

MODELAMIENTO CINEMÁTICO Y ODOMÉTRICO DE ROBOTS MÓVILES

Aspectos matemáticos

GIOVANNI RODRIGO BERMÚDEZ BOHÓRQUEZ

Ingeniero Electricista Universidad Nacional de Colombia, Magíster en Ingeniería Electrónica y de Computadores Universidad de los Andes. Profesor adscrito a la Facultad Tecnológica de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Coordinador del Proyecto Curricular de Tecnología Electrónica y director del Grupo de Investigación en Robótica Móvil Autónoma (ROMA)
gbermudez@udistrital.edu.co

Clasificación
Categoría Colciencias: 1

Fecha de recepción: 21-04-2003

Fecha de aceptación: 30-05-2003

Palabras Claves: Cinemática, Odometría, Restricciones no-holonómicas, robótica.

Key words: Kinematics, Wheeled mobile robots, Not holonomic restrictions, robotics.

1. Introducción

La cinemática de robots móviles presenta nuevos problemas con respecto a los generados por los robots industriales de tipo manipulado. Específicamente, los robots móviles terrestres pueden clasificarse de dos formas: 1) dependiendo de su categorías: *Caterpillar Robots*, *Legged Robots* y *Wheeled Robots*; 2) dependiendo de su movilidad: no holonómicos y holonómicos.

- *Caterpillar Robots*: son capaces de desplazarse por lugares de difícil acceso. Sus funciones principalmente se orientan hacia

la vigilancia terrestre (*Ground Surveillance Robot*) (Segovia, 2000: 1)

- *Legged Robots*: poseen un alto grado de maniobrabilidad en terreno irregular, en comparación con otros tipos de robots. En ellos una pierna es un sistema compuesto, por lo menos, de dos grados de libertad; como regla, un robot de este tipo puede ofrecer un número mayor de grados de libertad por movimiento que los demás. La coordinación de todos los movimientos de los eslabones que conforman las patas requiere un sistema de control muy complejo (Segovia, 2000: 1)

- *Wheeled robots*: son los más comunes. Se clasifican en varios tipos, de acuerdo con la colocación y número de ruedas motrices. Deben poseer como mínimo dos motores, los cuales ofrecen el número de grados de libertad necesarios para el desplazamiento en un plano. Por ejemplo, una de las arquitecturas más simples es el tipo triciclo, en el que un sistema diferencial ofrece la tracción, y la dirección es controlada por un segundo motor (Segovia, 2000: 1). Otra configuración puede ser la de tipo *Blanche*, en donde la rueda central ofrece propulsión y dirección y las ruedas traseras son libres y siempre tangenciales al desplazamiento (Segovia, 2000: 1). También pueden incluirse los sistemas diferenciales, que usan dos ruedas traseras para propulsión y control de dirección a partir de la diferencia de desplazamiento de cada rueda motora (Lima, 2002: 2).
- *Robots holonómicos*: son capaces de cambiar de sitio en cualquier dirección y en direcciones aleatorias
- *Robots no holonómicos*: el movimiento se produce solo por dos desplazamientos, y el vehículo posee sólo dos grados de libertad

Desde un punto de vista matemático puede considerarse que un vehículo es no holo-nómico cuando sus ecuaciones de restricción no son integrables, por lo cual el análisis de la cinemática, dinámica y el control son más complejos. Debido a la consideración anterior, en sistemas que poseen restricciones no holonómicas, el número de coordenadas que describa su configuración siempre es más grande que el número de grados de libertad que poseen ellos. Para determinar si un robot móvil está bajo condiciones no holonómicas, se debe satisfacer la expresión (1) para la ecuación de restricciones.

.....

¹ Minotauro es el nombre dado al primer robot diseñado por el grupo de investigación ROMA, para la participación en la IV olimpiada robótica Grial 2002, realizada en noviembre de 2002 en la ciudad de Medellín, por la Universidad Pontificia Bolivariana. Minotauro participó en la categoría "principiantes" logrando el primer puesto. El objetivo de la prueba era recoger dos pelotas de tenis dentro de un laberinto (se conocía la posición de una de ellas y la otra se sorteaba) y llevarlas a un lugar definido para soltarlas.

$$\cos\theta dy - \sin\theta dx = 0$$

(1) En (1) θ es el ángulo de orientación de la plataforma en el espacio, dx y dy las variaciones de las posiciones de la plataforma en x y y , respectivamente. Con la consideración anterior, se hace necesario realizar el estudio detallado de un sistema de locomoción para WMR (*Wheeled Mobile Robots*) bajo características cinemáticas y mediante el modelamiento del sistema odométrico, necesario para determinar la posición en un espacio de-terminado.

La locomoción está definida como el proceso que origina movimiento en un robot autónomo y que involucra en él las fuerzas aplicadas al vehículo. Para realizar estudios de locomoción de este tipo de robots se hace necesario el estudio de la cinemática y dinámica asociada al vehículo.

La cinemática es el estudio de la matemática del movimiento, sin tener en cuenta los efectos de las fuerzas sobre él; trata, por lo tanto, de las relaciones geométricas que gobiernan el sistema, y de la relación entre parámetros de control y comportamiento de sistemas en el espacio estado (Lima, 2002: 3). La dinámica, por su parte, se define como el estudio del movimiento a partir del modelamiento de las fuerzas aplicadas, teniendo en cuenta la energía y velocidad asociadas a él (Lima, 2002: 3).

