ASOCIATIVIDAD DEL MÉTODO DE LA SECANTE

Autor:
NORTHSHIELD SAM
Departamento de Matemáticas, Universidad Estatal de Nueva York
American Mathematical Monthly, Vol. 109, marzo de 2002

Traducido por
HAROLD VACCA GONZÁLEZ*
JORGE ADELMO HERNÁNDEZ**

1. Introducción

Este artículo tiene su génesis en un problema que el autor enfrentó mientras estaba en la Universidad. Aunque los tópicos cubiertos aquí son bien conocidos y nada tiene garantía de originalidad, trata de hacer un agradable tejido de muchos hilos matemáticos. Mas aún, se muestra el valor de una buena notación y de la habilidad lectora de un viejo zorro para resolver un problema.

Consideremos las iteradas de la función $m(x) = 1 + \frac{1}{x}$. Comenzando en 1, se tiene la sucesión $1, 1+\frac{1}{1}, 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}, 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}, \ldots$

Como fracciones simples, tenemos: $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \ldots,$ (1)

Las cuales se forman con las razones de números consecutivos de *Fibonacci*[1]; un argumento por inducción muestra:

PALABRAS CLAVES
DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA, MATEMÁTICAS, MÉTODOS NUMÉRICOS, MÉTODO DE LA SECANTE

* Licenciado en Matemáticas y Especialista en Ingeniería de Software Universidad Distrital F.J.C.. Profesor Asistente adscrito a la Facultad Tecnológica de la Universidad Distrital F.J.C.
** Matemático y Especialista en Matemática Avanzada Universidad Nacional de Colombia. Profesor Asistente adscrito a la Facultad Tecnológica de la Universidad Distrital F.J.C.

1 Nota de los traductores. Pseudónimo de Leonardo de Pisa, Matemático italiano nacido en el siglo XII, además de su sucesión, célebre por resolver retos matemáticos como el propuesto por Juan de Palermo en 1224: aproximar la única raíz real de $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$, aplicando para ello un método que incluía la intersección de un círculo y una parábola; su respuesta la dio en un sistema numérico de base 60!

Proposición. Sea $F_1 = F_2 = 1$ y, para $n > 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Sea $x_1 = 1$ y, para $n \geq 1, x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$. Entonces $x_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$.

La sucesión x_n converge, pero dejaremos la prueba de esto para más adelante. Asumiendo la convergencia, podemos identificar el límite, digamos $\hat{x}$, así: como x_n es positivo y satisface $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$, $\hat{x}$ debe ser positivo y satisface $x = 1 + \frac{1}{x}$, o, equivalentemente, $\hat{x}$ es la única solución positiva de $x^2 - x - 1 = 0$. Así $\hat{x} = \phi = \frac{(1+\sqrt{5})}{2}$, la razón áurea. La sucesión x_n en forma decimal está ilustrada en la Tabla 1.

n	x_n	n	x_n
1	1	13	1.618025751
2	2	14	1.618037135
3	1.5	15	1.618032787
4	1.666666667	16	1.618034448
5	1.6	17	1.618033813
6	1.625	18	1.618034056
7	1.615384615	19	1.618033963
8	1.619047619	20	1.618033999
9	1.617647059	21	1.618033985
10	1.618181818	22	1.61803399
11	1.617977528	23	1.618033988
12	1.618055556	24	1.618033988

Tabla 1.

Tomando 23 iteraciones, los valores se estabilizan en los primeros diez dígitos.

Aunque es conocido que las fracciones continuas convergentes producen las mejores aproximaciones racionales a la razón áurea, hay métodos mas rápidos para aproximar ϕ. Uno de ellos, lo hemos visto en cálculo, es el método de Newton-Raphson; ver Figura 1.

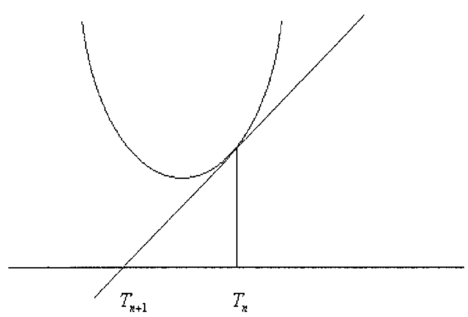

Figura 1.

A partir de una estimación inicial T_0 se calculan $T_1, T_2, \ldots$, usando la fórmula:

$$T_{n+1} = T_n - \frac{f(T_n)}{f'(T_n)} = \frac{T_n^{\,2} + 1}{2T_n - 1}, n \geq 1$$

Iniciando con $T_0 = 1$, obtenemos la sucesión en la tabla 2.

n	T_n
0	1
1	2
2	1.666666667
3	1.619047619
4	1.618034448
5	1.618033989
...	...

