



Solución de la ecuación no lineal de Schrodinger (1+1) en un medio Kerr

Solution of the nonlinear Schrodinger equation (1+1) in a Kerr medium

Francis Segovia Chaves¹ Emilse Cabrera²

Para citar este artículo: Segovia, F. y Cabrera, E. (2015). Solución de la ecuación no lineal de Schrodinger (1+1) en un medio Kerr. *Revista Redes de Ingeniería*. 6(2), 26-32.

Recibido: 22-mayo-2015 / Aprobado: 11-noviembre-2015

Resumen

Se presenta un marco teórico y se muestra una simulación numérica de la propagación de solitones. Con especial atención a los solitones ópticos espaciales, se calcula analíticamente el perfil de solitón correspondiente a la ecuación Schrodinger no-lineal para un medio Kerr. Los resultados muestran que los solitones ópticos son pulsos estables cuya forma y espectro son preservados en grandes distancias.

Palabras clave: ecuación de Schrodinger no lineal, óptica no lineal, solitones.

Abstract

This document presents a theoretical framework and shows a numerical simulation for the propagation of solitons. With special attention to the spatial optical solitons, we calculates analytically the profile of solitón corresponding to the non-linear Schrodinger equation for a Kerr medium. The results show that the optical solitons are stable pulses whose shape and spectrum are preserved at great distances.

Keywords: nonlinear optics, nonlinear Schrodinger equation, solitons.

1. Físico, Universidad de Nariño; magíster en Física, Universidad del Valle; Doctor (c) en Física, Universidad Nacional de Colombia; profesor asistente, programa de Física, Universidad Surcolombiana. Contacto: francis.segovia@usco.edu.co, francis.segoviac@gmail.com
2. Estudiante de pregrado, programa de Física, Universidad Surcolombiana. Contacto: emili_9613@hotmail.com

INTRODUCCIÓN

El desarrollo de la física no lineal se remonta a 1834, cuando el ingeniero escocés John Scott Russell, al encontrarse en el canal Unión en Herminston, registra el movimiento de traslación de una onda sin cambiar su forma al propagarse a una gran distancia de alrededor tres kilómetros [1]. Fue hasta 1871, cuando el Boussineq-publica el formalismo físico-matemático para explicar las observaciones de Russell. En 1895 los matemáticos holandeses Korteweg y De Vries modelan las observaciones de Russell por medio de una ecuación diferencial parcial no lineal llamada ecuación KdV [2]. En 1965 los físico- matemáticos, Norman Zabusky y Martin Kruskal, realizaron los primeros trabajos en la obtención de soluciones numéricas de la ecuación KdV, demostrando así la existencia de ondas solitarias que se mantenían propagando permanentemente sin sufrir deformación alguna, denominaron a dichas soluciones no lineales solitones [3], [4].

Los solitones son ondas solitarias capaces de propagarse sin distorsión a través de sistemas no lineales, es decir, sistemas cuyo comportamiento está gobernado por ecuaciones diferenciales no lineales [5]. La formación de los solitones abarca diversos sistemas en la naturaleza, desde su formación en los canales de agua, hasta su existencia en fibras ópticas, en los impulsos eléctricos de las neuronas, en procesos de condensación de Bose Einstein y en la teoría de las cuerdas [6], [7], [8], [9]. Podemos encontrar diferentes clases de solitones: brillantes, oscuros, topológicos, no topológicos, solitones de Bragg, solitones vectoriales, solitones tipo vórtice, solitones espacio-temporales, solitones discretos y solitones embebidos [10], [11], [12]. En general, los solitones representan un fenómeno natural que ocurre bajo ciertos mecanismos de diversa naturaleza (mecánica, óptica, etc.) y puede explicarse matemáticamente como una solución a una ecuación de onda cuyo carácter no lineal permite soluciones en la forma de paquetes de onda localizados.

Este tipo de pulso tiene la facultad de propagarse sin distorsión con un adecuado balance entre un fenómeno no lineal y un fenómeno dispersivo [13]. Vale resaltar que en el campo de las telecomunicaciones, las características no lineales y dispersivas de las fibras ópticas les permiten transmitir solitones [14]. Se encuentra, en ellas el estudio de los efectos no lineales, entre los cuales se encuentra la propagación de solitones, los cuales son pulsos estables de luz infrarroja que pueden propagarse a lo largo de las fibras, por cientos de kilómetros, sin prestar distorsión en su perfil temporal ni en su espectro de frecuencias.

