

Análisis de sistemas de tuberías y tanques con el programa de elementos finitos, Ansys

Pipes and Tanks Systems Analysis with the Finite Element Program, Ansys

WILSON RODRÍGUEZ CALDERÓN

Ingeniero Civil de la Universidad Industrial de Santander, Especialista y Magíster en Métodos Numéricos para el Cálculo y Diseño en Ingeniería de la Universidad Politécnica de Cataluña. Profesor investigador de la Pontificia Universidad Javeriana (Bogotá D.C.) y director del grupo de investigación en Informática y Métodos Matemáticos de la misma universidad
wilroca@javeriana.edu.co

MYRIAM ROCÍO PALLARES MUÑOZ

Ingeniero Civil de la Universidad Industrial de Santander, Especialista y Magíster en Métodos Numéricos para el Cálculo y Diseño en Ingeniería de la Universidad Politécnica de Cataluña. Profesora investigadora de la Universidad Santo Tomás (Bogotá D.C.). Directora del grupo de investigación en Simulación y Control Numérico-USTA.
myriampallares@correo.usta.edu.co

Clasificación del artículo: reflexión

Fecha de recepción: 28 de marzo de 2006

Fecha de aceptación: 13 de octubre de 2006

Palabras clave: elementos finitos, balance, métodos numéricos, Newton-Raphson.

Key words: finite elements, balance, numeric methods, Newton-Raphson.

RESUMEN

En muchos casos prácticos y cotidianos de análisis y diseño de redes de tuberías es común encontrar nudos en los que concurren caudales provenientes de diferentes mallas, análogamente a lo sucedido con el flujo en circuitos eléctricos. En general, la solución de este tipo de problemas es compleja, dada la no linealidad del sistema de ecuaciones resultante; en tal caso, es necesario recurrir a solu-

ciones iterativas de balance o a métodos numéricos que resuelvan sistemas no lineales, como el método de Newton-Raphson. El programa de elementos finitos ANSYS ofrece una solución general a los problemas de redes de tuberías utilizando este método. Los modelos se construyen con el elemento FLUID116 de su librería de elementos y la solución se logra empleando algoritmos iterativos para la solución de sistemas de ecuaciones no lineales. El

modelo de tuberías y tanques presentado en este trabajo representa uno de los problemas de mayor complejidad en la mecánica de fluidos; el trabajo es parte de un proyecto de investigación de desarrollo de software educativo¹ para el análisis de sistemas hidráulicos de tuberías, tanques y bombas realizado en la Universidad Santo Tomás de Bogotá.

ABSTRACT

Finding joints with flows coming from different meshes is common in many practical and daily cases of analysis and design of pipes nets, just as it happens to flow in electric circuits. The solution of these problems is generally complex, given the

non-linearity of the resulting system equations; in that case it is necessary resort to iterative solutions of balance or numeric methods that solve non-linear systems, like Newton-Raphson method. The finite elements program, *ANSYS*, offers a general solution to the net problems, using this method. The models are built with *FLUID116* element, and the solution is achieved by means of iterative algorithms for solving non-linear system equations. The model of pipes and tanks presented in this work is one of the most complex problems in the fluid mechanics; the work is part of a research project about development of educational software to analyze hydraulic systems of pipes, tanks and bombs, made in the Universidad Santo Tomas de Bogotá.

* * *

1. Introducción

Cuando se intenta resolver un problema de redes de tubería no es conveniente utilizar la vía analítica, dado que, debido a la naturaleza potencial de las ecuaciones de pérdida en tuberías, el sistema resultante es de carácter no lineal; esta situación se presenta al emplear la fórmula de Hazen-Williams para flujo en tuberías comerciales, o la ecuación de Darcy-Weisbach utilizada en aplicaciones particulares, con la que es posible calcular el factor f mediante la formulación de Coolebrook u otra de carácter empírico, dependiendo del régimen a que se encuentre sometido el flujo (laminar o turbulento).

En problemas reales de flujo es necesario emplear métodos de aproximaciones sucesivas, comúnmente llamados iterativos. Quizá el más conocido sea

el de Hardy-Cross, que utiliza la ecuación de continuidad para determinar los flujos de partida y para mejorar el balance en ellos, calcula una corrección en cada circuito. Este procedimiento se realiza de manera repetitiva hasta que la corrección calculada alcanza valores muy pequeños que no modifican la solución; de esta forma, se realiza el cálculo definitivo del flujo en cada uno de los elementos componentes del sistema.

