



Algoritmo para la estimación de la frecuencia instantánea en señales de fase variante en el tiempo usando la transformación local polinomial de Fourier

Algorithm for the estimation of the instantaneous frequency in time-varying phase signals using the local polynomial Fourier transform

Herbert Enrique Rojas Cubides¹ María Carolina Forero Mejía²

Para citar este artículo: Rojas, H. y Forero, M. (2017). Algoritmo para la estimación de la frecuencia instantánea en señales de fase variante en el tiempo usando la transformación local polinomial de Fourier. *Revista Redes de Ingeniería*. 8(1), 5-17, doi: <https://doi.org/10.14483/2248762X.10089>.

Recibido: 18-febrero-2016 / Aprobado: 14-julio-2017

Resumen

La transformación local polinomial de Fourier (LPFT) es una representación tiempo-frecuencia (TFR) que generaliza los resultados obtenidos por la transformación de Fourier de corto tiempo (STFT); esta herramienta matemática puede ser empleada para estimar la frecuencia instantánea (IF) ($\omega_1(t) = d\varphi(t)/dt$) y sus derivadas ($\omega_m(t) = d^{m-1}\omega_1(t)/dt^{m-1}$) en señales no estacionarias o señales de fase variante en el tiempo ($\varphi(t)$). Varias publicaciones presentan diferentes métodos para calcular la LPFT; sin embargo, estos trabajos no describen de manera completa un algoritmo para su implementación computacional o requieren del cálculo de funciones o transformaciones adicionales. Este artículo propone un algoritmo basado en la definición de la aproximación local polinomial (LPA) y el uso del periodograma local polinomial (LPP) como estimador de la IF y sus derivadas; asimismo, se presenta la validación del algoritmo propuesto y se consideran los errores (SR-MSE) en el cálculo de los estimados de la LPFT. Finalmente, se determinan los costos computacionales a

partir de un caso de estudio. Los resultados muestran que el error en el cálculo de la LPFT disminuye dependiendo del ancho de la función ventana v de la resolución dada a los posibles estimados de $\omega_m(t)$, aunque esto provoque un incremento en la cantidad de operaciones realizadas.

Palabras clave: aproximación local polinomial, estimadores no paramétricos, frecuencia instantánea, periodograma local polinomial, transformación local polinomial de Fourier.

Abstract

The local polynomial Fourier transform (LPFT) is a time-frequency representation (TFR) that generalizes the results obtained by the short-time Fourier transform (STFT). This mathematical tool can be used to estimate the instantaneous frequency (IF) ($\omega_1(t) = d\varphi(t)/dt$) and its derivatives ($\omega_m(t) = d^{m-1}\omega_1(t)/dt^{m-1}$) into non-stationary signals or time-varying phase signals ($\varphi(t)$). Several publications present different methods for

1. Candidato a doctor en ingeniería eléctrica; profesor asociado Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Correo electrónico: herojasc@udistrital.edu.co
2. Ingeniera eléctrica, Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Correo electrónico: mcforerom@correo.udistrital.edu.co

calculating the LPFT. However, these studies do not fully describe an algorithm for its computational implementation or require the calculation of additional functions or transformations. This paper proposes an algorithm based on the definition of the polynomial local approximation (LPA) and the use of the polynomial local periodogram (LPP) as an estimator of the FI and its derivatives. Likewise, the validation of the proposed algorithm is presented and errors (SRMSE) are considered in the calculation of the LPFT estimates. Finally, computational costs are determined from a case study. The results show that the error in the LPFT calculation decreases depending on the bandwidth of the window function and the resolution given to the possible $\omega_m(t)$ estimates, although this process causes an increase in the number of operations performed.

Keywords: instantaneous frequency, local polynomial approximation, local polynomial Fourier transform, local polynomial periodogram, non-parametric estimators.

INTRODUCCIÓN

El procesamiento digital de señales (DSP) facilita la extracción de información y de las características de una señal que no son fácilmente perceptibles durante su registro [1]; este proceso incluye la adquisición de la señal bajo, el alistamiento y organización de los datos, la selección de la técnica que se usará para la extracción de la información y la estimación de características particulares de la señal [2].

Respecto a las técnicas usadas para analizar la señal y procesar sus características, estas pueden aplicarse en el dominio del tiempo o el dominio de la frecuencia. Una alternativa que integra las ventajas de estos métodos, son las que combinan el análisis en el tiempo y la frecuencia, conocidas como representaciones tiempo-frecuencia (TFR); estos métodos facilitan la extracción de las características de una señal a partir del análisis de algunos parámetros tales como: los niveles de amplitud en bandas tiempo-frecuencia, la concentración de energía, los coeficientes de descomposición, etc. [3].

En función del enfoque que se le quiera dar al análisis, las TFR pueden ser categorizadas en dos grupos: las que emplean funciones tiempo frecuencia (TFF) y las que se basan en distribuciones tiempo-frecuencia (TFD). En el primer grupo se encuentran las TFR lineales, las cuales se caracterizan por ser expresadas en forma de integrales, usan una función que actúa como el núcleo (kernel) y evitan la aparición de términos cruzados, lo cual facilita la interpretación de singularidades. La transformación de corto tiempo de Fourier (STFT), la transformación de wavelets (WT), la transformación S (ST) y la transformación armónica de corto tiempo (STHRT) son algunas de las TFR lineales más usadas en los últimos años.

Estas herramientas matemáticas se enfocan en la estimación de la frecuencia instantánea (IF) de la señal, la cual es una generalización del término frecuencia constante aplicada a señales estacionarias o periódicas, pero extendida a señales cuyo ángulo de fase varía con respecto al tiempo. Este concepto de IF se vuelve mucho más relevante si los cambios en la fase son irregulares, pues bajo esta condición, las nociones de periodicidad y frecuencia pierden completamente su sentido; adicionalmente, si se tiene en cuenta que en ciencias e ingeniería es común el análisis y procesamiento de señales de fase variante, señales multicomponentes y señales que presentan rápidas variaciones de amplitud, la estimación de la IF en este tipo de señales se torna una problemática de estudio permanente.

En las últimas décadas, la aplicación de TFR para la extracción de información y la estimación de la IF ha fijado su atención en algunas transformaciones que rotan el plano tiempo-frecuencia (transformaciones rotadas); estas técnicas aprovechan algunas de sus propiedades como la buena concentración de energía y la identificación de variaciones tiempo-frecuencia, para conocer información relevante de la señal [3], [4]. Algunos ejemplos de estas son: la transformación Radon-Wigner (RWT), la transformación fraccional de Fourier (FRFT) y la transformación local polinomial de Fourier (LPFT).