Desde un punto de vista óptico podemos distinguir dos principales tipos de solitones: si los fenómenos no lineales logran contrarrestar el fenómeno de dispersión cromática (fenómeno donde diferentes longitudes de onda viajan a diferentes velocidades) produciendo una invarianza del perfil en el tiempo, se habla de un solitón óptico temporal, mientras que si la no linealidad contrarresta la difracción y la invarianza del haz es producida en alguna coordenada espacial, se habla entonces de un solitón óptico espacial. Teniendo en cuenta la descripción dada en el trabajo [4], debe tenerse en cuenta que cuando un haz de luz láser se propaga en un medio no lineal, se modifica el índice de refracción, de tal manera que este aumente como resultado de una mayor intensidad del láser produciendo así el fenómeno de auto enfocamiento del haz óptico, y oponiéndose así a la tendencia natural del haz de experimentar una divergencia debido al fenómeno de difracción [15].

Cuando existe un balance del fenómeno de auto enfocamiento y de difracción el haz no sufre deformación, creándose así un solitón óptico espacial. En el presente trabajo nos concentraremos en estudiar solitones óptico espaciales en medios materiales no lineales tipo Kerr, donde el índice de refracción presenta una dependencia lineal con la intensidad del campo. El propósito del presente trabajo es presentar una revisión en la

solución analítica de la ecuación de Schrödinger no lineal unidimensional. Para ello seguiremos los lineamientos dados en el trabajo de S. López Aguayo y colaboradores, quienes presentan una revisión completa de los resultados analíticos y las simulaciones numéricas en el estudio concerniente a la propagación de solitones ópticos cuando se resuelve la ecuación de Schrodinger no lineal.

MÉTODOS

Este trabajo está estructurado de la siguiente manera: haciendo uso de la aproximación paraxial, deduciremos la ecuación no lineal de Schrodinger, ecuación que será solucionada analíticamente para encontrar el perfil de propagación del solitón.

Las leyes fundamentales de la electrodinámica vienen determinadas por las ecuaciones de Maxwell, en el sistema internacional se escriben [16],

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (1)$$

En la ecuación (1), $\vec{E}(\vec{r}, t)$ y $\vec{D}(\vec{r}, t)$ representa respectivamente los vectores de campo eléctrico y de desplazamiento eléctrico. El vector $\vec{B}(\vec{r}, t)$ representa la inducción magnética y $\vec{H}(\vec{r}, t)$ el vector de campo magnético. Las fuentes de los campos electromagnéticos se representan por la densidad volumétrica de carga eléctrica $\rho(\vec{r}, t)$ y el vector de densidad de corriente eléctrica $\vec{J}(\vec{r}, t)$. Estas ecuaciones se complementan con las ecuaciones constitutivas o relaciones materiales; para medios lineales, homogéneos e isótropos vienen determinadas por [17]:

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon \vec{E}(\vec{r}, t) \quad \text{y} \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu \vec{H}(\vec{r}, t) \quad (2)$$

Los parámetros que caracterizan las propiedades materiales y eléctricas de los medios materiales que aparecen en la ecuación (2), se representan por ϵ la permitividad dieléctrica y μ la permeabilidad magnética. En ausencia de fuentes ($\rho = 0$ y $\vec{J} = 0$), la ecuación de onda de D' Alembert para el vector de campo óptico es:

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3)$$

En la ecuación (3), la constante de la velocidad de la luz en el vacío es $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$. Consideramos un vector de campo $\vec{E}(\vec{r}, t)$ cuasi-monocromático,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{\epsilon}(\vec{r}) e^{-i\omega t}, \quad (4)$$

Donde las cantidades $\vec{\epsilon}(\vec{r})$ y ω que aparecen en la ecuación (4), son el vector de amplitud del campo eléctrico y la frecuencia angular, respectivamente. Al reemplazar la ecuación (4) en la ecuación (3) y teniendo en cuenta que el cuadrado del vector de onda es $k^2 = n^2 k_0^2$, siendo $k_0 = 2\pi/\lambda$ el número de onda en el vacío, λ la longitud de onda y n el índice de refracción, se obtiene:

$$\nabla^2 \vec{\epsilon}(\vec{r}) + n^2 k_0^2 \vec{\epsilon}(\vec{r}) = 0 \quad (5)$$

