscilaciones. Se analizan estas cantidades físicas variando parámetros como la masa, la constante elástica y el coeficiente de amortiguamiento.

Palabras clave: Sistema masa-resorte, Oscilaciones, Mathematica.

Abstract

In this work, it is performed a complete analysis of the free, damped and drive oscillations of the spring-mass system using a few commands of Mathematica package and a minimum knowledge of ordinary differential equations. It is obtained the solution to the motion equation and the graphs of the position, velocity, acceleration, kinetic, potential and total energies, in function of time, and the trajectory in the phase space for the three types of mentioned oscillations. It is carried out the analysis of the related physical observables in function of the time varying parameters as the mass, the elastic constant and the damping coefficient.

Key words: Spring-mass system, Oscillations, Mathematica.

Resumo

Neste trabalho, um estudo completo sobre oscilações livres, amortecidas e forçadas do sistema massa-mola é realizado usando poucos comandos do pacote Mathematica e um conhecimento mínimo de equações diferenciais comuns. A solução para a equação do movimento é obtida e a posição, velocidade, aceleração, energia cinética, energia potencial, energia total, em função do tempo, e a trajetória da sistema de espaço de fase para todos os três tipos de oscilações. O comportamento das quantidades físicas acima mencionadas é analisado variando, ao mesmo tempo, parâmetros como massa, constante elástica e coeficiente de amortecimento.

Palavras-chave: Sistema mola-massa, Oscilações, Mathematica.

Introducción

Diversos autores han trabajado oscilaciones utilizando Tecnologías de la Información y la Comunicación como paquetes de computación (López-Mariño, Hernández-Olvera, Barroso, & Caballero, 2017) (Escalante-Martínez, y otros, 2016), analizadores de videos (Monsoriu, Giménez, & Vidaurre, 2005) (Arévalo, Morales, Ceballos, Giraldo, & Vega, 2018), cámaras (Shamim, Zia, & Anwar, 2010) (Greczylo & Debowska, 2002), teléfonos inteligentes (Castro-Palacio, Velásquez-Abad, Giménez, & Monsoriu, 2013) (Kuhn & Vogt, 2012) (Vogt & Kuhn, 2012), simulaciones en páginas web (García, s.f.), etc. Recursos útiles en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la física porque complementan la teoría con la práctica y facilitan la comprensión de conceptos abstractos, como la fase o las constantes iniciales (Medina & Velazco, 2019) (Osaba-Rodríguez, 2019).

Los paquetes de computación evitan desgaste en desarrollos algebraicos complejos, permitiendo dedicar tiempo al análisis de conceptos, gráficas

y resultados. En este estudio se utiliza el paquete *Mathematica*, como herramienta didáctica, para estudiar oscilaciones lineales: libres (movimiento armónico simple), amortiguadas y forçadas de una masa atada a un resorte, sin tener un conocimiento sólido en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO). Con pocos comandos se obtienen la posición, la velocidad, la aceleración, las energías cinética, potencial y total y la trayectoria en el espacio de fase, sin desarrollos algebraicos complicados.

El presente trabajo ha sido motivado por (López-Mariño, Hernández-Olvera, Barroso, & Caballero, 2017) quienes estudiaron el sistema masa-resorte con Maple obteniendo la posición, la velocidad y el diagrama de fase para oscilaciones libres y amortiguadas. Nuestro trabajo es más completo porque incluye otras observables como la aceleración, las energías cinética, potencial y total, para oscilaciones libres, y oscilaciones forçadas del sistema masa-resorte. El enfoque teórico lo consideramos de (Thornton & Marion, 2003) quienes presentan un análisis más complejo sobre oscilaciones que otros libros de física fundamental universitaria (Alonso & Finn (1995), Tipler & Mosca (2008), Resnick, Halliday & Krane (2001), Serway & Jewett (2014).

Metodología

Se usó el paquete *Mathematica* para estudiar las oscilaciones libres, amortiguadas y forçadas de una masa atada a un resorte, porque sus capacidades numéricas, simbólicas y gráficas lo convierten en una herramienta útil, que facilita el rápido desarrollo de problemas matemáticos y la comprensión de problemas físicos.

Teniendo en cuenta que las ecuaciones de movimiento para los sistemas físicos mencionados son diferenciales de segundo grado, lineales, homogéneas y con coeficientes constantes, se estudió cómo resolver estas

Ecuaciones Diferenciales (ED) (Zill, 1998). Luego utilizamos el *Mathematica* para resolverlas. Encontramos que solo con cinco (5) comandos podemos estudiar los tres tipos de oscilaciones mencionadas: **DSolve** (resuelve una ecuación diferencial), **Manipulate** (crea una interfaz para variar parámetros en una función), **Plot** (grafica una o varias funciones), **ParametricPlot** (grafica funciones dependientes de uno o más parámetros) y **Evaluate** (evalúa los coeficientes de una función en un intervalo determinado).