El estudio cinemático y el modelo odométrico presentados en este trabajo fueron desarrollados por el grupo de investigación en Robótica Móvil Autónoma (ROMA) e implementado de forma parcial en el robot Minotauro¹, con base en un sistema diferencial aplicado a una plataforma circular (ver Figura 1) y en condiciones no holonómicas. En la actualidad el modelo presentado se emplea en dos proyectos de desarrollo, me-

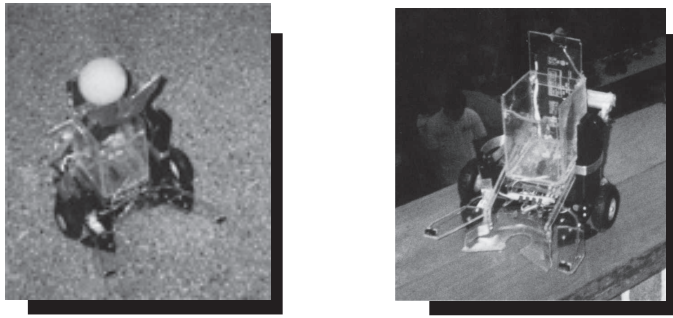


Figura 1. Robot Minotauro.

diante los cuales se desea realizar la validación de métodos de planificación de tareas y la comprobación del funcionamiento del modelo sobre plataformas específicas.

2. Modelamiento cinemático del sistema diferencial

La rigidez del eje de las ruedas del robot limita el tipo de movimiento que puede efectuar (La Valle, 1999: 2). En efecto, apenas son posibles

las rotaciones alrededor del punto central del eje de ruedas y las traslaciones en la dirección longitudinal del robot (ver Figura 2). Sin embargo, combinando estos movimientos, es posible llevar las rotaciones del robot alrededor de cualquier punto situado en la línea que contiene el eje de ruedas, llamado Centro de Rotación Instantáneo (IRC).

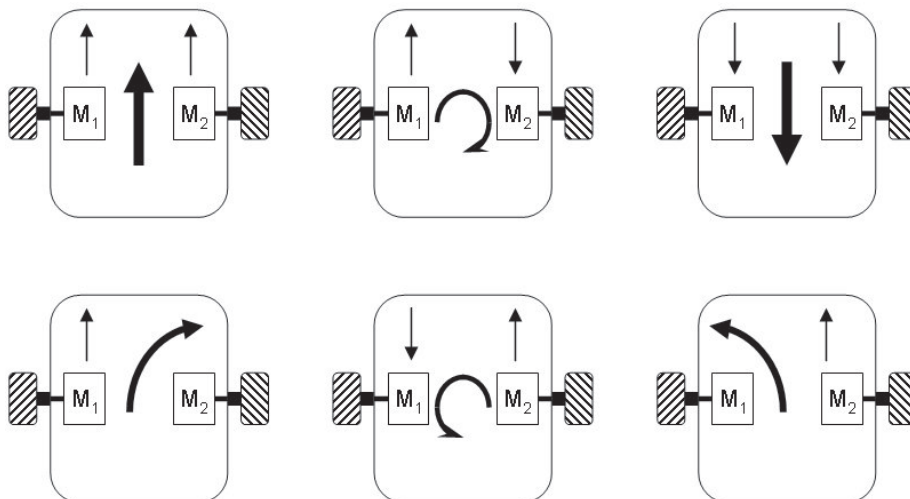


Figura 2. Giros de plataforma diferencial.

El IRC es la distancia entre el punto de intersección de cada línea imaginaria trazada desde los ejes de las ruedas motoras, y definida por el sistema de coordenadas:

$$IRC = (x - R \sin \theta, y + R \cos \theta) \quad (2)$$

En la ecuación anterior R es el radio de curvatura instantáneo de la trayectoria del robot y relativo al punto medio del eje de las ruedas motoras, y θ el ángulo de orientación de la plataforma en el espacio.

Si el robot se desplaza por una línea recta, el radio de curvatura instantáneo tiende a infinito, y si el radio de curvatura instantáneo es cero, puede afirmarse que el robot está girando sobre su centro de giro. Generalizando estos casos, se puede encontrar que los radios de curvatura de trayectoria para cada rueda están dados por:

$$\begin{aligned} R + L/2 & \text{ para la rueda izquierda} \\ R + L/2 & \text{ para la rueda derecha} \end{aligned}$$

Haciendo el IRC variable a lo largo del tiempo, es posible describir cualquier tipo de trayectoria plana. Así, considerando que en un instante dado un robot describe una rotación alrededor de un punto arbitrario IRC, la cinemática de su movimiento puede ser descrita a partir del sistema de ecuaciones (3), donde ω es la velocidad angular, v la velocidad lineal del robot, R el radio de curvatura y v_L y v_R las velocidades de las ruedas motoras (ver Figura 3). Nótese que la velocidad angular de cualquier punto del robot es igual en cualquier instante.

$$\omega(t) = \frac{v_R(t)}{R + L/2} = \frac{v_L(t)}{R - L/2} \quad (3)$$

$$v(t) = R * \omega(t)$$

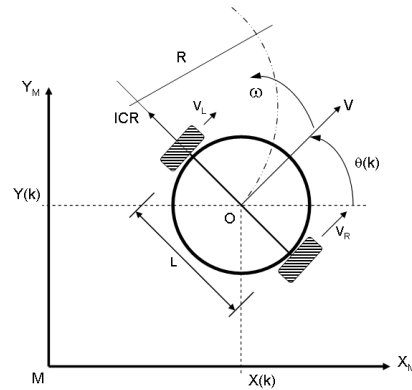


Figura 3. Esquema de la plataforma en el espacio.

