

Análisis cinemático de un prototipo de prótesis de mano para varios tipos de agarre

Kinematics analysis of a hand prosthesis prototype for various types of grips

Luz Adriana Mejía Calderón ¹, Miguel Ángel Díaz Rodríguez ² y Andrés Fernando Agudelo Rendón ³

Fecha de Recepción: 14 de febrero de 2023

Fecha de Aceptación: 13 de marzo de 2025

Cómo citar: L. A. Mejía Calderón, M. A. Díaz Rodríguez y A. F. Agudelo Rendón. "Análisis cinemático de un prototipo de prótesis de mano para varios tipos de agarre", *Tecnura*, 29(83), 12-36. <https://doi.org/10.14483/22487638.20464>

Resumen

Objetivo: proponer un diseño de prótesis de mano con un número reducido de grados de libertad que mantenga una funcionalidad adecuada. Para ello, se desarrollan modelos cinemáticos que se validan mediante simulación para cuantificar su error en diferentes tipos de agarre.

Metodología: el enfoque metodológico combinó el modelado analítico con la validación mediante simulación. A partir de un análisis biomecánico preliminar, se formularon matemáticamente las cinemáticas directa e inversa de la prótesis. La precisión de estos modelos se cuantificó, mediante el cálculo del error entre sus resultados y los generados por un *software* de simulación multicuerpo para tres patrones de agarre: esférico, cilíndrico y lateral.


Resultados: el error en los modelos cinemático directo e inverso del dedo índice de la prótesis analizada es bajo para los agarres esféricos y cilíndricos, con un error de mediana magnitud, del orden del 7 %, en agarre lateral. El error obtenido para el dedo pulgar es despreciable.


Conclusiones: se obtiene un prototipo de mano robótica funcional con menos grados de libertad respecto a una mano real y con buena exactitud en su respuesta cinemática.

Financiamiento: Universidad Tecnológica de Pereira.

Palabras clave: mano robótica, cinemática directa, cinemática inversa, agarres.

¹Doctora en Ingeniería, ingeniera mecánica. Docente Universidad Tecnológica de Pereira . Pereira, Colombia. Correo electrónico: adriamec@utp.edu.co

²Doctor en Ingeniería, ingeniero mecánico. Docente Universidad de Los Andes . Mérida, Venezuela. Correo electrónico: dmiguel@ula.ve

³Ingeniero mecánico. Universidad Tecnológica de Pereira . Pereira, Colombia. Correo electrónico: andres.agudelo@utp.edu.co

Abstract

Objective: A kinematic model of a hand prosthesis to study its behavior for different grip patterns is presented.

Methodology: Initially, the anatomy and biomechanics of the hand with its movement limitations are summarized to obtain the design parameters that allow for obtaining a functional hand structure. The mathematical models of the direct and inverse kinematics are developed and compared with the results obtained from commercial multi-body simulation software.

Results: The error in the direct and inverse kinematic models of the index finger of the prosthesis analyzed is low for the spherical and cylindrical grip. In the lateral grasp, an error of medium magnitude, approximately 7 %, was obtained. For the thumb, the error was negligible.

Conclusions: Upon completion of the process, a functional prototype is obtained with fewer degrees of freedom compared to a real hand and with good accuracy regarding its kinematic response.

Funding: Universidad Tecnológica de Pereira.

Keywords: robotic hand prosthesis, direct kinematics, inverse kinematics, grip.

Introducción

En las últimas décadas, los desarrollos tecnológicos han pasado de ser exclusivos del sector industrial, para migrar a diferentes campos de aplicación, entre ellos, la salud. El estudio de nuevos materiales y la fácil adquisición de elementos como servomotores, controladores, sensores, además del constante avance de la tecnología en impresión 3D, ha permitido que la robótica pueda ser aplicada para ayudar a personas que presentan problemas con la función de sus extremidades. Según el informe del Ministerio de Salud y Protección Social de Colombia ([Minsalud, 2020](#)), el 18,57 % de la población del país con discapacidad tiene problemas para llevar, mover y utilizar objetos con las manos: un total de 244 947 personas; una cifra significativa y alarmante para la comunidad; de ahí la necesidad de buscar alternativas para actuar frente a este problema. Las prótesis robóticas son dispositivos que se presentan como una solución para mejorar la condición de los pacientes que presentan pérdida total o parcial de sus extremidades, donde deben considerarse la funcionalidad del dispositivo, facilidad en la manufactura, costos y características estéticas que generen el menor impacto en el paciente.

Debido a la complejidad anatómica de la mano, las prótesis difícilmente suelen suplir las funciones del miembro que reemplazan, pero siguen siendo algo necesario para mejorar la calidad de vida de estas personas. Los países con alto grado de desarrollo tecnológico están invirtiendo en estos estudios, y así, están mejorando las alternativas disponibles comercialmente para la solución de este problema ([Mraz, 2022](#)).

En los últimos años, se han producido avances significativos en el diseño y control de prótesis robóticas de mano, los cuales abarcan desde el biomimetismo mecánico hasta la integración

de señales EMG y tegumentarias (Guo *et al.*, 2024; Huang *et al.*, 2024). El uso de gemelos digitales aplicados a entornos de realidad virtual ha permitido entrenar y validar dispositivos protésicos antes de su fabricación física (Cellupica *et al.*, 2024). Además, estudios recientes han comenzado a definir requisitos cinemáticos y dinámicos funcionales precisos basados en análisis de actividades de la vida diaria (Herneth *et al.*, 2024). Estas tendencias reflejan un enfoque creciente hacia soluciones personalizadas, accesibles y validadas digitalmente (Marinelli *et al.*, 2023), lo cual sustenta la importancia de propuestas como la de este estudio. Aquí se realiza el estudio cinemático a un prototipo de prótesis robótica de mano. En primer lugar, se desarrolla la cinemática directa e inversa de posición y se evalúa para diferentes tipos de agarre. La evaluación del modelo se realiza por comparación con los resultados obtenidos de un gemelo digital modelado en un programa de simulación multicuerpo.

Metodología

Como primer paso metodológico, se realizó un análisis anatómico y biomecánico de la mano humana con el objetivo de identificar los grados de libertad, tipos de articulaciones y patrones de movimiento relevantes para el diseño funcional de la prótesis. En esta etapa se establece una correspondencia entre las estructuras biológicas y sus equivalentes mecánicos, lo cual facilita la definición de pares cinemáticos y la idealización del modelo robótico.

Inicialmente se resume la anatomía y biomecánica de la mano y sus restricciones de movimiento. Luego, se desarrollan los modelos matemáticos de la cinemática directa e inversa de posición y velocidad. Por último, se ejecuta una simulación computacional para tres patrones de agarre, con el fin de validar los modelos.

Anatomía de la mano humana

Las articulaciones de la mano están conformadas por cinco grandes grupos: carpianas, carpometacarpianas, intercarpianas, metacarpofalángicas e interfalángicas. Los dedos índice, medio, anular y meñique cuentan con tres articulaciones cada uno. La articulación metacarpofalángica (MCP) une la falange proximal con el metacarpiano (figura 1). La articulación interfalángica proximal (PIP) une la falange media con la proximal. La articulación interfalángica distal (DIP) une la falange media con la distal (Prattichizzo *et al.*, 2015).