A continuación, se ilustrará cómo obtener con el *Mathematica* la solución y la respectiva gráfica de una ED. Consideremos la ecuación diferencial ordinaria de primer orden:

$$\dot{x}(t) + ax(t) = a \sin(t) \quad (1)$$

donde $\dot{x}(t) = dx/dt$ y a es un parámetro. Asumiendo como condición inicial $x[0] = 0$, utilizamos la instrucción

$$DSolve[\{x'[t] + ax[t] == a \sin[t], x[0] == 0\}, x, t] \quad (2)$$

la cual da como solución,

$$\{\{x \rightarrow Function[\{t\}, (a e^{-at}(1 - e^{at} \cos[t] + a e^{at} \sin[t]))/(1 + a^2)]\}\} \quad (3)$$

Además, se puede analizar el comportamiento de la solución con respecto al parámetro a por medio de la instrucción

$$Manipulate[Plot[(a e^{-at}(1 - e^{at} \cos[t] + a e^{at} \sin[t]))/(1 + a^2), \{t, 0, 10\}], \{a, 0, 10\}] \quad (4)$$

donde $a \in [0, 10]$. En la **Figura 1**, se muestra la solución de la ED (1) con $a = 3.8$.

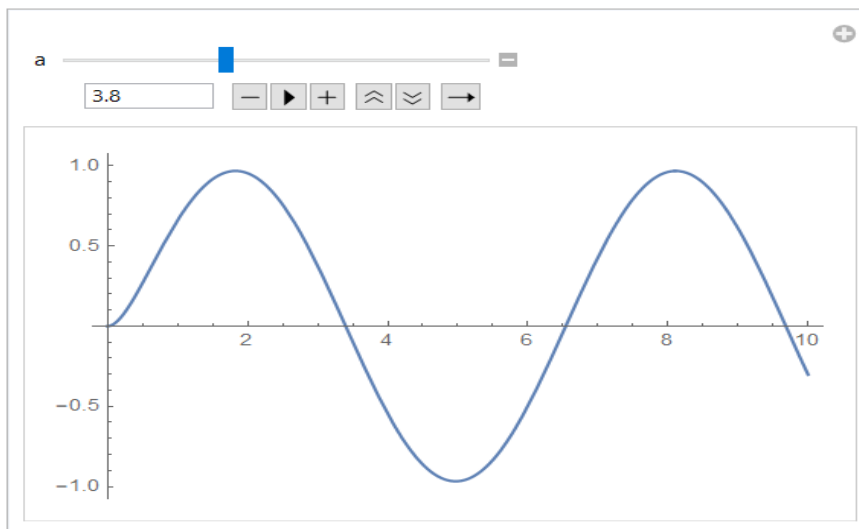


Figura 1. Solución a la ED $\dot{x}(t) + ax(t) = a \sin(t)$ generada en Mathematica

Resultados

1. Oscilaciones libres. Consideremos un objeto de masa M atado a un resorte con constante elástica k , sometido a la fuerza restauradora $-kx$. Las unidades de k son Kg/s^2 y g/s^2 en los sistemas MKS y cgs, respectivamente. La ecuación de

movimiento de acuerdo a la segunda ley de Newton es (Thornton & Marion, 2003):

$$\ddot{x}[t] + \left(\frac{k}{M}\right)x[t] = 0 \quad (5)$$

donde $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ y $\omega_0^2 = \frac{k}{M}$ es la frecuencia propia del sistema. Esta ED es de segundo orden, lineal, homogénea y con coeficientes constantes. Es bien conocido que la solución general de una ED de este orden tiene dos constantes. Por tanto, se requiere establecer dos condiciones iniciales del sistema. Asumimos como condiciones iniciales $x[0] = A$ y $\dot{x}[0] = 0$. La solución a la ecuación (5) se obtiene por medio de la instrucción:

$$DSolve\left[\left\{x''[t] + \left(\frac{k}{M}\right)x[t] == 0, x[0] == A, x'[0] == 0\right\}, x, t\right] \quad (6)$$

$$\left\{\left\{x \rightarrow Function\left[\left\{t\right\}, ACos\left[\sqrt{\frac{k}{M}}t\right]\right]\right\}\right\} \quad (7)$$

donde A es la amplitud del sistema. Definimos esta solución,

$$S[t_-, A_-, k_-, M_-] := ACos\left[\sqrt{\frac{k}{M}}t\right] \quad (8)$$

donde $S[t_-, A_-, k_-, M_-]$: es una función que depende de t y de los parámetros A , k y M y almacena temporalmente la solución (8) la cual derivamos una y dos veces respecto al tiempo para obtener la velocidad $S'[t, A, k, M]$ y la aceleración $S''[t, A, k, M]$.

$$S'[t, A, k, M] = -\frac{A\sqrt{k}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t\right)}{\sqrt{M}} \quad (9)$$

$$S''[t, A, k, M] = -\frac{Ak\cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t\right)}{M} \quad (10)$$

En la **Figura 2** se muestra la evolución temporal de estas cantidades, verificando que la posición, la velocidad y la aceleración son funciones periódicas. Los valores para A , k y M (en el sistema cgs) se tomaron en los intervalos $[0,5]$, $[1,10]$ y $[1,10]$, respectivamente.

En esta misma figura se observa, además, que los valores iniciales de la posición y la velocidad corresponden a las condiciones iniciales dadas para la ED.