Tabla 2

Tomando solamente 5 iteraciones los valores se estabilizan en los primeros 10 dígitos.

El método de la secante (Figura 2) es similar al método de Newton. Comenzando con dos estimaciones distintas S_1, S_2, y de nuevo para $f(t) = t^2 - t - 1$, calculamos

$$S_{n+1} = \frac{S_{n-1} f(S_n) - S_n f(S_{n-1})}{f(S_n) - f(S_{n-1})} = \frac{S_n S_{n-1} + 1}{S_n + S_{n-1} - 1}$$

Para $S_1 = 1$ y $S_2 = 2$, la sucesión S_n es mostrada en la Tabla 3.

n	S_n
1	1
2	2
3	1.5
4	1.6
5	1.619047619
6	1.618025751
7	1.618033985
8	1.618033989
...	...

Tabla 3

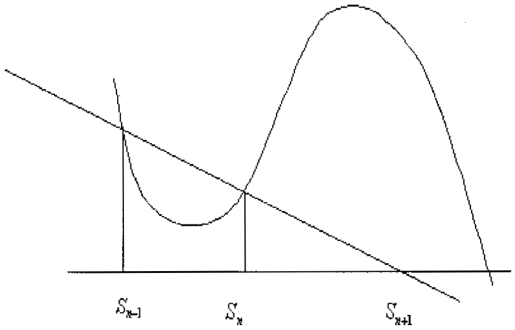

Figura 2.

Tomando seis iteraciones, los valores se estabilizan en los primeros 10 dígitos.

El fenómeno de interés nuestro, es que los números T_n y S_n son todos fracciones continuas que convergen a ϕ, es decir, todas están en la lista de las iteradas de $1+\frac{1}{x}$ en (1). En la Tabla 4, se comparan las iteradas de $1+\frac{1}{x}$, de la Tabla 1 con las aproximaciones de Newton-Raphson de la Tabla 2 y las aproximaciones del método de la secante de la Tabla 3.

x_n	T_n	S_n
1	1	1
2	2	2
1.5		1.5
1.666666667	1.666666667	
1.6		1.6
1.625		
1.615384615		
1.619047619	1.619047619	1.619047619
1.617647059		
1.618181818		
1.617977528		
1.618055556		
1.618025751		1.618025751
1.618037135		
1.618032787		
1.618034448	1.618034448	

Tabla 4

El patrón que aparece es claro:

Teorema 1. *Sea x_n la n-ésima iterada de $m(x)=1+\frac{1}{x}$ iniciando en 1, sea $f(x)=x^2-x-1$, Sea T_n la sucesión formada al aplicar el método de Newton- Raphson a f con $T_1=1$, y sea S_n la sucesión formada al aplicar el método de la secante a f con $S_1=1$ y $S_2=2$. Entonces $T_n=x_{2^n}$ y $S_n=x_{F_n}$.*

Esto fue demostrado por Gill y Miller en 1981 [**5**]. Un análisis del método de Newton Raphson para una clase más extensa de irracionalidades cuadráticas fue hecha por M. Filaseta [**4**]. Nuestro propósito es explicar este fenómeno de una nueva manera, e investigar la situación mas general en que ocurre.

2. Nuestro Acercamiento al Problema

La solución de este problema es en gran medida un resultado de buena notación. Consideremos la siguiente operación binaria:

$$x \oplus y = \frac{xy+1}{x+y-1} \tag{2}$$

Esta operación está bien definida en los reales extendidos $\overline{R}$, (es decir, los reales adicionando ∞), y es en efecto conmutativa sobre $\overline{R}$, excepto en el caso 0/0; es decir cuando $xy=-1$ y $x+y=1$ o, en forma equivalente, cuando x e son los ceros distintos de x^2-x-1. Uno puede ver esto también geométricamente, $x \oplus y$ es el resultado de aplicar el método de la secante a la función x^2-x-1, con estimaciones iniciales x e y. El caso 0/0 ocurre cuando la recta secante coincide con el eje x o, en forma equivalente, cuando los números distintos x e y son ambos ceros de la función x^2-x-1.

El "número" ∞ juega un papel especial aquí. Geométricamente, $x \oplus \infty$ es el límite de $x \oplus z$ cuando z tiende a ∞, lo cual ocurre cuando la recta vertical a través de x interseca al eje x - *justo* x en él mismo. Esto es, ∞ actúa como una identidad para $\oplus$ y cualquier recta a través del infinito, es vertical.