El pulgar cuenta también con tres articulaciones, pero su nomenclatura difiere respecto a los demás dedos. La articulación interfalángica (IP) une la falange distal con la proximal. La articulación metacarpofalángica (MCP) une la falange proximal con el metacarpo. La articulación trapecio-metacarpiana (TMC) une el metacarpiano con el hueso trapecio de la hilera distal

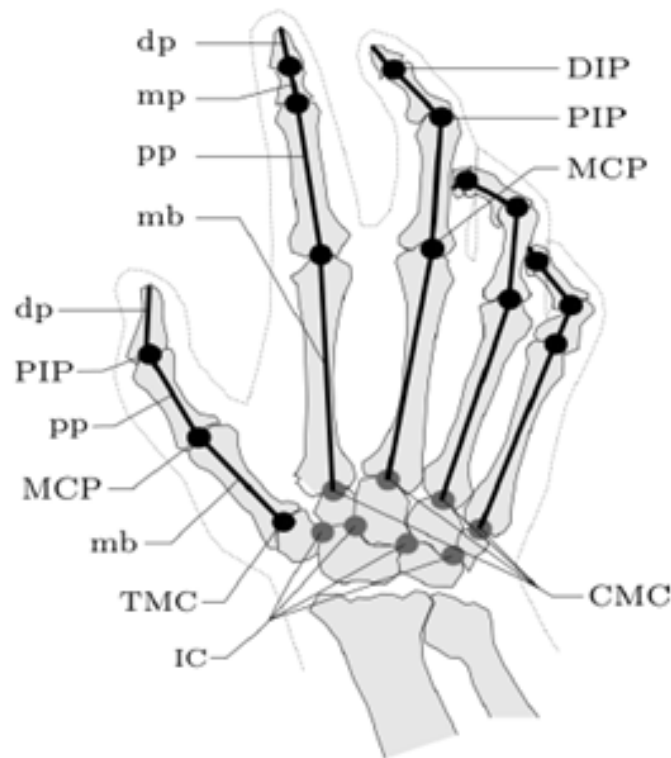


Figura 1. Nomenclatura de las articulaciones de la mano

Nota: tomada de [Prattichizzo et al. \(2015\)](#).

del carpo. La articulación TMC es la más importante para definir la cinemática del pulgar, ya que es la que habilita la función de oposición.

Cada articulación de la mano está restringida en su movimiento, por su morfología, estructura y funcionamiento, lo que determina el número de grados de libertad que posee. De acuerdo con ello, se clasifican en fijas o fibrosas, semimóviles o cartilaginosas, y móviles o diartrosis (sinoviales). Dentro de estas últimas, las articulaciones metacarpofalángicas son del tipo sinovial condíleo y se consideran biaxiales, ya que permiten dos movimientos de rotación en las falanges proximales, por tanto, se dice que cuentan con 2 grados de libertad. Estas articulaciones presentan una desproporción entre el tamaño de la cabeza del metacarpiano y la base de la falange correspondiente, lo cual se compensa con una placa de fibrocartílago glenoideo que mejora la congruencia articular.

En el caso del pulgar, la articulación metacarpofalángica se comporta como una articulación troclear, es decir, uniaxial ([Angulo Carrere et al., 2011](#)). Por su parte, la articulación trapecio-metacarpiana, también del pulgar, es del tipo sinovial silla de montar biaxial, lo que le confiere dos

grados de libertad. Finalmente, las articulaciones interfalángicas son sinoviales del tipo trocleares o en bisagra, y al ser uniaxiales, permite solamente un movimiento de flexión-extensión. En la figura 2 se ilustran los tres tipos de articulaciones presentes en los dedos de la mano humana.

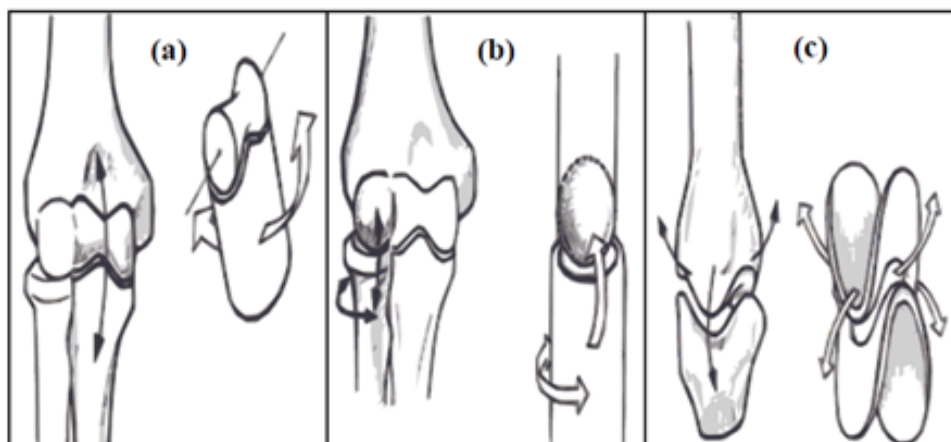


Figura 2. Articulaciones (a) interfalángicas, (b) metacarpofalángicas, (c) trapecio-metacarpianas

Nota: adaptado de [Daza \(2007\)](#).

Las articulaciones de la mano humana presentan un rango de valores dentro del cual pueden moverse; esto es importante para comprender la biomecánica de la mano y necesario para el análisis cinemático. Estudios referentes a la biomecánica de la mano han determinado el rango de movimiento para los dedos de este órgano. En la tabla 1 se presenta el rango de valores para diferentes movimientos realizados por las articulaciones de los dedos de la mano humana.

Tabla 1. Restricciones de movimiento de los dedos de la mano humana

	Articulación	Flexión	Extensión	Abducción/Aducción
Pulgar	TMC	50°-90°	15°	45°-60°
	MCP	75°-80°	0°	5°
	IP	75°-80°	5°-10°	5°
Índice	MCP	90°	30°-40°	60°
	PIP	110°	0°	0°
	DIP	80°-90°	5°	0°
Medio	MCP	90°	30°-40°	45°
	PIP	110°	0°	0°
	DIP	80°-90°	5°	0°

Anular	MCP	90°	30°-40°	45°
	PIP	120°	0°	0°
	DIP	80°-90°	5°	0°
Meñique	MCP	90°	30°-40°	45°
	PIP	135°	0°	0°
	DIP	90°	5°	0°

Nota: tomada de [Chen et al. \(2011\)](#)

Las dimensiones de la mano no son iguales para todas las personas, esto debido a diversos factores como la edad, sexo o genética; factores que complejizan la tarea de estandarizar valores para las medidas de la mano. Se han desarrollado estudios en los cuales se ha determinado un promedio para las dimensiones de la mano de la población de algunos sectores, como las que se muestran en las tablas 2 y 3, la cuales son el promedio de medidas que se tomaron a diferentes personas de sexo masculino entre los 25 y los 29 años ([Binvignat et al., 2012](#)).

Tabla 2. Medidas generales de la mano humana

Longitud mano (mm)	Ancho mano (mm)	Longitud palma (mm)
188 ± 10	92 ± 21	105 ± 8

Nota: tomada de [Binvignat et al. \(2012\)](#)

Tabla 3. Medidas de las falanges de los dedos de la mano humana

	Falange proximal (mm)	Falange media (mm)	Falange distal (mm)
Pulgar	42 ± 7	-	34 ± 4
Índice	50 ± 13	31 ± 7	25 ± 3
Medio	56 ± 14	37 ± 8	27 ± 4
Anular	45 ± 12	31 ± 6	23 ± 3
Meñique	37 ± 9	23 ± 5	20 ± 2

Nota: tomada de [Binvignat et al. \(2012\)](#)

Agarres de la mano

Los movimientos o acciones que realizan las manos para interactuar con el entorno se conocen como *agarres*, y se clasifican en dos grupos: *prensiles* y *no prensiles*. Los agarres prensiles implican sujetar un objeto utilizando la mano, como ocurre al sostener una herramienta. En

cambio, los agarres no prensiles son usados para manipular objetos, pero sin sujetarlos, por ejemplo, al empujar, deslizar o levantar algo con la palma o con los dedos (Taylor y Schwarz, 1995). El estudio de los patrones de agarre de la mano humana ha sido, por mucho tiempo, tema de interés tanto en el ámbito médico como en el diseño de dispositivos protésicos, además de ser fundamental para la evaluación funcional en personas con defectos congénitos o lesiones. La literatura especializada determina seis tipos de agarre: cilíndrico, de punta, gancho, palmar, esférico y lateral (figura 3).



Figura 3. Agarres prensiles de la mano

Nota: tomado de Taylor y Schwarz (1995), con fines exclusivamente académicos.