A partir de (3), se pueden deducir las expresiones que relacionan las velocidades angulares y lineales de la plataforma con las velocidades lineales de las respectivas ruedas motoras (4).

$$\omega(t) = \frac{v_R(t) - v_L(t)}{L} \quad (4)$$

$$v(t) = \frac{v_R(t) + v_L(t)}{2} \quad R = \frac{L (v_R(t) + v_L(t))}{2 (v_R(t) - v_L(t))}$$

La configuración de desplazamiento sobre el plano para un robot, esta dada por:

$$X = [x, y, \phi] \quad (5)$$

En (5) el vector configuración \bar{X} contiene los tres valores necesarios para definir la localización completa del robot en el plano referencia, esto es, su posición en las direcciones x y y , y su orientación ϕ en el plano bidimensional (ver Figura 3). Con base en lo anterior, puede plantearse un modelo cinemático inicial, referenciado en el mismo robot y determinado por (6):

$$v(t) = \frac{v_R(t) + v_L(t)}{2} = \frac{r(\omega_R(t) + \omega_L(t))}{2} \quad (6)$$

En la ecuación anterior, r es el radio nominal de cada rueda y ω_R , ω_L son las velocidades angulares de cada rueda motora. Aquí debe tenerse en cuenta que el robot no puede desplazarse directamente por el eje y ; para la plataforma se establecen dos grados de libertad.

$$\omega(t) = \frac{v_R(t) - v_L(t)}{L} = \frac{r(\omega_R(t) - \omega_L(t))}{L} = \dot{\theta}(t) \quad (7)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (6) y (7), el modelo se presenta de forma matricial en (8).

$$\begin{bmatrix} v_X(t) \\ v_Y(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r/2 & r/2 \\ 0 & 0 \\ r/L & -r/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_R(t) \\ \omega_L(t) \end{bmatrix} \quad (8)$$

Este primer modelo es utilizado para analizar el comportamiento de la plataforma bajo sus propias condiciones, pero es inútil para la planificación de trayectorias o sistemas de navegación inteligentes aplicables a robots móviles autónomos, debido a que se requieren sistemas de navegación inercial que acompañen el modelo cinemático de la plataforma. Este problema se soluciona fácilmente con un modelo cinemático del robot con una base referencial en el espacio, es decir, con un punto de referencia espacial conocido. Este nuevo modelo cinemático, basado en el presentado anteriormente, se define mediante las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= v(t) \cos \theta(t) \\ \dot{y}(t) &= v(t) \sin \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) &= \omega(t) \end{aligned} \quad (9)$$

Con base en (9) puede realizarse una integración del sistema de ecuaciones para obtener la posición y orientación en cualquier instante del tiempo.

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t v(\sigma) \cos(\theta(\sigma)) d\sigma \\ y(t) &= \int_0^t v(\sigma) \sin(\theta(\sigma)) d\sigma \\ \theta(t) &= \int_0^t \omega(\sigma) d\sigma \end{aligned} \quad (10)$$

Teniendo en cuenta (9) y (10), se obtiene el modelo matricial del sistema.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta(t) & 0 \\ \sin \theta(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{v_R(t) + v_L(t)}{2} \cos(\theta(t)) \\ \dot{y}(t) &= \frac{v_R(t) + v_L(t)}{2} \sin(\theta(t)) \\ \dot{\theta}(t) &= \frac{v_R(t) - v_L(t)}{L} \end{aligned} \quad (11)$$

Realizando una discretización del modelo continuo para $t \geq t_k$, para estimar y determinar la posición se plantean las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_k) + \int_{t_k}^t \frac{v_d(\tau) + v_e(\tau)}{2} \cos(\theta(\tau)) d\tau \\ y(t) &= y(t_k) + \int_{t_k}^t \frac{v_d(\tau) + v_e(\tau)}{2} \sin(\theta(\tau)) d\tau \\ \theta(t) &= \theta(t_k) + \int_{t_k}^t \frac{v_d(\tau) - v_e(\tau)}{L} d\tau \end{aligned} \quad (12)$$

.....

$$\begin{aligned} x(t_{k+1}) &= x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{v_d(\tau) + v_e(\tau)}{2} \cos(\theta(\tau)) d\tau \\ y(t_{k+1}) &= y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{v_d(\tau) + v_e(\tau)}{2} \sin(\theta(\tau)) d\tau \\ \theta(t_{k+1}) &= \theta(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{v_d(\tau) - v_e(\tau)}{L} d\tau \end{aligned} \quad (13)$$

3. Modelamiento odométrico del sistema diferencial

Para establecer la autonomía de un robot móvil se requiere de sistemas que determinen cons-

tantemente su localización, a través de la observación e integración consecutiva del movimiento de sus ruedas motoras en el espacio del movimiento. Estos sistemas emplean instrumentos que miden la distancia recorrida por el vehículo, llamados *odómetros* (Ribeiro, 1999: 6). Empleando estos dispositivos y, teniendo en cuenta sus fuentes de errores características, a continuación se describe el modelo implementado inicialmente en el robot Minotauro, y en etapa de evaluación y ajuste en otros robots.

