

ALGORITMO PARA EL TRAZADO DE UN GRAFO EN CELDAS

Wilman Navarro Mejía*
wnavarro@demail.com

Desarrollar prototipos de redes tipo WAN es un área directamente comprometida con el campo de las matemáticas discretas, ciencia de mucha valía en la propuesta de nuevas teorías y modelos algorítmicos aplicados al desarrollo de la computación, en especial a las redes de PC bajo Tecnología WAN. El desarrollo propuesto en este artículo se basa en la teoría de grafos, cuyos postulados en cuanto a modelación y simulación de redes son bastante exactos y tienen un gran futuro en el área de la computación cuántica. Además, el documento contribuye en el tratamiento de los altibajos que se presentan en redes WAN.

1. Planteamiento del Problema

Obsérvese la siguiente clase de grafo no orientado y sin aristas pares:

Tenemos: $G=(X, \Gamma) \in L_n$ donde $X=\{X_1, \dots, X_n\}$ es un conjunto de puntos del grafo G , Γ - tiene reflejo X en X .

El conjunto $N \subset X$ afecta la celda del G , si para cualquier $X_i, X_j \in$ tiene lugar la correlación $X_i \in \Gamma X_j$ (es claro que $X_j \in \Gamma X_i$). La celda del grafo G se encuentra afectada por el conjunto de puntos N , que se representa por (N) .

En un caso particular si $\text{Card}(N)=1$, entonces hablaremos de una celda con un punto.

Se dice que el grafo está trazado en celdas $Q(N_1), \dots, Q(N_m)$, si:

$$\bigcup_{k=1}^m N_k = X,$$

donde $N_i \cap N_k = \emptyset$ para todas $i, k \in \{1, \dots, m\}$ ($i \neq k$).

Se observa que existen muchos trazados diferentes para el grafo G en celdas. El trazado $F = \{Q(N_1), \dots, Q(N_m)\}$ del grafo G en celdas lo llamamos "más pequeño" (CMP), si él tiene el número más pequeño de elementos en comparación con otros trazados de este grafo en celdas.

Supóngase que se necesita el trazado F del grafo $G \in L_n$ en el menor número de celdas. Este planteamiento es uno de los tipos de grafo, conocido como NP-Problemas de grafos completos, los cuales son definidos por su significado.

* Ingeniero de Sistemas, Magister en Redes y Sistemas Complejos. Profesor de la Facultad Tecnológica.

Muy relacionado con lo anterior se encuentra el trazado en un grafo del conjunto más grande de puntos independientes.

El conjunto $U \subset X$ que cumple la condición: $U \cap \Gamma U = \emptyset$, se llama conjunto de punto independiente del grafo G .

El conjunto de puntos independientes U se llama Máximo (CIM) si: $U \cup \Gamma U = X$

CIM $U \subset X$ se llama más grande (MCIM), si $\text{Card}(U) \geq \text{Card}(U)$ para todos CIM $U \subset X$ del grafo G .

El problema sobre el cálculo MCIM del grafo $G \in L_n$ también es NP-Completo.

El principal objetivo del presente artículo es proponer un algoritmo polinomial para la solución o cálculo del trazado del grafo $G \in L_n$ en el menor número de celdas.

2. Descripción del Algoritmo

Si se tiene un número finito de conjunto ordenado $(X, >)$, entonces existen métodos simples y efectivos para el trazado de los elementos X de ese conjunto en el menor número de circuitos y cálculo en el mayor número de anticircuitos.

Algún grafo $G \in L_n$ es transitoriamente orientado; entonces la solución del problema planteado anteriormente se inclina al cálculo del circuito para el trazado del orden del conjunto establecido. Por lo anterior ha surgido la idea de utilizar las propiedades señaladas de un conjunto ordenado para la solución del problema sobre el trazado de cualquier grafo no orientado $G \in L_n$ en el menor número de aristas.

Esencialmente el método de solución propuesto al problema planteado consiste en el trazado por el inicio del grafo G de un conjunto ordenado - finito $(X, >)$, para posteriormente reordenarlo o ampliarlo cuando así se crea conveniente.