La LPFT es una generalización matemática de la STFT que conserva sus propiedades de linealidad y simplicidad. La LPFT se basa en el teorema de aproximación de Weierstrass [4] y ha sido usada en aplicaciones donde las señales bajo estudio son, por lo general, no-estacionarias y variantes en el tiempo [5]; adicionalmente, la LPFT se relaciona con el periodograma local polinomial (LPP), el cual es una distribución de energía tiempo-frecuencia sobre un espacio de $(m + 1)$ dimensiones, donde m es el orden polinomial (grado) de la LPFT.

La ventaja de la LPFT sobre otras TFR lineales es que utiliza una función polinomial en su exponente complejo para describir las características de la IF $-\omega_1(t)$ en señales de fase variante en el tiempo, conocidas también como señales de fase polinomial (PPS). Mientras otras técnicas como la STFT, la WT o la distribución de Wigner-Ville (WVD) se enfocan en obtener los estimados de $\omega_1(t)$ con una buena resolución, la LPFT proporciona información de $\omega_1(t)$ y de sus variaciones respecto al tiempo $-\omega_m(t) = d^m \omega_1(t) / dt$. Este proceso permite estimar con mayor precisión las variaciones tiempo-frecuencia de la señal, mejora la concentración de energía y aumenta la resolución de la IF y, en general, del espectro de frecuencia [5].

Debido a que su desarrollo es relativamente reciente, la LPFT ha recibido considerable atención en la última década y ha sido usada en variedad de aplicaciones tales como: voz, audio, radar, sonar, señales biológicas, señales geofísicas, supresión de interferencias en comunicaciones, entre otros. Una síntesis de estas aplicaciones se puede encontrar en [6].

Por lo general, el proceso de cálculo de la LPFT se asocia con la búsqueda de los coeficientes $\bar{\omega}(t) = \{\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t), \dots, \omega_m(t)\}$ que aproximan de mejor manera la fase de la señal. En la literatura, es posible encontrar varios métodos para calcular la LPFT y estimar la IF en señales de fase variante en el tiempo; no obstante, las alternativas más usadas para esta tarea se basan

en la transformación polinomial tiempo-frecuencia (PTFT) y el concepto de la aproximación local polinomial (LPA) [6], [7], [8], [9].

La PTFT es una herramienta desarrollada para el análisis de señales multicomponentes; esta técnica convierte una señal unidimensional de entrada en una salida multidimensional, a partir de la cual pueden obtenerse los coeficientes polinomiales de la LPFT [6]. Empleando la PTFT, la LPFT puede ser calculada así: (a) usar una función ventana (ρ_h) para dividir la señal en cierto número de segmentos, (b) modelar cada segmento como una PPS de m -orden, (c) estimar los parámetros de la fase para cada segmento usando la PTFT (d) calcular la LPFT con los parámetros obtenidos y el ancho de ventana seleccionado.

Este método tiene un alto costo computacional, ya que antes de proceder con la LPFT se debe estimar la PTFT para cada segmento de la señal, determinar la función multidimensional y encontrar su máximo; debido a esto, se han desarrollado algunos algoritmos rápidos para la PTFT basados en la transformación de fase cuadrática [10], el algoritmo Radix-2 [11], el algoritmo Radix-3 [12] y el algoritmo Split-Radix [13]. La desventaja de algunos de estos métodos es que solo funcionan cuando el número de muestras de la señal es de potencia dos. De manera que cuando esto no se cumple, se debe volver al proceso convencional que incrementa la complejidad computacional.

Por otra parte, la LPA es una técnica basada en la teoría de aproximación, propuesta y aplicada en estadística para el procesamiento escalar y el análisis multidimensional de datos. Debido a que la LPFT y el LPP guardan relación con el concepto de la LPA, esta última puede ser empleada para obtener los estimados del vector $\bar{\omega}(t) = \{\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t), \dots, \omega_m(t)\}$, empleando el LPP como estimador de los puntos de mayor concentración de energía en la LPFT, los cuales coinciden con la IF y sus derivadas. La

ventaja de este método, a diferencia del basado en la PTFT, es que su implementación facilita el cálculo directo de la LPFT y no requiere de funciones o transformaciones adicionales, reduciendo así la cantidad de pasos y operaciones que se deben realizar.

Aunque el problema de calcular la LPFT usando la LPA ya ha sido abordado en otros trabajos [7], [14], la mayoría de estos estudios se ha centrado en el análisis del error y la covarianza de las estimaciones, dejando de lado el desarrollo de métodos para el cálculo de la LPFT. Este artículo propone un algoritmo que facilita la implementación computacional de la LPFT para el análisis de señales no estacionarias o variantes en el tiempo; el algoritmo integra el concepto de la LPA y el cálculo simultáneo de los estimados de la IF y sus derivadas. Asimismo, se presenta una breve introducción a la LPFT y se valida el algoritmo propuesto con ayuda de algunas simulaciones; finalmente, se analizan los costos computacionales y se calculan los errores de los estimados de la LPFT en función de parámetros como: el tiempo de muestreo (T_s), la duración de la función ventana (h) y la resolución establecida para los posibles estimados del vector $\bar{\omega}(t)$, denotadas como $\Delta\omega_r = \Delta\omega_1, \Delta\omega_2, \dots, \Delta\omega_m$.

LA TRANSFORMACIÓN POLINOMIAL DE FOURIER Y EL PERIODOGRAMA LOCAL POLINOMIAL

La LPFT es una generalización de STFT con un polinomio en su exponente compleja y es una técnica que puede ser usada para determinar la IF de señales variantes en el tiempo y PPS. Esta transformación se define matemáticamente de la siguiente forma [5]:

$$Y_h(\bar{\omega}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t+u) \rho_h(u) e^{-j\theta(u, \bar{\omega})} du \quad (1)$$

$$Y_h(\bar{\omega}, t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} y(t+nT_s) \rho_h(nT_s) e^{-j\theta(u, \bar{\omega})}$$