3.1. Fuentes de error en la odometría

Los sistemas odométricos se basan en la integración de la información de los movimientos incrementales de los vehículos; ellos originan acumulaciones de pequeños errores que pueden ser fuentes de equivocación en la localización en el espacio de un vehículo (Ribeiro, 1999: 9). Dichos errores pueden ser clasificados en sistemáticos y no sistemáticos.

Los errores sistemáticos son ocasionados por el propio sistema², con una contribución directa sobre el error total, ya que constantemente son de naturaleza aditiva. Los errores no sistemáticos son caracterizados por la relación del robot con el medio ambiente en el cual interactúa; dependiendo de la naturaleza de esta relación, pueden ser considerados como los errores dominantes³.

Analizando los errores presentados en los sistemas odométricos (ver Figura 4) se observa un sistema diferencial de ruedas a través de una trayectoria completamente lineal y una perturbación sobre una de ellas. El sistema registrará

.....

el desplazamiento de la ruedas sin tener en cuenta la perturbación (por ejemplo, un hundimiento del suelo), es decir, como una trayectoria recta; no obstante, la realidad es que cuando la rueda alcance la perturbación cambiará su velocidad y el vehículo tendrá otro sentido en su movimiento. Este tipo de error puede ser tenido en cuenta en un análisis del modelo odométrico, incluyendo el modelo cinemático generado para un sistema, que pueda ser controlado para corregir la trayectoria.

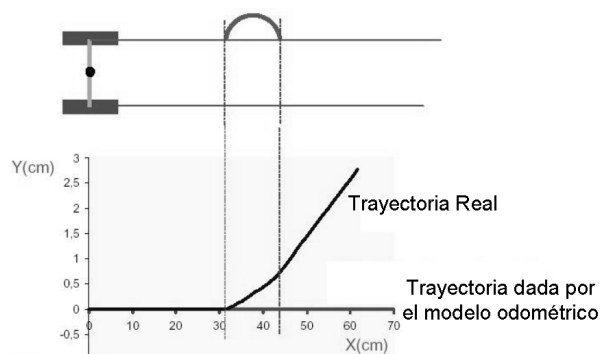


Figura 4. Un error presentado con sistemas odométricos.

3.2. Modelo de odometría

El establecimiento de un modelo para el sistema odométrico pretende describir la evolución temporal de la localización del robot móvil como una función de sus propias variables. El modelo general del sistema está dado por la siguiente expresión:

$$X(k+1) = f(X(k), U(k)) + v(k) \tag{14}$$

² Este tipo de error es ocasionado directamente por deficiencias en la estructura de los robots y por la precisión del sistema sensor implementado en ellos. Pueden incluirse: diámetros diferentes de ruedas, desalineamiento de ruedas, incertidumbre del punto de contacto de la rueda, precisión de sensores, etc.

³ Este tipo de errores comprenden los movimientos sobre suelos no uniformes, movimientos sobre obstáculos inesperados en el suelo, deslizamiento de las ruedas, etc.

donde $X(k+1)$ es la posición estimada, $X(k)$ es la posición actual, $U(k)$ es la entrada del sistema y $v(k)$ es la fuente de ruido⁴. La entrada del sistema $U(k)$ se encuentra determinada por (15):

$$U(k) = [\Delta D(k) \quad \Delta \theta(k)]^T \quad (15)$$

donde $\Delta D(k)$ es la distancia recorrida por el robot en un intervalo $[t_k, t_{k+1}]$ y $\Delta \theta(k)$ la variación de la orientación en el mismo intervalo. La relación con los odómetros de cada rueda motora está definida por (16):

$$\Delta D(k) = \frac{\Delta D_R(k) + \Delta D_L(k)}{2} \quad \Delta \theta(k) = \frac{\Delta D_R(k) - \Delta D_L(k)}{L} \quad (16)$$

En (16) $\Delta D_R(k)$ y $\Delta D_L(k)$ son las lecturas de los dos odómetros, derecho e izquierdo, respectivamente.

De las ecuaciones anteriores puede concluirse la importancia de los odómetros, considerando que con medidas de distancia sencillas puede obtenerse la distancia recorrida por el vehículo y el ángulo de desplazamiento (rumbo de movimiento).

Para la caracterización del ruido de estado generado en una plataforma móvil, $v(k)$ es asumido como $v(k) \approx N(0, Q(k))$, donde $Q(k)$ es el error característico de estado del vehículo (Crowley, 1992: 4). Este error se encuentra dado por la expresión (17); de ella puede observarse que los errores no son colineales, y como

$$Q(k) = \begin{bmatrix} Q_{11}(k) & & \\ & Q_{22}(k) & \\ & & Q_{33}(k) \end{bmatrix} \quad (17)$$

donde

$$\begin{aligned} Q_{11}(k) &= K_D [\Delta D(k) \cos \theta(k)] \\ Q_{22}(k) &= K_D [\Delta D(k) \sin \theta(k)] \\ Q_{33}(k) &= K_{D\theta} [\Delta D(k)] + K_\theta [\Delta \theta(k)] \end{aligned}$$

.....