Con el cumplimiento de algunas condiciones definidas, la obtención del trazado del conjunto ordenado en circuitos le corresponde el trazado del grafo G en el menor número de celdas. Si estas condiciones no se cumplen, entonces se realiza el paso al nuevo trazado del conjunto ordenado $(X, >1)$, y así el proce-

dimiento descrito anteriormente se repite. El primer conjunto ordenado lo realizamos de la siguiente forma:

Se orienta la arista del grafo $G=(X, \Gamma)$ de tal forma que se pueda obtener un grafo acíclico $G(X^0)=(X, \Gamma)$, en el cual X^0 es el conjunto de puntos del grafo que tiene curvas sólo de entradas, correspondientes a algún (CIM) del grafo G .

Se observa que el grafo $G_t(X^0)=(X, \Gamma_t)$ es transitoriamente anticircuito del grafo $G(X^0)$ y define un conjunto ordenado-finito $(X, >)$.

En el presente trabajo se demuestra que cada circuito de un Mínimo Trazado de Circuito (MTC) del conjunto $(X, >)$ no tiene ni un par de puntos independientes del grafo G ; entonces el trazado obtenido define el trazado del grafo G buscado en celdas.

En general, en un conjunto ordenado $(X, >)$ se tienen algunas variantes para la obtención del MTC. Por esto para el conjunto $(X, >)$ se ha elaborado un procedimiento de puntos unidos de X , para circuitos de algún MTC, de tal forma que en uno mismo no se encuentren puntos independientes del grafo G .

En el proceso de puntos unidos, algunos pares independientes de puntos de G no se consiguen distribuir en diferentes circuitos de algún MTC, entonces esto puede indicarnos la luz de supervivencia en el grafo G del trazado en celdas, el cual tiene más elementos que el conjunto X^0 .

Lo planteado reorienta la curva del grafo $G(X^0)$ que se compone de puntos. El resultado será un nuevo conjunto ordenado $(X, >1)$. Por lo anteriormente expuesto el procedimiento de puntos unidos en el conjunto se repite $(X, >1)$.

En el proceso de "puntos unidos" de alguna forma se repiten los circuitos no orientados y los anticircuitos $G(X^0)$. Cuando se explica algunos de los elementos del anticircuito $G_t(X^0)$ no se obtiene la distribución en el circuito trazado MTC del grafo $G_t(X^0)$. Esto nos sirve como signo de supervivencia del grafo de algún ciclo impar C_{k+1} ($K \geq 2$).

En este caso, en el grafo $G(X^0)$ se introduce entonces el concepto de "copunto" para el ciclo impar detectado. En el resultado del nuevo grafo se encuentra un ciclo impar C_{k+1} ($K \geq 2$) que se pega al ciclo par C_{2k+2} . Formalmente un ciclo impar se detecta cuando se presenta la necesidad de reorientar las curvas del grafo, que fue vista anteriormente reorientada.

A continuación se verán grafos con muchos puntos más que el inicial y los descritos anteriormente en el procedimiento de reorientación de la curva del grafo acíclico se repiten. El procedimiento se termina con el trazado de ese grafo (tópico); sus puntos se pueden distribuir con interrupción transitoria en el conjunto ordenado $(X, >)$ en el menor número de circuitos que no tienen puntos independientes.

El algoritmo termina con la abolición de la introducción de los copuntos (auxiliares de los puntos), los introducidos y el trazado obtenido del grafo inicial $G \in Ln$ en el menor número de celdas.

3. Desarrollo del Algoritmo

El trazado del algoritmo se puede dividir en tres etapas lógicas:

3.1. Trazado del grafo inicial acíclico llamado "punto-corte" del grafo $G(X^0)$. Su principal propiedad es que al grafo que le corresponde una interrupción transitoria $Gt(X^0)$ de cada circuito del mínimo trazado de circuito, empieza en los puntos del conjunto X^0 y en él existe tal MTC; este circuito contiene solamente curvas del grafo $G(X^0)$, lo cual indica que cualquier circuito no tiene curvas complementarias introducidas con el trazado del grafo de interrupción transitoria.