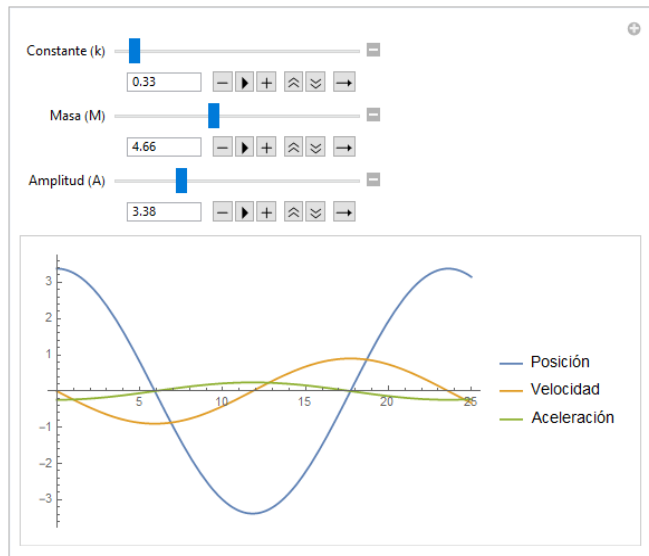


Figura 2. Posición, velocidad y aceleración del oscilador armónico simple.

La expresión que describe la energía total para el oscilador armónico simple es:

$$E = T + U = \frac{1}{2} m\dot{x}[t]^2 + \frac{1}{2} kx[t]^2 = cte \quad (11)$$

donde T y U corresponden a la energía cinética y potencial, respectivamente.

En la **Figura 3** se muestra la evolución temporal de estas energías. T alcanza el valor máximo cuando el sistema se encuentra en equilibrio, mientras que U alcanza sus valores máximos en la amplitud del oscilador. Además, la curva muestra que la energía total es constante.

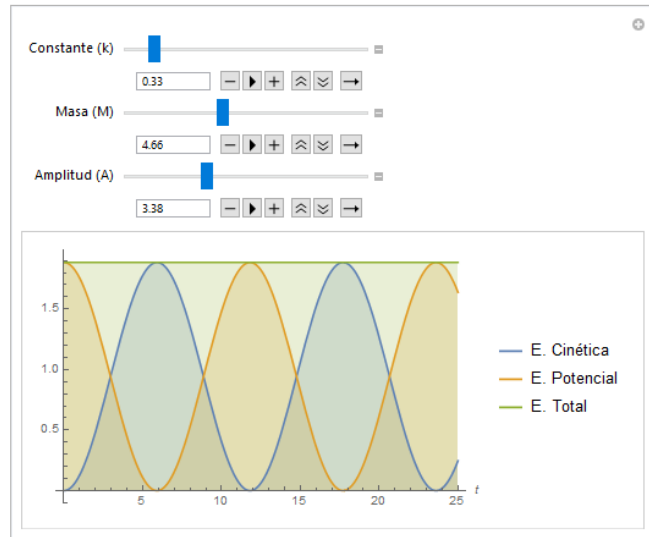


Figura 3. Energías cinética y potencial del oscilador armónico simple

En física es útil analizar la trayectoria del sistema en el espacio de fase, conformado por coordenadas y momentos (Thornton & Marion, 2003) (Goldstein, Poole, & Safko, 2000). La trayectoria en el espacio de fase del oscilador libre se obtiene con el *Mathematica* a partir de

$x[t]$ y $\dot{x}[t]$ y las condiciones iniciales $x[t_0]$ y $\dot{x}[t_0]$ donde t_0 indica el tiempo inicial, graficando el punto $P(x[t], \dot{x}[t])$ para un tiempo t (ver Figura 4).

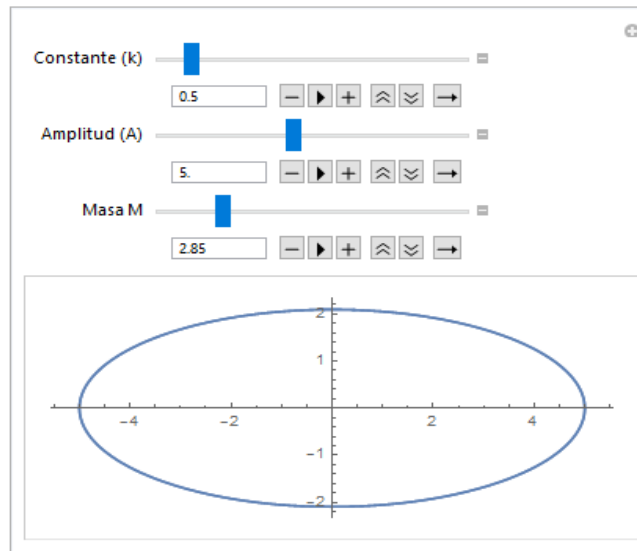


Figura 4. Diagrama en el espacio de fase del oscilador armónico simple. El eje vertical es la velocidad y el horizontal es la posición

Para construir el espacio de fase del oscilador libre, se debe seguir la siguiente instrucción (12):

```
Manipulate[ParametricPlot[Evaluate[{S[t, k, M, A], S'[t, k, M, A]}], {t, 0, 30}],  
{ { k, 0. } 5, Constante (k)}, 0, 5}, { { A, 5, Amplitud (A)}, 1, 10}, { { M, 10, "Masa (M)"}, 1, 10}]. (12)
```

