



## Modelación estadística de la textura del *clutter* marino en *Matlab*

### Statistical modeling of the texture of sea clutter in Matlab

José Raúl Machado Fernández<sup>1</sup>, Raiko Israel Pupo Hondal<sup>2</sup>

**Fecha de recepción:** 2 de marzo de 2015

**Fecha de aceptación:** 28 de agosto de 2017

**Cómo citar:** Machado F., J.R. y Pupo H., R.I. (2017). Modelación estadística de la textura del clutter marino en *Matlab*. *Revista Tecnura*, 21(54), 13-32. <https://doi.org/10.14483/22487638.11708>

#### Resumen

**Contexto:** La modelación estadística de la señal interferente conocida como *clutter* marino se efectúa a través de dos componentes: uno de capilaridad y otro de textura. La distribución más utilizada para la textura es la *gamma*. No obstante, varios autores han defendido el uso alternativo de la *inversa gamma* y la *inversa gaussiana*.

**Método:** Con el objetivo de brindar un acceso fácil a la manipulación de los modelos y a la realización de comparaciones entre ellos, los autores del presente artículo simularon en *Matlab* las características principales de estas tres distribuciones. Adicionalmente, se agregó la distribución *raíz gamma* que sustituye a la *gamma* cuando se trabaja con muestras de amplitud. El método aplicado consistió en la revisión bibliográfica para encontrar las expresiones de cada uno de los parámetros modelados, y la posterior simulación computacional que permitió detectar errores ocasionales que surgen al consultar diferentes estudios.

**Resultados:** Se creó una pequeña librería de simulación estocástica que incluye funciones de densidad y distribución, generación de variables aleatorias, estimación de parámetros y cálculo de momentos estadísticos, entre otros. Además, se elaboraron

funciones informáticas complementarias que permitieron la validación por comparación con resultados dados por terceros y mediante la interacción de los diferentes componentes de la librería.

**Conclusiones:** La librería creada habilita el uso de múltiples distribuciones, para la modelación del eco electromagnético de la superficie marina. Esto permitirá generar nuevos detectores de radar que se adapten a condiciones heterogéneas como las encontradas en las costas cubanas, donde alternan distintos niveles de profundidad, manglares, aguas salobres, islotes, vegetación acuática prominente, entre otras.

**Palabras clave:** modelación estadística, *clutter* marino, textura del *clutter*, distribución *gamma*, distribución *inversa gamma*, distribución *inversa gaussiana*, distribución *raíz gamma*.

#### Abstract

**Context:** The statistical modeling of the interference signal known as sea clutter is achieved assuming the input results from the combination of two components: one for the speckle and another for the texture. The Gamma distribution is the more widely applied for the texture component. Nevertheless, several authors have defended the idea of using the Inverse Gamma and Inverse Gaussian instead.

1 Ingeniero en Telecomunicaciones y Electrónica; magíster en Telecomunicaciones y Telemática. Profesor e investigador de la Universidad Tecnológica de La Habana José Antonio Echeverría (CUJAE). La Habana, Cuba. Contacto: [josemf@tele.cujae.edu.cu](mailto:josemf@tele.cujae.edu.cu) [m4ch4do@hispavista.com](mailto:m4ch4do@hispavista.com)  
2 Ingeniero en Telecomunicaciones y Electrónica. Investigador adjunto de la Universidad Tecnológica de La Habana José Antonio Echeverría (CUJAE). La Habana, Cuba. Contacto: [watsulla@gmail.com](mailto:watsulla@gmail.com)

**Method:** In order to provide an easy access to the handling of the models and the execution of comparisons between them, the authors of the current paper simulated in MATLAB the main characteristics of these distributions. In addition, the Root-Gamma model was also included because it replaces the Gamma distribution when samples are processed in the amplitude domain. The applied method consisted in a deep bibliography review for finding the corresponding expressions for each simulated model; the method also included additional computational simulations that allowed to identify occasional errors that were committed by different authors when characterizing the models.

**Results:** A small framework was created for stochastic simulation containing density and distribution functions, mechanisms for random variable generation, parameter estimation methods and statistical

moment closed expressions, among others. Besides, complementary functions were prepared for guaranteeing the validation by comparison with results provided by third parties and through the interaction between the different components of the library.

**Conclusions:** The created library enables the use of multiple distributions for the modeling of the electromagnetic echo received from the sea surface. This will certainly motivate the creation of new radar detectors adapted to heterogeneous conditions such as the ones existing in Cuban coastal regions, where one may find different depth levels, mangrove swamps, brackish water, islets, prominent aquatic vegetation, among others.

**Keywords:** statistical modeling, sea clutter, texture of the clutter, Gamma distribution, Inverse Gamma distribution, Inverse Gaussian distribution, Root-Gamma distribution.

## INTRODUCCIÓN

El *clutter* marino es la principal señal interferente que es necesario procesar en sistemas de radar. Cuando el haz del radar explora un medio marino, la señal de sondeo, además de reflejarse sobre los barcos o aviones que vuelan a baja altitud, interactúa con la superficie del mar, provocando un eco que se recibe de vuelta por la propia antena transmisora. Dada la variabilidad introducida por el oleaje, esta señal de eco, o *clutter*, toma amplitudes cambiantes con valores elevados (*spikes*) que pueden confundirse con blancos (Skolnik, 2008).

La supresión del *clutter* se realiza comúnmente con procesadores de *razón de falsa alarma constante* (CFAR, *constant false alarm rate*) de ventana deslizante, que requieren de la suposición de un modelo para el *clutter*, de forma que pueda ajustarse el umbral de detección de manera eficiente (Rohling, 1983). Esta necesidad ha motivado el estudio de la estadística del *clutter*, caracterizándose el fondo con distribuciones estadísticas variadas.

Aunque distribuciones más sencillas matemáticamente, como la *weibull* (Ishii, Sayama y Mizutani, 2011; Palama, Greco, Stinco y Gini, 2013), y la *log-normal* (Chen, Liu, Wu y Wang, 2013; Sayama e Ishii, 2013), han encontrado aplicación en la representación del *clutter* marino, generalmente se reconoce a la distribución K como la que mejor modela el fenómeno. Con una enorme cantidad de desarrollos vinculados (Meng, Feng, Xue y He, 2013; Tanriverdi, 2012; Yunlong, Chao, Hongzhong y Qiang, 2012; Zhijian, Ruilai, Yong y Jian, 2011; Zhou y Wang, 2009), la distribución K debe su popularidad al hecho de que se relaciona con las características físicas del mar.

El modelo K surge de combinar las distribuciones *exponencial* y *gamma*, asumidas para la capilaridad (*speckle*) y la textura respectivamente (Chan, 1990). La textura representa las olas gravitatorias, u olas pesadas, que no se rigen por las variaciones del viento, y tienen mayores longitudes de onda, con un ritmo lento de cambio.



**Figura 1.** Dinámica del mar: olas capilares moduladas por olas pesadas o gravitatorias

**Fuente:** elaboración propia.

Como se aprecia en la figura 1, las olas capilares tienen menores dimensiones y son moduladas por las gravitatorias. Las olas capilares suman un número elevado y son generadas por la influencia del viento, expresando la tensión superficial del agua. La velocidad de cambio es mucho mayor en este caso, lo cual justifica la aplicación de dos distribuciones independientes (Totir, Rador y Anton, 2008). En efecto, gracias a su definición compuesta, el modelo K tiene ventajas en la representación de las propiedades de correlación de la señal de clutter (Yunlong *et al.*, 2012).

La distribución exponencial usada para la capilaridad ha sido aceptada por la mayoría de los autores, sin que se ofrezcan argumentos sólidos en su contra. Por el contrario, modificaciones han sido presentadas en diversos artículos para el cambio de la distribución de la textura hacia los modelos *inversa gamma* (Rosenberg y Bocquet, 2013, 2015; Stinco, Greco y Gini, 2011) e *inverso gaussiano* (Chen, Cui, Kong y Yang, 2014; Mezache, Soltani, Sahed y Chalabi, 2015; Ollila, Tayler, Koivumien y Poor, 2012), con lo que se demuestra que estos pueden proporcionar mejores ajustes a los datos de clutter marino.

A pesar del éxito de las nuevas distribuciones, la K continúa siendo la opción preferencial en la mayoría de las investigaciones actuales (Jiang *et al.*, 2015; Schoenecker, Willett y Bar Shalom,

2016; Wang *et al.*, 2015). Igualmente, muchos de los estudios realizados sobre datos de clutter no consideran las texturas *inversa gamma* e *inversa gaussiana*, sino que aplican invariablemente una textura *gamma* (Fioranelli *et al.*, 2016; Johnsen, 2015; Preston y Abraham, 2015; Ritchie, Stove, Woodbridge y Griffiths, 2016). Una de las principales limitantes en este sentido es la reducida difusión de las distribuciones entre la comunidad de radar.

Para solucionar este problema, los autores se dieron a la tarea de recopilar en un solo documento las definiciones matemáticas fundamentales relacionadas a las distribuciones *gamma*, *inversa gamma* e *inversa gaussiana*. Además, se implementó una pequeña librería de código abierto en *Matlab* donde se pueden simular las funciones de densidad y distribución, la generación de muestras aleatorias, el cálculo de los momentos y la estimación de los parámetros de las distribuciones, entre otros. También se agregaron funciones adicionales para validar el código por comparación con resultados dados por terceros y mediante la interacción de las propias funciones. La distribución *raíz gamma* fue incluida como un cuarto componente de la librería, ya que ella se obtiene cuando se procesa en el dominio de la amplitud, mientras que la *gamma* corresponde al dominio de la potencia.