3.2. Reordenamiento en serie de algunas curvas punto-corte del grafo $G(X^0)$ con el objetivo de obtener el grafo $Gt(X^0)$, el cual tiene el MTC del circuito, compuesto de celdas del grafo $G(X^0)$. Se demuestra que si en el método señalado el grafo $G(X^0)$ no tiene orientación de ciclos impares C_{k+1} ($K \geq 2$), entonces el método señalado no da siempre la obtención del grafo.

3.3. Introducción en el grafo $G(X^0)$ de copuntos para un ciclo impar del grafo, que nos permite llegar a un nuevo grafo con ampliación del número de puntos en el cual se neutraliza la influencia del ciclo impar detectado.

4. Grafo Punto - Corte

Se tiene el grafo $G=(X, G) \in Ln$. El conjunto de todos los puntos X del grafo G se puede romper en subconjuntos:

$X^0, X1, \dots, X^m$ (4.1), de tal forma que del subconjunto X ($k=0, \dots, m$) se obtenga el MTC subgrafo $G=(X \setminus (X^0 \cup \dots \cup X^{k-1}), \Gamma) = (X^m \cup \dots \cup X^m, \Gamma)$.

Por lo tanto: $G = (X^0 \cup \dots \cup X^m, \Gamma) = (X, \Gamma) = G$.

Para el grafo no orientado $G=(X, \Gamma)$ y trazado (4.1), se plantea el grafo orientado $G(X^0) = (X, \Gamma)$; se cambia toda la celda del grafo G , la cual se une por el punto $X_i \in X^k$, y la curva (X_i, X_j) , si $K1 < K2$.

El resultado será un grafo acíclico $G(X^0) = (X, \Gamma)$, en el cual el conjunto X^0 se denominará "inicial", y el grafo $G(X^0)$ "orientado de reflejo" del grafo $G=(X, \Gamma) \in Ln$.

De esta manera en un caso particular se tiene un conjunto de orientaciones reflejadas del grafo $G \in Ln$, conjunto de todas las orientaciones acíclicas de grafos, cada uno de los cuales es orientado-reflejado del grafo G , representado como $D(G)$.

En adelante se tienen en cuenta solamente los grafos que pertenecen al conjunto $D(G)$ del grafo $G=(X', \Gamma') \in Ln'$, donde $n < n'$ y $G \subset G'$. Por la pertenencia del grafo al conjunto $D(G)$ (o al conjunto $D(G)$), como regla, no se unen. Por esto no es difícil comprender el concepto de punto independiente del grafo G ; naturalmente el método se traslada al punto del grafo $G(X^0)$.

El rango del punto $x \in X$ del grafo $G(X)$ se denomina "magnitud $p(X)$ ", de orientación máxima del circuito, el cual está relacionado con el conjunto inicial X^0 con punto x .

El grafo $G(X^0)$ se obtiene con la correspondencia para el grafo de interrupción transitoria $Gt(X)=(X, \Gamma t)$. Nótese que el grafo $Gt(X^0)$ puede verse estrictamente como de par ordenado $(X, >)$.

En adelante, el objetivo es obtener el concepto de grafo de interrupción transitoria ($Gt(X^0)$), y el de conjunto ordenado $(X, >)$. Por esto, más adelante se verán ejemplos de los diferentes anticircuitos del grafo $Gt(X^0)$.

Con la búsqueda del anticircuito más grande en el trazado simultaneo de puntos del grafo $Gt(X^0)$ en el menor número de circuitos se puede entonces realizar cualquier algoritmo para la obtención del par-ordenado más grande a través del grafo.

Utilizando la metodología de Ford y Falkerson, en el grafo $Gt(X^0)$ se obtiene un anticircuito más grande

del anticircuito $M1$. Entonces, para cualquier punto $x \in M(X \notin M1)$ se obtiene $Y \in M1$, que cumple la relación: $Y > X$; en el grafo $Gt(X^0)$ no se tiene otro anticircuito M' que presente el anticircuito M .

El anticircuito del grafo $Gt(X^0)$ se denominará "general", con excepción de la posibilidad para la obtención de algunas curvas de los anticircuitos del grafo $Gt(X^0)$, si ellos existen. Es así como para cada punto $x \in X$ del grafo $Gt(X^0)$ se puede intentar encontrar ese anticircuito más grande $M(x)$, tal que $x \in M(x)$.