Si el medio material posee una no-linealidad del tipo Kerr, el índice de refracción se escribe

$$n = n_0 + n_2 |E|^2 \quad (6)$$

En la ecuación (6), n_0 y n_2 representan los índices de refracción lineal y no lineal, respectivamente. Para solucionar la ecuación (5), consideramos que la dirección de propagación del campo coincide con el eje z, se propone una solución de la forma

$$\vec{\epsilon}(\vec{r}) = \psi(\vec{r}) e^{i\beta_0 z} \quad (7)$$

donde hemos definido $\beta_0 = k_0 n_0$. Reemplazando (6) en (5) se encuentra

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 2i\beta_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} + (n^2 k_0^2 - n_0^2 k_0^2) \psi = 0 \quad (8)$$

En la aproximación paraxial se considera que la envolvente transversal de campo varía suavemente a lo largo de la dirección de propagación, de manera que

$$\left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right| \ll \left| 2\beta_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} \right| \quad (9)$$

Al tener en cuenta la ecuación (9), en la ecuación de onda (8) obtenemos la ecuación reportada en [4],

$$i\beta_o \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right] + \frac{1}{2} (n^2 k_0^2 - n_0^2 k_0^2) \psi = 0 \quad (10)$$

Reemplazamos en la ecuación (10), el índice de refracción dado por la ecuación (6) y manteniendo solo el término a primer orden en n_2 ($n_2 \ll n_o$), se obtiene la ecuación que rige la evolución del campo a través de un material tipo Kerr.

$$i\beta_o \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right] + \frac{\beta_o k_o}{2} n_2 |\psi|^2 \psi = 0 \quad (11)$$

Para resolver la ecuación (11), hacemos el siguiente cambio de variables:

$$\mathbf{x} = x/\omega_o, \quad y = y/\omega_o, \quad z = z/\omega_o \quad \text{y} \quad u = \sqrt{k_o L_d |n_2|} \psi. \quad (12)$$

Donde ω_o es un parámetro de escala transversal relacionado con el ancho del haz inicial $L_d = \beta_o \omega_o^2$, es conocida como la distancia de Rayleigh o la distancia de difracción, para $n_2 > 0$, es la distancia característica de la no-linealidad. Se demuestra que la ecuación (11) se logra escribir de manera adimensional teniendo en cuenta la ecuación (12), así

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + |u|^2 u = 0 \quad (13)$$

La ecuación (13) es conocida como la ecuación no lineal de Schrödinger (NLSE, por sus siglas en inglés, Nonlinear Schrödinger Equation). Se dice que esta ecuación es (2+1) dimensional, donde el 2 se refiere al número de dimensiones transversales del haz y el +1 corresponde a la dirección de propagación en z [18].

La solución de NLSE ha sido estudiada mediante el método de dispersión inversa, para el presente trabajo se trabajará por simplicidad únicamente con la NLSE (1+1) dimensional,

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{x}^2} + |u|^2 u = 0 \quad (14)$$

Proponemos una solución solitónica de la forma

$$U(\mathbf{x}, z) = f(\mathbf{x}) e^{inz} \quad (15)$$

Donde $f(\mathbf{x})$ y n son funciones a determinar. Se reemplaza la ecuación (15) en la ecuación (14) y resulta lo siguiente:

$$\frac{d^2 f}{d\mathbf{x}^2} - n f + f^3 = 0. \quad (16)$$

Teniendo en cuenta que $f'(\mathbf{x}) f''(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \frac{d}{d\mathbf{x}} (f'(\mathbf{x}) f'(\mathbf{x}))$ se multiplica la ecuación (16) por $2 \frac{df}{d\mathbf{x}}$ y se integra para obtener:

$$\left(\frac{df}{d\mathbf{x}} \right)^2 = n f^2 - \frac{1}{2} f^4 + A \quad (17)$$

En la ecuación (17) A es una constante de integración, para nuestros cálculos como caso particular elegimos que $A = 0$. Resolviendo la ecuación (17) para df/dx , se obtiene:

$$\frac{df}{d\mathbf{x}} = \sqrt{n} f(\mathbf{x}) \sqrt{1 - \frac{1}{2n} f^2(\mathbf{x})} \quad (18)$$