Dónde, $y(t+u)$ es la señal bajo estudio T_s , es el tiempo de muestreo de la señal, $u = nT_s$, $\rho_h(u)$ es una función ventana que debe satisfacer algunas propiedades: $[\rho_h(u) \geq 0; \rho_h(0) = \max \rho_h(u); \rho_h(u) \rightarrow 0$ cuando $u \rightarrow \infty; \int_{-\infty}^{\infty} \rho_h(u) du = 1]$, h es el ancho de banda o duración de la ventana y la función $e^{-j\theta(u, \bar{\omega})}$ es el núcleo de la transformación, el cual es definido como:

$$\theta(u, \bar{\omega}) = \omega_1 u + \omega_2 \frac{u^2}{2} + \dots + \omega_m \frac{u^m}{m!} \quad (2)$$

A partir de esta definición, se puede establecer un conjunto de coeficientes $\bar{\omega}(t, h)$ con la información de la IF y sus derivadas de manera que [8]:

$$\bar{\omega}(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t), \dots, \omega_m(t)) \quad (3)$$

Donde, $\bar{\omega} \in R^m$ y m es el grado de la LPFT. A partir de la definición mostrada en la ecuación (1), se puede notar que $Y_h(\bar{\omega}, t)$ es una función periódica de $\bar{\omega}(t, h)$, con periodos iguales a $2\pi s! / T^s$, para $s = 1, 2, \dots, m$; de esta manera, el rango de valores que puede asumir cada estimador que hace parte del vector $\bar{\omega}(t, h)$ es [8]:

$$Y_h(\bar{\omega}, t) = Y_h\left(\omega_1 + \frac{2\pi}{T}, \omega_2 + \frac{4\pi}{T^2}, \dots, \omega_m + \frac{2\pi m!}{T^m}, t\right) \quad (4)$$

De manera similar al periodograma que se obtiene a partir de la STFT, el cual es definido como una distribución de energía en el plano tiempo-frecuencia $(t - \omega)$, el LPP puede ser interpretado como una distribución de energía tiempo-frecuencia de una señal sobre el espacio $\{t - (\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t), \dots, \omega_m(t))\}$ y se define matemáticamente así:

$$I_h(\bar{\omega}, t) = |Y_h(\bar{\omega}, t)|^2 \quad (5)$$

El LPP permite establecer la manera en que la energía de una señal se distribuye y, además, puede ser usado para estimar la IF de una señal [7], [14]. Se puede notar que para el caso particular en el que $m = 1$, la definición de $Y_h(\bar{\omega}, t)$ en la ecuación (1)

se reduce a la definición convencional de la STFT, y el periodograma polinomial $I_h(\bar{\omega}, t)$ en la ecuación (5) convergerá al periodograma convencional en el plano tiempo-frecuencia.

LA APROXIMACIÓN LOCAL POLINOMIAL APLICADA AL CÁLCULO DE LA LPFT

Aunque el problema de calcular la IF de una señal puede ser resuelto de diferentes maneras, la LPA puede ser aplicada en las definiciones de la LPFT y el LPP para aproximar la fase variante de una señal en el tiempo; de hecho, la LPA utiliza series de Taylor truncadas o limitadas hasta un orden m para obtener una función polinomial cercana a la fase de la señal bajo estudio. Posteriormente, la LPA utiliza dicha expansión de manera local para aproximar la fase de la señal sobre un pequeño intervalo de tiempo.

Así, esta expansión local es usada para calcular los estimados de la fase de la señal para un solo instante de tiempo t , por lo que para el siguiente instante de tiempo, estos cálculos deben ser repetidos.; esto determina el carácter no-paramétrico de la estimación punto a punto en que se basa la LPA y, por consiguiente, el cálculo de la LPFT.

Es importante aclarar que el uso de la LPA garantiza replicar las propiedades de cada estimado de $\bar{\omega}(t, h)$ con respecto a las componentes polinomiales de la IF; de esta forma, para cada instante de tiempo se obtienen un conjunto de coeficientes de la función polinomial que hace parte del exponente complejo de la LPFT. Esta es la diferencia principal entre aplicar la LPA no paramétrica y el uso de estimados paramétricos donde los coeficientes de la serie polinomial son constantes en todos los intervalos de tiempo analizados [15], [16], [17].

A partir de las definiciones presentadas en la sección anterior, el modelo de señal definido en este trabajo para aplicar la LPA debe ser de la forma:

$$y(t) = A \exp(j\varphi(t)) \quad (6)$$

Donde, $\varphi(t)$ es una función arbitraria que expresa la fase polinomial de la señal y A representa la amplitud de la misma. De esta manera, la IF de la señal es definida como:

$$IF = \omega_1(t) = d\varphi(t)/dt \quad (7)$$

Para que la LPA pueda considerarse como un método adecuado para estimar la IF y pueda ser integrada con los conceptos de la LPFT y el LPP, la función de la fase polinomial $\varphi(t)$ debe ser diferenciable respecto al tiempo. A partir de la ecuación (2) y de la ecuación (7), es posible afirmar que para mejorar la precisión en el cálculo de las características tiempo-frecuencia de una señal la LPFT debe ser de orden $m \geq 2$, de lo contrario, todas las definiciones presentadas convergerán a la definición convencional de la STFT.

ALGORITMO PARA EL CÁLCULO DE LA LPFT Y EL LPP USANDO LA LPA

El objetivo de aplicar la LPA en el cálculo de la LPFT y el LPP es determinar el argumento $\varphi(t)$ de la señal $y(t)$ definida en la ecuación (6); este argumento contiene la IF de la señal y sus respectivas derivadas con respecto al tiempo, los cuales se definen como los estimados $\hat{\omega}(t, h)$ de la LPFT. Para determinar estos valores en cada instante de tiempo, el algoritmo se basa en la construcción de vectores, matrices o arreglos finitos $(\underline{\omega})$ de r –dimensiones (con $r = 1, 2, \dots, m$) formados por los posibles valores que pueden tomar los estimados de la IF y sus derivadas. Posteriormente, la LPA prueba todas las combinaciones posibles en los coeficientes de $\bar{\omega}(t, h)$ y busca los puntos de mayor concentración de energía en el LPP aplicando el siguiente problema de optimización [7], [14]:

$$\hat{\omega}(t, h) = \underset{\bar{\omega} \in Q \subset R^m}{\arg \max} I_h(\bar{\omega}, t) \quad (8)$$

La adecuada localización de $\hat{\omega}(t, h)$ usando el concepto de la LPA se asegura mediante la función ventana ρ_h ; esta función solo considera las observaciones en la vecindad del punto central t sobre el cual se está calculando la aproximación local. Debido a esto, existen diferentes formas de resolver el problema de optimización presentado en la ecuación (8). En este artículo se propone el siguiente procedimiento:

- Seleccionar el orden m del polinomio para $\theta(u, \bar{\omega})$ definido en la ecuación (2).
- Seleccionar una resolución o tamaño de paso ($\Delta\omega_m$) con el fin de variar el valor de los posibles estimados de la IF y sus derivadas. Puede seleccionarse una misma resolución para todos los estimados $\bar{\omega}(t)$ en conjunto o por separado.
- Variar de manera simultánea cada uno de los coeficientes asociados a los estimados, desde cero o un valor límite inferior en pasos $\Delta\omega_m$ y hasta el límite superior establecido.
- Calcular el LPP para todas las combinaciones de $\bar{\omega}(t, h)$.
- Usar la ecuación (8) para determinar el conjunto de estimados $\bar{\omega}(t, h)$ en los cuales el LPP muestra su valor máximo.
- Calcular el LPP general o el LPP normalizado según las necesidades del estudio.
- Repetir los pasos (d) a (f) para cada instante de tiempo.
- Evaluar el comportamiento del LPP simple o normalizado y su relación con la función ventana y el tiempo de muestreo.

El algoritmo completo para la implementación computacional de la LPFT para órdenes $m \leq 3$ se muestra en el Anexo 1. Al aplicar este algoritmo se debe tener presente que el proceso para determinar los estimados $\bar{\omega}(t)$ debe realizarse para cada instante de tiempo t ; además, el nivel de precisión con el que se desee conocer el comportamiento de la IF dependerá del orden polinomial definido para calcular la LPFT y, por

consecuente, de los coeficientes que se integran gracias a la LPA. Por esta razón, dependiendo del tipo de señal a analizar y de la resolución $\Delta\omega_m$ definida para cada uno de los coeficientes de $\bar{\omega}(t, h)$, será conveniente o no escoger un polinomio de gran orden.

VALIDACIÓN DEL ALGORITMO PROPUESTO

Señal de análisis

Con el fin de aplicar la LPA y los estimadores simultáneos en el cálculo de la LPFT y el LPP, se ha definido una señal variante en el tiempo cuya expresión matemática es:

$$y(t) = e^{j(2\pi t + 4\pi t^2)} \quad (9)$$

$$\varphi(t) = 2\pi t + 4\pi t^2$$

Al evaluar la señal bajo estudio se puede observar que su fase posee una primera derivada $IF = \omega_1(t) = d\varphi(t)/dt = 2\pi + 8\pi t$ [1/s], la cual varía en función del tiempo; además, cuenta con una segunda derivada $\omega_2(t) = d\omega_1(t)/dt = 8\pi$ [1/s²], la cual es constante en el tiempo.

Si se revisa la definición de la LPFT — ecuaciones (1) y (2) — puede notarse que el argumento $\theta(u, \bar{\omega})$ del kernel de transformación que mejor se ajusta a esta señal es un polinomio de orden $m = 2$; de esta manera, el núcleo $\theta(u, \bar{\omega})$ de la LPFT será:

$$\theta(u, \bar{\omega}(t)) = \omega_1(t) \cdot u + \omega_2(t) \cdot \frac{u^2}{2} \quad (10)$$

A partir de este análisis, el algoritmo propuesto para el cálculo de la LPFT deberá buscar los estimados $\hat{\omega}_1(t)$ y $\hat{\omega}_2(t)$ para cada instante de tiempo. Debido a que el orden del polinomio que compone el kernel de la LPFT es quien define la complejidad del cálculo de la IF y sus derivadas, en aquellos casos en los que se desconozca la expresión

matemática o la naturaleza de la señal bajo estudio, se sugiere iniciar el proceso evaluando el comportamiento de $\omega_1(t)$ y, posteriormente, analizar sus derivadas partiendo de un orden bajo hasta que una de estas muestre un comportamiento constante respecto al tiempo. En este sentido, lo recomendable es que el orden del polinomio del kernel sea igual a la cantidad de variaciones de la IF más uno; sin embargo, la experiencia muestra que es posible obtener buenos resultados para señales variantes en el tiempo con polinomios de órdenes bajos reduciendo la cantidad de cálculos realizados [6], [8], [18].

Parámetros de simulación

Siguiendo el algoritmo propuesto, a continuación, se muestran los parámetros que se definieron para las simulaciones:

- Duración de la señal: $0 \leq t \leq 1$ [s].
- Tiempos de muestreo de la señal:
- $T_s = \{0.1, 0.01, 0.002\}$ [s].
- Definir los límites para los estimados:
- $0 \leq \hat{\omega}_1 \leq 30$ [1/s] y $0 \leq \hat{\omega}_2 \leq 30$ [1/s²].
- Resolución de los estimados locales ($\Delta\hat{\omega}_m$): en este caso, $\Delta\omega_1 = \Delta\omega_2 = \{0.05, 0.1\}$.
- Tipo de ventana $\rho_h(u)$: rectangular simétrica, es decir $\rho_h(u) = 1$ si $|u| \leq u_h/2$.
- Duración de la ventana
- $(u_{h_s}) = \{0.51, 0.91, 4.1, 20.1, 50.1, 80.1, 100.1\}$ [s]

En el caso de la resolución usada para la búsqueda de los estimados, se definió que los parámetros $\Delta\omega_1$ y $\Delta\omega_2$ sean de igual magnitud (aunque tienen diferentes unidades); esto se hizo para reducir la cantidad de operaciones realizadas y ajustar la simulación usando una sola variable. En total, se estudiaron 42 casos analizando el comportamiento de la LPFT, la magnitud del LPP, los estimados de la IF ($\hat{\omega}_1$) y su primera derivada ($\hat{\omega}_2$), el error de los estimados obtenidos por el algoritmo y los tiempos de cómputo empleados para el cálculo de la LPFT.

Resultados de simulación

En la Figura 1, la Figura 2 y la Figura 3, se muestran algunos de los resultados obtenidos de las simulaciones. Como ya se mencionó, con el fin de evitar la influencia de una función ventana con un único valor máximo (por ejemplo, función Gaussiana), se utilizó una función ventana rectangular. La Figura 1 muestra la distribución de energía de la señal, definida en (9), en función de la IF $\omega_1(t)$ y de su primera derivada $\omega_2(t)$. Teniendo en cuenta la duración de la señal y el periodo de muestreo, se puede apreciar en cada simulación diez LPP, uno para cada instante de tiempo t .