Se espera que el presente artículo contribuya a fomentar el uso de diferentes alternativas para la textura del *clutter* marino, y que facilite la realización de comparaciones fiables, así como el diseño de detectores adaptados a diferentes condiciones electromagnéticas. La implementación realizada es de código abierto y contiene varias funciones no presentes en el *Toolbox* estadístico de *Matlab* 2016.

El artículo se desarrolla como sigue. La “Metodología” introduce las definiciones matemáticas de las cuatro distribuciones modeladas en *Matlab* y describe las funciones informáticas que fueron creadas. “Resultados” ofrece ejemplos de utilización del código creado, además muestra la validación de este. Luego, en “Valoración del estudio”, se analizan los principales aportes y aplicaciones de la investigación. “Conclusiones” resalta los puntos fundamentales de la labor realizada y ofrece pautas para el desarrollo ulterior.

## METODOLOGÍA

En esta sección se presentan los fundamentos matemáticos de las distribuciones *gamma*, *raíz gamma*, *inversa gamma* e *inversa gaussiana*. Posteriormente, se describen las funciones informáticas implementadas en *Matlab*.

### Distribución gamma

La distribución *gamma* es asumida comúnmente para la textura del *clutter* marino, como parte de la formulación compuesta de la distribución K cuando se trabaja con muestras de intensidad (Fioranelli *et al.*, 2016; Ritchie *et al.*, 2016; Schoenecker, Willett y Bar Shalom, 2016). La función de probabilidad de densidad (PDF, *probability density function*) (Watts, 2012) y la función de distribución acumulada (CDF, *cumulative distribution function*) (O’Connor, 2011) *gamma*, se muestran en las ecuaciones (1) y (2), respectivamente.

$$f_X(x; b, v) = \frac{b^{2v}}{\Gamma(v)} x^{v-1} \exp(-b^2x) \quad (1)$$

$$F_X(x; b, v) = \frac{\gamma_1(v, b^2x)}{\Gamma(v)} \quad (2)$$

Donde  $b$  es el parámetro de escala,  $v$  es el parámetro de forma y  $\Gamma(\cdot)$  es la *función gamma*, o *función gamma completa*, definida (O’Connor, 2011) según la ecuación (3).

$$\Gamma(k) = \int_0^\infty x^{k-1} e^{-x} dx \quad (3)$$

Además,  $\gamma_1(\cdot)$  es la *función gamma incompleta*, o *función gamma incompleta inferior*, que obedece a la ecuación (4) (O’Connor, 2011).

$$\gamma_1(k, t) = \int_0^t x^{k-1} e^{-x} dx \quad (4)$$

La media ( $E[x]$ ), la varianza ( $V[x]$ ), y el tercero ( $\mu_3$ ) y cuarto ( $\mu_4$ ) momentos centrados se calculan como (Krishnamoorthy, 2016) se indica en las ecuaciones descritas en (5) (Krishnamoorthy, 2016).

$$\begin{aligned} E[x] &= \frac{v}{b^2} & V[x] &= \frac{v}{b^4} \\ \mu_3[x] &= \frac{2v}{b^6} & \mu_4[x] &= \frac{3v(2+v)}{b^8} \end{aligned} \quad (5)$$

Mientras que la asimetría ( $S[x]$ ) y la curtosis ( $K[x]$ ) se ofrecen en la ecuación (6) (Walck, 2007).

$$S[x] = \frac{2}{\sqrt{v}} \quad K[x] = \frac{3(2+v)}{v} \quad (6)$$

Los momentos con respecto al origen se pueden calcular como se aprecia en la ecuación (7) (Krishnamoorthy, 2016).

$$E[x^n] = \frac{1}{b^{2n}} \frac{\Gamma(v+n)}{\Gamma(v)} \quad (7)$$

La ecuación (8) muestra cómo puede realizarse la estimación de los parámetros *gamma* a través del método de los momentos según Forbes, Evans, Hastings y Peacock (2011).

$$b = \sqrt{\frac{E[x]}{V[x]}} \quad v = \frac{E^2[x]}{V[x]} \quad (8)$$

Para la generación de muestras *gamma* se han presentado una buena cantidad de algoritmos. La variante de Marsaglia y Tsang (2000) aplica un método de aceptación/rechazo que ha probado ser muy eficiente, manteniendo a la vez una secuencia simple de pasos. La propuesta es válida para  $v \geq 1$ .

*Paso 0:* (Preparación) Calcular  $D = v - \frac{1}{3}$      $C = \frac{1}{\sqrt{9D}}$

*Paso 1:* Generar  $V = (1 + CN)^3$  donde  $N$  es una variable estándar normal. Repetir si  $V \leq 0$

*Paso 2:* Generar  $U$  distribuida estándar uniforme.

*Paso 3:* Si  $U < 1 - 0,0331N^4$  devolver  $D * V$

*Paso 4:* Si  $\ln(U) < 0,5N^2 + D(1 - V + \ln(V))$  devolver  $D * V$

*Paso 5:* Ir al paso 1.

Para generar muestras *gamma* ( $\gamma_v$ ) con  $v < 1$  se implementó el algoritmo de Best (1993) que fue recomendado por Gentle (2003).

*Paso 0:* (Preparación) Calcular  $T = 0,07 + 0,75\sqrt{1-v}$

$$B = 1 + e^{-T}v/T$$

*Paso 1:* Generar dos variables  $U_1$  y  $U_2$  distribuidas uniformemente.

$$\text{Calcular } V = BU_1$$

*Paso 2:* Si  $V \leq 1$

$$S = TV^{1/v}$$

Si  $U_2 \leq \frac{2-S}{2+S}$  ó  $U_2 \leq e^{-S}$  entonces devolver  $S$

De lo contrario

$$S = -\ln\left[\frac{T(B-V)}{v}\right] \quad Y = S/T$$

Si  $U_2[v + Y(1-v)] \leq 1$  ó  $U_2 \leq Y^{v-1}$  entonces devolver  $S$

*Paso 3:* Volver al paso 1.

Luego de ejecutar cualquiera de los dos algoritmos anteriores, se obtiene un número aleatorio distribuido *gamma* con el parámetro de forma ( $v$ ) especificado y con parámetro de escala igual a la unidad ( $b = 1$ ). Si se multiplica a la variable generada por  $1/b^2$ , el parámetro de escala pasará a ser  $b$  en lugar de 1.

## Distribución raíz gamma

La distribución raíz gamma (*root-gamma*), también conocida como generalizada chi-cuadrado (*generalized-chi-squared*), se aplica en la modelación de la textura del modelo K compuesto para el tratamiento de señales de amplitud (Fiche, Ange-liaume, Rosenberg y Khenchaf, 2015; Marhaban, 2008; Santos Ugarte, De Miguel Vela y Besada Portas, 2008). Ella surge a partir de hallar la raíz cuadrada a una variable distribuida *gamma*, de ahí la similitud entre las definiciones de ambos modelos.

La PDF *raíz gamma* fue dada en Tanriverdi (2012), como se indica en la ecuación (9).

$$f_Y(x) = \frac{2b^{2v}}{\Gamma(v)} x^{2v-1} \exp(-b^2x^2) \quad (9)$$

La CDF de la distribución puede calcularse a partir de la ecuación (9), dando lugar a la ecuación (10).

$$F_X(x; b, v) = \frac{\gamma_1(v, b^2x^2)}{\Gamma(v)} \quad (10)$$

La generación de muestras *raíz gamma* se realiza utilizando los mismos algoritmos que para el caso *gamma*, y luego aplicando la raíz cuadrada al resultado.

La ecuación (11) muestra la manera en que se calculan los momentos algebraicos de este modelo de acuerdo con Cetin (2008).

$$E[x^n] = \frac{1}{b^n} \frac{\Gamma(v + n/2)}{\Gamma(v)} \quad (11)$$

Las expresiones de los momentos centrales, junto a la asimetría y la curtosis, pueden calcularse usando las siguientes expresiones de transformación a partir de los momentos algebraicos (Walck, 1991), dadas en la ecuación (12).

$$\begin{pmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mu^2 & -2\mu & 1 & 0 & 0 \\ -\mu^3 & 3\mu^2 & -3\mu & 1 & 0 \\ \mu^4 & -4\mu^3 & 6\mu^2 & -4\mu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu'_0 \\ \mu'_1 \\ \mu'_2 \\ \mu'_3 \\ \mu'_4 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Donde  $\mu'_n$  son los momentos algebraicos de orden  $n$ ,  $\mu$  es la media y  $\mu_n$  los momentos centrados de orden  $n$ .

Por último, dado que no se encontró ningún método de estimación de la distribución raíz gamma en la literatura revisada, los autores dedujeron un mecanismo de estimación a través del método de los momentos. Luego de calcular los dos primeros momentos algebraicos de un grupo de muestras, se puede encontrar el parámetro de forma usando la ecuación (13).

$$\frac{E[x^2]}{E^2[x]} = \frac{v\Gamma^2(v)}{\Gamma^2(v + 1/2)} \quad (13)$$

La ecuación (13) anterior debe resolverse aplicando una búsqueda binaria ante la imposibilidad de despejar la  $v$  dentro de la función gamma. Luego, el parámetro de escala se halla aplicando la ecuación (14).

$$b = \sqrt{\frac{v}{E[x^2]}} \quad (14)$$

## Distribución inversa gamma

La distribución *inversa gamma*, también conocida como Pearson tipo V, o gamma invertida (*inverted gamma*), está siendo utilizada con una frecuencia cada vez mayor en la modulación de la componente de textura del clutter marino (Palama, Greco, Stinco y Gini, 2015; Turlapaty y Jin, 2016), como parte del modelo *compuesto gaussiano* (*compound Gaussian*). Igualmente, se aplica cuando se trata la modelación de la distribución Pareto asumiendo que se está en presencia de un modelo compuesto por una distribución exponencial modulada por una distribución *inversa gamma* (Rosenberg y Bocquet, 2015; Wang y Xu, 2014, 2015). Además, el modelo se ha extendido para datos de radar de apertura sintética (SAR, *synthetic aperture radar*) (Ku Mahapatra y Prosad Roy, 2015).