Para solucionar la ecuación (18) consideremos el siguiente cambio de variable [19],

$$\sqrt{\frac{1}{2n}} f(\mathbf{x}) = \text{sech } \theta \quad (19)$$

Reemplazamos la ecuación (19) en la ecuación (18) y después de resolver las integrales se obtiene,

$$\theta = -\sqrt{n} \mathbf{x} \quad (20)$$

La solución buscada para la ecuación (16), teniendo en cuenta la ecuación (20), viene dada por:

$$f(\mathbf{x}) = \sqrt{2n} \text{sech}(\sqrt{n} \mathbf{x}) \quad (21)$$

Para determinarse la constante n , en la función puramente real la ecuación (21), se imponen las siguientes condiciones:

$$f(\mathbf{x}) = \alpha \quad \text{y} \quad \frac{df}{d\mathbf{x}} = 0 \quad \text{para} \quad \mathbf{x} = 0 \quad (22)$$

$$f(\mathbf{x}) \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \frac{df}{d\mathbf{x}} \rightarrow 0 \quad \text{para} \quad \mathbf{x} \rightarrow \infty \quad (23)$$

Reemplazamos en la ecuación (17), las condiciones dadas por la ecuación (22) y la ecuación (23), obteniendo el valor de la constante

$$n = \frac{a^2}{2} \tag{24}$$

Finalmente, se sustituyen los resultados dados por las ecuaciones (21) y (24) en la ecuación (15)

$$u(x, z) = a \operatorname{sech}\left(\frac{a^2}{\sqrt{2}}x\right) e^{ia^2z/2} \tag{25}$$

Siendo a un número real y representa la amplitud del solitón. El resultado obtenido por la ecuación (25), representa la solución analítica de la ecuación NLS (1+1) dimensional.

RESULTADOS

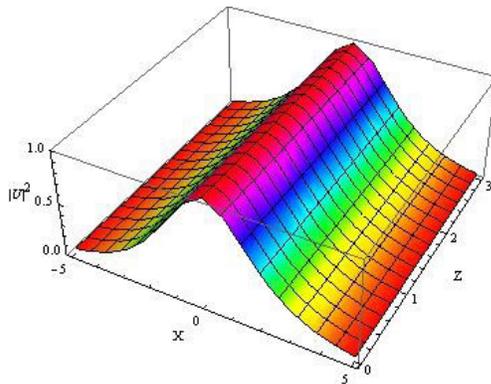


Figura 1. Solitón espacial brillante fundamental dado por la ecuación (25) con $a = 1$.

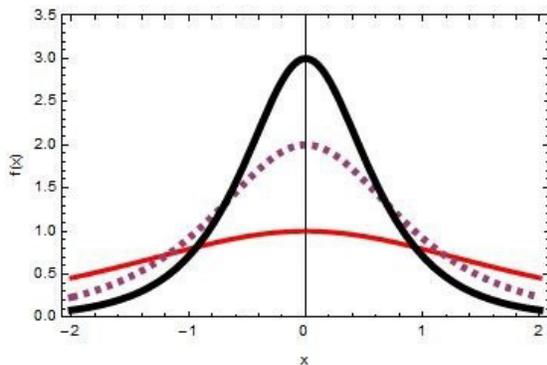


Figura 2. Perfil de la solución solitónica dada por la ecuación (21) con $a = 1, 2$ y $a = 3$.