La selección del tipo de agarre que una persona emplea al ejecutar una tarea depende de la naturaleza de la actividad, más que del tamaño y forma del objeto a manipular. Además, durante la ejecución de una misma tarea, la mano puede adoptar diferentes agarres para adaptarse a los cambios de fuerza y torque.

Modelo cinemático

La prótesis robótica de mano está conformada por cinco dedos, representados cada uno por cinco cadenas cinemáticas abiertas e independientes. Los dedos índices, medios, anulares y meñiques cuentan con 4 grados de libertad (GDL); y las articulaciones DIP y PIP son del tipo revolución, al ser imposible su abducción/aducción; y la articulación MCP permite dos movimientos: flexión y abducción. La abducción habilita la apertura lateral de los dedos; sin embargo, este movimiento no es indispensable en los agarres mencionados anteriormente. Por esta razón se considerará únicamente la flexión/extensión en esta articulación. Adicionalmente, la articulación DIP del índice es dependiente del movimiento de la articulación PIP, por tanto,

el elemento terminal que se encuentra ubicado en la falange distal del dedo no puede desplazarse mientras la articulación PIP permanezca inmóvil, y si además se considera únicamente la posición del elemento terminal, no su orientación, los 3 GDL harán una cadena cinemática redundante. Por tanto, los dedos índice, medio, anular y meñique se mueven en ejes paralelos al plano de la palma de la mano. Para su análisis es suficiente contar con 2 GDL como pares giratorios de las articulaciones MCP y PIP, dejando fija a un valor preestablecido el movimiento de la articulación DIP. El dedo pulgar, presenta un movimiento tridimensional, de manera que si son considerados sus 3 GDL como juntas giratorias. Para desarrollar el análisis cinemático se utiliza el método de Denavit-Hartenberg (D-H), descrito en [Barrientos et al. \(2007\)](#).

La notación de D-H introduce un sistema estándar para representar transformaciones homogéneas entre eslabones de un manipulador robótico. Con ello se simplifica la descripción del sistema mecánico pues permite obtener esquemas de notación compactos incluso cuando se tienen múltiples grados de libertad. En el caso de una mano, La D-H descompone su estructura en eslabones (falanges) y juntas cinemáticas (articulaciones metacarpofalángicas, interfalángicas, etcétera), para describir sus relaciones de posicionamiento de manera sistemática y estructurada respetando su funcionalidad.

Cinemática directa de posición

El análisis cinemático directo de posición de la mano robótica consiste en encontrar la matriz de transformación homogénea T , en función de las coordenadas articulares conocidas, de manera que relacione la posición y orientación del elemento terminal de los dedos respecto a un sistema de referencia fijo ubicado en la base de cada dedo.

Para el dedo índice, se determinan los parámetros D-H correspondientes a su cadena cinemática (tabla 4), según el esquema representado por la figura 4.

Tabla 4. Parámetros D-H para el dedo índice

Articulación	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	L_1	0	0	θ_1
2	L_a	0	0	θ_2

Para utilizar correctamente el método D-H, es necesario determinar la longitud entre la base de la falange media y el extremo de la falange distal del dedo índice, variable que se utiliza durante todo el análisis y se denominará *longitud aparente*, notada como L_a y expresada por la ecuación (1), para lo cual se fija el ángulo de la última falange a un valor prescrito de 160° . Los valores para las variables se toman de la tabla 3, siendo L_1 , L_2 y L_3 las longitudes de

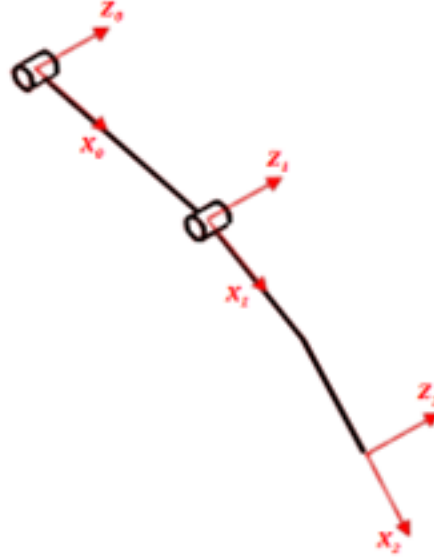


Figura 4. Esquema del dedo índice

las falanges proximal, media y distal respectivamente del dedo índice.

$$L_a = \sqrt{L_2^2 + L_3^2 - 2L_2L_3 \cos\left(\frac{8\pi}{9}\right)} \quad (1)$$

Con los parámetros D-H, se construyen las matrices de transformación homogénea para cada eslabón de la cadena articulada,

$$A_{i-1}^i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & L_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & L_i \sin \theta_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

A_{i-1}^i representa la posición y orientación del sistema de referencia local S_i del eslabón i respecto al sistema de referencia anterior S_{i-1} . La matriz de transformación homogénea T que relaciona la posición y orientación del elemento terminal (extremo del dedo) con el sistema de referencia ubicado en su base, se determina como

$$T = A_0^1 \cdot A_1^2 \quad (3)$$

Calculando los productos matriciales y simplificando, finalmente se determina la matriz de transformación homogénea para el dedo índice:

$$T_{\text{índice}} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 & L_a \cos(\theta_1 + \theta_2) + L_1 \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 & L_a \sin(\theta_1 + \theta_2) + L_1 \sin(\theta_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Las tres primeras filas de la última columna se corresponden con la posición del extremo del dedo índice. Igual tratamiento para los dedos medio, anular y meñique. La posición espacial en dirección Z para esta cadena cinemática siempre será igual a 0.

Para el dedo pulgar, se ubican los sistemas de referencia locales, como se muestra en la figura 5.

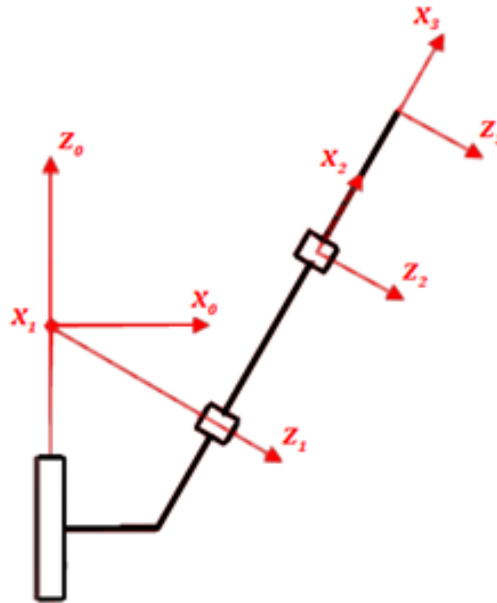


Figura 5. Sistemas de referencia para el dedo pulgar

Los parámetros D-H para la cadena cinemática del dedo pulgar se muestran en la tabla 5.

Tabla 5. Parámetros D-H del dedo pulgar

Articulación	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	$4\pi/3$	0	$3\pi/2 + \theta_1$
2	L_2	0	L_1	$3\pi/2 + \theta_2$
3	L_3	0		θ_3