2. Oscilaciones amortiguadas. En esta sección se considerará una masa atada a un resorte moviéndose en un medio que ejerce una fuerza de amortiguamiento proporcional a la velocidad de la masa ($= -b\dot{x}$), donde b es el parámetro de amortiguamiento del medio con unidades Kg/s en el sistema MKS) (Thornton & Marion, 2003)

(Alonso & Finn., 1995). Aplicando la segunda ley de Newton se obtiene

$$\ddot{x}[t] + \frac{b}{M}\dot{x}[t] + \frac{k}{M}x[t] = 0 \quad (13)$$

Esta ED también es de segundo orden, lineal, homogénea y con coeficientes constantes. Con las mismas condiciones iniciales $x[0] = A$ y $\dot{x}[0] = 0$ y con la instrucción **Dsolve**,

$$DSolve[\{x''[t] + 2\beta x'[t] + \omega_0^2 x[t] == 0\}, x, t] \quad (14)$$

se obtiene como solución:

$$x \rightarrow \text{Function} \left[\left\{ t \right\}, e^{t \left(-\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \right)} C[1] + e^{t \left(-\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \right)} C[1] \right] \quad (15)$$

donde $\beta = b/2M$ y $\omega_0^2 = k/M$.

Es bien conocido que dependiendo de los valores de β y ω_0 hay tres tipos de movimiento (Thorton & Marion (2003), Alonso & Finn (1995)): (i) $\omega_0^2 > \beta^2$. A esta situación se le llama *subamortiguado*. La masa alcanza a oscilar; (ii) $\omega_0^2 = \beta^2$. Este caso se denomina *amortiguamiento crítico*; (iii) $\omega_0^2 < \beta^2$ se llama *sobreamortiguado*.

Una ventaja del *Mathematica* es que permite analizar los tres casos al mismo tiempo manipulando los parámetros A , k , b y M para variar los valores de $\beta = b/2M$ y $\omega_0^2 = k/M$. Por medio de las instrucciones **Manipulate** y **Plot** y los parámetros A , k y M en los intervalos $[0, 10]$, $[0,3]$ y $[0, 10]$, respectivamente, se obtiene la posición, la velocidad y la aceleración para los casos subamortiguado, crítico y sobreamortiguado (ver **Figura 5**). Los valores asignados a β^2 y ω_0^2 en cada figura garantizan el tipo de movimiento que ella representa. Se observa que la partícula oscila solamente en el caso subamortiguado (**Figura 5a**). En el caso crítico la masa pasa por el punto de equilibrio, situación que no sucede en el caso sobreamortiguado.

Con la solución obtenida en *Mathematica* se obtienen las energías cinética, potencial (solo la asociada al resorte) y total (ver **Figura 6**). Solo en el caso subamortiguado (**Figura 6a**), T y U presentan comportamiento oscilatorio.

Por medio de **Manipulate**, **ParametricPlot** y **Evaluate** se obtiene la trayectoria del sistema en el espacio de fase en los tres casos. **La Figura 7** muestra estas trayectorias con la respectiva dirección del campo. Esta figura se obtiene con un procedimiento similar al planteado en la ecuación (12) fijando previamente las condiciones iniciales. En la situación de subamortiguamiento la trayectoria es una espiral (**Figura 7a**). En los casos crítico y sobreamortiguado la concavidad de la trayectoria es diferente.