La ecuación (15) ofrece la fórmula de la PDF de la distribución *inversa gamma* (Bocquet y Rosenberg, 2014).

$$f_X(x; a, b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{-a-1} \exp\left(-\frac{b}{x}\right) \quad (15)$$

Donde  $a$  es el parámetro de forma,  $b$  es el parámetro de escala y  $\Gamma(\cdot)$  es la Función Gamma, o Función Gamma Completa, definida de acuerdo a la ecuación (3) (O'Connor, 2011).

Por su parte, la CDF, dada por McLaughlin (2014), se muestra en la ecuación (16).

$$F_X(x; a, b) = \frac{\gamma_S\left(a, \frac{b}{x}\right)}{\Gamma(a)} \quad (16)$$

Donde  $\gamma_S\left(a, \frac{b}{x}\right)$  hace referencia a la *función gamma incompleta superior* (*upper incomplete gamma function*) definida por (O'Connor, 2011), como se observa en la ecuación (17).

$$\gamma_S(k, t) = \int_t^\infty x^{k-1} e^{-x} dx \quad (17)$$

La media y la varianza, dadas en la ecuación (18), fueron tomadas de Fayard y Field (2009).

$$E[x] = \frac{b}{a-1} \quad V[x] = \frac{b^2}{(a-2)(a-1)^2} \quad (18)$$

Por su parte, la ecuación (19) muestra cómo puede hallarse la asimetría y la curtosis (Carolyne, 2013).

$$S = \frac{4\sqrt{a-2}}{a-3} \quad K = \frac{3(a+5)(a-2)}{(a-3)(a-4)} \quad (19)$$

Según fue planteado en Llera y Beckmann (2016), la estimación de los parámetros de la *inversa gamma* puede hacerse a través del método de los momentos que resulta en la ecuación (20).

$$a = \frac{E^2[x]}{V[x]} + 2 \quad b = E[x](a-1) \quad (20)$$

Los momentos algebraicos, o momentos con respecto al origen, de la distribución Inversa

Gamma fueron dados por Carolynne (2013), y se ofrecen en la ecuación (21).

$$E[x^n] = \frac{b^n \Gamma(a - n)}{\Gamma(a)} \quad a > n \quad (21)$$

La distribución *inversa gamma* debe su nombre a que si  $X$  es una variable distribuida *gamma*, entonces  $1/X$  se distribuye *inversa gamma*. Para generar valores de la distribución *inversa gamma*, una solución fácil es generar muestras de la distribución *gamma* y hallarle el inverso (Gentle, 2013). El parámetro de forma de la distribución *gamma* coincidirá con el de la *inversa gamma*, mientras que el parámetro de escala de la *gamma* será el cuadrado del de la *gamma* (McLaughlin, 2014). Lo anterior es cierto si se asume que la PDF *gamma* es la dada en la ecuación (1).

Un análisis similar es también aplicable para la distribución inversa Wishart que resulta del inverso de una variable distribuida Wishart. En cambio, el procedimiento no es aplicable a la *inversa gaussiana* donde el término *inversa* no significa que la distribución se obtenga mediante el inverso de la distribución normal o gaussiana.

### Distribución inversa gaussiana

La distribución inversa gaussiana fue utilizada por primera vez para representar la textura del clutter marino por Olilla *et al.* (2012), donde se probó que proporcionaba un mejor ajuste que sus competidores *gamma* e *inversa gamma*, para un conjunto de datos tomados por el radar IPIX de la Universidad de McMaster. La inversa gaussiana aplicada contó con un único parámetro de escala, dando lugar al modelo global de la amplitud denominado inverso gaussiano-compuesto gaussiano (*inverse Gaussian compound Gaussian*, IG-CG).

Posteriormente, en Mezache, Soltani, Sahed y Chalabi (2013, 2015), se introdujo una distribución inversa gaussiana más general con un parámetro de escala y otro de localización, produciéndose el modelo global de la envolvente denominado compuesto inverso gaussiano (CIG, *compound inverse Gaussian*). El nuevo modelo fue hallado superior al previo IG-CG, al K y a otros cinco modelos para un grupo de datos específicos.

Si bien algunos artículos han comenzado a aplicar la textura inversa gaussiana en diversos desarrollos (Chen *et al.*, 2014; Gao, Zhan y Wan, 2014; Mezache *et al.*, 2016; Yi, Yan y Han, 2014), la distribución no ha adquirido aún un alto grado de aceptación en la comunidad de modelación de clutter de radar. Este hecho se justifica, en parte, por el corto tiempo que ha transcurrido desde su aplicación inicial. Dado que los pocos estudios relacionados a ella han brindado resultados excelentes, los autores del presente artículo la recomiendan para la evaluación de la textura del clutter.

La PDF de la distribución inversa gaussiana, también conocida como Wald (Forbes *et al.*, 2011), se ofrecen en la ecuación (22) (tomada de Mezache *et al.*, 2013, 2015).

$$f_X(x; \mu, \lambda) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} \frac{1}{x^{3/2}} \exp\left(-\lambda \frac{(x - \mu)^2}{2\mu^2 x}\right) \quad (22)$$

Donde  $\mu$  es el parámetro de localización y  $\lambda$  es el parámetro de escala.

La CDF de la inversa gaussiana fue dada por Krishnamoorthy (2016), y obedece a la ecuación (23).

$$F(x; \mu, \lambda) = \Phi\left(\sqrt{\frac{\lambda}{x}}\left(\frac{x}{\mu} - 1\right)\right) + e^{\frac{2\lambda}{\mu}} \Phi\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{x}}\left(\frac{x}{\mu} + 1\right)\right) \quad (23)$$

Donde  $\Phi(\cdot)$  es el CDF de la distribución estándar gaussiana.

La ecuación (24) muestra la forma en que se calculan los momentos algebraicos (Mezache *et al.*, 2015).

$$E[x^n] = e^{\frac{\lambda}{\mu}} \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi}} \mu^{n-\frac{1}{2}} K_{\frac{1}{2}-n}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \quad (24)$$

Donde  $K_{\frac{1}{2}-n}(\cdot)$  es la función modificada de Bessel de segundo tipo y orden  $\frac{1}{2}-n$ .

Alternativamente, de acuerdo con (Mezache *et al.*, 2015), los tres primeros momentos algebraicos pueden calcularse usando la ecuación (25).

$$m_1 = \mu \quad m_2 = \frac{\mu^2(\lambda + \mu)}{\lambda} \quad (25)$$

$$m_3 = \frac{\mu^3(\lambda^2 + 3\lambda\mu + 3\mu^2)}{\lambda^2}$$

La ecuación (26) contiene la fórmula de los momentos con respecto a la media (Forbes *et al.*, 2011).

$$E[(x - \mu)^n] = \mu^n \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-1+i)!}{(k-1-i)!} \left(\frac{\mu}{2\lambda}\right)^i \quad k \geq 2 \quad (26)$$

Conjuntamente, la varianza, la asimetría y la kurtosis pueden calcularse aplicando la ecuación (27) dada por Forbes *et al.* (2011).

$$V[x] = \frac{\mu^3}{\lambda} \quad S[x] = 3\sqrt{\mu/\lambda} \quad K[x] = 3 + 15\mu/\lambda \quad (27)$$

La estimación de los parámetros se puede realizar por máxima verosimilitud según lo explicado por Johnson, Kotz y Balakrishnan (1995), que ofrece la ecuación (28).

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad \lambda = \frac{(N-1)}{\sum_{i=1}^N (x_i^{-1} - \mu^{-1})} \quad (28)$$

Donde  $N$  es la cantidad de muestras de un conjunto dado.

La generación de variables aleatorias se puede ejecutar con el siguiente algoritmo (Krishnamoorthy, 2016):

*Paso 1:* Generar una variable estándar uniforme  $U$  y otra estándar gaussiana  $N$

$$\text{Calcular } V = N^2 \quad D = \lambda/\mu$$

*Paso 2:* Calcular  $Y = 1 - 0,5(\sqrt{V^2 + 4DV} - V)/D$

*Paso 3:* Si  $(1 + Y)U > 1$ , entonces devolver  $S = \mu/Y$

De lo contrario devolver  $S = Y\mu$

## Funciones implementadas

La tabla 1 muestra las funciones que fueron implementadas en *Matlab* para la modelación de la distribución *gamma*, junto a una breve descripción de cada una. Las funciones comienzan todas con el prefijo *gam-* que indica se corresponden a la distribución *gamma*. Funciones semejantes fueron implementadas para la raíz *gamma*, la inversa *gamma* y la inversa gaussiana aplicando los prefijos *gamr-*, *igm-* e *ig-* respectivamente.

En comparación con una implementación previa de la distribución *gamma* realizada por Machado Fernández (2016a), ahora se agregaron tres nuevas funciones. La primera de ellas muestra la función de supervivencia que es frecuentemente aplicada para estudiar las diferencias en la cola de las distribuciones (Dong, 2006). La segunda realiza una comparación entre las CDF teóricas y empíricas que complementa la comparación antes disponible para las PDF. La tercera ejecuta la prueba de ajuste Kolmogorov-Smirnov que es muy popular en radares y tiende a reemplazar a la *chi* cuadrado (Makhoul *et al.*, 2014; Mandal y Bhattacharya, 2013).