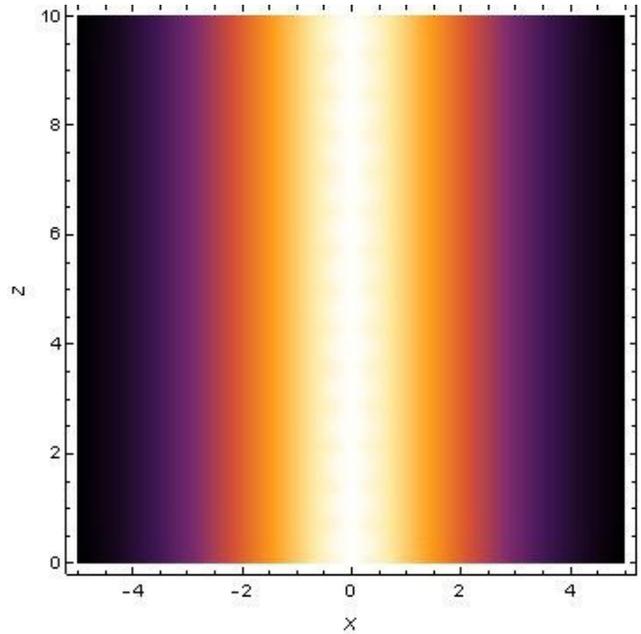


Figura 3. Propagación del solitón representado por la ecuación (25) con $a = 1$.

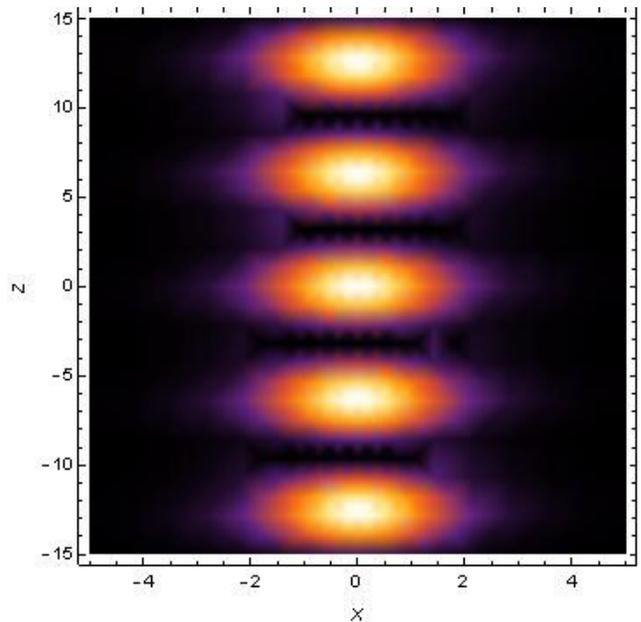


Figura 4. Intensidad del solitón con $a = 1$.

DISCUSIÓN

La ecuación (25), representa un haz cuya sección transversal no cambia conforme se propaga en el medio como se muestra en la figura 1. En ella se

observa que el perfil transversal del haz evoluciona periódicamente a lo largo del eje de propagación, generándose compresiones, máximos locales y volviéndose a ensanchar, recuperando la forma $u(x,0) = \alpha \operatorname{sech}\left(\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}x\right)$, [4], [19]. En la figura 2 presentamos los perfiles para las soluciones de la ecuación (21), con tres valores diferentes de amplitud del solitón. La curva color gris es para $\alpha = 1$, la curva a trazos es para $\alpha = 2$ y la línea continua negra es para $\alpha = 3$. Como se describe en el trabajo [4], se encuentra un proceso no lineal de auto-enfocamiento en el que existe un balanceo con el fenómeno inherente de difracción de la luz, resultando así que se propague un haz óptico invariante. Lo anterior se observa en la figura 3, en ella se presenta la propagación de un haz descrito por la ecuación (25), se observa de manera general que dicho haz se comporta de manera periódica durante su propagación en el medio Kerr. El solitón mantiene su perfil incluso para cualquier valor de z , formando así su propia guía de onda durante toda la propagación, lo cual se aprecia claramente en la figura 4. Los resultados que se presentan son importantes ya que nos muestran que el comportamiento de los solitones al propagarse a lo largo de las fibras ópticas en los sistemas de transmisión de información, pues pueden contrarrestarse los efectos de dispersión, lo que hace posible transmitir pulsos más cortos a grandes distancias.