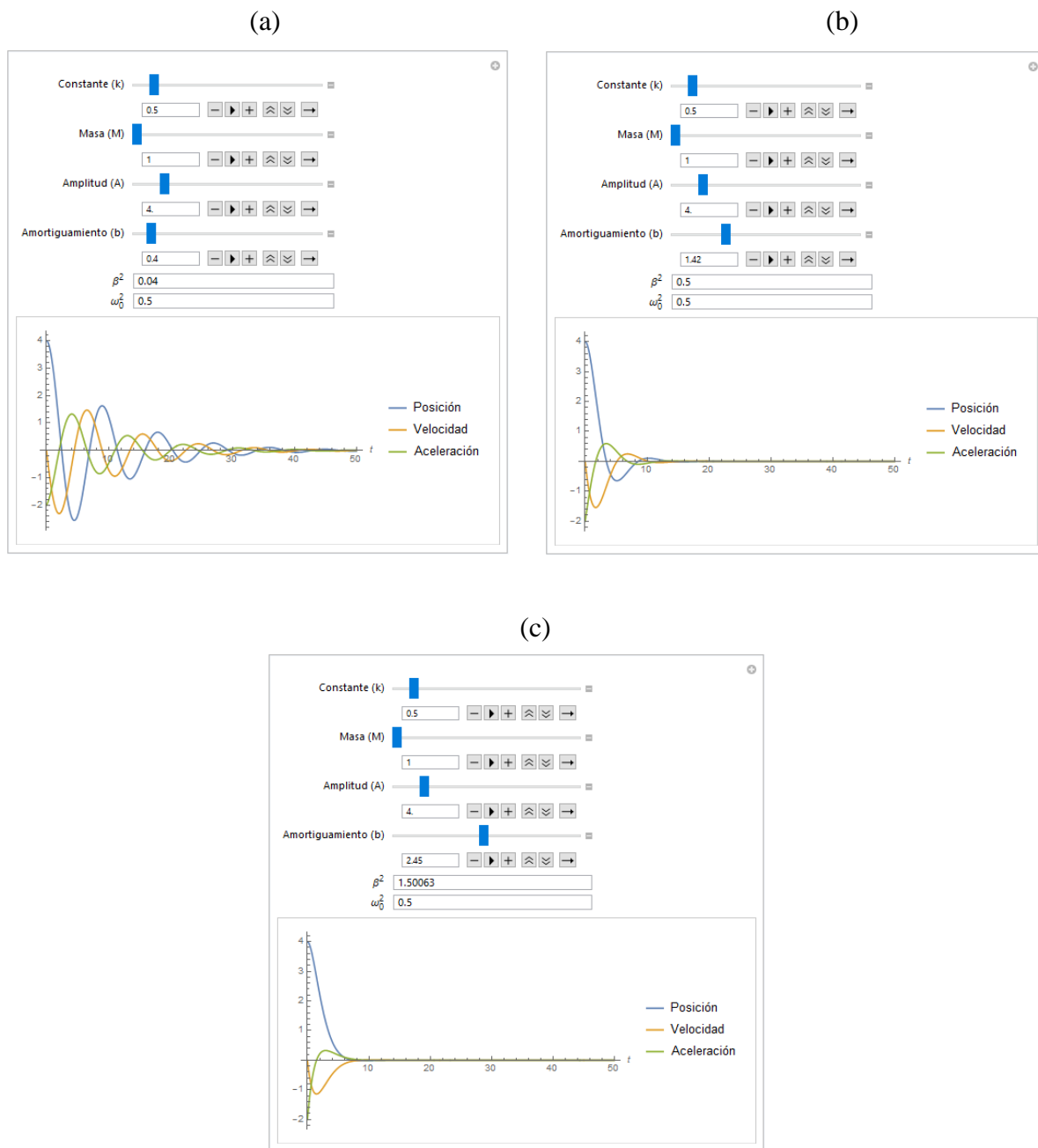


Figura 5. Posición, velocidad y aceleración del oscilador amortiguado, (a) Movimiento subamortiguado, (b) Movimiento críticamente amortiguado, (c) Movimiento sobreamortiguado

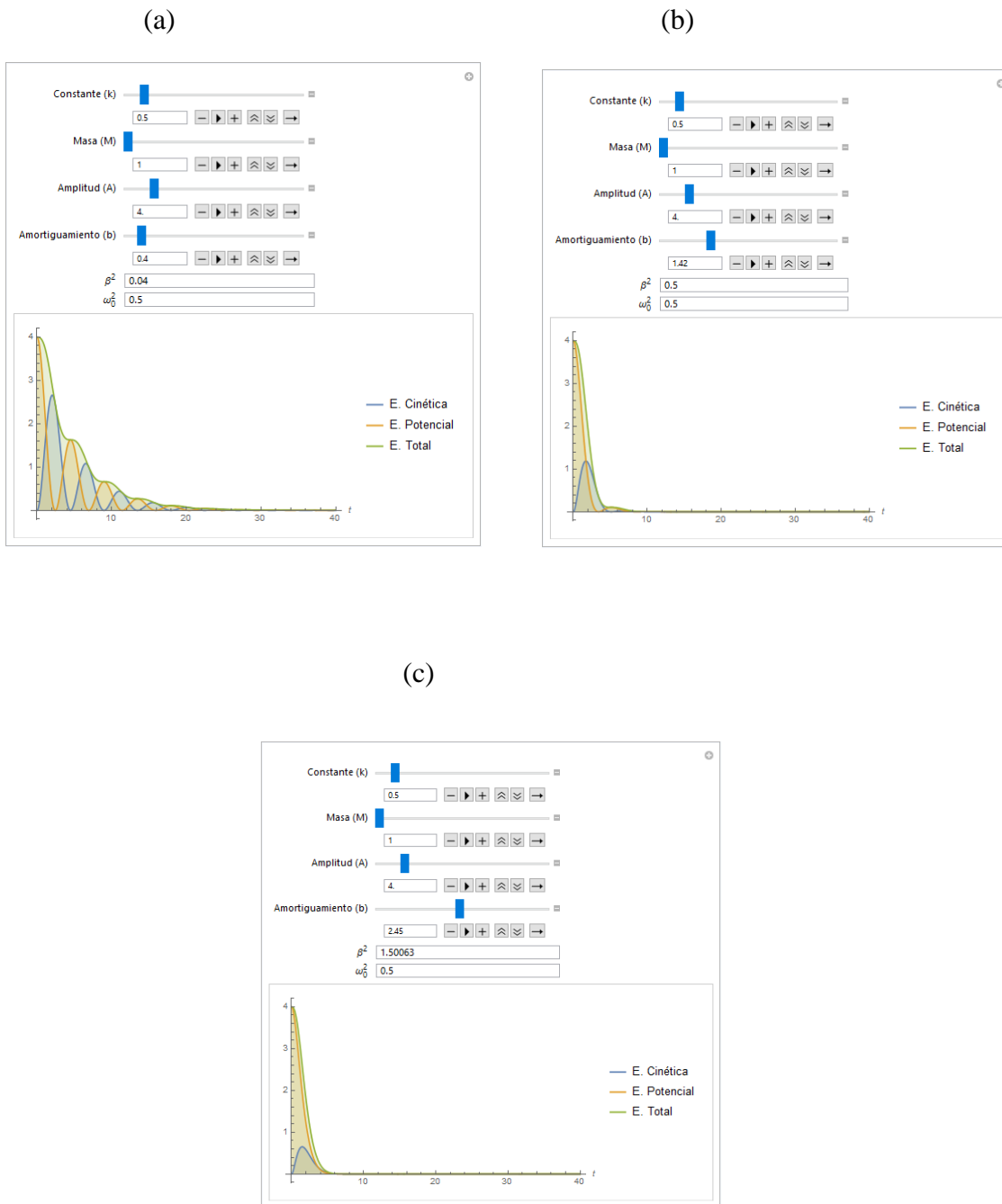
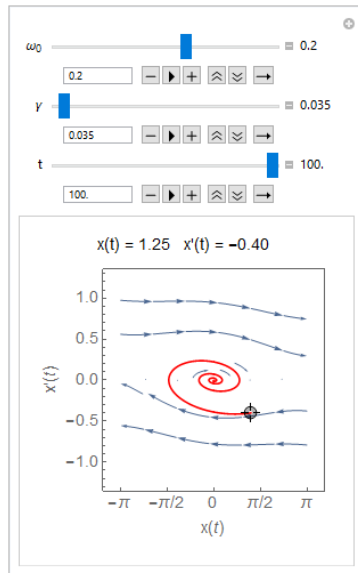
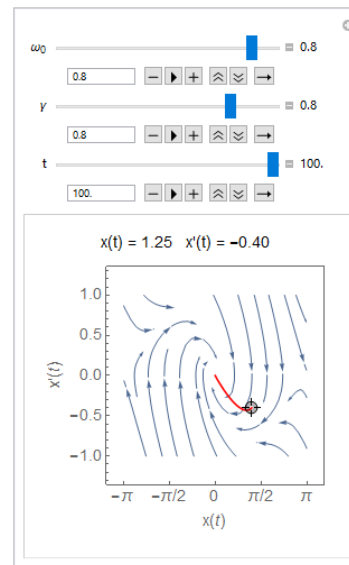