Para determinar la matriz de transformación homogénea T que relaciona la posición y orientación del elemento terminal con el sistema de referencia ubicado en la base del dedo pulgar, se calcula el producto de las matrices obtenidas a partir de los parámetros D-H de la tabla 5,

$$T_{pulg\grave{a}r} = A_0^1 \cdot A_1^2 \cdot A_2^3 = \begin{bmatrix} nx & ox & ax & P_x \\ ny & oy & ay & P_y \\ nz & oz & az & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Donde

$$n_x = \frac{3 \cos(\theta_2 + \theta_3 - \theta_1) - \cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_1)}{4} \quad (6)$$

$$n_y = -\frac{\sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_1) + 3 \sin(\theta_2 + \theta_3 - \theta_1)}{4} \quad (7)$$

$$n_z = \frac{\sqrt{3} \cos(\theta_2 + \theta_3)}{2} \quad (8)$$

$$o_x = \frac{\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) - 3 \sin(\theta_2 + \theta_3 - \theta_1)}{4} \quad (9)$$

$$o_y = -\frac{\cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_1) + 3 \cos(\theta_2 + \theta_3 - \theta_1)}{4} \quad (10)$$

$$o_z = -\frac{\sqrt{3} \sin(\theta_2 + \theta_3)}{2} \quad (11)$$

$$a_x = \frac{\sqrt{3} \cos \theta_1}{2} \quad (12)$$

$$a_y = \frac{\sqrt{3} \sin \theta_1}{2} \quad (13)$$

$$a_z = -\frac{1}{2} \quad (14)$$

Los parámetros P_x , P_y y P_z de la matriz de transformación homogénea del dedo pulgar mostrados en la ecuación (5), ayudan a determinar la posición espacial del elemento terminal de dicho dedo, en función de sus coordenadas articulares respecto al sistema de referencia fijo ubicado en la base:

$$P_x = \frac{3L_3 \cos(\theta_2 + \theta_3 - \theta_1)}{4} - \frac{L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)}{4} + \frac{3L_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{4} - \frac{L_3 \cos(\theta_2 + \theta_3 + \theta_1)}{4} + \frac{\sqrt{3}L_1 \cos \theta_1}{2} \quad (15)$$

$$P_y = \frac{3L_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{4} - \frac{L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)}{4} + \frac{3L_3 \sin(\theta_2 + \theta_3 - \theta_1)}{4} - \frac{L_3 \sin(\theta_2 + \theta_3 + \theta_1)}{4} + \frac{\sqrt{3}L_1 \sin \theta_1}{2} \quad (16)$$

$$P_z = \frac{\sqrt{3}L_3 \cos(\theta_2 + \theta_3)}{2} - \frac{L_1}{2} + \frac{\sqrt{3}L_2 \cos \theta_2}{2} \quad (17)$$

Cinemática inversa de posición

El análisis cinemático inverso de posición busca determinar los valores que deben tomar las coordenadas articulares θ_1 , θ_2 y θ_3 de los dedos de la mano robótica para adaptarse a una posición y orientación espacial conocida del elemento terminal. Para esto, se utilizan métodos geométricos y las matrices de transformación homogéneas determinadas en el análisis cinemático directo de posición.

Los dedos índice, medio, anular, y meñique se mueven en el plano, de manera que el método geométrico es la opción más sencilla de determinar la cinemática inversa. Del esquema mostrado en la figura 4 es posible obtener los triángulos que se ilustran en la figura 6.

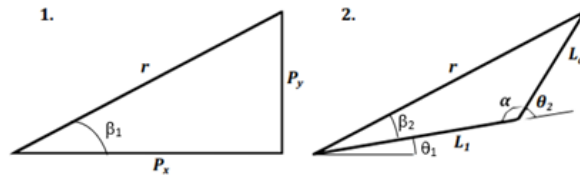


Figura 6. Triángulo de relación geométrica con la variable θ_2

Relacionando ambos triángulos se obtienen las expresiones:

$$\tan \beta_1 = \frac{P_y}{P_x} \quad (18)$$

$$\beta_2 = \beta_1 - \theta_1 \quad (19)$$

Aplicando ley de coseno al triángulo interno y usando identidades trigonométricas se obtiene

$$\beta_2 = \tan^{-1} \left(\frac{\pm \sqrt{1 - M_2}}{M_2} \right) \quad (20)$$

Donde

$$M_2 = \cos \beta_2 = \frac{P_x^2 + P_y^2 + L_1^2 - L_a^2}{2L_1 (P_x^2 + P_y^2)} \quad (21)$$

Despejando de (19) se tiene la primera coordenada angular correspondiente a la articulación MCP del dedo índice,

$$\theta_1 = \tan^{-1} \left(\frac{P_y}{P_x} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\pm \sqrt{1 - M_2}}{M_2} \right) \quad (22)$$

Para el análisis cinemático inverso de posición del dedo pulgar, aunque puede resolverse mediante método geométrico como en el caso anterior, se aplica el método de matriz inversa. A partir de la matriz de transformación homogénea que contiene la posición y orientación del último sistema de referencia (extremo del dedo) y las matrices de transformación homogénea entre nodos se obtiene un conjunto de ecuaciones que ayudan a resolver las coordenadas angulares. Así, la expresión (5) se multiplica a ambos lados por la matriz inversa de la primera matriz de transformación $(A_0^1)^{-1}$; así se obtiene,

$$(A_0^1)^{-1} \cdot T = A_1^2 \cdot A_2^3 \quad (23)$$

De la anterior expresión se obtiene el sistema de ecuaciones 3×3 dado por el conjunto de ecuaciones siguientes:

$$P_x \sin \theta_1 - P_y \cos \theta_1 = L_3 \sin \theta_2 \cos \theta_3 + L_3 \cos \theta_2 \sin \theta_3 + L_2 \sin \theta_2 \quad (24)$$

$$\frac{P_x \cos \theta_1 + P_y \sin \theta_1 + \sqrt{3}P_z}{2} = L_3 \cos \theta_2 \cos \theta_3 - L_3 \sin \theta_2 \sin \theta_3 + L_2 \cos \theta_2 \quad (25)$$

$$\frac{\sqrt{3}P_x \cos \theta_1 + \sqrt{3}P_y \sin \theta_1 - P_z}{2} = L_1 \quad (26)$$

Tras organizar la ecuación (26) se tiene,

$$B = P_x \cos \theta_1 + P_y \sin \theta_1 = \frac{\sqrt{3}(2L_1 + P_z)}{3} \quad (27)$$

Reorganizando términos y usando identidades trigonométricas, entonces

$$P_x \sqrt{1 - \sin^2 \theta_1} = B - P_y \sin \theta_1 \quad (28)$$

Elevando al cuadrado y luego factorizando, se obtiene la expresión cuadrática para la variable θ_1

$$\sin^2 \theta_1 - \frac{2BP_y}{P_x^2 + P_y^2} \sin \theta_1 + \frac{B^2 - P_x^2}{P_x^2 + P_y^2} = 0 \quad (29)$$

Donde

$$\sin \theta_1 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (30)$$

$$\text{Con } a = 1, \quad b = -\frac{2\sqrt{3}P_y(2L_1 + P_z)}{3(P_x^2 + P_y^2)} \quad \text{y} \quad c = -\frac{3P_x^2 - (2L_1 + P_z)^2}{3(P_x^2 + P_y^2)}$$

Para determinar las coordenadas articulares θ_2 y θ_3 se parte de las ecuaciones (24) y (25). Elevando al cuadrado ambas expresiones y sumándolas se obtiene

$$\cos \theta_3 = \frac{K_2^2 + K_3^2 - L_2^2 - L_3^2}{2L_2L_3} \quad (31)$$

Donde $K_2 = P_x \sin \theta_1 - P_y \cos \theta_1$ y $K_3 = \frac{P_x \cos \theta_1 + P_y \sin \theta_1 + \sqrt{3}P_z}{2}$

De la ecuación (31) se determina la tercera coordenada articular como

$$\theta_3 = \tan^{-1} \left(\frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta_3}}{\cos \theta_3} \right) \quad (32)$$

Para la segunda coordenada articular se divide la ecuación (24) entre la (25), así,

$$\frac{L_2 \sin \theta_2 + L_3 \cos \theta_2 \sin \theta_3 + L_3 \sin \theta_2 \cos \theta_3}{L_2 \cos \theta_2 + L_3 \cos \theta_3 \cos \theta_2 - L_3 \sin \theta_2 \sin \theta_3} = \frac{K_2}{K_3} \quad (33)$$

Dividiendo numerador y denominador de los términos de la derecha entre $\cos \theta_2$ se obtiene

$$\theta_2 = \tan^{-1} \left(\frac{K_2 (L_2 + L_3 \cos \theta_3) - K_3 L_3 \sin \theta_3}{K_3 (L_2 + L_3 \cos \theta_3) + K_2 L_3 \sin \theta_3} \right) \quad (34)$$