Asumiendo, por el momento, que la $\oplus$ es asociativa uno puede definir $1^{\oplus n}$ como la "suma" de - copias de 1. Como $x \oplus 1 = 1 + \frac{1}{x}$, la enésima iterada de $1+\frac{1}{x}$ es la suma de n-copias de 1. Esto es, $x_n = 1^{\oplus n}$.

Siendo $x \oplus x = (x^2+1)/(2x-1)$, lo cual es sólo la aplicación del método de Newton Raphson a x^2-x-1 con estimación inicial x, entonces el método de Newton Raphson, iniciando en 1 nos da:

$$1, 1\oplus 1, (1\oplus 1)\oplus(1\oplus 1), ((1\oplus 1)\oplus(1\oplus 1))\oplus((1\oplus 1)\oplus(1\oplus 1))\ldots$$

De donde por asociatividad, e inducción implica:

$$T_n = 1^{\oplus 2^n} = x_{2^n}$$

Análogamente, el método de la secante aplicado a x^2-x-1, iniciando en 1 y 2= $1\oplus 1$, Satisface $S_{n+1} = S_n \oplus S_{n-1}$ y resulta:

$1, 1 \oplus 1, (1 \oplus 1) \oplus 1, ((1 \oplus 1) \oplus 1) \oplus (1 \oplus 1)\ldots$

lo cual por asociatividad e inducción implica:

$$S_n = 1^{\oplus F_n} = x_{F_n}$$

Sólo nos queda por mostrar que $\oplus$ es asociativa. Realizando cálculos algebraicos, encuentra que:

$$(x \oplus y) \oplus z = \frac{xyz + x + y + z - 1}{xy + xz + yz - x - y - z + 1}$$

Intercambiando x y z, el lado derecho no cambia, pero el lado izquierdo queda convertido en $(z \oplus y) \oplus x$, lo cual, por conmutatividad, es $x \oplus (y \oplus z)$.

3. Tratando de Generalizar

En este punto, deseamos generalizar. No hay nada especial con respecto a $x^2 - x - 1$, o el número 1 en el argumento dado en la sección 2. Esto es, si reemplazamos $x^2 - x - 1$ por cualquier otra función diferenciable $f : \overline{R} \to \overline{R}$, se define la adición por medio del método de la secante, (ver Figura 3)

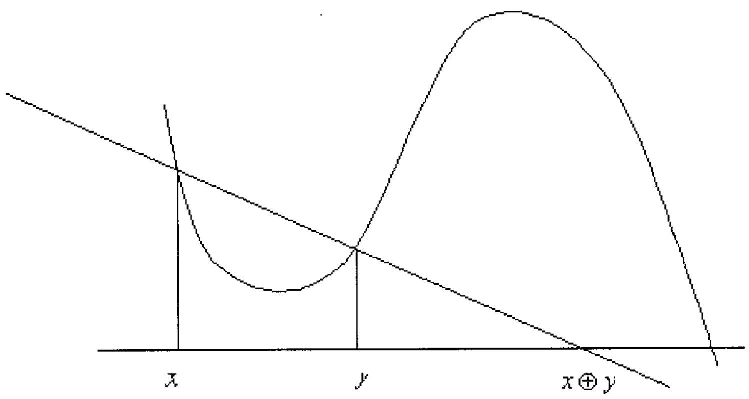

Figura 3

$$x \oplus y = \frac{xf(y) - yf(x)}{f(y) - f(x)} \qquad (3)$$

y reemplazamos $1 + \frac{1}{x}$ por cualquier función de la forma $m(x) = x \oplus k$, entonces el teorema 1 es valido si es asociativa.

Asumimos que f es diferenciable, como en la prueba del teorema 1 depende de $k^{\oplus n}$, estando bien definida, lo cual requiere que $x \oplus x$ esté bien definida. Cuando f es diferenciable, entonces tomando $x \oplus x = \lim_{y \to x} x \oplus y$, se encuentra:

$$x \oplus x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

que es el método de Newton Raphson aplicado a la función f con estimación inicial x. Realmente, es suficiente asumir sólo que f es continua; la diferenciabilidad entonces, se sigue de la asociatividad de $\oplus$!.

La pregunta ahora es: ¿Para qué funciones f, la relación es asociativa?. El esquema ensayo-error no nos brinda muchas luces. Las pruebas algebraicas de asociatividad son esencialmente *ad hoc* y es difícil visualizar una estrategia definida para probar o refutar la asociatividad de $\oplus$ para grandes clases de funciones f. Por ejemplo, si $f(x) = x^3$, entonces

$$x \oplus y = \frac{xy^2 + x^2 y}{x^2 + xy + y^2}$$

que resulta no ser asociativa $(1 \oplus (1 \oplus -1) = 0$ pero $(1 \oplus 1) \oplus -1 = \frac{2}{7})$.