**Tabla 1.** Función de modelación de la distribución *gamma* implementadas en Matlab

Funciones	Objetivo
gam-PDF	Mostrar PDF Teórica
gam-CDF	Mostrar CDF Teórica
gam-sur	Mostrar función de supervivencia
gam-gen	Generar muestras
gam-gen-plot	Generar y graficar muestras
gam-gen-hist	Generar muestras y organizarlas en un histograma
gam-gen-compare	Comparar el histograma con la curva PDF teórica
gam-gen-compare-CDF	Comparar la CDF empírica con la curva CDF teórica
gam-residual	Calcular el residuo de muestras a partir de PDF teórica
gam-chi-squared	Ejecuta la prueba <i>chi</i> cuadrado de bondad de ajuste
gam-ks	Ejecuta la prueba Kolmogorov-Smirnov
gam-alg-ideal-moments	Calcular los momentos algebraicos ideales
gam-alg-real-moments	Calcular los momentos algebraicos reales
gam-ideal-moments	Calcula momentos centrados ideales
gam-real-moments	Calcula momentos centrados reales
gam-estim-par	Genera conjuntos de muestras
gam-gen-sets	Genera conjuntos de muestras

**Fuente:** elaboración propia.

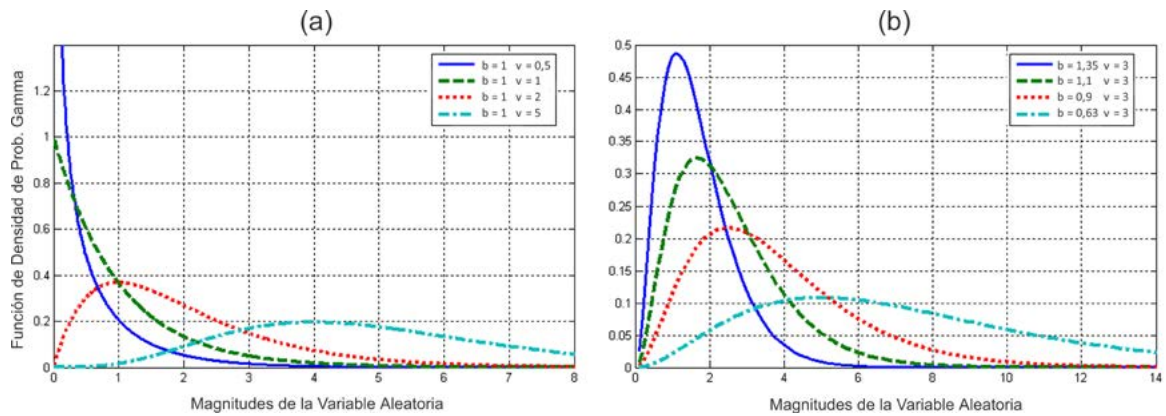
## RESULTADOS

La presente sección está dedicada a mostrar las salidas de las principales funciones implementadas. La validación de las mismas partió de la comparación de las curvas de la PDF con gráficas dadas por distintos autores. Así, las curvas de la PDF *gamma* fueron comparadas con éxito con las de Forbes *et al.* (2011) y O'Connor (2011), las curvas inversas *gamma* con las de McLaughlin (2014) y Roth (2013), y las curvas inversa gaussiana con las de Johnson, Kotz y Balakrishnan (1995). Luego, se procedió a validar el resto de las funciones mediante su interacción con la PDF y la aplicación de diferentes mecanismos, siendo los más importantes las pruebas de bondad de ajuste.

En el caso de la raíz *gamma*, no se encontró ningún documento que ofreciera gráficas detalladas de la PDF. Aun así, la distribución pudo ser validada mediante la interacción de sus componentes con los de la *gamma*, gracias a la estrecha relación que existe entre las dos distribuciones.

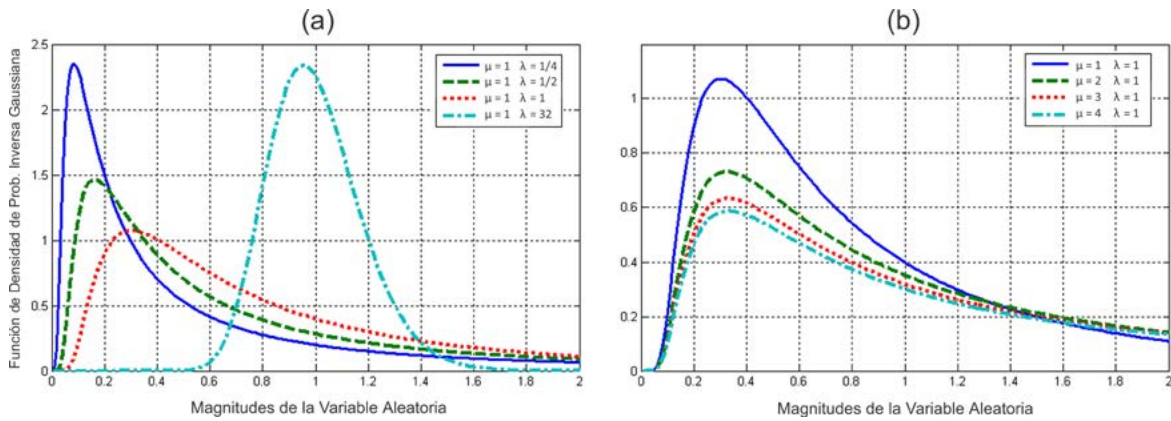
## Funciones de densidad de probabilidad (PDF) y distribución acumulativa (CDF)

Las funciones de *densidad de probabilidad* y de *distribución acumulada* son la clave de la modelación matemática de una distribución; de ahí que la implementación informática comenzara por ellas. La figura 2 muestra cómo los parámetros de la distribución *gamma* modifican el trazo de las curvas de la PDF de la distribución. El parámetro de forma ( $\nu$ ) es el que tiene un mayor impacto sobre el trazo ya que es capaz de alterar la relación de proporcionalidad entre las magnitudes de la variable aleatoria.



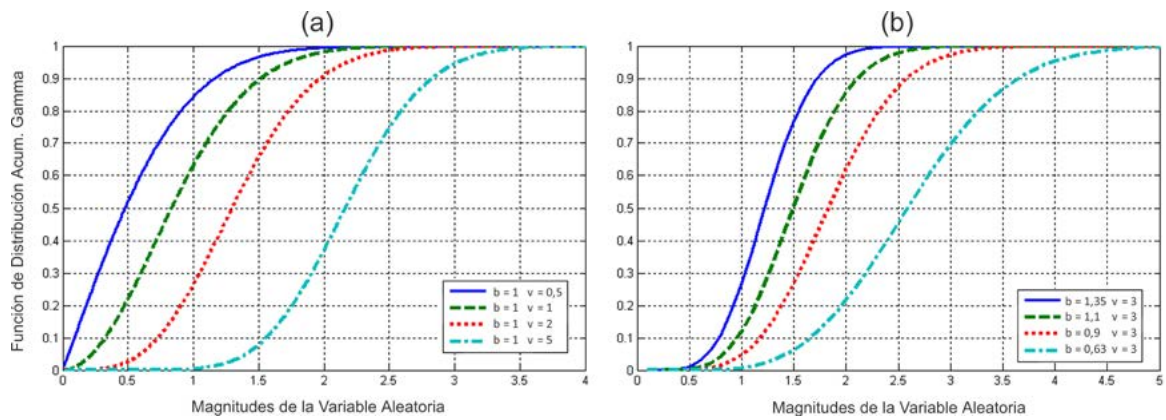
**Figura 2.** Influencia de la variación de los parámetros *gamma* sobre las curvas de la PDF

Fuente: elaboración propia.



**Figura 3.** Influencia de la variación de los parámetros de la distribución inversa gaussiana sobre la curva de la PDF

Fuente: elaboración propia.



**Figura 4.** Influencia de la variación de los parámetros de la distribución Raíz Gamma sobre la curva de la CDF

Fuente: elaboración propia.

Obsérvese cómo, en la figura 2a, las curvas con  $\nu = 0,5$  y  $\nu = 1$  tienen un máximo al comienzo del eje de coordenadas. Este comportamiento cambia para  $\nu = 2$  y  $\nu = 5$  donde el máximo comienza a aparecer más hacia el centro de la distribución, lo cual reduce la asimetría que se calcula a través del tercer momento centrado. En cambio, el parámetro de escala ( $b$ ) introduce un efecto multiplicativo inverso sobre las muestras, modificando su dispersión. Como se puede ver en la figura 2b, ahora la posición del máximo no varía dentro de las curvas, sino que estas comienzan a ser más alargadas.

La figura 3 grafica también la PDF pero en este caso para la distribución inversa gaussiana que tiene un parámetro de escala ( $\lambda$ ) y otro de localización ( $\mu$ ). El efecto del parámetro de escala (figura 3a) continúa siendo el mismo que en el caso anterior. Mientras tanto, el parámetro de localización varía fundamentalmente la posición del gráfico, con una clara influencia sobre la media de los conjuntos.