⁴ Como fuentes de ruido son considerados todos los errores relacionados con el vehículo, sean sistemáticos o no sistemáticos.

resultado los términos que relacionan a cada uno de ellos no se tienen en cuenta.

En (17) K_D es el coeficiente de error de traslación del sistema odométrico, relativo a ΔD y expresado en $[m^2/m]$; $K_{D\theta}$ es el coeficiente de error de rotación del sistema odométrico, relativo a ΔD y expresado en $[rad^2/m]$; y K_θ es el coeficiente de error de rotación del sistema odométrico, relativo a $\Delta \theta$ y expresado en $[rad^2/rad]$. Los valores típicos encontrados en investigaciones (Crowley, 1992: 6), y aplicados a diferentes plataformas, limitados por tamaño y peso son:

$$K_D = 0.001 \text{ m}^2/\text{m}$$

$$K_{D\theta} = 0.003 \text{ rad}^2/\text{m}$$

$$K_\theta = 0.001 \text{ rad}^2/\text{rad}$$

3.3. Hipótesis simplificadoras de los movimientos del vehículo

A partir del modelo cinemático y odométrico y considerando dos tipos de movimientos característicos de los vehículos, se desea generalizar un modelo para cualquier tipo de trayectoria esperada. Para lograrlo, se analizará una trayectoria de un movimiento de traslación seguido de una rotación sobre el eje de rotación del sistema diferencial (Figura 5a); además, una trayectoria de un movimiento sobre un arco de circunferencia de radio R (Figura 5b). Para determinar la relación de las variables del vehículo con estos movimientos deben relacionarse las magnitudes de las velocidades de cada rueda motora e integrarlas a las expresiones resultantes.

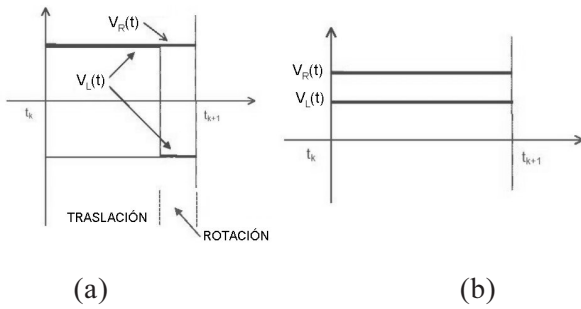


Figura 5. Relación de velocidades de las ruedas motoras: izquierda y derecha. a) Movimiento de traslación seguida de una rotación, b) movimiento a través de un arco de circunferencia.

3.3.1. Trayectoria de un movimiento de traslación seguido de una rotación sobre el eje de rotación

Las distancias recorridas por cada rueda motora en dirección del eje de movimiento (ver Figura 6), están determinadas por (18).

$$\Delta D_L(k) = T(k) - \Delta\theta(k) \frac{L}{2} \tag{18}$$

$$\Delta D_R(k) = T(k) + \Delta\theta(k) \frac{L}{2}$$

De la ecuación anterior se obtiene la distancia recorrida y el ángulo de la orientación del robot en el desplazamiento $\Delta D(k)$ y $\Delta\theta(k)$, respectivamente.

$$\Delta D(k) = \frac{\Delta D_R(k) + \Delta D_L(k)}{2} = T(k) \tag{19}$$

$$\Delta\theta(k) = \frac{\Delta D_R(k) - \Delta D_L(k)}{L} = \Delta\theta(k)$$

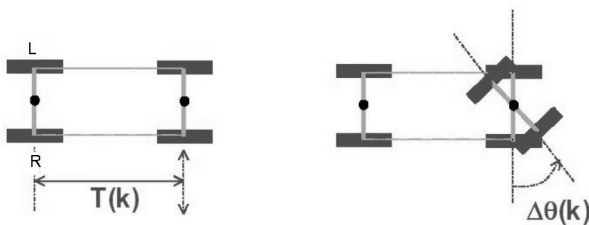


Figura 6. Relación de variables en la trayectoria realizada.

Teniendo en cuenta las ecuaciones (18) y (19), el modelo odométrico resultante para este tipo de movimiento está dado por (20) y representado en la Figura 7.

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ y(k+1) \\ \theta(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(k) + \Delta D(k) \cos(\theta(k)) \\ y(k) + \Delta D(k) \sin(\theta(k)) \\ \theta(k) + \Delta\theta(k) \end{bmatrix} + v(k) \tag{20}$$

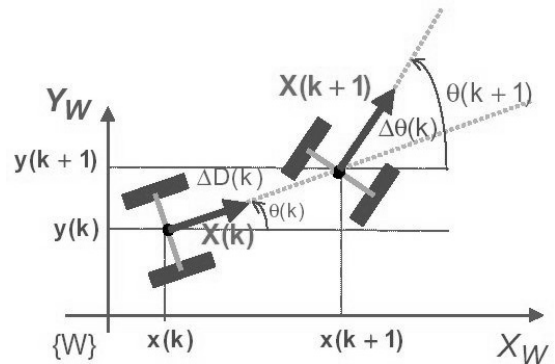


Figura 7. Representación de variables del modelo odométrico encontrado para la trayectoria analizada.