Sin embargo, como el método de la secante es geométrico, quizás podamos encontrar una prueba geométrica de asociatividad y ello nos podría dar alguna luz sobre el problema.

4. Una Mirada Geométrica

Nuestra investigación está basada en el "Misterio Hexagrámico" de Pascal, teorema de 1640 (cuando Pascal tenía 16 años): para cualquier cónica y cualesquiera seis puntos $P_1, P_2, \ldots, P_6$ sobre ella, los lados opuestos del hexagrama resultante, extendido si es necesario, se intersecan en puntos que pertenecen a alguna línea recta. Más específicamente, sea $L(P,Q)$ la recta que pasa por los puntos P y Q. Entonces los puntos $L(P_1,P_2) \cap L(P_4,P_5), L(P_2,P_3) \cap L(P_5,P_6)$, y $L(P_3,P_4) \cap L(P_6,P_1)$ son colineales (Figura 4).

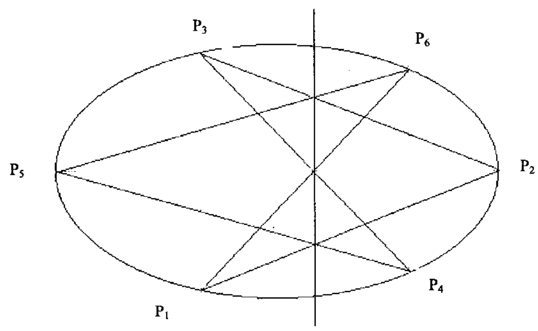

Figura 4

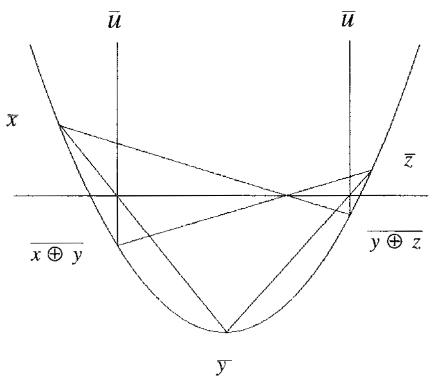

Figura 5

Mostremos ahora, la asociatividad de la "adición" (2) surgida de $f(x) = x^2 - x - 1$ (ver Figura 5). La pendiente de f es ilimitada (en el ∞) y es a través del "punto en el infinito" que todas las rectas secantes son verticales (recordemos que ∞ actúa como el elemento identidad para $\oplus$).

Para cualquier número real x, sea $\bar{x}$ el punto $(x, f(x))$. Dado u, los puntos $\bar{u}$, $\overline{y \oplus z}$, $\bar{x}$, $\bar{y}, \bar{z}$, y $\overline{x \oplus y}$ son puntos sobre una cónica y, aplicando el teorema de Pascal, los puntos $L(\bar{x}, \bar{y}) \bigcap L(\bar{u}, \overline{x \oplus y})$, $L(\bar{y}, \bar{z}) \bigcap L(\bar{u}, \overline{y \oplus z})$ y $L(\overline{x \oplus y}, \bar{z}) \bigcap L(\bar{x}, \overline{y \oplus z})$ pertenecen a alguna línea recta. Haciendo que u tienda a ∞, las rectas $L(\bar{u}, \overline{x \oplus y})$ y $L(\bar{u}, \overline{y \oplus z})$ tienden a ser verticales, por los dos puntos de aproximación, $(x \oplus y, 0)$ y $(y \oplus z, 0)$, respectivamente. Estando estos puntos sobre el eje-x, conseguimos el tercero y así $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$.

Nuestro argumento es válido para cualquier función f cuyo gráfico es una sección cónica con pendiente no acotada. El requisito de que la pendiente sea no acotada, permite la existencia de un punto "virtual" en el que las rectas secantes que pasan por él sean todas verticales. En particular, f debe ser de la forma

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$$

Para algunas *a, b, c, d, e*, con *a* y *d*, ambas no nulas. Podemos concluir que:

Teorema 2. *Si* $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ *con a y d ambas no nulas, entonces* $\oplus$ *definida por (3) es asociativa. Dada cualquier k, sea m(x)=*$x \oplus k$*, definimos* x_n *por* $x_1 = k$ *y* $x_{n+1} = x_n \oplus k$*, sea* T_n *la sucesión que resulta de aplicar el método de Newton Raphson a f iniciando en k y sea* S_n *la sucesión que resulta de aplicar el método de la secante a f iniciando en k y m(k). Entonces* $T_n = k^{\oplus 2^n} = x_{2^n}$ *y* $S_n = k^{\oplus F_n} = x_{F_n}$.