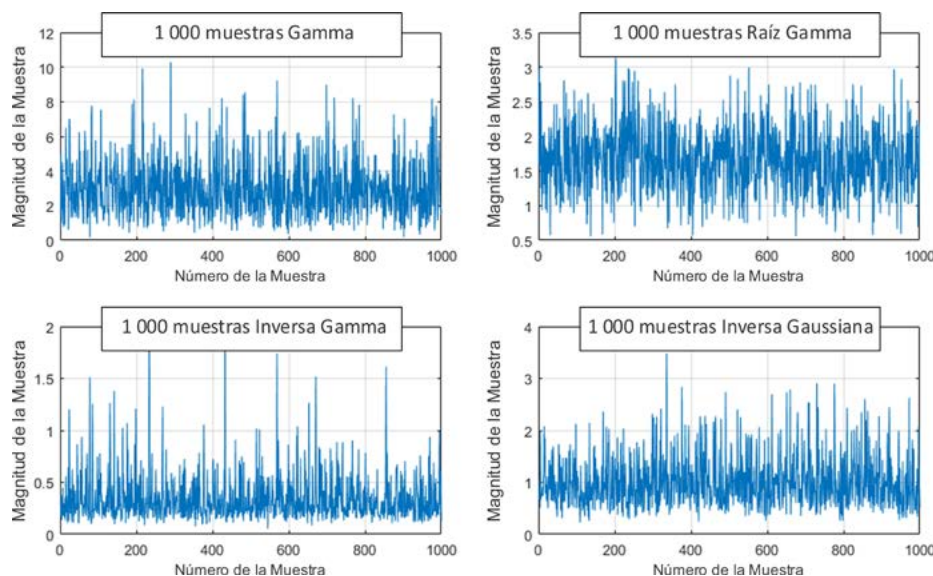
La figura 4 se enfoca en la influencia de los parámetros raíz  $\gamma$  sobre las curvas de la distribución acumulativa, en la que el parámetro de forma ( $\nu$ ) continúa introduciendo cambios más significativos. Lo anterior se aprecia en la figura 4a

donde los trazos experimentan cambios de concavidad al hacer fluctuar  $\nu$ . Por el contrario, la modificación del parámetro de escala ( $b$ ) se limita a un efecto de *estiramiento* de la curva hacia la derecha, lo que se traduce en un aumento de la dispersión de las muestras hacia magnitudes superiores.

### Comparación entre datos empíricos y teóricos

Además de comprobar que las curvas siguen las formas dadas en diversas publicaciones, un elemento esencial en la validación es verificar que los métodos de generación de variables aleatorias aplicados sigan fielmente el comportamiento teórico esperado. En este sentido, se encontraron ligeras imprecisiones en algoritmos descritos por algunas fuentes, pero una revisión profunda de la literatura, unida a pequeños ensayos de prueba y error, permitió encontrar mecanismos fiables que pasaron las pruebas de validación.

Cuando se genera una variable aleatoria se está produciendo una secuencia de números según se ilustra en la figura 5. Las propiedades estadísticas de un conjunto son difícilmente deducibles a partir del estudio de una secuencia de valores.



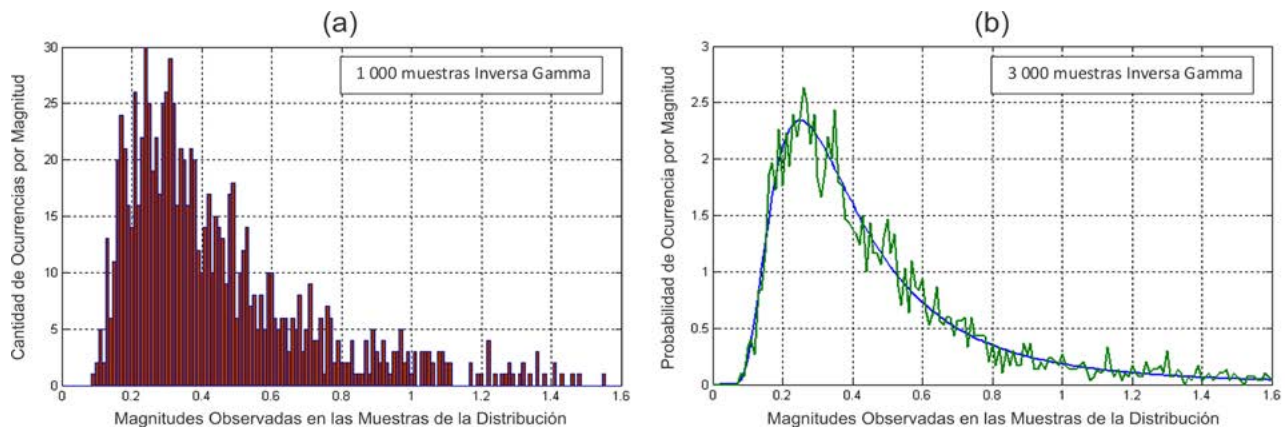
**Figura 5.** Secuencias de muestras de diferentes distribuciones

**Fuente:** elaboración propia.

Para su mejor análisis, las secuencias se transforman en histogramas, que agrupan los valores observados para cada magnitud posible de las muestras. La figura 6a presenta un histograma conformado a partir de 1000 muestras de la distribución inversa *gamma*. Para comparar el histograma con la curva PDF teórica, el eje de las ordenadas se debe convertir de cantidad de ocurrencias a probabilidad de ocurrencia. Luego, pueden producirse gráficos como el de la figura 6b donde se comparan las formas de la PDF empírica (también conocida como histograma de

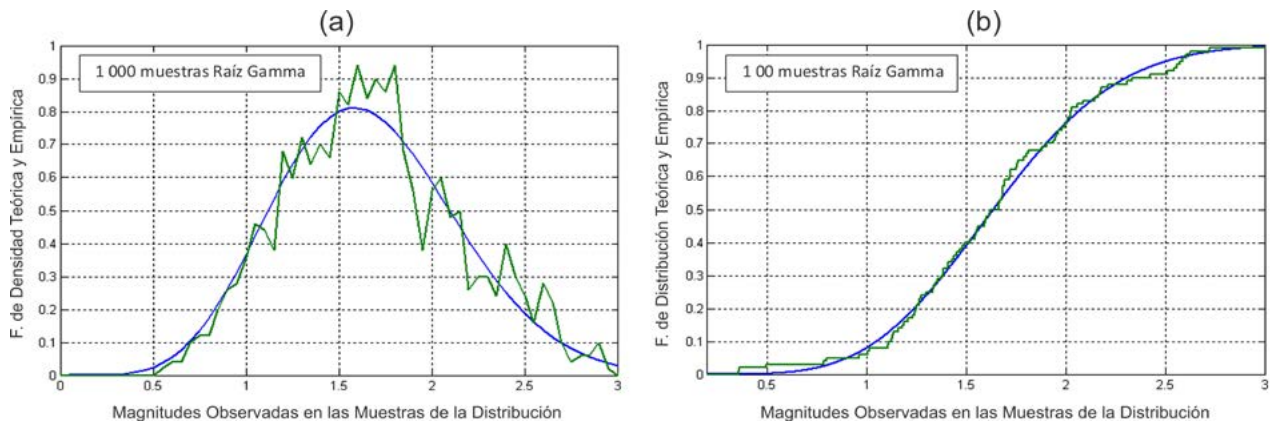
frecuencias relativas) y la teórica. Como resultado, se verifica la correcta correspondencia de las muestras generadas a la distribución estadística en cuestión.

Para lograr una verificación mayor se pueden realizar también comparaciones con respecto a las curvas de la CDF. La figura 7 ofrece un ejemplo de comparaciones tanto de la PDF (figura 7a) como de la CDF (figura 7b) para la distribución raíz *gamma*. Una característica importante es que la convergencia para el caso de la CDF es siempre más rápida. En la figura 7b se observa una mayor



**Figura 6.** Comparación entre un histograma empírico y la curva PDF teórica esperada de la inversa *gamma*

**Fuente:** elaboración propia.



**Figura 7.** Comparación entre la PDF y la CDF empírica con las curvas teóricas esperadas

**Fuente:** elaboración propia.



cercanía entre los gráficos teóricos y empíricos que en la figura 7a, aun cuando se usan menos muestras. Esto se debe a que la CDF resulta de la integración de la PDF hasta cada valor del eje de las abscisas, lo cual contribuye a reducir el error.

Las pruebas de bondad de ajuste proporcionan otro método de verificación de la correspondencia entre las distribuciones empíricas y teóricas. Específicamente en radares, se utilizan las pruebas *chi* cuadrado y Kolmogorov-Smirnov (K-S) que fueron incluidas en la implementación realizada. La figura 8 muestra un ejemplo de la salida de estas pruebas. Se observa que el valor *p* obtenido es mayor a 0,05 en la mayoría de los casos. Por tanto, se reafirma la pertenencia de las muestras generadas al modelo raíz *gamma*. Resultados similares se obtuvieron para el resto de los modelos.

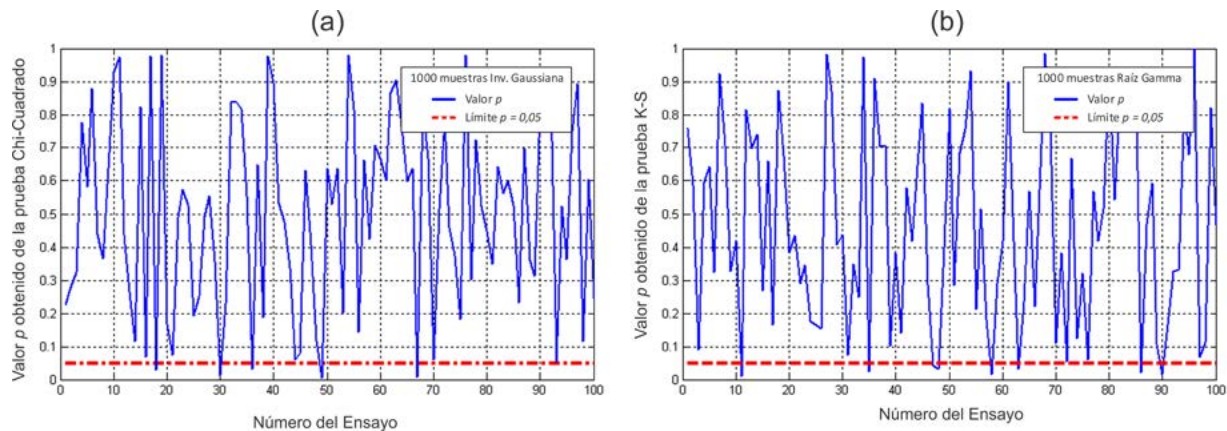
### Cálculo de los momentos y estimación paramétrica

El cálculo de los momentos y la estimación paramétrica complementan la modelación realizada. Se implementaron las expresiones teóricas de

los primeros cuatro momentos centrados y algebraicos, junto a la asimetría y la curtosis para las cuatro distribuciones. En este punto también se encontraron algunas imprecisiones en la literatura que fueron corregidas mediante múltiples consultas a diferentes fuentes y ensayos de prueba y error.