Análisis cinemático de velocidad

El análisis cinemático de velocidad consiste en determinar la velocidad lineal v , y la velocidad angular ω del elemento terminal de cada cadena cinemática que conforma los dedos de la mano robótica, en función de la velocidad de las coordenadas articulares $\dot{\theta}_i$. Esta relación se da a partir de la matriz jacobiana J , de manera que:

$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = J \cdot \dot{\theta} \quad (35)$$

La matriz jacobiana J se divide en J_v y J_{ω} , que son las matrices jacobianas de velocidad lineal y velocidad angular respectivamente; ambas matrices son de dimensión $3 \times n$.

$$J = \begin{bmatrix} J_v \\ J_{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{v,i} & \cdots & J_{v,n} \\ J_{\omega,i} & \cdots & J_{\omega,n} \end{bmatrix} \quad (36)$$

Por propagación de velocidades es posible determinar los valores de las matrices J_v y J_{ω} . Para articulaciones rotacionales, se tiene:

$$J_{v,i} = z_{i-1}^0 \times (r_n^0 - r_{i-1}^0) \quad \text{y} \quad J_{\omega,i} = z_{i-1}^0 \quad (37)$$

Para las expresiones anteriores, el subíndice i representa la articulación que se está analizando. El parámetro z_{i-1}^0 representa el vector unitario asociado al eje z para cada articulación. r_n^0 es un vector que parte desde la base hasta la última articulación y r_{i-1}^0 es un vector que parte

desde la base hasta la articulación $i - 1$.

Tratándose del dedo índice de la mano robótica, que es una cadena cinemática conformada por 3 eslabones y 3 articulaciones rotacionales, su matriz jacobiana queda determinada como:

$$J = \begin{bmatrix} z_0^0 \times (\vec{r}_3^0 - \vec{r}_0^0) & z_1^0 \times (\vec{r}_3^0 - \vec{r}_1^0) & z_2^0 \times (\vec{r}_3^0 - \vec{r}_2^0) \\ z_0^0 & z_1^0 & z_2^0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

En la matriz J , el vector z_0^0 tiene componentes $(0 \ 0 \ 0)^T$ debido a que es un vector unitario referenciado al eje z visto desde su propio sistema de referencia. Los vectores z_1^0 y z_2^0 se pueden determinar de las matrices de transformación homogénea para el dedo índice, desarrolladas previamente. z_1^0 corresponde a las componentes $(a_x \ a_y \ a_z)^T$ de la matriz de transformación homogénea A_1^0 determinada como se especifica en la ecuación (2). Para determinar las componentes del vector z_2^0 es necesario calcular el producto de las matrices de transformación homogénea A_1^0 y A_2^1 :

$$A_2^0 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 & L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + L_1 \cos \theta_1 \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 & L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + L_1 \sin \theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (39)$$

El vector z_2^0 corresponde entonces a los componentes $(a_x \ a_y \ a_z)^T$ de la matriz de transformación homogénea A_2^0 determinada previamente.

El vector de posición \vec{r}_0^0 es de componentes nulas $(0 \ 0 \ 0)^T$. Los vectores de posición \vec{r}_1^0, \vec{r}_2^0 y \vec{r}_3^0 corresponden a las componentes $(p_x \ p_y \ p_z)^T$ de las matrices de transformación homogénea A_1^0, A_2^0 y A_3^0 .

Reemplazando los parámetros de la matriz J y realizando las operaciones algebraicas, se tiene entonces que la matriz J para el dedo índice de la mano robótica es:

$$J_I = \begin{bmatrix} -L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) - L_1 \sin \theta_1 - \sigma_1 & -L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) - \sigma_1 & -\sigma_1 \\ L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + L_1 \cos \theta_1 + \sigma_2 & L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + \sigma_2 & \sigma_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (40)$$

Donde: $\sigma_1 = L_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$ y $\sigma_2 = L_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$

Finalmente, la ecuación (41) representa el modelo matemático que describe la cinemática

directa de velocidad del dedo índice de la mano robótica.

$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}_I = J_I \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (41)$$

En el modelo anterior las variables $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$ y $\dot{\theta}_3$ representan las velocidades de entrada para las articulaciones del dedo índice, las cuales tienen valores conocidos.

El modelo cinemático directo de velocidad también sirve para determinar la velocidad del elemento terminal de los dedos medio, anular y meñique.

El análisis cinemático de velocidad para el dedo pulgar se desarrolla de la misma manera que para el dedo índice; por tanto, su matriz J se representa con la ecuación dada en (36).

La matriz A_2^0 del dedo pulgar se determina calculando el producto entre las matrices de transformación homogénea A_1^0 y A_2^1 :

$$A_2^0 = \begin{bmatrix} \sigma_2 - \sigma_4 & \sigma_1 + \sigma_3 & \frac{\sqrt{3}\cos\theta_1}{2} & \frac{L_2\cos\theta_1\cos\theta_2}{2} + L_2\sin\theta_1\sin\theta_2 + \frac{\sqrt{3}L_1\cos\theta_1}{2} \\ \sigma_1 - \sigma_3 & -\sigma_2 - \sigma_4 & \frac{\sqrt{3}\sin\theta_1}{2} & \frac{L_2\cos\theta_2\sin\theta_1}{2} - L_2\cos\theta_1\sin\theta_2 + \frac{\sqrt{3}L_1\sin\theta_1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}\cos\theta_2}{2} & -\frac{\sqrt{3}\sin\theta_2}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}L_2\cos\theta_2}{2} - \frac{L_1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$\text{Donde: } \sigma_1 = \frac{3\sin(\theta_1-\theta_2)}{4}, \quad \sigma_2 = \frac{3\cos(\theta_1-\theta_2)}{4}, \quad \sigma_3 = \frac{\sin(\theta_1+\theta_2)}{4}, \quad \sigma_4 = \frac{\cos(\theta_1+\theta_2)}{4}$$

Los vectores columna z_1^0 , z_2^0 y z_3^0 corresponden a los parámetros $(a_x \ a_y \ a_z)^T$ de las matrices de transformación homogénea A_1^0 , A_2^0 y A_3^0 para el dedo pulgar. Por otro lado, el vector de posición \vec{r}_0^0 es de componentes nulas $(0 \ 0 \ 0)^T$. Los vectores \vec{r}_1^0 , \vec{r}_2^0 y \vec{r}_3^0 , corresponden a las componentes $(p_x \ p_y \ p_z)^T$ de las matrices de transformación homogénea A_1^0 , A_2^0 y A_3^0 respectivamente.

Reemplazando los parámetros se tiene la matriz J para el dedo pulgar de la mano robótica como

$$J_P = \begin{bmatrix} \sigma_{10} + \sigma_4 - \sigma_2 + \frac{L_3\sigma_8}{4} - \frac{\sqrt{3}L_1\sin\theta_1}{2} & \sigma_4 - \sigma_{10} + \sigma_2 + \frac{L_3\sigma_8}{4} & \frac{L_3(\sigma_8-3\sigma_{12})}{4} \\ \sigma_{11} - \sigma_5 + \sigma_3 - \frac{L_3\sigma_9}{4} + \frac{\sqrt{3}L_1\cos\theta_1}{2} & -\sigma_{11} - \sigma_5 - \sigma_3 - \frac{L_3\sigma_9}{4} & -\frac{L_3(\sigma_9-3\sigma_{13})}{4} \\ 0 & -\sigma_1 - \sqrt{3}L_2\sin\theta_2 & -\sigma_1 \\ 0 & \sigma_7 & \sigma_7 \\ 0 & \sigma_6 & \sigma_6 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (43)$$

Donde:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{\sqrt{3}L_3 \sin(\theta_2 + \theta_3)}{2}, & \sigma_2 &= \frac{3L_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{4}, & \sigma_3 &= \frac{3L_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{4}, & \sigma_4 &= \frac{L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)}{4}, \\ \sigma_5 &= \frac{L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)}{4}, & \sigma_6 &= \frac{\sqrt{3} \sin \theta_1}{2}, & \sigma_7 &= \frac{\sqrt{3} \cos \theta_1}{2}, & \sigma_8 &= \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3), \\ \sigma_9 &= \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3), & \sigma_{10} &= \frac{3L_3 \sin(\theta_2 - \theta_1 + \theta_3)}{4}, & \sigma_{11} &= \frac{3L_3 \cos(\theta_2 - \theta_1 + \theta_3)}{4}\end{aligned}$$

