TEOREMA DE PITÁGORAS: UNA DEMOSTRACIÓN SIN PALABRAS

Jorge Adelmo Hernández[1]

Este artículo contiene una demostración sin palabras del Teorema de Pitágoras, algunas formas de conseguir Ternas Pitagóricas Primitivas (TPP), así como la caracterización de dichas ternas. Contiene además una ampliación a regiones más generales construidas sobre los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo, y la generalización a Espacios Vectoriales Normados

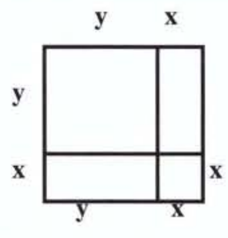
This article contains a demostration "without words" about Pitagoras´s Theorem; besides that, it contains the explanation to some ways to build primitive Pitagoric triads (PPT) and their characteristics as well. There are some other topics like a general extension to the cathetos and to the hypothenusas of rectangule-triangles; and a generalization in Normal Vectorial Spaces

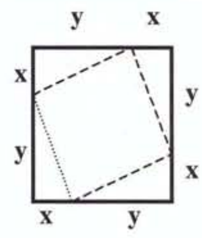
Keywords: Ternas, Pitagóricas, Primitivas, Catetos, Hipotenusa, Normados, Euclidianos, Vectoriales, Triángulos, Espacio, Rectángulo

Introducción

Uno de los temas en los que se hace más énfasis en la enseñanza de la geometría es en el llamado "Teorema de Pitágoras": *En un triángulo rectángulo, el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos, es decir, en un triángulo de hipotenusa z y de catetos x, y, se cumple:* $z^2 = x^2 + y^2$.

Una de las demostraciones más sencillas es la que se muestra en las figuras:





Ternas Pitagóricas

Una terna de números enteros positivos (x, y, z) es una Terna Pitagórica (TP) si se satisface la ecuación $z^2 = x^2 + y^2$.

---

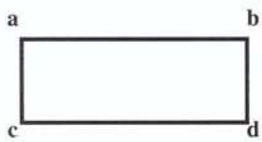
* Matemático y Especialista en Matemática Avanzada Universidad Nacional de Colombia, profesor Universidad Distrital F.J.C. adscrito a la Facultad Tecnológica

Son conocidas las TP (6, 8, 10), (9,12,15) y en general (3k, 4k, 5k) k Z^+.

¿Cómo encontrar otras TP que no pertenezcan a esta clase?. Se construye una tabla de multiplicación de números enteros positivos:

*	1	2	3	4	5	6	7	...
1	1	2	3	4	5	6	7	...
2	2	4	6	8	10	12	14	...
3	3	6	9	12	15	18	21	...
4	4	8	12	16	20	24	28	...
5	5	10	15	20	25	30	35	...
6	6	12	18	24	30	36	42	...
7	7	14	21	28	35	42	49	...

Si tomamos cualquier rectángulo de vértices a, b, c, d sobre la tabla



Se cumple que a.c = b.d (1). En efecto: a = n.m; b = (n+k).m; c = (n+k).(m+t); d = n.(m+t)

a.c=n.m.(n+k).(m+t)=(n+k).m.n.(m+t) = b.d

Multiplicando la ecuación (1) por cuatro (4) se obtiene que: 4ac = 4bd. Es decir,

$$2ac - 2bd = 2bd - 2ac.$$

Sumando a cada lado de esta última ecuación $a^2+b^2+c^2+d^2$ se obtiene:

$$a^2+2ac+c^2+b^2-2bd+d^2=b^2+2bd+d^2+a^2-2ac+c^2$$

luego, $(a+c)^2+(b-d)^2=(b+d)^2+(a-c)^2$

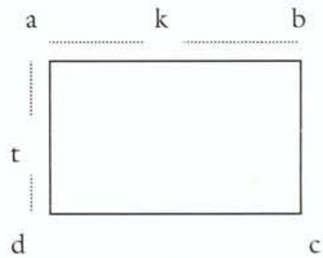
Si se elige un rectángulo que satisfaga b = d, se obtiene: $(a+c)^2=(b+d)^2+(a-c)^2$.

Tomando $z=a+c$, $x=b+d$, $y=a-c$ se tiene que $z^2 = x^2 + y^2$, y resulta para cada elección una TP. Como pueden construirse infinitos rectángulos en la tabla, también serán infinitas las TP encontradas.

Otra forma de obtener TP es proceder con una tabla para la suma de enteros positivos similar a la del producto:

+	1	2	3	4	5	...
1	2	3	4	5	6	...
2	3	4	5	6	7	...
3	4	5	6	7	8	...
4	5	6	7	8	9	...
5	6	7	8	9	10	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Si consideramos cualquier rectángulo a, b, c, d de la tabla:



Se encuentra que a + c = b + d (2). En efecto, a = n + m; b = (n + k) + m; c = (n + k) + (m + t); d = n + (m + t). Entonces a + c = (n +m) + (n + k) + (m + t) = (n + k) + m + n + (m + t) = b + d.