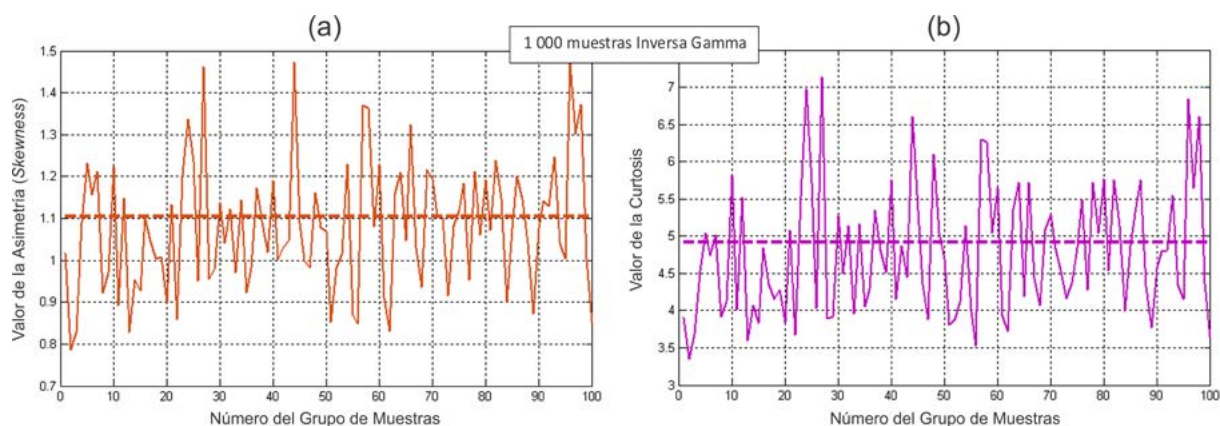
Evidencia del correcto funcionamiento del código se brinda en la figura 9 donde se representa el cálculo de la asimetría y la curtosis sobre grupos de 1000 muestras inversa *gamma* cada uno. Como puede apreciarse, los valores obtenidos oscilan alrededor de la cifra teórica esperada.

Por último, la figura 10 ofrece un ejemplo de la estimación de los parámetros de las distribuciones. Específicamente, se grafica la estimación de los parámetros de la inversa gaussiana, considerando 100 grupos de 1000 muestras cada uno. La estimación realizada se mantiene cercana al valor teórico con el que fueron generados los grupos de muestras. En general, todos los métodos de estimación descritos en la sección “Materiales y métodos” mostraron un comportamiento favorable, incluido el método propuesto para la distribución raíz *gamma*.



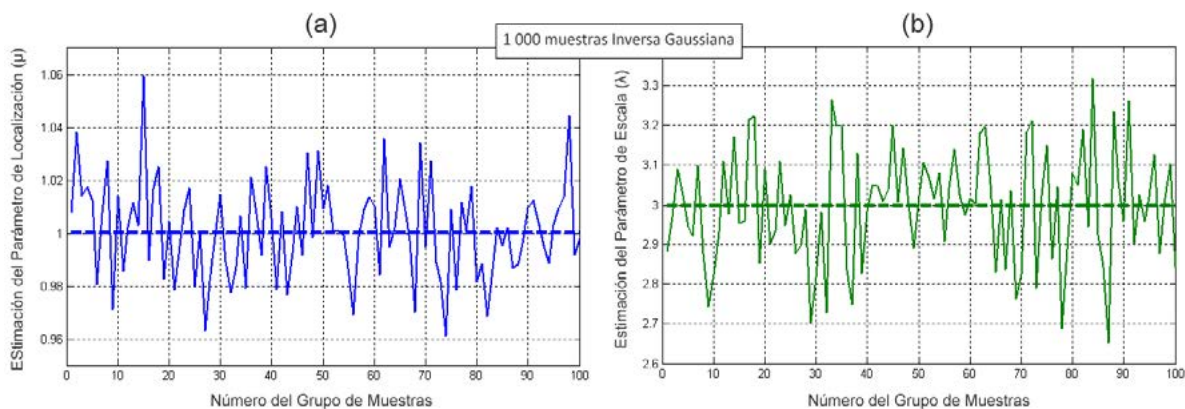
**Figura 8.** Resultados de la aplicación de las pruebas *chi* cuadrado y K-S

**Fuente:** elaboración propia.



**Figura 9.** Oscilación de la asimetría y la curtosis empíricas, de grupos de 1000 muestras inversa *gamma*, alrededor del valor teórico esperado

**Fuente:** elaboración propia.



**Figura 10.** Variación de la estimación de los parámetros de la distribución inversa gaussiana alrededor de los valores con que fueron generadas las muestras

**Fuente:** elaboración propia.

## VALORACIÓN DEL ESTUDIO

En la presente investigación se realizó una recopilación bibliográfica importante relativa a la modelación de cuatro distribuciones estadísticas que han sido aplicadas en la representación de la textura del *clutter* marino de radar. Las expresiones matemáticas que modelan a las distribuciones *gamma*, raíz *gamma*, inversa *gamma* e inversa gaussiana fueron programadas en una pequeña

librería informática en el lenguaje *M* de *Matlab*. La implementación incluyó funciones de densidad y distribución, algoritmos de generación de variables aleatorias, métodos de estimación de parámetros, y cálculo de momentos centrados y algebraicos, entre otros. También se agregaron mecanismos adicionales para la validación por diferentes métodos, garantizándose la correcta pertenencia de cada distribución implementada al modelo teórico.

La pequeña librería creada brinda una herramienta alternativa de código abierto al Toolbox Estadístico que ofrece *Matlab*, ya que solo se utilizaron rutinas disponibles en el *core* de este asistente matemático. De hecho, las funciones informáticas de las distribuciones inversa *gamma* y raíz *gamma* no tienen par en la versión 2016, lo cual agrega aún más novedad a la implementación.

Los resultados obtenidos dan continuidad a lo previamente logrado para las distribuciones weibull, log-Normal, rayleigh, exponencial, K de la amplitud, K de la intensidad y pareto (Machado Fernández, 2016b; Machado Fernández y Bacallao Vidal, 2016c). Ellas también se utilizan para representar el fondo de radar adquirido bajo diferentes condiciones. Conjuntamente, la implementación actual mejora la propuesta de Machado Fernández (2016a), quien presentó una modelación menos completa de la distribución *gamma*, ignorando al resto de las variantes disponibles para la textura. Todos estos desarrollos siguen el mapa trazado en (Machado Fernández, 2017b), donde se señalaron las distribuciones más relevantes relacionadas al *clutter* marino.

Las cuatro distribuciones simuladas viabilizan la realización de estudios sobre el eco electromagnético producido en la superficie marina. Así, se resuelve uno de los problemas principales que se encontraron en la literatura: la mayoría de los análisis conducidos no evalúan las distintas variantes disponibles para la representación de la textura del *clutter* de mar. Precisamente, los modelos que consideran una distribución para la textura son los más adecuados para simulación del fenómeno, pues cuentan con una fundamentación física del motivo por el cual son aplicables. Otras alternativas, como la weibull y la log-normal, si bien son ampliamente usadas, se sustentan en una correspondencia empírica con las muestras extraídas.

Esta investigación también contribuye al desarrollo de detectores adaptados a fondos heterogéneos como los que aparecen en las costas cubanas, donde alternan diferentes niveles de profundidad, manglares, aguas salobres, islotes, vegetación

acuática prominente y bandadas de pájaros, entre otros entes que afectan el modo común de operación. El parque de radares con que cuenta Cuba no está, generalmente, adaptado al medio que le rodea, sino que los modelos son estándares. Por tanto, la simulación de un medio con condiciones variables a través de cuatro distribuciones cambiantes permitirá diseñar detectores más eficientes que podrán combinarse con la técnica existente, realizándose un procesamiento mejorado de la señal. De hecho, las modelaciones de distribuciones realizadas previamente por Machado Fernández (2016b) y Machado Fernández y Bacallao Vidal (2016c) permitieron el desarrollo de mecanismos novedosos de estimación paramétrica (Machado Fernández y Bacallao Vidal, 2016a, 2016b; Machado Fernández, Bacallao Vidal y Chávez Ferry, 2015), usando inteligencia artificial, que a la postre posibilitaron el diseño de detectores adaptativos (Machado Fernández, 2015; Machado Fernández y Bacallao Vidal, 2016d, 2017a, 2017c; Machado Fernández, Torres Martínez y Bacallao Vidal, 2017).