Análisis cinemático de aceleración

Para obtener el modelo matemático que determine la aceleración lineal y angular del elemento terminal de los dedos de la mano robótica, se deriva respecto al tiempo la expresión dada en (35), lo que arroja como resultado el modelo cinemático directo de aceleración

$$\ddot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{J}} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} + \mathbf{J} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (44)$$

En la expresión anterior, $\ddot{\mathbf{x}}$ es un vector de componentes $(a_x, a_y, a_z, \alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$, donde a_x, a_y y a_z representan la velocidad lineal en los 3 ejes del sistema coordenado, mientras que α_x, α_y y α_z representan la velocidad angular de los 3 ejes en el mismo sistema coordenado. \mathbf{J} es la matriz jacobiana y $\dot{\mathbf{J}}$ es la derivada de la matriz jacobiana. $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ y $\dot{\theta}_3$ son las velocidades de entrada, mientras que $\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2$ y $\ddot{\theta}_3$ son las aceleraciones de entrada.

El único parámetro desconocido es $\dot{\mathbf{J}}$, así que en este caso el problema cinemático de aceleraciones se reduce a calcular la derivada de la matriz jacobiana \mathbf{J} para las cadenas articuladas que conforman los dedos de la mano robótica.

Simulación mediante gemelo digital

Con el fin de evaluar los modelos cinemáticos obtenidos, se crea un gemelo digital del prototipo de mano analizada con simulación de movimiento para diferentes tipos de agarre. El modelo del prototipo de la mano robótica se desarrolló en el entorno de *SolidWorks®* (versión académica) proporcionado bajo licencia estudiantil, que además de facilitar la construcción de planos técnicos para la posterior manufactura de los elementos, habilita simulación de movimiento, y evaluación y ajuste del modelo antes de la construcción del prototipo físico. El modelo se construyó con las dimensiones antropométricas presentadas en las tablas 2 y 3, las cuales corresponden a las longitudes de las falanges de los cinco dedos y a la geometría general de la palma. Con el fin de garantizar la personalización del diseño, se incluyó la posibilidad de

parametrizar las dimensiones de cada segmento, lo cual facilita la adaptación del modelo al tamaño de mano requerido por el usuario final.

Para representar con fidelidad la movilidad de la mano, se estableció un sistema de referencia local en la base de cada dedo, de acuerdo con la convención de Denavit-Hartenberg (D-H). La dirección del eje ZZZ en cada sistema local fue alineada con el eje de rotación de cada articulación, para así asegurar la coherencia entre el modelo geométrico y las expresiones matemáticas del modelo cinemático analítico. En la figura 7 se ilustra la ubicación de estos sistemas coordenados y el ensamble general del prototipo digital.

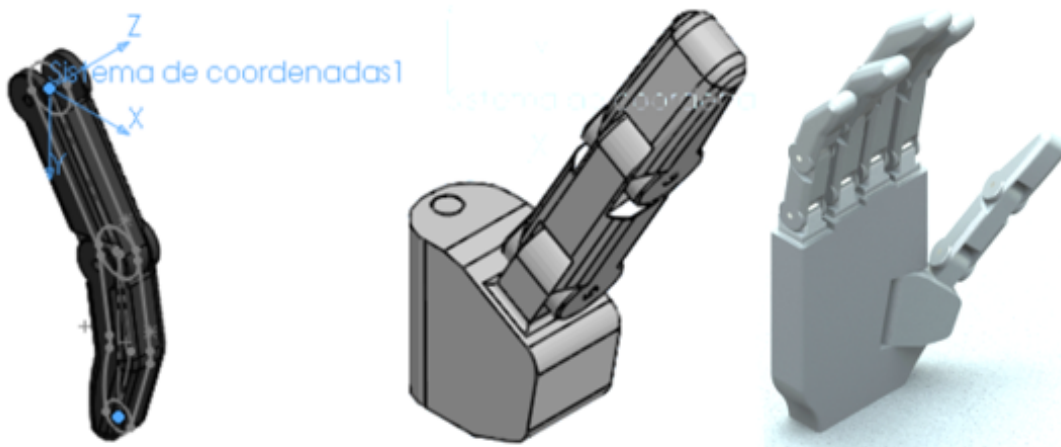


Figura 7. Modelado de la mano

Nota: creado en SolidWorks® (licencia estudiantil).

Durante el proceso de simulación, se seleccionaron dos puntos de interés por dedo: uno en la base (eslabón fijo) y otro en la punta (extremo distal), este último en función de punto terminal de la cadena cinemática. La trayectoria seguida por este punto distal durante un patrón de agarre se definió como una curva guía, la cual fue utilizada para resolver la cinemática inversa (figura 8). De esta manera, el *software* calculó las coordenadas angulares de cada articulación necesarias para reproducir la trayectoria deseada.

Se simularon tres tipos de agarre comúnmente descritos en la literatura: esférico, cilíndrico y lateral. Para el agarre esférico se modeló una esfera de 60 mm de radio, y la mano tiene que usar todos los dedos, excepto cuando el elemento esférico es pequeño, en este caso solo tendría que usar los dedos pulgar, índice y medio para su sujeción. Para el agarre cilíndrico se modeló

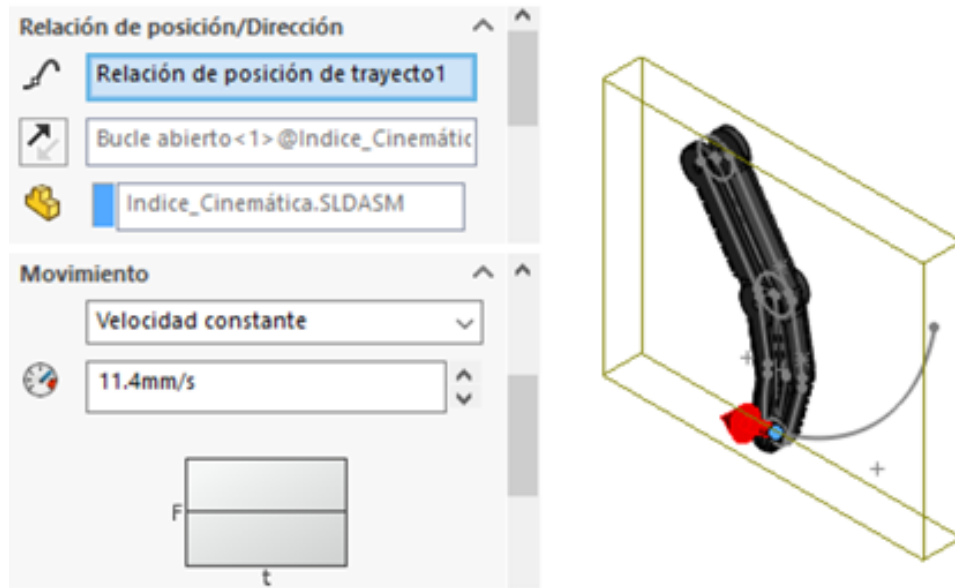


Figura 8. Trayectoria del elemento terminal

Nota: creado en SolidWorks® (licencia estudiantil).

un cilindro de 50 mm de diámetro. Igual que en el caso anterior, en este tipo de sujeción la mano tiene que utilizar todos los dedos y apoyar el elemento sobre la palma. Cuando el elemento cilíndrico es de un tamaño considerable, el prototipo propuesto tendrá que adaptarse a otro tipo de configuración y así realizar satisfactoriamente el agarre. Finalmente, para el agarre lateral, se modeló una lámina de 0,5 mm de espesor, y aquí los únicos dedos en contacto con el elemento a sujetar son el índice y el pulgar, los demás pueden adoptar cualquier configuración.