Técnicamente, para la búsqueda del anticircuito $M(x)$ es suficiente con realizar una tabla de trabajo, cuando se obtiene el número más grande de unidades (1) en las celdas admitidas, induciendo una fila correspondiente al punto X , y cumpliendo el ciclo de introducción. Cabe anotar que en un caso general no en todo punto $x \in X$ del grafo $Gt(X^0)$, existe el anticircuito más grande $M(x)$. En la Gráfica 1 se presenta el grafo de interrupción transitoria del cual se tiene el anticircuito general:

$M=M(1)=M(2)=M(4)=M(7)=\{X1, X2, X4, X7\}$ y no se tiene el anticircuito $M(8)$. (La orientación de la curva del grafo en la gráfica se supone ABAJO-ARRIBA).

El grafo $G(X^0)$ se denomina "punto - corte", si en el grafo de interrupción transitoria $Gt(X)$ cada circuito más grande $M(x) \subset X$ (cuando él existe), es M.T.C. del grafo y se cumple la relación $Card(M(x)) = Card(X^0)$.

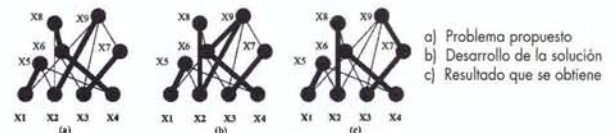
Cabe anotar que para algún $x \in X$, no existe $M(x)$ en el grafo $Gt(X^0)$ y no representa el grafo punto-corte $G(x^0)$ del conjunto independiente $U \subset X$ de tal forma que $x \in U$ y $Card(U) = Card(X^0)$.

Se observa que para cualquier grafo $G=(X, \Gamma) \in L_n$ no es difícil trazar el correspondiente grafo punto - corte (acíclico) $G(X^0)$. Con este objetivo para el grafo obtenido $G(X^0)$ se traza a continuación el grafo de interrupción transitoria $Gt(X^0)$, mirando el último grafo de orden par para cada punto $x \in X$ y encontramos en él su anticircuito más pequeño $M(x) \subset X$ si se tiene.

Para cada anticircuito grande obtenido, $M(x) \subset X$, que cumple la correlación $Card(M(x)) = Card(X^0)$ y es M.T.C. del grafo $G(X^0)$, se dice que el grafo "punto - corte" ha sido diseñado.

En caso contrario se plantea MTC: $S \tilde{A} X (M(x) \tilde{A} S)$ del grafo $G(X^0)$, y se realiza una reorientación para todas las curvas que entran en el conjunto S . Para el nuevo grafo $G(S)$ el procedimiento anterior se repite.

Puede concluirse que desarrollar algoritmos, con las posibilidades que facilita la teoría de grafos, contribuye a la optimización de procesos de comunicaciones para las diferentes tipos de topología de redes (estrella, anillo, bus), y sobre todo en redes con estructuras topológicas combinadas, bien sea bajo canales unidireccionales, bidireccionales o mediante la utilización de dispositivos conmutados. En un artículo posterior se propondrán las aplicaciones de lo expuesto en el presente artículo.



Gráfica 1. Proceso para construir el algoritmo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- GERY M., Jhonson D. Máquinas de cálculo y solución de problemas difíciles. Ed. Mir 1988.
- CRISTOFIDES, N. Teoría de Grafos. Ed. Mir 1985.
- PAPANIMITRIU J., STAGLIS K. "Optimización de la teoría combinatoria". Ed. Mir 1985.
- SYAMI M. Grafos, Circuitos y Algoritmos. Ed. Mir 1989.
- ZIKOV A. Bases de teoría de grafos. Ed. Nauka 1990.
- TREMBLAY J.P. Matemática discreta y lógica. Ed. Prentice Hall 1996.
- ARBONES E. Conceptos de matemáticas aplicados a la informática. Ed. Fausí 1989.
- ZIKOV A.A., Bases de teoría de grafos. Ed. Nauka, 1990.