En nuestro ejemplo original, apreciábamos las iteradas de $m(x)=1+\frac{1}{x}$, iniciando en 1, y veíamos que ellas eran de la forma $1^{\oplus n}$. Ahora, sea m una transformación general de Möbius: $m(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$

Esto es una generalización del ejemplo original, donde $m(x)=\frac{1x+1}{1x+0}$. Mostramos que las iteradas, iniciando en k, de la función general m son de la forma $k^{\oplus n}$ para una definición apropiada de $\oplus$. Dado k, si todas las iteradas de $m_n(k)$ son convergentes, ellas convergen a un punto fijo de m–, es decir, a una raíz del polinomio característico $p(x)=cx^2+(d-a)x-b$. Dado un número e, posiblemente infinito, consideramos la función $f(x)=\frac{p(x)e}{x-e}$. La operación $\oplus$ resulta ser asociativa y conmutativa y las funciones $x\oplus k$ son transformaciones de Möbius (se probará esto en la sección 7). Además las transformaciones de Möbius $m(x)$ y $x\oplus m(e)$ tienen, como múltiplo constante, los mismos polinomios característicos [$m(e)\oplus x=x$ si y solo si $f(x)=0$ sí y solo sí $p(x)=0$] y de acuerdo con algún otro valor a manera de punto fijo [$m(e)=e\oplus m(e)$],

$$m(x)=x\oplus m(e).$$

Dejando $e=m^{-1}(k)$, encontramos que si $f(x)=\frac{p(x)}{x-m^{-1}(k)}$, entonces $m(x)=x\oplus k$, y tenemos

$$m_n(k)=k^{\oplus(n+1)}.$$

Como ejemplo, sea $m(x)=\frac{2x+3}{4x+5}$ y k=7. Entonces $m^{-1}(7)=-\frac{16}{13}$, y, definiendo $f(x)=\frac{52x^2+39x-39}{13x+16,}$, encontramos que :

$$x\oplus y=\frac{25xy+39(x+y)+48}{52xy+64(x+y)+87}$$

de lo cual se sigue que

$$x\oplus 7=\frac{2x+3}{4x+5}$$

y

$$m_n(7)=7^{\oplus(n+1)}.$$

5. Grupos

Para las funciones de la forma $\frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$, ¿existe un grupo con operación de grupo $\oplus$?. ¡Si!. Geométricamente, $\ell = -\frac{e}{d}$ ($\ell = \infty$ si $d = 0$) actúa como el elemento idéntico. Sea Z(*f*) = {*x*:*f*(*x*)= 0} el conjunto cero de f y sea $G = \overline{R} - Z(f)$. Entonces G es cerrado bajo $\oplus$. La existencia de un inverso para cualquier k está asegurado por el hecho de que toda $x \oplus k$ es una transformación de Möbius: dada k, sea $m(x)= x \oplus k$ y definimos $k^{-1} = m^{-1}(\ell)$.

La base del campo R es arbitraria y, siendo las transformaciones de Möbius normalmente concebidas sobre los números complejos C, podemos considerar el grupo G como el conjunto $G = \{ z \in \overline{C} : f(z) \neq 0\}$ con operación de grupo $\oplus$ y como elemento identidad ℓ. Así G es un grupo de Lie que es homeomorfo a la esfera de Riemann, con una o dos perforaciones.

6. Algunos Ejemplos

A. Considere $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$. La correspondiente "adición" es $x \oplus y = \frac{x+y}{1-xy}$. El lector puede reconocer esta adición y su relación con π: la Arcotangente actúa como un homomorfismo $Tan^{-1}(x \oplus y) = Tan^{-1}(x) + Tan^{-1}(y)$ y, por ejemplo, la fórmula de Machin

$$1 \oplus \frac{1}{239} = \frac{1}{5} \oplus \frac{1}{5} \oplus \frac{1}{5} \oplus \frac{1}{5}$$

sostiene, que usando la serie de Mclaurin para la Arcotangente , se sigue que:

$$\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(4 \times 239^{2n+1} - 5^{2n+1})}{(2n+1)1195^{2n+1}}.$$

Además, uno puede obtener una fórmula para iteradas de transformaciones de Möbius correspondientes a *f*:

$$x \oplus c = Tan(Tan^{-1}(x) + Tan^{-1}(c))$$

y así

$$m_n(c) = Tan(n \times Tan^{-1}(c)).$$

B. Considere $f(x) = \frac{x^2 - c^2}{x}$. entonces $x \oplus y = \frac{x+y}{1+\frac{xy}{c^2}}$, que es la ley aditiva de velocidad de la relatividad especial con velocidad de la luz c. Si $c^2 = k$ es un entero no cuadrado, adicionándose a si mismo n veces, $1 \leq n < \infty$, ¿produce infinitamente muchas fracciones continuas que convergen a la simple fracción continua de c? . La respuesta definitiva fue encontrada por Douglas Hensley [**6**].