Figura 6. Energía cinética, potencial (solo la asociada al resorte) y total del oscilador amortiguado; (a) Movimiento subamortiguado, (b) Movimiento críticamente amortiguado, (c) Movimiento sobreamortiguado.

(a)



(b)



(c)

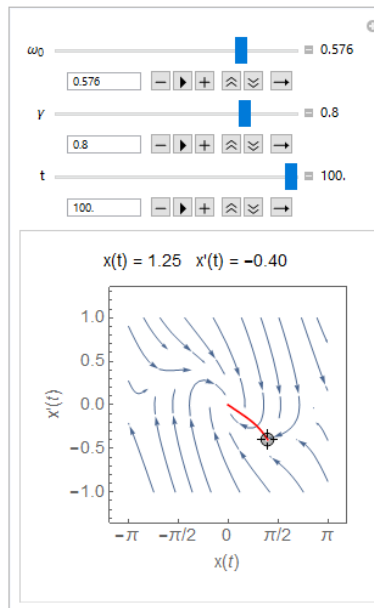


Figura 7. Diagrama en el espacio de fase del oscilador amortiguado; (a) Movimiento subamortiguado, (b) Movimiento críticamente amortiguado, (c) Movimiento sobreamortiguado

3. Oscilaciones forzadas. En esta sección se considerará una masa atada a un resorte sometida a una fuerza de fricción y a una fuerza

externa periódica ($F_0 \cos(\omega t)$). La ED que describe el movimiento es (Thornton & Marion, 2003)(Alonso & Finn., 1995):

$$\ddot{x}[t] + \frac{b}{M}\dot{x}[t] + \frac{k}{M}x[t] = \frac{F_0}{M}\text{Cos}(\omega t) \quad (16)$$

La solución a esta ED no homogénea, de segundo orden, lineal y con coeficientes constantes tiene dos partes, una general y una particular (Thornton & Marion, 2003) (Alonso & Finn., 1995). En *Mathematica* la solución se obtiene de la siguiente forma:

$$\text{DSolve}\{x''[t] + 2\beta x'[t] + \omega_0^2 x[t] == A \text{Cos}[t]\}, x, t \quad (17)$$

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow \text{Function}\left[\{t\}, \left(e^{t(-\beta - \sqrt{\beta^2 - |\omega_0|^2})} C[1] + e^{t(-\beta + \sqrt{\beta^2 - |\omega_0|^2})} C[2] \right) + \left(\frac{F_0((k - M\omega^2)\text{Cos}(\omega t) + b\omega \text{Sin}(\omega t))}{b^2\omega^2 + (k - M\omega^2)^2} \right) \right] \right\} \right\} \quad (18)$$

Teniendo en cuenta que $A = F_0/M$, $\beta = b/2M$ y $\omega_0^2 = k/M$ se obtiene:

$$\begin{aligned} & \frac{F_0((k - M\omega^2)\text{Cos}(\omega t) + b\omega \text{Sin}(\omega t))}{b^2\omega^2 + (k - M\omega^2)^2} \\ &= \frac{A((\omega_0 - \omega^2)\text{Cos}(\omega t) + 2\beta\omega \text{Sin}(\omega t))}{4\omega^2\beta^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2} \end{aligned} \quad (19)$$

la solución particular es:

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}} \text{Cos}(\omega t - \delta) \\ &= D(\omega)\text{Cos}(\omega t - \delta). \end{aligned} \quad (21)$$

De esta manera la solución para la ED (ecuación (18)) se plantea de la forma,

$$\begin{aligned} & e^{t(-\beta - \sqrt{\beta^2 - |\omega_0|^2})} C[1] + \\ & e^{t(-\beta + \sqrt{\beta^2 - |\omega_0|^2})} C[2] + \\ & \left(\frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}} \right) \text{Cos}(\omega t - \delta). \end{aligned} \quad (22)$$

Considerando la ecuación (22) y haciendo uso de **Manipulate** y **Plot** se obtienen las gráficas de las observables de este sistema. La **Figura 8** representa la posición, la velocidad y la aceleración del oscilador forzado, considerando $\omega_0^2 > \beta^2$. Se observa que, para tiempos grandes, en este caso $t \geq 25s$, estas tres observables presentan, aproximadamente, comportamiento periódico. La **Figura 9** muestra la evolución temporal de las energías cinética, potencial (solo la asociada al resorte) y total. Finalmente, en la **Figura 10** se muestra la trayectoria, recorrida en sentido dextrógiro, en el espacio de fase del oscilador forzado.

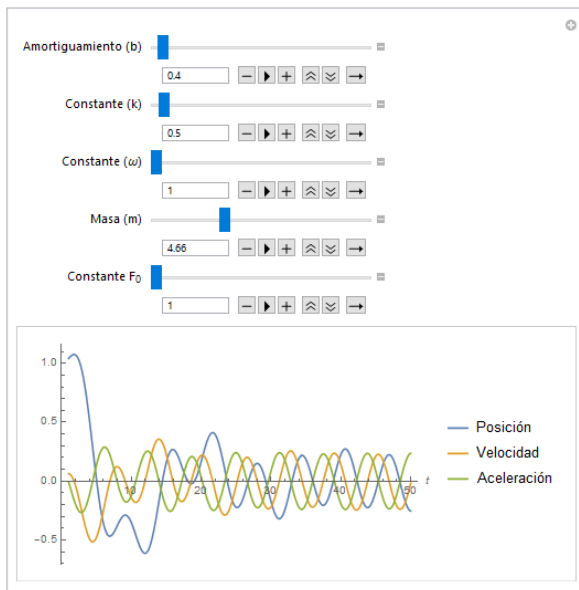


Figura 8. Posición, velocidad y aceleración del oscilador forzado.

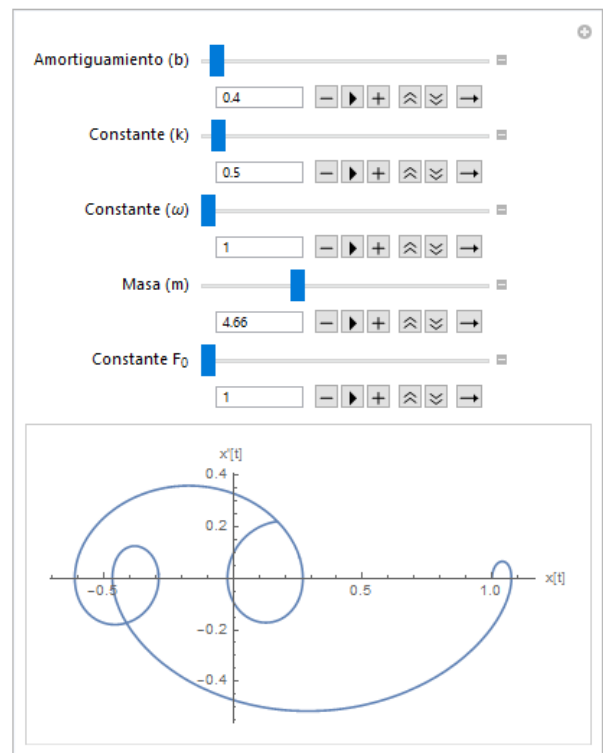


Figura 10. Diagrama en el espacio de fase del oscilador forzado.

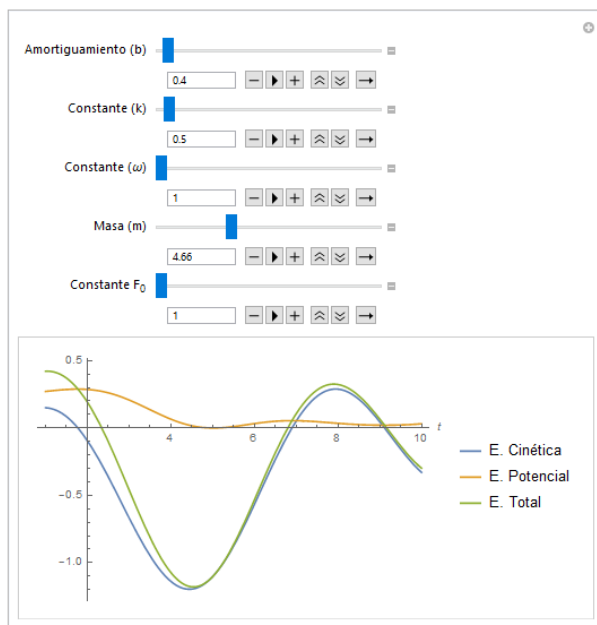


Figura 9. Energía cinética, potencial y total del oscilador forzado.