Cuando las redes son pequeñas, el método de Hardy-Cross puede aplicarse usando calculadoras programables para resolver el problema. Sin embargo, cuando éstas son más complejas o contienen varios depósitos de suministro (tanques), bombas y una buena cantidad de elementos, es conveniente usar un programa de computador que solucione el problema utilizando el mismo método, o cualquier otro disponible de naturaleza iterativa. En la literatura técnica se encuentran un buen número de métodos iterativos, entre ellos aquellos basados en el balanceo de caudal (Hardy-Cross) o de presiones nodales, y otros más generales en los que el sistema se modela mediante un conjunto de ecuaciones simultáneas no lineales que se resuelven por el método de Newton-Raphson.

¹ Poseidón Versión 1.0 es el resultado de la investigación y su validación se efectuó comparando los resultados obtenidos de la formulación por elementos finitos que emplea el programa Ansys. El uso de este programa comercial en el análisis de sistemas de tuberías no es muy frecuente, por lo que en este artículo se ilustra su aplicación a un problema específico.

El programa de elementos finitos ANSYS² ofrece una solución general a los problemas de redes de tuberías utilizando el método de Newton-Raphson. Los modelos se construyen con el elemento FLUID116³; con esta herramienta es posible simular sistemas complejos de distribución, con una buena cantidad de elementos, nudos y tanques.

Antes que compendiar la fundamentación analítica del problema, en este artículo se pretende resaltar el poder de las herramientas de modelación numérica que permiten resolver de manera eficiente y segura problemas de redes de tuberías de gran envergadura, prácticamente imposibles de resolver en forma analítica. En la tabla 1 se muestra la nomenclatura empleada a continuación.

D	Diámetro	z	Cota o elevación vertical
f	Coefficiente de fricción	ϵ	Rugosidad
L	Longitud del tramo de tubería	ρ	Densidad
Nr	Número de Reynolds	μ	Viscosidad dinámica del fluido
Q	Caudal	γ	Peso específico del fluido
V	Velocidad	v	Viscosidad cinemática del fluido
g	Aceleración de la gravedad	A	Área de la sección transversal

Tabla 1. Nomenclatura empleada

2. Planteamiento del problema y condiciones de contorno

El problema³ [14] consiste en el análisis de flujo en un sistema ramificado de tuberías; se requiere conocer el caudal en cada una de las conducciones

que interconectan unos depósitos o tanques en un punto común, llamado nudo de conexión (nudo J de la figura 1). La geometría del problema se presenta en la figura 1 y los datos de entrada en la tabla 2.

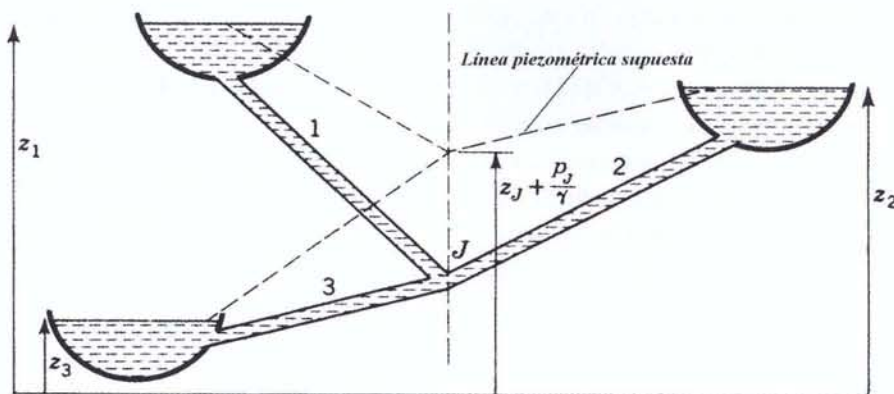


Figura 1. Dominio de discretización del problema [14]

² ANSYS es una marca de Swason Analysis System Inc. Para desarrollar este trabajo se utilizó una versión educativa de este paquete de software.