Las dimensiones seleccionadas para los objetos de prueba en los tres patrones de agarre se fundamentan en criterios antropométricos, funcionales y operativos. El objeto esférico de 60 mm de diámetro representa el tamaño promedio de elementos que pueden ser cómodamente sujetados con un agarre esférico por una mano adulta, como lo sugieren estudios biomecánicos (Feix *et al.*, 2016). El cilindro de 50 mm de diámetro simula elementos alargados comunes como mangos de herramientas o botellas. Y la lámina de 0,5 mm de espesor corresponde a objetos delgados tipo tarjeta, apropiados para el agarre lateral. Esta selección cubre un rango funcional representativo de manipulaciones cotidianas y permite evaluar el desempeño del modelo ante diferentes exigencias geométricas. Además, estas dimensiones fueron validadas dentro de los límites de movimiento del prototipo para asegurar su factibilidad tanto en simulación como en una eventual implementación física.

En la figura 9 se muestra la mano robótica cuando se encuentra ejecutando los tres patrones de sujeción. Cada simulación se programó con una duración total de diez segundos, para así observar de manera continua el movimiento articulado, desde la posición inicial hasta el cierre completo de la mano alrededor del objeto.

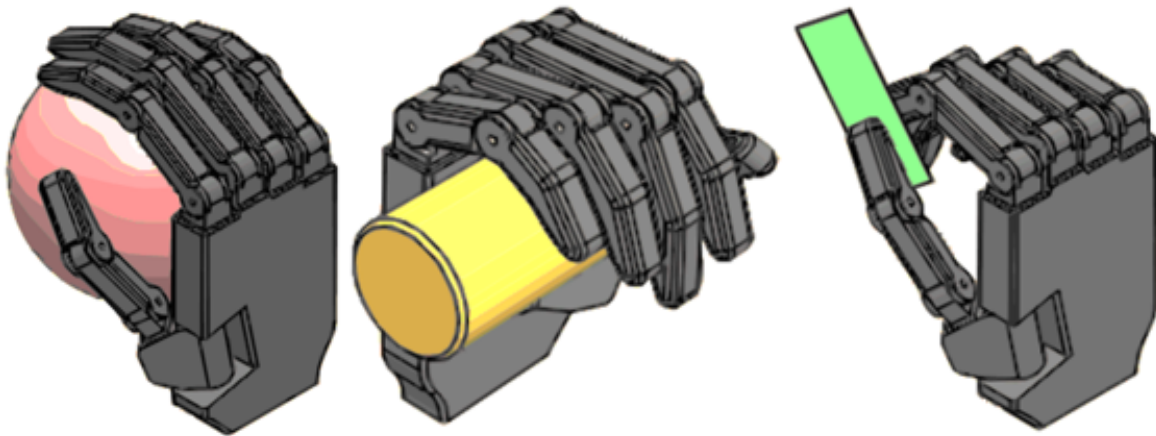


Figura 9. Patrones de agarre simulados. Esférico, cilíndrico y lateral

Nota: creado en SolidWorks® (licencia estudiantil).

Resultados

La cinemática directa obtenida por modelo analítico, para cada dedo en los tres patrones de agarre, fue idéntica a la obtenida mediante el gemelo digital. La figura 10 ejemplifica las coordenadas X , Y y Z del extremo del dedo pulgar en un agarre esférico.

Para la cinemática inversa, el modelo cinemático inverso de posición del dedo índice es el mismo para los dedos medio, anular y meñique, donde únicamente varía la longitud de los dedos, por este motivo solo se analiza el resultado para este. La figura 11 exhibe el dedo índice para un agarre lateral, y la figura 12 muestra las coordenadas del dedo pulgar en un agarre cilíndrico. En ambas figuras no se aprecian diferencias significativas.

Aunque las gráficas parecen similares en todos los casos, en la tabla 6 y 7 se resumen los errores obtenidos entre los dos modelos para cada tipo de agarre en su posición final.

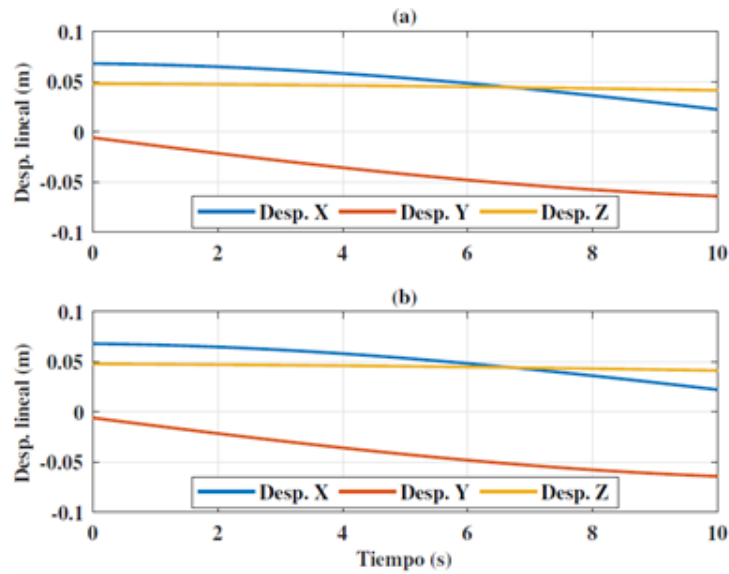


Figura 10. Desplazamiento lineal del pulgar en agarre esférico: (a) modelo, (b) simulación

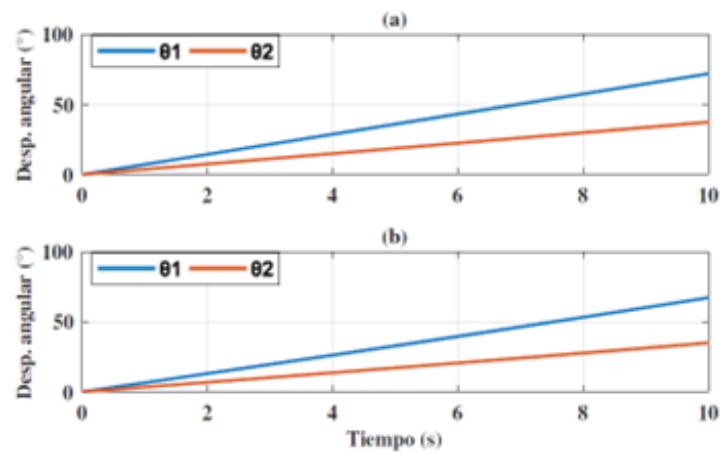


Figura 11. Cinemática inversa. Índice en agarre lateral: (a) modelo, (b) simulación

Nota: creado en SolidWorks® (licencia estudiantil).

Tabla 6. Error en la cinemática inversa del índice posición final

Tipo de agarre	θ_1			θ_2		
	Modelo	Simulación	Error %	Modelo	Simulación	Error, %
Esférico	57,420	56,668	1,309	13,580	13,400	1,323
Cilíndrico	90,000	86,378	4,024	28,080	26,950	4,024
Lateral	71,940	67,170	6,631	37,370	34,890	6,636

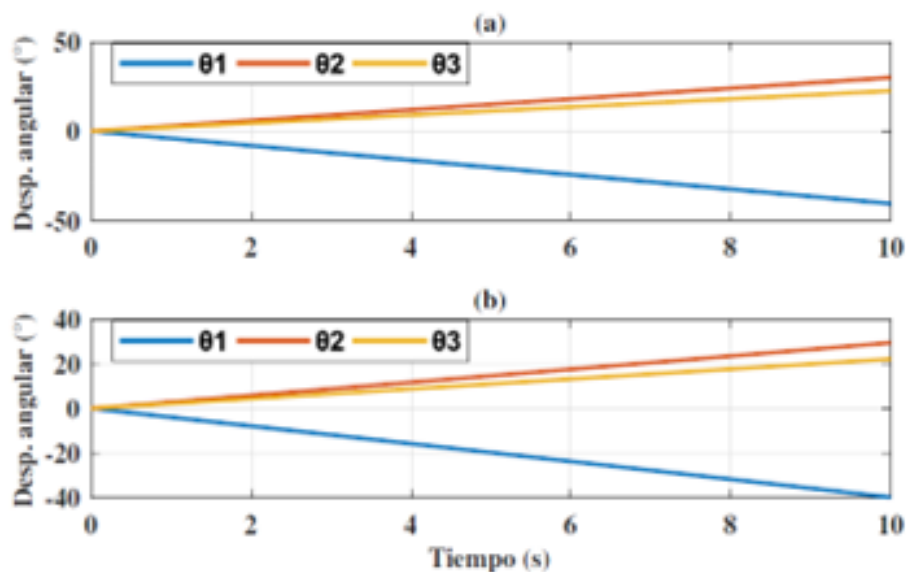


Figura 12. Cinemática inversa. Pulgar en agarre cilíndrico: (a) modelo, (b) simulación

Nota: creado en SolidWorks® (licencia estudiantil).