CONCLUSIONES

Hemos presentado una introducción en el área de la física no lineal, en especial en la teoría básica sobre solitones ópticos concentrándonos en los solitones espaciales unidimensionales en presencia de un medio no lineal tipo Kerr. La ecuación de Schrödinger no lineal es común en sistemas débilmente no lineales pero fuertemente dispersivos. Al igual como ocurre en otro tipo de ecuaciones no lineales de la física matemática, existe un equilibrio entre la no linealidad y la dispersión, dando lugar a propiedades y características importantes

en las soluciones de esta ecuación, como son los solitones. En el presente trabajo ilustramos una solución particular para la ecuación no lineal de Schrödinger, que nos permite evidenciar el empleo de los solitones espaciales como guías de ondas. Es decir, se observa que el comportamiento de los solitones a propagarse a lo largo de fibras ópticas es importante para los sistemas de transmisión de información, ya que al contrarrestarse los efectos de dispersión de primer orden es posible transmitir pulsos más cortos a mayores distancias, permitiendo reducir los costos de implementación y funcionamiento de un sistema comunicaciones óptico. Los resultados obtenidos esta en concordancia con los reportados en [20], donde solucionan numéricamente la ecuación de Schrödinger no lineal por el método de descomposición ortogonal evidenciando la no distorsión de perfil a lo largo de una guía de propagación del pulso.

REFERENCIAS

- [1] P.G. Drazin and R. S. Johnson. *"Solitons: an Introduction"*, Cambridge: Ed. Cambridge University Press, pp. 1-17, 1996.
- [2] D. J. Korteweg and G. de Vries. *"Philosophical Magazine, 5th series"*, vol. 39, 422- 443, 1895.
- [3] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal. "Interaction of solitons in a collision less plasma and the recurrence of initial states", *Phys. Rev. Lett.*, vol 15, 240-243, 1965.
- [4] S. López, M. Esparza, G. Lem y J. C. Gutiérrez. "Ondas solitarias no lineales: una introducción a los solitones ópticos espaciales", *Rev. Mex. Fis.*, vol 60, 39-50, 2014.
- [5] Y. Kivshar and G. Agrawal. *"Optical solitons"*, USA: Ed. Academic Press, 2003.
- [6] M. Segev. "From the Guest Editor-Solitons: A Universal Phenomenon of Self-Trapped Wave Packets", *Opt. Photonics news*, vol.13, 27, 2002.
- [7] F. Wise and P. Di Trapani. "Spatiotemporal Solitons", *Opt. Photonics news*, vol. 13, 28-32, 2002.

- [8] F. V. Kusmartsev. "Application of catastrophe theory to molecules and solitons", *Phys. Rep.*, vol. 183, 1-35, 1989.
- [9] T. Herr, V. Brasch, J. D. Jost, C. Y. Wang. "Temporal solitons in optical microresonators", *Nature Photonics*, vol. 8, 145-152, 2014.
- [10] F. V. Kusmartsev. "Application of catastrophe theory to molecules and solitons", *Phys. Rep.*, vol. 183, 1-35, 1989.
- [11] M. Rho, A. Goldhaber and G. Brown. "Topological soliton bag model for baryons", *Phys. Rev. Lett.*, vol. 51, 747, 1983.
- [12] J. M. Soto y C. Mejía. "Optical solitons in dissipative media", *Óptica Pura y Aplicada*, vol. 44, 425-431, 2011.
- [13] G. Torres, J. Sánchez, M. Iturbe, G. García, M. Torres y C. Triviño. "Guías de onda generadas por solitones ópticos espaciales", *Rev. Mex. Fis.*, vol 41, 662-694, 1995.
- [14] E. Arévalo, C. Ramírez y A. Guzmán. "Solitones en fibras ópticas", *Rev. Momento*, vol. 11, 9-16, 1995.
- [15] S. López, M. Esparza, G. Lem y J.C. Gutiérrez. "Ondas solitarias no lineales: una introducción a los solitones ópticos espaciales", *Rev. Mex. De física*, vol. 60, 39-50, 2011.
- [16] J. Jackson. "Classical Electrodynamics", USA: Ed. Jhon Wiley and Sons, 3th edition, pp. 237-241, 1998.
- [17] A. Sepulveda. "Electromagnetismo", Medellín: Ed. Universidad de Antioquia, pp. 270-271, 2008.
- [18] G. Stephenson. "Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales", España: Ed. Reverte, pp. 119-140, 1982.
- [19] S. López, Y. V. Kartashov, V. Vysloukh and L. Torner. "Method to generate complex quasi-nondiffracting optical lattices", *Phys. Rev. Lett.*, vol. 105, 031902, 2010.
- [20] B. Karasozen, C. Akkoyunlu and M. Uzunca. "Model order reduction for nonlinear Schrödinger equation", *Appl. Math. and Comp.*, vol. 285, 509-519, 2015.