C. Si $f(x)=\frac{1}{x}$, entonces $x\oplus y=x+y$ (adición normal), ¿A la multiplicación normal le corresponde alguna f?, es decir, ¿existe una función f tal que $x\oplus y=xy$? En ese caso, sea $y=x$ y tome $x\oplus x=x^2$. Por otro lado, $x\oplus x$ es una iteración del método de Newton-Raphson y tenemos la ecuación diferencial:

$$x^2=x-\frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Resolviendo, encontramos que $f(x)=\frac{x}{1-x}$. Finalmente, chequeando que $\oplus$ dada por f es de hecho una multiplicación ordinaria, concluimos que la respuesta es, ¡si!

D. Si $f(x)=x^2$, tomemos $x\oplus y=\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$; pensando eléctricamente, nos permite reconocer esto como la adición de resistencias en paralelo. El otro caso –resistencias en serie– es cubierto por el caso $f(x)=\frac{1}{x}$. Una maravilla si *todas* estas diferentes reglas de adición tuvieran alguna interpretación eléctrica.

E. Si f es una transformación de Möbius, entonces es de la forma $Axy+B(x+y)+C$.

En el ejemplo A, vimos que la Arcotangente actúa como un homomorfismo y que eso conduce a conseguir una fórmula para las iteradas de *m*. Esto es verdad para todos los ejemplos A-E y más (Tabla 5):

$f(x)$	$x\oplus y$	$F(x)$
$\frac{x^2+1}{x}$	$\frac{x+y}{1-xy}$	$Tan^{-1}(x)$
$\frac{x^2-1}{x}$	$\frac{x+y}{1+xy}$	$Tanh^{-1}(x)$
x^2+1	$\frac{xy-1}{x+y}$	$Cot^{-1}(x)$
x^2-x-1	$\frac{xy+1}{x+y-1}$	
$\frac{1}{x}$	$x+y$	x
x^2	$\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$	$-\frac{1}{x}$
$\frac{x}{1-x}$	xy	$Ln(x)$
$\frac{ax+b}{cx+d}$	$Axy+B(x+y)+C$	

Tabla 5

El lector puede disfrutar haciendo una pausa y tratar de encontrar cómo obtener F de f antes de que lo hagamos en la siguiente sección. Hipótesis muy apacibles sobre una adición asociativa son conocidas e implican la existencia de un homomorfismo continuo. Para un tratamiento completo, remitirse a la literatura, ver [**1**, pp. 253-273].

7. Un Lema Útil y sus Consecuencias

Una consecuencia de la asociatividad de $\oplus$ es la siguiente. Por una parte no asumimos acerca de f sino su continuidad y que el gráfico tiene pendiente no acotada. Si e es un número real tal que $f(e)=\infty$, entonces definimos $p(x)=f(x)(x-e)$ pero, por otra parte definimos $p(x)=f(x)$. Si f es una cónica con pendiente no acotada, entonces p es solo el numerador de f.

Lema 1. *Si f es tal que $\oplus$ es asociativa, entonces:*

$$\frac{\partial}{\partial x}(x\oplus y)=\frac{p(x\oplus y)}{p(x)}.$$

Prueba: Sea $s(x,y) = \dfrac{f(x)}{x-x\oplus y}=\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$. Hagamos ℓ = e si f(e) = ∞

(si f(e)= ∞ para varios valores de e, cualquier otro de ellos servirá), en otro caso sea $\ell=\infty$. En cualquier caso, $\lim\limits_{z\to\ell} x\oplus z=x$. La asociatividad asegura que está bien definida y

$$\frac{\partial}{\partial x}(x\oplus y)=\lim_{z\to\ell}=\frac{x\oplus y-x\oplus y\oplus z}{x-x\oplus z}=\lim_{z\to\ell}\frac{f(x\oplus y)s(x,z)}{s(x\oplus y,z)f(x)}=\frac{f(x\oplus y)}{f(x)}\lim_{z\to\ell}\frac{s(x,z)}{s(x\oplus y,z)}.$$

Note que:

$$\lim_{z\to\ell}\frac{s(x,z)}{s(x\oplus y,z)}=\lim_{z\to\ell}\frac{f(x)-f(z)}{x-z}\frac{x\oplus y-z}{f(x\oplus y)-f(z)}=\lim_{z\to\ell}\frac{x\oplus y-z}{x-z}.$$

que es 1 si $\ell=\infty$ e igual a $\dfrac{x\oplus y-e}{x-e}$ si $\ell=e.$

Inmediatamente se sigue, por definición de f, que $f(x)=\infty$ tiene al menos una solución real. Otra consecuencia, usada en la sección 4 y 5, es que la función de la forma $x\oplus k$ es una transformación de Möbius.