Según las tablas 6 y 7, el modelo cinemático inverso para el dedo pulgar presenta errores bajos y del mismo orden en los agarres esféricos y cilíndricos, lo que hace prácticamente despreciable en el agarre lateral. Estos errores están dentro de lo esperado por la precisión de máquina del equipo de cómputo. En el modelo cinemático inverso del dedo índice, se observan errores mayores, pero en ningún caso se supera el 7 % de error, y el caso más crítico corresponde al agarre lateral, que coincide con al agarre de mayor cierre de la mano. Hay que recordar que en el modelo del dedo índice se consideraron únicamente dos grados de libertad, lo que arrojó un diseño de prótesis más simple constructivamente. También hay que considerar que en la reducción de los GDL se fijó la falange distal a un valor preestablecido de 160° ; un valor razonable, pero no óptimo.

Tabla 7. Error en la cinemática inversa del pulgar posición final

Tipo de agarre	θ_1			θ_2			θ_3		
	Modelo	Simulación	Error %	Modelo	Simulación	Error %	Modelo	Simulación	Error %
Esférico	-52,010	-50,711	2,497	0	0	0	30,380	29,656	2,384
Cilíndrico	-40,570	-39,744	2,036	30,000	29,388	2,041	22,560	22,099	2,041
Lateral	-52,800	-53,050	0,473	21,370	21,470	0,468	12,160	12,220	0,493

Conclusiones

En este trabajo se presentó la metodología para obtener el modelo cinemático directo e inverso de posición de un prototipo de prótesis de mano. Se analizó la anatomía y biomecánica de la mano humana y se definió la morfología de la prótesis analizada. Se presentaron las herramientas matemáticas utilizadas para determinar los modelos matemáticos de la cinemática de la prótesis, así como los parámetros necesarios para realizar el análisis cinemático.

De acuerdo con los tipos de movimiento que realizan estos dispositivos, se determinó que en la cinemática inversa es necesaria únicamente la posición de los extremos de los dedos, lo que hace innecesaria su orientación final. Por esta razón, resultan redundantes las cadenas cinemáticas de los dedos índice, medio, anular y meñique, ya que estos presentan movimiento en un plano o planos paralelos a la palma de la mano. Además, las últimas falanges en estos dedos se fijaron a un ángulo preestablecido según la morfología de la mano. Con esto, se dispone de una prótesis con cuatro grados de libertad menos respecto a un mano real.

De estos errores, obtenidos tras la comparación con el gemelo digital, puede concluirse que no se ve afectada la respuesta cinemática como consecuencia de la disminución de los grados de movilidad del dispositivo, lo que lo hace casi despreciable en los agarres cilíndrico y esférico. Con ello, se logra un dispositivo funcional, capaz de reproducir el movimiento de la mano que, aun con menos grados de libertad, tiene evidentes ventajas de diseño, explotación, reducción de costos de fabricación y mantenimiento, así como la complejidad en el control.

Referencias

- Angulo Carrere, M. T., Álvarez Méndez, A., y Fuentes Peñaranda, Y. (2011). Biomecánica clínica. Biomecánica de la Extremidad Superior. Exploración de la Mano. *Reduca*, 3(4), 1-21.
- Barrientos, A., Peñín, L. F., Balaguer, C., y Aracil, R. (2007). *Fundamentos de robótica*. McGraw Hill/Interamericana de España.
- Binvignat, O., Almagiá, A., Lizana, P., y Olave, E. (2012). Aspectos biométricos de la mano de individuos chilenos. *International Journal of Morphology*, 30(2), 599-606. <http://dx.doi.org/10.4067/S0717-95022012000200040>
- Cellupica, A., Cirelli, M., Saggio, G., Gruppioni, E., y Valentini, P. (2024). An interactive digital-twin model for virtual reality environments to train in the use of a sensorized upper-limb prosthesis. *Algorithms*, 17(1), 35. <https://doi.org/10.3390/a17010035>

- Chen Chen, F., Favetto, A., Mousavi, M., Ambrosio, E. P., Appendino, S., Battezzato, A., Manfredi, D., Pescarmona, F., y Bona, B. (17-21 de julio de 2011). Human hand: kinematics, statics and dynamics. En *41st International Conference on Environmental Systems*. Oregon, Portland. <https://iris.polito.it/retrieve/e384c42e-142e-d4b2-e053-9f05fe0a1d67/2011%20-%20Chen%20Chen%20-%20Human%20Hand%3D%20Kinematics%2C%20Statics%2C%20and%20Dynamics.pdf>
- Daza Lesmes, J. (2007). *Evaluación clínico funcional del movimiento corporal humano*. Editorial Médica Internacional.
- Feix, T., Romero, J., Schmiedmayer, H. B., Dollar, A. M., y Kragic, D. (2016). The GRASP taxonomy of human grasp types. *IEEE Transactions on Human-Machine Systems*, 46(1), 66-77. <https://doi.org/10.1109/THMS.2015.2470657>
- Guo, K., Lu, J., Wu, Y., Hu, X., y Yang, H. (2024). The latest research progress on bionic artificial hands: a systematic review. *Micromachines*, 15(7), 891. <https://doi.org/10.3390/mi15070891>
- Herneth, C., Ganguly, A., y Haddadin, S. (2024). Functional kinematic and kinetic requirements of the upper limb during activities of daily living: a recommendation on necessary joint capabilities for prosthetic arms. *arXiv*: 2408.14361. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2408.14361>
- Huang, H., Hargrove, L., Ortiz-Catalan, M., y Sensinger, J. W. (2024). Integrating upper-limb prostheses with the human body: technology advances, readiness, and roles in human-prosthesis interaction. *Annual Review of Biomedical Engineering*, 26(1), 503-528. <https://doi.org/10.1146/annurev-bioeng-110222-095816>
- Marinelli, A., Boccardo, N., Tessari, F., Di Domenico, D., Caserta, G., Canepa, M., Gini, G., Barresi, G., Laffranchi, M., De Michieli, L., y Semprini, M. (2023). Active upper limb prostheses: a review on current state and upcoming breakthroughs. *Progress in Biomedical Engineering*, 5: 012001. <https://doi.org/10.1088/2516-1091/acac57>
- Ministerio de Salud y Protección Social. (2020). *Boletines poblacionales: personas con discapacidad. Oficina de promoción social I-2020*. <https://www.minsalud.gov.co/sites/rid/Lists/BibliotecaDigital/RIDE/DE/PS/boletines-poblacionales-personas-discapacidadI-2020.pdf>
- Mraz, S., J. (28 de julio de 2022). Making prosthetic arms for those in need. *Machine Design*. <https://www.machinedesign.com/medical-design/article/21247590/maxon-making-prosthetic-arms-for-those-in-need>

- Prattichizzo, D., Meli, L., y Malvezzi, M. (2015). Digital handwriting with a finger or a stylus: a biomechanical comparison. *IEEE Transactions on Haptics*, 8(4), 356-370. <https://doi.org/10.1109/TOH.2015.2434812>
- Taylor, C. L., y Schwarz, R. J. (1995). The anatomy and mechanics of the human hand. *Comprehensive Structural Integrity*, 2, 22-35.