Además, en cualquier rectángulo elegido se cumple que: "los productos de los vértices opuestos difieren en el área del rectángulo así:

$$bd = ac + kt \quad (3)$$

Si bd, ac y kt son cuadrados perfectos, es decir, $bd = z^2$, $kt = x^2$ y $ac = y^2$, entonces la relación (3) se transforma en $z^2 = x^2 + y^2$.

¿Cómo debemos entonces seleccionar los valores a, b, c, d en la tabla para obtener la relación pitagórica deseada y generar así ternas pitagóricas?

Al hacer un análisis de la tabla se deduce que a y c deben ser los vértices de un cuadrado localizados sobre la diagonal principal. Según esto: a = 2p; c = 2q, p, q enteros positivos (4).

Además b = d, luego de (1):

2p + 2q = 2b = 2d, es decir, b = d = p + q (5)

Ahora bien: las dimensiones de cualquier rectángulo en la tabla son d – a = t,; b – a = k. Para nuestro caso m = t = b – a.

Utilizando las ecuaciones (3) y (4), se concluye que $t = k = q - p$ (6).

Finalmente, remplazando (4), (5) y (6) en (3), obtenemos:

$(q - p)^2 + (2\sqrt{q.p})^2 = (q + p)^2$ (7), y esta última ecuación se reduce a la forma $z^2 = x^2 + y^2$ donde $y = 2\sqrt{q.p}$, es decir, q.p debe ser un cuadrado perfecto.

Forma General de las Ternas Pitagóricas (Tp)

Se sabe que los babilonios conocían el teorema de pitágoras mucho antes que los griegos. Sin embargo, sabían que cualquier terna de la forma $(m, \frac{1}{2}(m^2-1), \frac{1}{2}(m^2+1))$, donde $m \geq 3$ es un entero impar, era una TP, pero ... no toda TP es de esta forma; por ejemplo (15,8,17).

Surge entonces la siguiente pregunta: *¿Existe alguna fórmula que genere todas las ternas Pitagóricas?* La respuesta es "sí".

Ante todo podemos advertir que si (a,b,c) es una TP, también lo es (ka, kb, kc), en donde $k \geq 1$. Por lo tanto es suficiente obtener una fórmula que genere Ternas Pitagóricas Primitivas (TPP), es decir, aquellas ternas (a,b,c) cuyas componentes no tengan un factor común $k > 1$. Por ejemplo: (3,4,5), (5,12,13), (7,24,25) son TPP.

Teorema 1

Sean a, b, c enteros positivos, entonces (a,b,c) es una TPP si y sólo si existen enteros positivos u y v, $u>v$ $(u,v) = 1$, ambos impares tales que: $\{a,b\}=\{2uv, u^2-v^2\}$ y $c=u^2+v^2$ Es claro que $c^2 = a^2 + b^2$

Se muestra ahora otra fórmula que genera TPP, la cual se deduce fácilmente y sugiere un método para resolver algunos problemas de Geometría.

Teorema 2

La terna (a,b,c) es una TP si y sólo si existen enteros positivos u y v de igual paridad tal que uv sea un cuadrado perfecto y:

$$a=\sqrt{u.v} \quad b=\frac{u-v}{2} \quad c=\frac{u+v}{2}$$

Prueba:

Supongamos que (a,b,c) es una TP. Entonces $a^2 + b^2 = c^2$, es decir, $a^2 = c^2 - b^2$, luego $a^2 = (c - b)(c + b)$.

Sean $u = c + b$, $v = c - b$. Entonces puede deducirse lo siguiente:

1. u.v es un cuadrado perfecto
2. u,v son enteros positivos de la misma paridad puesto que b y c son enteros positivos $c > b$
3. $u > v$ pues $c + b > c - b$
4. De $u = c + b$; $v = c - b$ se deduce que $b=\frac{u-v}{2}$, $c=\frac{u+v}{2}$ y además, $a^2 = c^2 - b^2$ $= u.v$ de donde $a = \sqrt{u.v}$

Recíprocamente, supongamos que u y v son enteros positivos de la misma paridad $u > v$ tal que u.v sea un cuadrado perfecto. Haciendo $a = \sqrt{u.v}$ $b=\frac{u-v}{2}$, $c=\frac{u+v}{2}$, se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$.

Ejemplo:

Determinar todos los triángulos pitagóricos que tienen un cateto común $a = 15$. **Solución:** $a^2 = 225$.