En la Figura 1 se puede observar que al aumentar la duración de la función ventana el LPP se tiende a concentrar; esto proporciona una mayor resolución al momento de identificar los estimados $\hat{\omega}(t)$. En la Figura 1(a), la Figura 1(b) y la Figura 1(c) cada LPP muestra un único valor máximo para cada instante de tiempo evaluado; este valor corresponde al punto de mayor concentración de energía de la señal y posee un conjunto de estimados $\hat{\omega}_{1_{max}}(t)$ y $\hat{\omega}_{2_{max}}(t)$. Ahora bien, cuando la duración de la ventana aumenta por encima de $u_h = 50.1$ [s], Figura 1(d), ya no se diferencia con claridad un solo valor máximo en el LPP, lo cual se relaciona con la pérdida de resolución en el cálculo de la LPFT; esto hace que los estimados de la frecuencia calculados presenten un mayor error y no sean confiables.

Para la señal de prueba, la mejor solución local se presenta con una ventana de duración $u_h = 20.1$ [s], tal y como se muestra en la Figura 1(c). Este resultado se debe a que los valores de la IF y los de su primera derivada tienen un único máximo y el espectro de energía muestra un LPP más concentrado.

La Figura 2 muestra la vista superior de los LPP presentados en la Figura 1, desde esta perspectiva se confirma que a medida que aumenta la duración de la ventana (hasta $u_h < 50.1$ [s]) el LPP presenta

una mejor resolución y se facilita la identificación de los valores máximos de cada estimado ($\hat{\omega}_1$ y $\hat{\omega}_2$). Si se analizan los valores de $\hat{\omega}_1(t)$, se observa que estos presentan un comportamiento lineal con

respecto al tiempo, mientras que su primera derivada se mantiene constante en $25.13 \approx 8\pi [1/s^2]$. Estos resultados concuerdan con las definiciones matemáticas presentadas en sección 5.1.

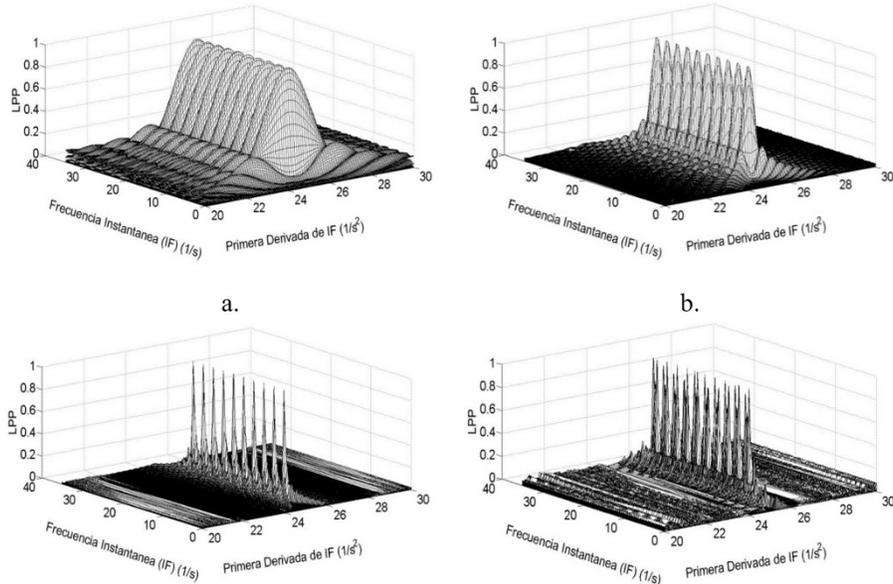


Figura 1. LPP normalizado en función de la IF ($\omega_1 = 2\pi + 8\pi t$) y su primera derivada ($\omega_2 = 8\pi$) para la señal de interés $T_s = 0.1[s]$ y $\Delta\omega_1 = \Delta\omega_2 = 0.1$ (a) $u_h = 4.1[s]$ (b) $u_h = 8.1[s]$ (c) $u_h = 20.1[s]$ (d) $u_h = 50.1[s]$

Fuente: elaboración propia.

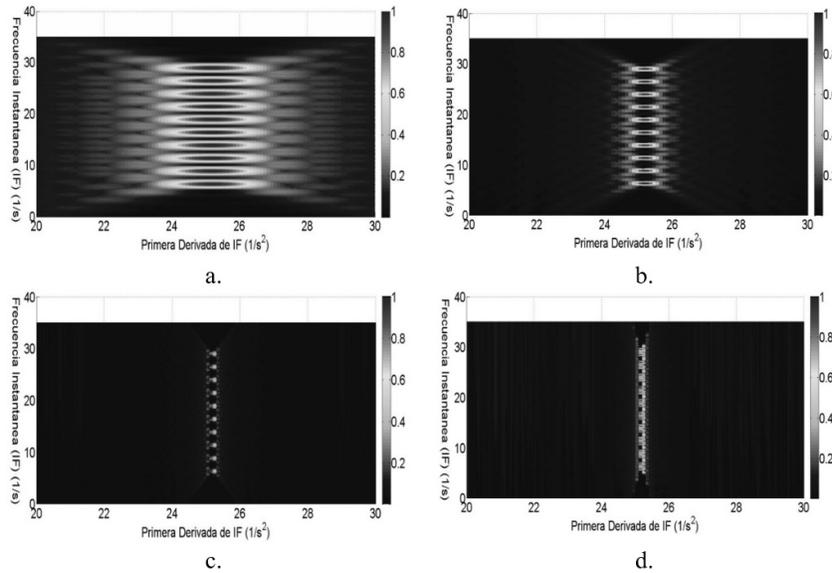


Figura 2. Vista superior del LPP en función de la IF ($\omega_1 = 2\pi + 8\pi t$) y su primera derivada ($\omega_2 = 8\pi$) para la señal de interés $T_s = 0.1[s]$ y $\Delta\omega_1 = \Delta\omega_2 = 0.1$ (a) $u_h = 4.1[s]$ (b) $u_h = 8.1[s]$ (c) $u_h = 20.1[s]$ (d) $u_h = 50.1[s]$

Fuente: elaboración propia.

Debido a que el algoritmo propuesto para calcular la LPFT permite conocer el valor de la IF para cualquier valor de t , los LPP obtenidos para un caso particular pueden ser analizados al observar la variación de la IF con respecto al tiempo. La Figura 3 muestra los puntos de mayor concentración de energía de $\hat{\omega}_1$ con respecto al tiempo; estos puntos se presentan en $\omega_{1,c}(t) = \{6.3, 8.8, 11.3, 13.8, 16.3, 18.8, 21.4, 23.9, 26.4, 28.9\} [s^{-1}]$ para $t = \{0, 0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1.0\} [s]$, respectivamente.