3.3.2. Trayectoria de un movimiento sobre un arco de circunferencia de radio R

Las distancias recorridas por cada rueda motora en dirección del eje de movimiento (Figura 8), están determinadas por (21)

$$\Delta D_L(k) = \Delta\theta(k) \left(R - \frac{L}{2} \right) \tag{21}$$

$$\Delta D_R(k) = \Delta\theta(k) \left(R + \frac{L}{2} \right)$$

Así se obtiene la distancia recorrida y el ángulo de la orientación del robot en el desplazamiento $\Delta D(k)$ y $\Delta\theta(k)$.

$$\Delta D(k) = \Delta\theta(k) * R = \frac{\Delta D_R(k) + \Delta D_L(k)}{2} \quad (22)$$

$$\Delta\theta(k) = \frac{\Delta D_R(k) - \Delta D_L(k)}{L}$$

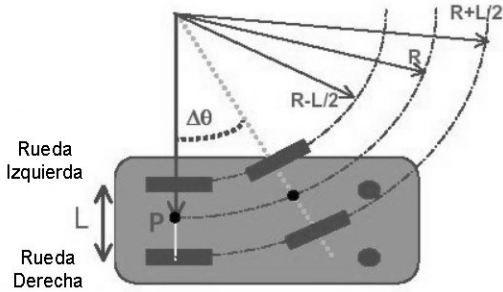


Figura 8. Relación de las variables de la trayectoria realizada.

A partir de la aproximación del seno del ángulo medio puede determinarse la distancia recorrida por el vehículo a través de la trayectoria de arco de circunferencia (ver Figura 9), la cual está dada por (23) y (24):

$$\frac{\overline{P_k P_{k+1}}}{\text{arc}P_k P_{k+1}} = \frac{\sin(\Delta\theta(k)/2)}{\Delta\theta(k)/2} \quad (23)$$

$$\overline{P_k P_{k+1}} = \Delta D(k) \frac{\sin(\Delta\theta(k)/2)}{\Delta\theta(k)/2} \quad (24)$$

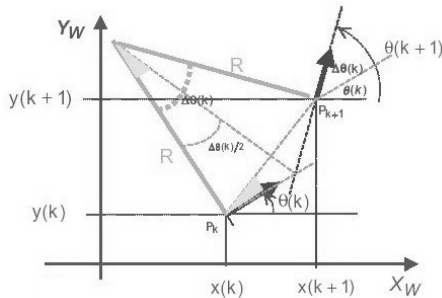


Figura 9. Representación de variables del modelo odométrico encontrado para la trayectoria analizada.

A partir de las ecuaciones (21, 22, 23 y 24), el modelo cinemático y odométrico resultante se encuentra dado por (25) y (26).

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ y(k+1) \\ \theta(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(k) + \Delta D(k) \frac{\sin(\Delta\theta(k)/2)}{\Delta\theta(k)/2} \cos(\theta(k) + \Delta\theta(k)/2) \\ y(k) + \Delta D(k) \frac{\sin(\Delta\theta(k)/2)}{\Delta\theta(k)/2} \sin(\theta(k) + \Delta\theta(k)/2) \\ \theta(k) + \Delta\theta(k) \end{bmatrix} + v(k) \quad (25)$$

3.3.3. Trayectoria aleatoria de un movimiento cualquiera

A partir de los modelos determinados para dos tipos de trayectorias de movimientos diferentes puede generarse un modelo genérico aplicable a cualquier trayectoria que el vehículo pueda realizar (ver Figura 10). El modelo se define mediante (26) y se caracteriza por la aproximación $\overline{P_k P_{k+1}}$ por $P_k P_{k+1}$ como $\overline{P_k P_{k+1}} = \Delta D(k)$.

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ y(k+1) \\ \theta(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(k) + \Delta D(k) \cos(\theta(k) + \Delta\theta(k)/2) \\ y(k) + \Delta D(k) \sin(\theta(k) + \Delta\theta(k)/2) \\ \theta(k) + \Delta\theta(k) \end{bmatrix} + v(k) \quad (26)$$

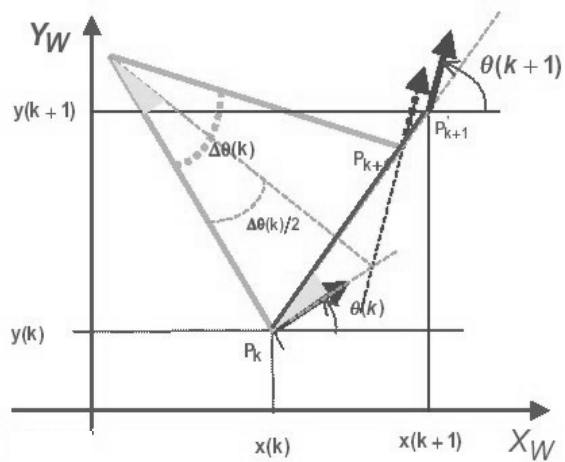


Figura 10. Representación de variables del modelo odométrico generalizado para trayectorias arbitrarias.