Corolario 1. *Sea p un polinomio cuadrático. Entonces, para todo k, $m(x)=x\oplus k$ es una transformación de Möbius.*

Prueba: El hecho básico que usamos aquí es que la Derivada de Schwartz $S(m)=\left(\dfrac{m''}{m'}\right)'-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{m''}{m'}\right)^2$ es cero sí y sólo sí m es una transformación de Möbius. Sea $m(x)=x\oplus k$. Por el lema 1, $m'=\dfrac{p\circ m}{p}$. Usando esto y poniendo a funcionar la derivada de Schwartz, $S(m)=\dfrac{(q\circ m-q)}{p^2}$, donde $q=pp''-\dfrac{1}{2}(p')^2$. Dado que p es un polinomio cuadrático, q es una constante y así $S(m)$=0.

En la sección 6, fue encontrado un Homomorfismo para el ejemplo A. Ahora encontremos tal Homomorfismo para el caso general.

Corolario2. *Si F satisface* $F' = \frac{1}{p}$ *y* $F(\ell) = 0$ *entonces* $F(x \oplus y) = F(x) + F(y)$.

Prueba. Supongamos $F' = \frac{1}{p}$. Por el lema 1, $\frac{\partial}{\partial x} F(x \oplus y) = F'(x)$. Y así $F(x \oplus y) = F(x) + G(y)$ para alguna función G. Por la conmutatividad, $F(x) + G(y) = F(y) + G(x)$ de donde se sigue $F(x) - G(x) = F(y) - G(y)$, de manera que F y G difieren en una constante (digamos c). Luego,

$$F(x \oplus y) = F(x) + F(y) + c.$$

La condición $F(\ell) = 0$ asegura que esta constante es 0. Esto nos brinda, como en el ejemplo A, una fórmula cerrada para $k^{\oplus n}$, a saber:

$$k^{\oplus n} = F^{-1}(nF(k)).$$

Las funciones F y p son, para la función dada m, soluciones bien conocidas en las ecuaciones funcionales. A saber, F es una solución de la *Ecuación funcional de Abel*

$$F(m(x)) = F(x) + 1.$$

y p es una solución de la *ecuación de Julia.*

$$p(m(x)) = p(x)m'(x).$$

Regresando a nuestro ejemplo original, el homomorfismo es entonces

$$5^{-\frac{1}{2}} \log\left|\frac{x-\bar{\phi}}{x-\phi}\right|.$$

donde ϕ y $\bar{\phi}$ son las dos soluciones de $x^2 - x - 1 = 0$. Así, si k es más cercano a ϕ que a ϕ, entonces $F(k)>0$ y $F(k^{\oplus n}) \to \infty$ si $n \to \infty$; se concluye que:

$$k^{\oplus n} \to \phi.$$

Así, por ejemplo, $\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1^{\oplus n} \to \phi$. Otras consecuencias de la asociatividad aparecen en [**7**].

8. Curvas Elípticas

El lector que está familiarizado con las curvas elípticas, no dudará en reconocer una semejanza entre nuestra adición secante y la "ley de grupo" para las curvas elípticas. Una curva elíptica es un tipo de curva cúbica, es decir, un conjunto cero para un polinomio de grado tres en dos variables. La unión del eje-x y la gráfica de $y = \frac{(ax^2 + bx + c)}{(dx + e)}$ es también una curva cúbica –aunque una degenerada– definida por: $y^2(dx + e) = y(ax^2 + bx + c)$. Esta ecuación da la curva cúbica más general cuyo gráfico es la unión del eje-x y la gráfica de la función.

Hay una manera de “adherir” puntos no singulares sobre una curva cúbica - la ley de grupo - y este método aplicado a nuestras curvas degeneradas es exactamente nuestra adición secante. La prueba usual de que la ley de grupo es asociativa, proviene del teorema de Cayley-Bacharach, una célebre generalización del teorema de Pascal; ver [**9**] para mas detalles. Un definitivo y reciente tratamiento del papel del teorema de Pascal en la historia del álgebra, la geometría y la geometría algebraica, así como una discusión de algunos de estos desarrollos aparecen en [**2**], donde claramente hay apartes accesibles para los no especialistas.