Conclusiones

En este trabajo se desarrolló un estudio sobre oscilaciones libres, amortiguadas y forzadas, utilizando pocos comandos del *Mathematica* y un conocimiento mínimo de EDO. Se obtuvo la solución a la ecuación diferencial para cada movimiento y se graficó la posición, la velocidad, la aceleración, las energías cinética, potencial y total, y la trayectoria en el espacio de fase. Algunas gráficas reportadas en este trabajo como la trayectoria en el espacio de fase del oscilador sobreamortiguado y con amortiguamiento crítico, o del oscilador forzado, no están reportadas en la mayoría de los libros de física consultados.

El paquete *Mathematica* permite encontrar rápidamente la solución de la ED del movimiento, graficar las observables y analizar

el efecto de los parámetros del sistema, contribuyendo al desarrollo de un aprendizaje significativo sobre las oscilaciones, sin desarrollos matemáticos engorrosos, asignando valores a parámetros como las condiciones iniciales, la frecuencia propia y el factor de amortiguamiento. Construir las gráficas en vez de analizar las presentadas en los libros permite una mayor comprensión de los fenómenos.

Este trabajo es una guía práctica y didáctica que le permite a estudiantes de un curso de física de nivel intermedio, estudiar en poco tiempo de manera completa, oscilaciones lineales considerando EDO. También le sirve al profesor porque permite presentar de manera rápida las soluciones a las EDO y reforzar los conceptos importantes a través de las gráficas obtenidas, articulando la teoría con la simulación del sistema físico.

Referencias

- Alonso, M., & Finn, E. (1995). *FÍSICA* (Vol. Vol 1: MECÁNICA). Addison-Wesley Iberoamericana.
- Arévalo, H. R., Morales, C. C., Ceballos, J. J., Giraldo, M. P., & Vega, L. P. (2018). Uso del software Tracker como apoyo en la estrategia de enseñanza del análisis de la dinámica de los cuerpos. *Revista de la Escuela Colombiana de Ingeniería*(109), 63.
- Castro-Palacio, J. C., Velásquez-Abad, L., Giménez, M. H., & Monsoriu, J. A. (2013). Using a mobile phone acceleration sensor in physics experiments on free and damped harmonic oscillations. *Am. J. Phys.*, 81(472).
- Escalante-Martínez, J. E., Laguna-Camacho, J. R., Gómez-Aguilar, J. F., Calderón-Ramón, C., Cruz-Orduña, M. I., Varguez-Fernández, R., & Anzelmetti-Zaragoza, J. C. (2016). Análisis del coeficiente de amortiguamiento viscoso en un sistema masa-resorte-amortiguador utilizando PPLANE y GEOGEBRA. *Revista Mexicana de Física*, 62(2), 66.
- García, A. F. (s.f.). Interactivo de Física en Internet. Recuperado el 2020, de <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/oscilaciones/portada.html>
- Goldstein, H., Poole, C., & Safko, J. (2000). *Classical Mechanics* (Third edition ed.).
- Greczylo, T., & Debowska, E. (2002). Using a digital video camera to examine coupled oscillations. *Eur. J. Phys.*, 23(441).
- Kuhn, J., & Vogt, P. (2012). Analyzing spring pendulum phenomena with a smartphone acceleration sensor. *The Physics Teacher*, 50(504).
- López-Mariño, M. A., Hernández-Olvera, J. A., Barroso, L. A., & Caballero, J. C. (2017). Cómputo simbólico y gráfico: estudio del sistema masa-resorte. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 39(e2303), 2.
- Medina, C. F., & Velazco, S. (2019). Dificultades conceptuales y matemáticas del modelo convencional de oscilaciones amortiguadas. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 41(2).
- Monsoriu, J. A., Giménez, M. H., & Vidaurre, J. R. (2005). Measuring coupled oscillations using an automated video

analysis technique based on image recognition. *Eur. J. Phys.*, 26(26).

Osaba-Rodríguez, C. (2019). Movimiento armónico simple: determinando la constante de fase. *Rev. Cubana Fis.*, 36(51).

Resnick, R., Halliday, D., & Krane, K. (2001). *Physics (7th Edition ed.)*. Hoboken: John Wiley & Sons.

Serway, R. A., & Jewett, J. (2014). *Physics for Scientists and Engineers (9th Edition ed., Vol. 1)*. United States of America: Cengage Learning.

Shamim, S., Zia, W., & Anwar, M. S. (2010). Investigating viscous damping using a webcam. *Am. J. Phys.*, 78(433).

Thornton, S. T., & Marion, J. B. (2003). *Classical dynamics of particles and systems (5th ed.)*. Belmont: Thomson Brooks/Cole.

Tipler, P. A., & Mosca, G. (2008). *Physics for Scientists and Engineers (6th ed.)*. New York: W. H. Freeman.

Vogt, P., & Kuhn, J. (2012). Analyzing simple pendulum phenomena with a smartphone acceleration sensor. *The Physics Teacher*, 50(432).

Zill, D. (1998). *Differential Equations with Computer Lab Experiments (2nd ed.)*. Boston: Brooks Cole.