4. Resultados obtenidos

El modelo cinemático y odométrico fue simulado en MathCad, comprobándose su comportamiento mediante el seguimiento de rutas preestablecidas; también pueden verse las diferencias encontradas entre ellos (ver Figura 11).

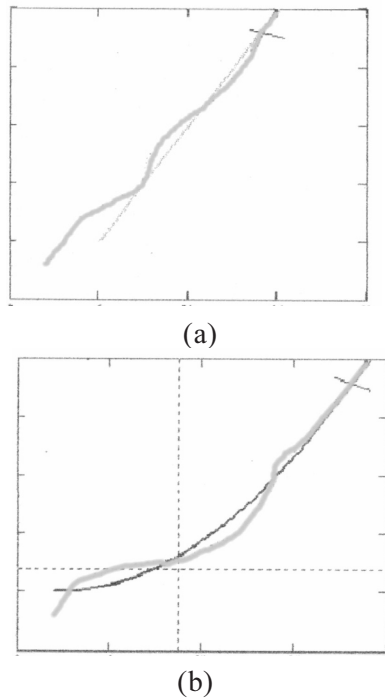


Figura 11. Simulación matemática obtenida en MathCad para trayectorias seguidas por plataformas utilizando el modelo odométrico: a) Trayectoria recta aleatoria; b) trayectoria curva aleatoria.

También se desarrollaron simulaciones con paquetes de software especializado⁵; a ellos se ha alimentado el modelo desarrollado, presentándose errores en los desplazamientos realizados (ver Figura 12) que pueden ser corregidos de forma particular. Tales errores se presentaron porque el software empleado no ofrece la posibilidad de incluir en el modelo la corrección de

⁵ Un paquete CAD utilizado para la realización de simulaciones ha sido Mobotsim (en: <http://www.mobotsim.com>); con él pueden generarse comportamientos de diferentes plataformas de tipo diferencial y graficarse los resultados de los desplazamientos.

fuentes de error presentes en la plataforma, que pueden ser ajustados empleando las constantes K_D , $K_{D\theta}$ y K_θ .

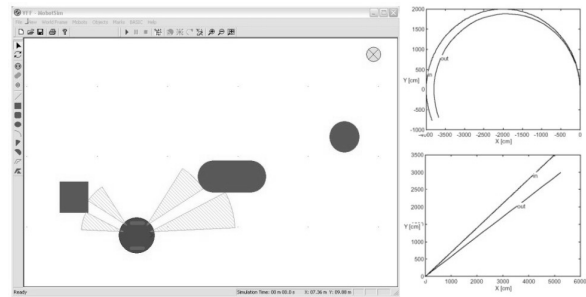
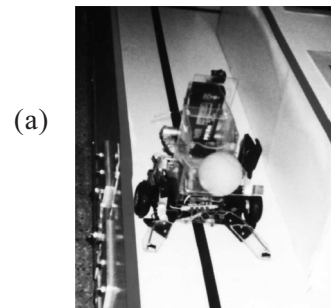


Figura 12. Resultados de simulación del modelo odométrico desarrollado.

El resultado más evidente del modelo es el comportamiento del robot “Minotauro”, el cual presentó altos niveles de desempeño en la olimpiada Grial 2002 (ver Figura 13). Los inconvenientes presentados en su movimiento fueron ocasionados por los sensores IR utilizados, y por las condiciones de iluminación presentados en el momento de la competencia.



(a)



Figura 13. Fotografías de la olimpiada GRIAL 2002. a) Minotauro en competencia y recogiendo una de las pelotas de tenis; b) integrantes de ROMA.

El modelo empleado en Minotauro, además de permitir ubicar el robot en el espacio, contribuyó al establecimiento de dietas de alimentación⁶, mediante el estudio de trayectorias óptimas de desplazamiento para la determinación de las rutas más cortas en espacios conocidos y el aumento de su autonomía (ver Figura 14.).

Aunque el modelo se comportó aceptablemente, las velocidades desarrolladas por la plataforma no fueron buenas, ocasionando tiempos prolongados en los recorridos realizados por Minotauro en el laberinto de competencia. El resultado obtenido de mayor interés es el desarrollo de un algoritmo evolutivo recurrente programado en un microcontrolador, con el nivel de inteligencia necesario para ubicar una pelota desconocida en un tiempo corto y completar las tareas con una eficiencia del 100%.

focos de incendios en lugares de difícil acceso y en sistemas de transporte flexible automatizado. Adicionalmente, será empleado en el planteamiento de un modelo matemático para el desarrollo de los sistemas de control lineal y no lineal de un sistema robótico.

El modelo aquí presentado no es definitivo; está sujeto a ajustes de sus restricciones, variables, configuraciones y sistemas de medida incorporados. Así mismo, los ajustes realizados al modelo quieren comprobarse sobre una plataforma experimental, en el momento en desarrollo. El modelo dinámico del sistema diferencial también se encuentra en desarrollo, planeándose la interrelación de los modelos presentados en un modelo del vehículo de tipo cineto-dinámico, capaz de registrar el comportamiento de toda la plataforma.