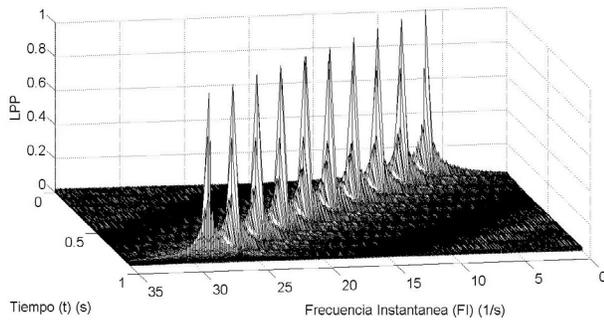


Figura 3. LPP normalizado en función de la IF (ω_1) y el tiempo (t) con $T_s = 0.1 [s]$, $\Delta\omega_1 = \Delta\omega_2 = 0.1$ y $u_h = 20.1 [s]$.

Fuente: elaboración propia.

ANÁLISIS DE ERROR

Para evaluar la precisión con la que se calcularon los estimados de la IF, se utilizó como indicador la raíz cuadrada del error medio cuadrático (RMSE); este indicador permite obtener un valor global del error para todos los intervalos de tiempo en vez de obtener errores individuales de $\hat{\omega}_1(t)$ y $\hat{\omega}_2(t)$ para

cada instante. El RMSE se define de la siguiente manera:

$$SRMSE_m = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{s=1}^N (\omega_m(t) - \hat{\omega}_{m,c}(t))^2} \quad (12)$$

Donde, $\omega_m(t)$ son los valores teóricos y $\hat{\omega}_{m,c}(t)$ los resultados obtenidos en la simulación. La Tabla 1 y la Tabla 2 muestran el SRMSE calculado para los dos valores de $\Delta\omega_1 = \Delta\omega_2 = \{0.1 \text{ y } 0.05\}$. Todos los errores son calculados sobre el segmento $0 \leq t \leq 1 [s]$, para los tres tiempos de muestreo y las siete duraciones de ventana previamente establecidas.

Los resultados muestran que para cada tiempo de muestreo analizado el SRMSE se mantiene constante para ventanas en el rango $0.51 [s] \leq u_h < 50.1 [s]$ y luego aumenta, este comportamiento muestra que para el caso analizado no es necesario utilizar ventanas de gran duración para obtener errores pequeños.

Adicionalmente, si se comparan los resultados presentados en la Tabla 1 y la Tabla 2, se observa que para una duración de ventana $u_h < 50.1 [s]$ el SRMSE es menor a 0.03 para una resolución $\Delta\omega_1 = \Delta\omega_2 = 0.1$ y es inferior a 0.014 cuando la resolución de los estimados es $\Delta\omega_1 = \Delta\omega_2 = 0.05$. Esto permite concluir que a medida que se reducen los pasos de $\Delta\omega_1$ y $\Delta\omega_2$, menores serán los

Tabla 1. SRMSE de los estimados de la IF con $\Delta\omega_1 = \Delta\omega_2 = 0.1$ variando $T_s [s]$ y la duración de la ventana $u_h [s]$.

$T_s [s]$ \ $u_h [s]$	0.51*	0.91*	4.1*	20.1*	50.1	80.1	100.1
0.100	0.02601	0.02601	0.02601	0.02601	0.37897	0.92145	1.22927
0.010	0.02928	0.02928	0.02928	0.02928	0.37530	0.92513	1,23454
0.002	0.02928	0.02928	0.02928	0.02928	0.37531	0.92513	1,23514
0.001	0.02881	0.02881	0.02881	0.02881	0.37529	0.92513	1,23514

* SRMSE constante con respecto a T_s

Fuente: elaboración propia.

Tabla 2. SRMSE de los estimados de la IF con $\Delta\omega_1 = \Delta\omega_2 = 0.05$ variando T_s [s] y la duración de la ventana u_h [s].

T_s [s] \ u_h [s]	0.51*	0.91*	4.1*	20.1*	50.1	80.1	100.1
0.100	0.01400	0.01400	0.01400	0.01400	0.13849	0.38835	0.56178
0.010	0.01339	0.01339	0.01339	0.01339	0.13873	0.38862	0.56178
0.002	0.01338	0.01338	0.01338	0.01338	0.13874	0.38862	0.56178
0.001	0.01338	0.01338	0.01338	0.01338	0.13874	0.38862	0.56178

* SRMSE constante con respecto a T_s **Fuente:** elaboración propia.

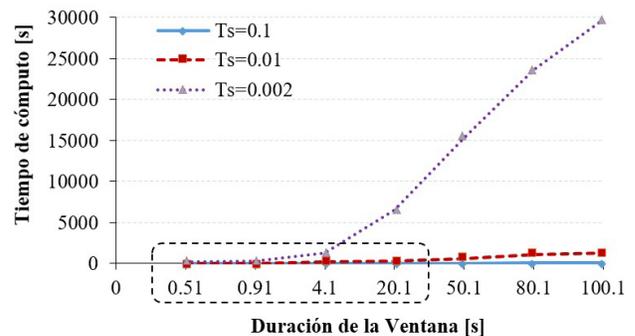
errores que se obtendrán en la estimación de la IF y sus derivadas; sin embargo, es conveniente evaluar qué implicaciones tiene reducir los pasos de $\Delta\omega_1$ y $\Delta\omega_2$ (mejorar la resolución de los estimados) en los costos computacionales. Este análisis se presenta en la siguiente sección.

COSTOS COMPUTACIONALES

Como se mencionó anteriormente, el orden polinomial m es uno de los parámetros que aumenta el tiempo de cómputo en el cálculo de la LPFT; sin embargo, la resolución de los estimados $\Delta\omega_1$ y $\Delta\omega_2$, la duración de la ventana (u_h) y el número de muestras de la señal son parámetros que también influyen en la cantidad de operaciones necesarias para obtener la LPFT de una señal. La Figura 4 muestra el comportamiento del tiempo de cómputo en función de la duración de la ventana (u_h). Para estas pruebas, se varió el número de muestras de la señal manteniendo fija su duración (entre 0 y 1 [s]), esto se consiguió cambiando el periodo de muestreo ($T_s = 0.1$ [s] para 10 muestras, $T_s = 0.01$ [s] para 100 muestras y $T_s = 0.002$ [s] para 500 muestras); además, se ajustó la resolución de los estimados en $\Delta\omega_1 = \Delta\omega_2 = 0.1$. Para las simulaciones se usó un ordenador con procesador de cuatro núcleos, velocidad de 2.4 GHz y memoria RAM de 8 GB.