Como proyecciones futuras, los autores esperan que la labor realizada dé paso a la modelación de distribuciones más intrincadas pertenecientes a la familia compuesta gaussiana (*Compound Gaussian*) como la Rician inversa gaussiana (Eltoft, 2005), y la compuesta inversa gaussiana (Mezahe *et al.*, 2013, 2015). Estas distribuciones asumen un componente para la textura y otro para la capilaridad, lo cual les ofrece ventajas en la representación de las propiedades de correlación del *clutter*. El objetivo global del desarrollo es contribuir a la creación de la librería MATE-CFAR 2, para la simulación de *clutter* y detectores de radar, que será una progresión del MATE-CFAR original presentado por Machado Fernández y Bacallao Vidal, 2014) y pretende traducirse a otros lenguajes como *Python*. Adicionalmente, se anima a investigadores hispanos a incorporarse a esta línea de investigación, ya que se considera que el presente documento es uno de los principales textos en idioma español sobre la temática abordada.

## CONCLUSIONES

La presente investigación recopiló e implementó en *Matlab* las expresiones matemáticas más importantes relacionadas a las distribuciones gamma, raíz *gamma*, inversa *gamma* e inversa gaussiana. De esta forma, se completó la modelación informática y validación de las diferentes alternativas que han sido propuestas para representar la textura del eco electromagnético recibido de la superficie del mar. Los resultados alcanzados permiten la realización de comparaciones fiables sobre la pertenencia del *clutter* marino a una distribución específica, así como la creación de nuevas variantes de detección adaptadas a entornos heterogéneos como los encontrados en las costas cubanas, donde las irregularidades del relieve pueden resultar en cambios constantes de la distribución del eco. El código creado se une a estudios previos para contribuir a la formación de la librería MATE-CFAR 2, dedicada a la simulación de la respuesta de detectores CFAR de ventana deslizante frente a múltiples escenarios. Además, la modelación de la textura en *Matlab* abre el camino hacia la simulación de varias distribuciones compuestas que representan fielmente las propiedades de correlación del *clutter* de mar.

## REFERENCIAS

- Best, D.J. (1983). A Note on Gamma Variate Generators with Shape Parameter less than Unity. *Computing*, 30(1), 185–188. <https://doi.org/10.1007/BF02280789>
- Bocquet, S. y Rosenberg, L. (2014). *Simulation of Coherent Sea Clutter with Inverse Gamma Texture*. Paper presented at the IEEE '14 International Radar Conference. <https://doi.org/10.1109/RADAR.2014.7060347>
- Carolynne, A.K. (2013). *Gamma and Related Distributions*. (Master in Sciences). School of Mathematics, University of Nairobi, Kenia.
- Cetin, A. (2008). *CFAR Detection in K-Distributed Sea Clutter*. (Master of Science in Electrical and Electronics Engineering), The Graduate School of Natural and Applied Sciences of Middle East Technical University, Ankara, Turquía.
- Chan, H.C. (abril de 1990). *Radar Sea Clutter at Low Grazing Angles*. Paper presented at the IEE Proceedings on Radar and Signal Processing. <https://doi.org/10.1049/ip-f-2.1990.0015>
- Chen, S.; Cui, G.; Kong, L. y Yang, J. (2014). MIMO Radar Detection in Compound-Gaussian Clutter with Inverse Gaussian Texture. *IEEE 2014 Radar Conference*, p. 218-222. <https://doi.org/10.1109/RADAR.2014.6875587>
- Chen, Z.; Liu, X.; Wu, Z. y Wang, X. (octubre de 2013). *The Analysis of Sea Clutter Statistics Characteristics Based on the Observed Sea Clutter of Ku-Band Radar*. Paper presented at the IEEE Proceedings of the International Symposium on Antennas & Propagation.
- Dong, Y. (2006). *Distribution of X-Band High Resolution and High Grazing Angle Sea Clutter*, Technical Report DSTO-RR-0316. Edinburgh, Australia: Electronic Warfare and Radar Division, Defence Science and Technology Organization.
- Eltoft, T. (2005). The Rician Inverse Gaussian Distribution: A New Model for Non-Rayleigh Signal Amplitude statistics. *IEEE Transactions on Image Processing*, 14(11), 1722-1735. Doi: 10.1109/ICIP.2003.1246941 <https://doi.org/10.1109/ICIP.2003.1246941>
- Fayard, P. y Field, T.R. (2009). Optimal Inference of the Inverse Gamma Texture for a Compound-Gaussian Clutter. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, p. 2969-2972. <https://doi.org/10.1109/ICASSP.2009.4960247>
- Fiche, A.; Angelliaume, S.; Rosenberg, L. y Khenchaf, A. (2015). Analysis of X-band SAR Sea-Clutter Distributions at Different Grazing Angles. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 53(8), 4650-4660. <https://doi.org/10.1109/TGRS.2015.2405577>
- Fioranelli, F.; Ritchie, M.; Griffiths, H.; Inggs, M. y Sandenbergh, S. (2016). Analysis of



- polarimetric bistatic sea clutter using the NetRAD radar system. *IET Radar, Sonar and Navigation*, 10(8), 1356-1366. Doi: 10.1049/iet-rsn.2015.0416 <https://doi.org/10.1049/iet-rsn.2015.0416>
- Forbes, C.; Evans, M.; Hastings, N. y Peacock, B. (2011). *Statistical Distributions*. 4a. ed. EE. UU.: John Wiley & Sons.
- Gao, Y.; Zhan, R. y Wan, J. (2014). Range-Spread Target Detection in Compound Gaussian Clutter with Reciprocal of the Square Root of Gamma Texture. *Progress In Electromagnetics Research*, 144(1), 11-21. <https://doi.org/10.2528/PIER13101005>
- Gentle, J.E. (2003). *Random number generation and Monte Carlo methods*. 2a. ed. EE. UU.: Springer Science & Business Media.
- Ishii, S.; Sayama, S. y Mizutani, K. (2011). Effect of Changes in Sea-Surface State on Statistical Characteristics of Sea Clutter with X-band Radar. *Wireless Engineering and Technology*, 2(3), 175-183. Doi: 10.4236/wet.2011.23025 <https://doi.org/10.4236/wet.2011.23025>
- Jiang, H.; Yi, W.; Cui, G.; Kong, L. y Yang, X. (2015). Tracking Targets in K Clutter via Particle Filter. *IEEE '15 Radar Conference*, p. 350-355.
- Johnsen, T. (2015). *Characterization of X-band radar sea-clutter in a limited fetch condition from low to high grazing angles*. Paper presented at the IEEE '15 Radar Conference. <https://doi.org/10.1109/RadarConf.2015.7411864>
- Johnson, N.L.; Kotz, S. y Balakrishnan, N. (1995). *Continuous Univariate Distributions*. 2a. ed. Nueva York, EE. UU.: Wiley.
- Krishnamoorthy, K. (2016). *Handbook of statistical distributions with applications*. Nueva York, EE. UU.: CRC Press.
- Ku Mahapatra, D. y Proasad Roy, L. (2015). *An Estimator for Compound-Gaussian Multilook SAR Clutter Amplitude with Inverse Gamma Texture*. Paper presented at the IEEE 2015 India Conference (INDICON). <https://doi.org/10.1109/INDICON.2015.7443757>
- Llera, A. y Beckmann, C. F. (2016). *Estimating an Inverse Gamma Distribution: Technical Report arXiv:1605.01019*. Radboud University Nijmegen.
- Machado Fernández, J. R. (2015). Estimation of the relation between Weibull distributed sea clutter and the CA-CFAR scale factor. *Journal of Tropical Engineering*, 25(2), 19-28. <http://10.15517/jte.v25i2.18209>
- Machado Fernández, J. R. (2016a). Modelación de la distribución gamma en matlab para aplicaciones de radar. *Ciencias Holguín*, 22(4), 62-77.
- Machado Fernández, J. R. (2016b). Modelación de las distribuciones Rayleigh y exponencial en MATLAB para aplicaciones de radar. *Telemática*, 15(2), 1-15.
- Machado Fernández, J. R. y Bacallao Vidal, J. de la C. (2014). MATE-CFAR: ambiente de pruebas para detectores CFAR en Matlab. *Telemática*, 13(3), 86-98.
- Machado Fernández, J. R. y Bacallao Vidal, J. de la C. (2016a). Improved shape parameter estimation in K clutter with neural networks and deep learning. *International Journal of Interactive Multimedia & Artificial Intelligence*, 3(7), 96-103. <http://doi.org/10.9781/ijimai.2016.3714>
- Machado Fernández, J. R. y Bacallao Vidal, J. de la C. (2016b). Improved Shape parameter estimation in pareto distributed clutter with neural networks. *IJ-MAI*, 4(2), 7-11. <http://10.9781/ijimai.2016.421>
- Machado Fernández, J. R. y Bacallao Vidal, J. de la C. (2016c). Modelación de la distribución K en MATLAB para aplicaciones de radar. *Ingeniería Electrónica, Automática y Comunicaciones*, 37(2), 54-66.
- Machado Fernández, J. R. y Bacallao Vidal, J. de la C. (2016d). Optimal selection of the CA-CFAR adjustment factor for K distributed amplitude samples with a fluctuating shape parameter. *Nova Scientia*, 27(1), 61-76.
- Machado Fernández, J. R. y Bacallao Vidal, J. de la C. (2017a). Cell averaging CFAR detector with scale factor correction through the method of moments for the log-normal distribution. *Ciencia e Ingeniería Neogranadina*, 28(1), 27-44. <http://doi.org/10.18359/rcin.2408>
- Machado Fernández, J. R. y Bacallao Vidal, J. de la C. (2017b). Distribuciones estadísticas para modelar clutter marino: una revisión. *Ingeniería Electrónica, Automática y Comunicaciones*, 38(2), 12-35.