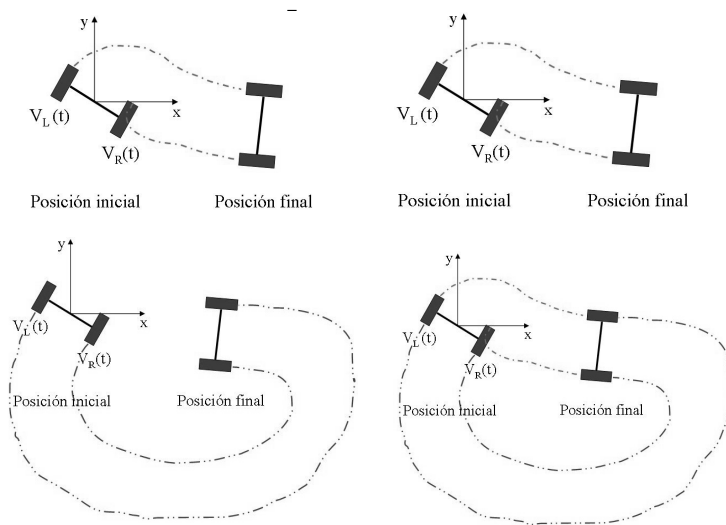


Figura 14. Estudio de elección de trayectorias para determinar la ruta más corta dentro de un laberinto y aumentar la autonomía.

5. Perspectivas de desarrollo

El modelo cinemático y odométrico desarrollado será utilizado en el diseño y construcción de robots móviles orientados a brindar soluciones en problemas de investigación como la detección de

6. Conclusiones

En este artículo se ha presentado un modelo matemático que representa un robot móvil con sistema diferencial de tracción y dirección, capaz de planificar trayectorias de movimientos en

.....

⁶ Las dietas de alimentación son algoritmos que ayudan a mejorar el consumo de energía del robot mediante desarrollo de criterios de necesidades de alimentación de los sistemas que componen el robot, dependiendo de su objetivo para aumentar la autonomía del mismo.

espacios conocidos y con la ubicación del plano de referencia.

El ejercicio de elaboración de un modelo matemático mostrado (modelo cinemático y odométrico de un robot móvil) incorpora conceptos de diferentes áreas (electromecánica, física, geometría, control e instrumentación); en consecuencia, podrían plantearse proyectos multidisciplinarios que fomenten estos tipos de trabajos, como ya se hace a partir de algunos proyectos de ROMA.

El modelo planteado permite la planificación de tareas de un robot móvil en medios desconocidos empleando algoritmos de inteligentes. Él puede considerarse como una herramienta que contribuye al mejoramiento de las características de comportamiento de robots móviles.

Como conclusión específica de las experiencias que involucran características no holonómicas puede afirmarse que la trayectoria del movimiento siempre es normal al eje de las ruedas motoras, y en consecuencia el vehículo solo posee dos grados de libertad, aunque el espacio de la configuración sea tridimensional.



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALMEIDA, L. (1997),. *Modelizacão de pequenos robots autónomos: um exemplo*. Revista DO DETUA, Volumen 2, Nº 1.
- ÁLVAREZ, J. (1998). *Planificación del movimiento de vehículos autónomos basada en sensores*. Tesis Doctoral, Universidad de Oviedo, Gijón.
- BORENSTEIN, J. y FENG, L. (1995). *Correction of systematic odometry errors in mobile robots*. Proceeding of the International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS'95). Pittsburgh, Pennsylvania. pp 569 – 574.
- CROWLEY, J. y CHENAVIER, F. (1992). *Position Estimation for a Mobile Robot Using Vision and Odometry*. IEEE Conference on Robotics and Automation, Nice.
- DUDEK, G. y JENKIN, M. (2001). *Computational Principles of Mobile Robotics*. Cambridge University Press
- EVERETT, H. R. (1995). *Sensors for Mobile Robots: Theory and Application*. A.K. Peters, Natick – Massachussets
- JONES, J. (1999). *Mobile Robots: Inspiration to implementation*. A.K. Peters, Natick – Massachussets
- LAZEA, GH., LUPU, E. y PATKO, M. (1999). *Aspect on kinematic modelling and simulation of wheeled robots*. Research Report. Technical University of Cluj – Napoca.
- LA VALLE, S. (1999). *Differential Models: Theory and Applications*. University of Illinois.
- LIMA, P. y RIBEIRO, M. (2002). *Kinematics models of mobile robots*. Mobile Robotics Course. Instituto Superior Técnico (IST). Portugal.
- MONTANO, L. y ASENSIO, J.R. (2002). *A kinematics and dynamics model based motion controller for mobile robots*. 15th Triennial World Congress. IFAC. Barcelona.
- MURPHY, R. (2002). *An Introduction to al Robotics: Intelligent Robotics and Autonomous Agents*. MIT Press. United States of America.
- RIBEIRO, M. (1999). *Localizacão em Robotica Movei*. Mobile Robotics Course. Instituto Superior Técnico (IST). Portugal.
- SEGOVIA, A., GARDUÑO, M y DÍAZ, A. (2000). *Kinematics design and control of a mobile robot*. Journal of the Mexican Society of Instrumentation. México.