Se puede observar en la Figura 4 que a medida que la duración de la ventana y el periodo de muestreo

aumentan, los tiempos de cálculo se incrementan. En el caso de la señal bajo estudio, es posible obtener tiempos de cómputo por debajo de los 100 [s] cuando se analiza la señal de diez muestras o de 100 muestras, junto con ventanas de duración $u_h \leq 50.1$ [s]. Por otra parte, cuando la señal tiene 500 muestras se obtienen tiempos de cómputo por debajo de los 300 [s] usando ventanas con ancho $u_h \leq 4.1$ [s].

**Figura 4.** Tiempo computacional del cálculo de la LPFT en función de la duración de la ventana para diferentes tiempos de muestreo.**Fuente:** elaboración propia.

En la Figura 4 se resalta con un cuadro punteado las duraciones de ventana que permiten obtener los estimados de la IF en tiempos menores a 60 segundos; esta franja coincide con el rango en el cual el valor del SRMSE es menor a 0.03 (Tabla 1). Esto confirma que el intervalo u_h óptimo para el análisis de la señal de prueba es $u_h \leq 50.1$ [s].

Por otra parte, la manera en que se comporta el tiempo computacional en función del período de muestreo se muestra en la Figura 5. Para estas simulaciones se usaron diferentes valores de $\Delta\omega_1 = \Delta\omega_2$, manteniendo constante la duración de la ventana en $u_h = 20.1$ [s]. Se puede observar que cuando $\Delta\omega_m$ disminuye (mejorando la resolución), los tiempos de cómputo aumentan; esto se debe al aumento en la cantidad de valores de $\bar{\omega}_1$ y $\bar{\omega}_2$ que se evalúan durante el cálculo de la LPFT. Si se comparan estos tiempos con los resultados del SRMSE (Tabla 1 y Tabla 2), puede notarse como al disminuir $\Delta\omega_1$ y $\Delta\omega_2$ de 0.1 a 0.05 el SRMSE disminuye de 0.03 a 0.014, respectivamente. Esta diferencia muestra que para reducir los tiempos de cómputo de la LPFT es conveniente evaluar de manera conjunta el tipo de señal analizada, el número de muestras y los valores fijados para $\Delta\omega$.

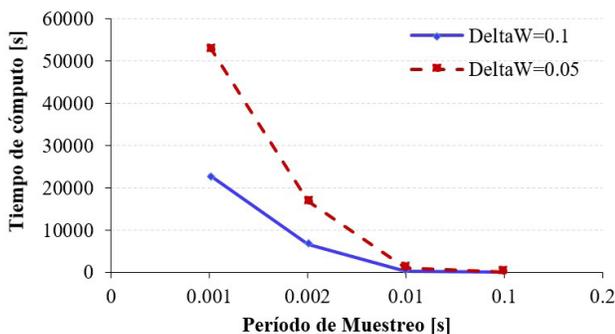


Figura 5. Tiempo computacional del cálculo de la LPFT en función del período de muestreo para diferentes

$\Delta\omega_1 = \Delta\omega_2$ y con $u_h = 20.1$ [s].

Fuente: elaboración propia.

CONCLUSIONES

En este artículo se ha presentado en detalle el proceso de aplicación de la LPFT para el análisis de una señal de fase variable en el tiempo y la estimación de la frecuencia instantánea (IF) y sus derivadas sobre el espacio $t - \bar{\omega}(t, h)$; para este fin, se propuso y validó un algoritmo para el cálculo de la LPFT basado en la aplicación de la aproximación local polinomial (LPA), la combinación de

estimados simultáneos y el cálculo del periodograma local polinomial (LPP).

A partir de las simulaciones realizadas, se observó que para la obtención de resultados confiables en los estimados de $\bar{\omega}(t, h) = (\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t), \dots, \omega_m(t))$ no es necesario utilizar anchos de ventana grandes o una alta resolución en los estimados ($\Delta\omega_1$ y $\Delta\omega_2$); lo anterior es importante al momento de definir el valor de las constantes de paso ($\Delta\omega$) y los límites de evaluación de los estimados, más si se tiene en cuenta que en ciertas aplicaciones el número de muestras de una señal depende de la ventana de tiempo preestablecida y el periodo de muestreo con que se adquiere. En esos casos en los que se registran señales, discretizadas con un número de muestras fijo, la única manera de reducir el tiempo de cómputo será modificando la resolución de los estimados $\Delta\omega_m$.

Finalmente, se observó que el aumento en la resolución de los estimados ($\Delta\omega$), el aumento en la duración de la ventana (u_h) y el aumento en el número de muestras incrementan los tiempos de cómputo en el cálculo de la LPFT.