9. Palabras Finales

La teoría de aproximación polinomial en [-1,1] inevitablemente involucra la función de peso $\sqrt{1-x^2}$. En este contexto, la ley de adición

$$a \oplus b = a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}$$

ha sido considerada de importancia. Aunque no obviamente una ley de “adición” secante, esto, no obstante, la asociatividad en el intervalo [-1,1] (¡el Arcoseno actúa como un Homomorfismo!). En [**3**] M. Felten desarrolla totalmente un cálculo basado en esta exótica adición. En general, la teoría de reglas de adición de la forma $a \oplus b = af(b) + bf(a)$ tiene estrecha relación con la adición secante.

Por ejemplo, si $\oplus$ es asociativa y $h(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, entonces para algún *k*, $h(x \oplus y) = \dfrac{h(x)h(y)+k}{h(x)+h(y)}$.

Es decir, aunque a veces no es una transformación de Möbius, es conjugada de alguna; ver [**8**] para más detalles. Esto implica el Lema 1 y el Corolario 2 (para una elección apropiada de *p*).

Esta teoría de la “adición secante” es extensible al caso de las “iteradas” de transformaciones de Möbius (¿ el caso de $f(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$?). La respuesta, al menos para funciones *f* continuas de $\overline{R}$ en sí mismo, es no; ver [**8**] para una demostración. Una prueba heurística (con muchos vacíos) se indica así. Asumiendo la asociatividad, el Lema 1 implica que *f* es meromorfa y es la razón de dos series de potencias. El grupo *G* definido en la sección 5 es homeomorfo a una Esfera de Riemann “perforada” - las “perforaciones” corresponden a los ceros de la función *f* -. Aquí podemos tener al menos dos perforaciones, además, el grupo fundamental de la multivariedad *G* debe ser no abeliano.

Luego, el numerador de *f* es un polinomio de grado 2 o menos. Cada cero del denominador de *f* corresponde a un “elemento identidad” para *G* y como la identidad es única, el denominador de *f* es lineal.

Finalmente, notamos una conexión interesante con las Matrices. Recordemos nuestro ejemplo inicial $m(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$, $f(x) = x^2 - x - 1$ y $x \oplus y = \dfrac{(xy+1)}{(x+y-1)}$. Sea A una matriz cuadrada 2 x 2 con ecuación característica $x^2 - x - 1 = 0$. Por ejemplo, sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Observe que la correspondencia con $m(x)=1+\frac{1}{x}=\frac{1x+1}{1x+0}$. Así, A satisface su ecuación característica, $A^2=A+I$ y tenemos $(A-xI)(A-yI)=(1-x-y)A+(xy+1)I=A-(x\oplus y)I$ donde "=" indica igualdad para la multiplicación escalar.

Más generalmente, sea A una matriz con polinomio característico cuadrático p. Si $f(x)=p(x)$, entonces el resultado (4) es válido, si $f(x)=\frac{p(x)}{x-e}$,

$$(A-xI)(A-yI)=(A-(x\oplus y)I)(A-eI)$$

donde, en cualquier caso, $\oplus$ está definida por (3).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] J. Aczel. *Lectures on Functional Equations and Their Applications.* Academic Press, New York. 1966

[2] isenbud, M. Green. and J. Harris. Cayley-Bacharach Theorems and Conjectures. Bull. Amer, Math. Soc. **33** (1996) pp.*295-324*

[3] M. Felten, A modulus of smoothness based on an algebraic addition. *Aequationes Math. 54 (1*997) pp. 56-73

[4] M. Filaseta, Newton´s Method and Simple Continued Fractions. *Fibonacci Quart.* 24 (1986) pp. 41-16

[5] J. Gill and G. Miller. Newton´s Method and Ratios of Fibonacci Numbers, *Fibonacci Quart*. 24 (1981) pp.1-4

[6] D. Hensley. Simple Continued Fractions and Special Relativity. *Proc. Amer. Math.* Sc. 67 (1997) pp. 219-220

[7] S. Nortshield. On iterates of Möbius Transformations on, fields. *Math. Comp.* 70 (235) (2000) pp. 1305-1310

[8] S. Northshield. Notes on *Some Associative Binary Relations.* Preprint

[9] J. H. Silverman and J. Tate. *Prational Points en las Curvas Elípticas.* Springer-Verlag, New York, 1992.

BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

· LUQUE, Carlos, y otros. Fracciones Continuas: Una Aproximación a los Números Irracionales Cuadráticos. Memorias XII Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones: "Aplicaciones de la Geometría». Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, junio de 2001

· CHARRIS, Jairo, y otros. Fundamentos de Análisis Complejo de una Variable *(capítulo XVIII).* Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Bogotá, 2000

· BURDEN, R.L. y Faires. Análisis Numérico. Ed. Thompson. Bogotá, 2002.