Ahora factorizamos 225 en todas las formas posibles como producto de enteros positivos de igual paridad así:

$$a^2 = 45 * 5 = 75 * 3 = 25 * 9 = 225 * 1$$

Ahora, para cada factorización hacemos u:= factor mayor, v:= factor menor. Se obtiene entonces la siguiente tabla:

u	v	$b = \frac{u-v}{2}$	$c = \frac{u+v}{2}$
45	5	20	25
75	3	36	39
25	9	8	17
225	1	112	113

Por lo tanto, existen cuatro triángulos pitagóricos con un cateto común a = 15. Dichos triángulos determinan las siguientes TP: (15,20,25), (15,36,39), (15,8,17), (15,112,113).

Generalización del Teorema de Pitágoras a Figuras más Generales Construidas Sobre sus Catetos

Si (a,b,c) es una TPP se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$.

Si dividimos por dos se obtiene: $\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}=\frac{c^2}{2}$ cuya interpretación sería: el área del triángulo rectángulo construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los triángulos rectángulos construidos sobre los catetos.

Si la ecuación $a^2 + b^2 = c^2$ se multiplica por $\frac{\pi}{4}$, se obtiene $\frac{\pi a^2}{4}+\frac{\pi b^2}{4}=\frac{\pi c^2}{4}$ o lo que es lo mismo

$$\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2=\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2+\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

La interpretación de esta ecuación es: *"En un triángulo rectángulo el área del semi-círculo de radio $\frac{c}{2}$ construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los semi-círculos de radios $\frac{a}{2}$ y $\frac{b}{2}$ construidos sobre los catetos"*

En general, si se tiene el triángulo rectángulo (a,b,c) y sobre un intervalo [0,c] se define una función continua f, sobre los intervalos [0,a] y [0,b] se definen las funciones continuas h(x) y g(x) así: $h(x)=\frac{a}{c}\,f\left(\frac{c}{a}x\right)$, $g(x)=\frac{b}{c}\,f\left(\frac{c}{b}x\right)$, respectivamente. Se cumple que:

$\int_0^c f(x)\,dx = \int_0^a g(x)\,dx + \int_0^b h(x)\,dx$; en efecto:

$$\int_0^b g(x)\,dx = \int_0^b \tfrac{b}{c} f\left(\tfrac{c}{b}x\right)dx \quad \text{si} \quad u=\tfrac{c}{b}x,\quad du=\tfrac{c}{b}dx$$

luego, $\int_0^b g(x)\,dx = \frac{b^2}{c^2}\int_0^c f(u)\,du = \frac{b^2}{c^2}\int_0^c f(x)\,dx$

También $\int_0^a h(x)\,dx = \int_0^a \tfrac{a}{c} f\left(\tfrac{c}{a}x\right)dx$ si $u=\tfrac{c}{a}x$, $du=\tfrac{c}{a}dx$

Luego,

$$\int_0^a h(x)\,dx = \tfrac{a^2}{c^2}\int_0^c f(u)\,du = \tfrac{a^2}{c^2}\int_0^c f(x)\,dx$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}\int_0^a h(x)\,dx + \int_0^b g(x)\,dx &= \tfrac{b^2}{c^2}\int_0^c f(x)\,dx + \tfrac{a^2}{c^2}\int_0^c f(x)\,dx\\ &= \tfrac{b^2+a^2}{c^2}\int_0^c f(x)\,dx\\ &= \int_0^c f(x)dx\end{aligned}$$

Y finalmente se podría establecer una generalización a otros espacios euclidianos:

Generalización a Espacios Vectoriales con Producto Interior

Si $(V,\langle\ ,\ \rangle)$ es un espacio lineal con producto interior, u , v son dos vectores tales que $\langle u\ ,\ v\rangle = 0$ entonces $u-v\ ^2 = u\ ^2 + v\ ^2$

Prueba:

$$\begin{aligned}u-v\ &= \langle u-v, u-v\rangle =\\ &= u^2 - 2\,u,v + v^2\end{aligned}$$

como $\langle u,v\rangle = 0$ se sigue que $u\text{-}v^2 = u^2 + v^2$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- DEL VALLE, Jesús A. Ecuaciones Diofánticas. Trabajo de Grado Especialización en Matemática Avanzada, Universidad Nacional de Colombia. 1987
- DEL VALLE, Jesús A. Notas Seminario de Metodología, Especialización en Matemática Avanzada. 1987
- PURCELL, Edwin y otro. Cálculo con Geometría Analítica. Ed. Prentice Hall Hispanoamericana S.A., México, 1992, 6ª. ed.
- GARCÍA P., Gilberto. Ternas Pitagóricas. En: Matemática, Enseñanza Universitaria, Yu Takeuchy, No. 41, Sept. - Dic. 1987