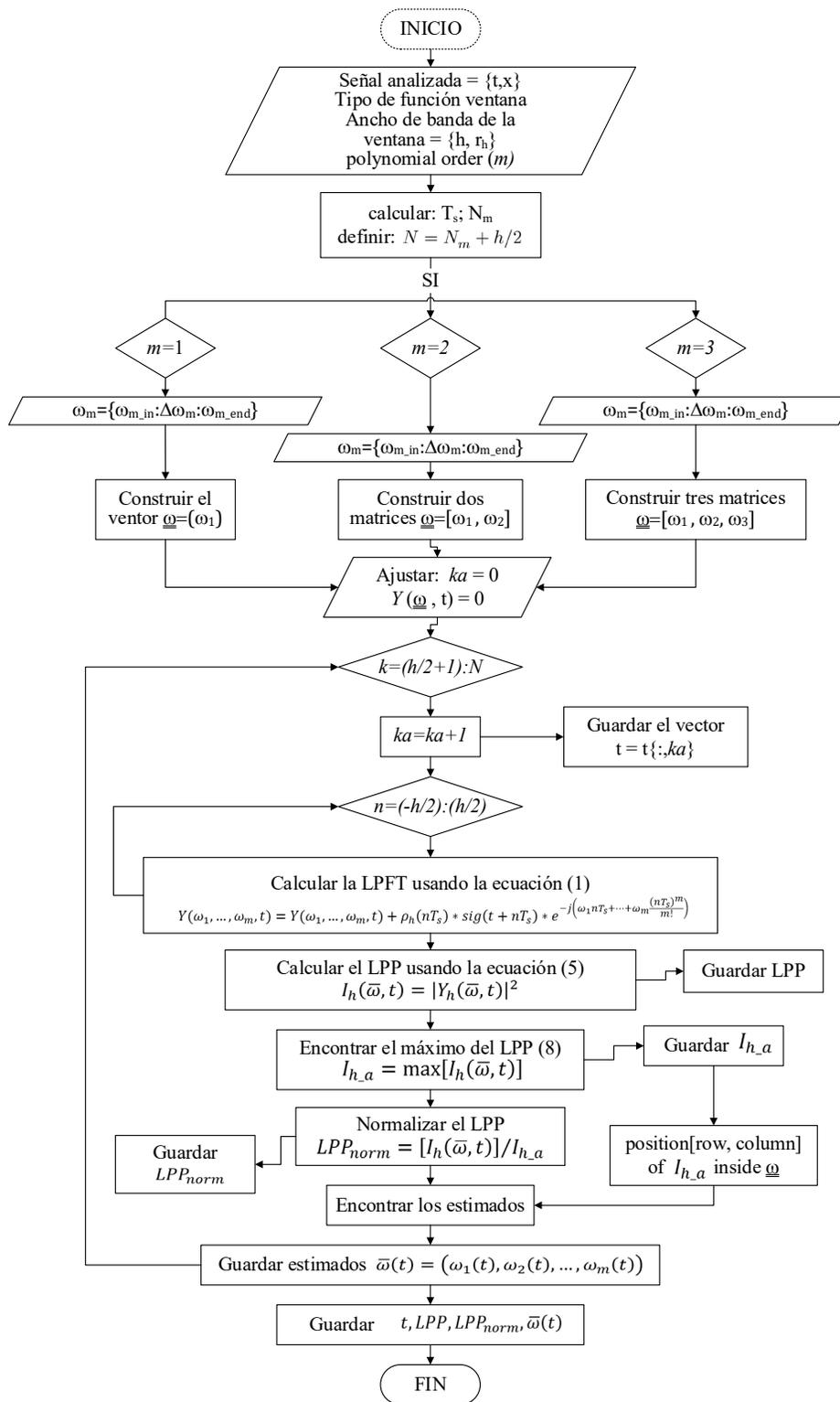
REFERENCIAS

- [1] M. Bollen y I. Gu, *Signal processing of power quality disturbances*. New York, USA: IEEE Press Series on Power Engineering, 2006. <https://doi.org/10.1002/0471931314>
- [2] J. Proakis y D. Manolakis, *Digital signal processing: principles, algorithms and applications*, 3rd ed. Prentice-Hall of India, 2000.
- [3] M. Bastiaans, "On rotated time-frequency kernels". *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 9, nº 11, pp. 378–381, 2002. <https://doi.org/10.1109/LSP.2002.805118>
- [4] E. Sejdić, I. Djurović, y J. Jiang, "Time–frequency feature representation using energy concentration: An overview of recent advances". *Digit. Signal Process.*, vol. 19, nº 1, pp. 153–183, ene. 2009.

- [5] V. Katkovnik, "A new form of the Fourier transform for time-varying frequency estimation". En *Proc URSI International Symposium on Signals Systems and Electronics ISSSE 95*, 1995, pp. 179–182. <https://doi.org/10.1109/ISSSE.1995.497962>
- [6] X. Li, G. Bi, S. Stankovic, y A. M. Zoubir, "Local polynomial Fourier transform: A review on recent developments and applications". *Signal Processing*, vol. 91, n° 6, pp. 1370–1393, jun. 2011. <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2010.09.003>
- [7] V. Katkovnik, "Local polynomial periodograms for signals with the time-varying frequency and amplitude". *1996 IEEE Int. Conf. Acoust. Speech, Signal Process.*, vol. 3, pp. 1399–1402, 1996.
- [8] V. Katkovnik, "Discrete-time local polynomial approximation of the instantaneous frequency". *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 46, n° 10, pp. 2626–2637, 1998. <https://doi.org/10.1109/78.720366>
- [9] X. Li y G. Bi, "The reassigned local polynomial periodogram and its properties". *Signal Processing*, vol. 89, n° 2, pp. 206–217, feb. 2009. <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2008.08.006>
- [10] M. Z. Ikram, K. Abed-Meraim, y Y. Hua, "Fast Quadratic Phase Transform for Estimating the Parameters of Multicomponent Chirp Signals". *Digit. Signal Process.*, vol. 7, n° 2, pp. 127–135, abr. 1997. <https://doi.org/10.1006/dspr.1997.0286>
- [11] G. Bi, Y. Wei, G. Li, y C. Wan, "Radix-2 DIF fast algorithms for polynomial time-frequency transforms". *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. 42, n° 4, pp. 1540–1546, oct. 2006. <https://doi.org/10.1109/TAES.2006.314595>
- [12] G. Bi y Y. Ju, "Radix-3 fast algorithms for polynomial time frequency transforms". *Signal Processing*, vol. 88, n° 9, pp. 2316–2322, sep. 2008. <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2008.03.018>
- [13] G. Bi y Y. Wei, "Split-Radix Algorithms for Arbitrary Order of". vol. 55, n° 1, pp. 134–141, 2007.
- [14] V. Katkovnik, "Nonparametric estimation of instantaneous frequency". *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 43, n° 1, pp. 183–189, 1997. <https://doi.org/10.1109/18.567676>
- [15] S. Peleg y B. Porat, "The Cramer-Rao lower bound for signals with constant amplitude and polynomial phase". *Signal Process. IEEE Trans.*, vol. 39, n° 3, pp. 1989–1992, 1991. <https://doi.org/10.1109/78.80864>
- [16] P. Djuric y S. Kay, "Parameter estimation of chirp signals". *Acoust. Speech Signal Process. ...*, vol. 3, n° 17, pp. 2118–2126, 1990. <https://doi.org/10.1109/29.61538>
- [17] D. Rife y R. Boorstyn, "Single tone parameter estimation from discrete-time observations". *Inf. Theory, IEEE Trans.*, vol. 1, n° 5, 1974.
- [18] X. Li y G. Bi, "Uncertainty principle of the second-order LPFT". en *2009 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, 2009, pp. 325–328.



Anexo 1. Algoritmo para el cálculo de la LPFT



Fuente: elaboración propia.