- Machado Fernández, J. R., & Bacallao Vidal, J. de la C. (2017c). Estimation of the Optimal CA-CFAR threshold multiplier in Pareto clutter with known parameters. *Entramado*, 13(1), 252–261. <http://doi.org/10.18041/entramado.2017v13n1.25104>
- Machado Fernández, J. R., Bacallao Vidal, J. de la C. y Chávez Ferry, N. (2015). A neural network approach to Weibull distribution sea clutter parameters estimation. *Inteligencia Artificial. Revista Iberoamericana de Inteligencia Artificial*, 18(56), 3–13.
- Machado Fernández, J. R., Bacallao Vidal, J. de la C. y Torres Martínez, S. (2017). CA-CFAR Adjustment factor correction with a priori knowledge of the clutter distribution shape parameter. *IJMAI*, 4(4), 7–13.
- Makhoul, E.; Zhan, Y.; Broquetas, A.; Ruiz Rodon, J. y Baumgartner, S. (2014). *Sea Clutter Statistical Characterization using TerraSAR-X Data*. Paper presented at the IEEE ,14 Radar Conference. <https://doi.org/10.1109/IGARSS.2014.6947652>
- Mandal, S.K. y Bhattacharya, C. (2013). Validation of Stochastic Properties of High Resolution Clutter Data from IPIX Radar Data. *International 13' Conference on Intelligent Systems and Signal Processing (ISSP)*, 251-255. Doi: 10.1109/ISSP.2013.6526913 <https://doi.org/10.1109/ISSP.2013.6526913>
- Marhaban, M.H. (2008). Estimation of K-Distributed Cluter by Using Characteristic Function Method. *Jurnal Teknologi*, 48(D), 29-40.
- Marsaglia, G. y Tsang, W.W. (2000). A Simple Method for Generating Gamma Variables. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 26(3), 363-372. <https://doi.org/10.1145/358407.358414>
- McLaughlin, M. P. (2014). *A compendium of common probability distributions*. Australia: Michael P. McLaughlin.
- Meng, X.; Feng, G.; Xue, H. y He, Z. (2013). Wideband Radar Target Detection Theory in Coherent K Distributed Clutter. *Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technology*, 5(5), 1528-1532.
- Mezache, A.; Chalabi, I.; Soltani, F. y Sahed, M. (2016). Estimating the Pareto plus Noise Distribution Parameters using Non-Integer Order Moments and [zlog(z)] approaches. *IET Radar, Sonar and Navigation*, 10(1), 192-204. <https://doi.org/10.1049/iet-rsn.2015.0170>
- Mezache, A.; Soltani, F.; Sahed, M. y Chalabi, I. (2013). *A Model for Non Rayleigh Sea Clutter Amplitudes using Compound Inverse Gaussian*. Paper presented at the IEEE Radar Conference (RadarCon13). <https://doi.org/10.1109/RADAR.2013.6585989>
- Mezache, A.; Soltani, F.; Sahed, M. y Chalabi, I. (2015). Model for non-Rayleigh Clutter Amplitudes Using Compound Inverse Gaussian Distribution: An Experimental Analysis. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 51(1), 142-153. <https://doi.org/10.1109/TAES.2014.130332>
- O'Connor, A.N. (2011). *Probability Distributions Used in Reliability Engineering*. Maryland: University of Maryland.
- Ollila, E.; Tayler, E.; Koivumen, D.E. y Poor, V. (2012). Compound-Gaussian Clutter Modeling with an Inverse Gaussian Texture Sistribution. *IEEE Transactions on Signal Processing Letter*, 19(12), 876-879. <https://doi.org/10.1109/LSP.2012.2221698>
- Palama, R.; Greco, M.; Stinco, P. y Gini, F. (2013). *Statistical Analysis of Netrad High Resolution Sea Clutter*. Paper presented at the Proceedings of the 21st European Signal Processing Conference (EUSIPCO).
- Palama, R.; Greco, M.; Stinco, P. y Gini, F. (2015). Statistical Analysis of Bistatic and Monostatic Sea Clutter. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 51(4), 3036-3054. Doi: 10.1109/TAES.2015.140438 <https://doi.org/10.1109/TAES.2015.140438>
- Preston, J.R. y Abraham, D.A. (2015). Statistical Analysis of Multistatic Echoes From a Shipwreck in the Malta Plateau. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 40(3), 643-656. Doi: 10.1109/JOE.2014.2331533 <https://doi.org/10.1109/JOE.2014.2331533>
- Ritchie, M.; Stove, A.; Woodbridge, K. y Griffiths, H. D. (2016). NetRAD: Monostatic and Bistatic Sea Clutter Texture and Doppler Spectra Characterization at S-Band. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 54(9), 5533-5543. <https://doi.org/10.1109/TGRS.2016.2567598>

- Rohling, H. (1983). Radar CFAR Thresholding in Clutter and Multiple Target Situations. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, AES-19(4), 608-621. Doi: 10.1109/TAES.1983.309350 <https://doi.org/10.1109/TAES.1983.309350>
- Rosenberg, L. y Bocquet, S. (2013). *The Pareto Distribution for High Grazing Angle Sea Clutter*. Paper presented at the IGARSS 2013. <https://doi.org/10.1109/IGARSS.2013.6723762>
- Rosenberg, L. y Bocquet, S. (2015). Application of the Pareto Plus Noise Distribution to Medium Grazing Angle Sea-Clutter. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 8(1), 255-261. Doi: 10.1109/JSTARS.2014.2347957 <https://doi.org/10.1109/JSTARS.2014.2347957>
- Roth, M. (2013). *On the Multivariate t Distribution*. Technical Report LiTH-ISY-R-3059. Department of Electrical Engineering, Linkopings Universitet, Suecia.
- Santos Ugarte, L.; De Miguel Vela, G. y Besada Portas, J.A. (2008). *Simulation Model for Sea Clutter in Airborne Radars*. Paper presented at the Proceedings of the 8th European Radar Conference. Manchester, Reino Unido.
- Sayama, S. e Ishii, S. (2013). Suppression of Log-Normal Distributed Weather Clutter Observed by an S-Band Radar. *Wireless Engineering and Technology*, 4(3), 125-133. Doi: 10.4236/wet.2013.43019 <https://doi.org/10.4236/wet.2013.43019>
- Schoenecker, S.; Willett, P. y Bar Shalom, Y. (2016). The Effect of K-Distributed Clutter on Trackability. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 64(2), 475-484. Doi: 10.1109/TSP.2015.2478745 <https://doi.org/10.1109/TSP.2015.2478745>
- Skolnik, M.I. (2008). *Radar Handbook*. 3a. ed. EE. UU.: McGraw-Hill.
- Stinco, P.; Greco, M. y Gini, F. (2011). Adaptive Detection in Compound-Gaussian Clutter with Inverse-Gamma Texture. *IEEE 2011 CIE International Radar Conference*, p. 434-437. <https://doi.org/10.1109/CIE-Radar.2011.6159570>
- Tanriverdi, G. (2012). *Arma Model Based Clutter Estimation and its Effect on Clutter Supression Algorithms*. (Master of Science in Electrical & Electronics Engineering), The Graduate School of Natural and Applied Sciences, Middle East Technical University.
- Totir, F.; Rador, E. y Anton, L. (2008). Advanced Sea Clutter Models and their Usefulness for Target Detection. *MTA Review*, 18(3), 257-272.
- Turlapaty, A. y Jin, Y. (2016). Multi-Parameter Estimation in Compound Gaussian Clutter by Variational Bayesian. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 64(18), 4663-4678.
- Walck, C. (1991). *On Moments and their Estimation (Internal Note SUF-PFY/91-01)*. Estocolmo, Suecia: Particle Physics Group, Department of Physics, University of Stockholm.
- Walck, C. (2007). *Hand-book on Statistical Distributions for Experimentalists: Particle Physics Group*. Estocolmo, Suecia University of Stockholm.
- Wang, J. y Xu, X. (2014). *Simulation of Pareto Distributed Temporally and Spatially Correlated Low Grazing Angle Sea Clutter*. Paper presented at the 2014 International Radar Conference. <https://doi.org/10.1109/RADAR.2014.7060342>
- Wang, J. y Xu, X. (2015). Simulation of Correlated Low-Grazing-Angle Sea Clutter Based on Phase Retrieval. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 53(7), 3917-3930. <https://doi.org/10.1109/TGRS.2014.2388211>
- Wang, Y.; Zha, Y.; Huang, Y.; Zhang, Y. y Yang, J. (2015). *A Deconvolution Method for Ship Detection in Sea Clutter Environment*. Paper presented at the IGARSS 2015.
- Watts, S. (2012). Modeling and Simulation of Coherent Sea Clutter. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 48(4), 3303-3317. <https://doi.org/10.1109/TAES.2012.6324707>
- Yi, L.; Yan, L. y Han, N. (2014). *Simulation of Inverse Gaussian Compound Gaussian distribution Sea Clutter Based on SIRP*. Paper presented at the 2014 IEEE Workshop on Advanced Research and Technology in Industry Applications (WARTIA).
- Yunlong, L.; Chao, X.; Hongzhong, Z. y Qiang, F. (2012). *Modeling and Simulation of Correlated K-Dist based on ZMNL*. Paper presented at the 3rd

International Conference on Signal Processing Systems (ICSPS 2011), Singapur.

Zhijian, Z.; Ruilai, X.; Yong, H. y Jian, G. (2011). *New Nonparametric Detectors under K-Distributed Sea Clutter in Radar Applications*. Paper presented at the IEEE 2011 CIE International Conference on Radar. <https://doi.org/10.1109/CIE-Radar.2011.6159909>

Zhou, Y. y Wang, X. (2009). K-Distributed Clutter Generation of Airborne Phased Array Radar. *IEEE Conference on IEEE Circuits and Systems International Conference*, p. 1-4. <https://doi.org/10.1109/CAS-ICTD.2009.4960834>