³ Disponible en la librería de elementos del programa

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor	Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
L1	3.000 m	D1	1 m	$\frac{\varepsilon_1}{D_1}$	0,0002	Z1	30 m
L2	600 m	D2	0,45 m	$\frac{\varepsilon_2}{D_2}$	0,002	Z2	18 m
L3	1.000 m	D3	0,6 m	$\frac{\varepsilon_3}{D_3}$	0,001	Z3	9 m
μ	0,894E-3 N.s/m ²	ρ	997,1 kg/m ³	ν	0,897E-6 m ² /s	γ	9.778 N/m ³

* $g = 9,806 \text{ m/s}^2$

Tabla 2. Datos del problema de tuberías ramificadas

Con base en la figura 1, las condiciones de contorno del problema son de superficie libre, lo que significa que la presión es cero en la superficie de los tanques.

3. Solución aproximada empleando el método iterativo de tuberías ramificadas

La figura 1 muestra un sistema sencillo de tuberías interconectadas. Se desea determinar el flujo en cada una cuando se conocen la elevación de los depósitos, el tamaño y tipo de tubería y las propiedades del fluido (agua). Las ecuaciones de Darcy-Weisbach y de continuidad deben satisfacerse en cada tubería. En resumen, el flujo que entra en la unión J (ver figura 1) debe ser igual al flujo que sale de ella. La dirección de flujo debe ir del depósito más alto al más bajo; entonces la ecuación de continuidad será:

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 \quad \text{ó} \quad Q_3 = Q_2 + Q_1 \quad (1)$$

y la ecuación de pérdidas por fricción de Darcy-Weisbach:

$$h_f = f \frac{L}{D} \left(\frac{V^2}{2g} \right) \quad (2)$$

Si la elevación de la línea de altura motriz en la unión está por encima de la elevación del depósito

intermedio el flujo entra en este depósito; pero si ésta se encuentra por debajo del depósito intermedio, el flujo sale de él. Las pérdidas menores pueden ser expresadas como longitudes equivalentes y sumadas a las longitudes reales de las tuberías.

El problema se resuelve de manera aproximada suponiendo elevaciones de la línea de altura motriz en J, calculando Q_1 , Q_2 , Q_3 y sustituyendo estos valores en la ecuación de continuidad; esto significa iterar sucesivamente. Si el flujo que entra a la unión es muy grande se supone una elevación mayor de la línea de altura motriz, ya que esto reduce el flujo de entrada y aumenta el de salida⁴.

Suponiendo un valor inicial para la línea de altura motriz en J dentro del rango comprendido entre los valores de z_1 y z_2 , por ejemplo,

$$z_J + \frac{P_J}{\gamma} = 23 \text{ m} \quad (3)$$

la ecuación de continuidad en el nodo J es:

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 \quad (4)$$

⁴ Esta no es la única forma de encontrar la solución; el problema también puede resolverse utilizando el clásico método de redes de tubería de Hardy-Cross.

Las pérdidas por fricción empleando la clásica ecuación de Darcy-Weisbach sobre cada rama pueden ser determinadas como la diferencia entre la altura del tanque correspondiente a la rama y la elevación de la línea de altura motriz supuesta en J (ver tabla 3).

Tramo	Elevación del tanque [m] z_i	Elevación de la altura motriz supuesta [m] $z_J + \frac{P_J}{\gamma}$	Pérdidas por fricción [m] (hf)
1	30	23	7
2	18	23	5
3	9	23	14

Tabla 3. Pérdidas por fricción determinadas como la diferencia entre la altura de cada tanque y la elevación de la línea de altura motriz supuesta para la primera iteración

En la tabla 4 se presenta un resumen de los resultados de velocidad, caudal y número de Reynolds, calculados a partir de las pérdidas supuestas de la tabla 3.

Tramo	f_i^*	hf_i	V_i [m/s]	Q_i [m ³ /s]	$N_R = \frac{VD}{\nu}$
1	0,014	$7 = f_1 \frac{3000}{1} \left(\frac{V_1^2}{2g} \right)$	1,75	1,380	1.950.947,6
2	0,024	$5 = f_2 \frac{600}{0,45} \left(\frac{V_2^2}{2g} \right)$	1,75	0,278	877.926,4
3	0,020	$14 = f_3 \frac{1000}{0,6} \left(\frac{V_3^2}{2g} \right)$	2,87	0,811	1.919.732,4

* f_1, f_2 y f_3 son determinados inicialmente bajo la suposición de turbulencia completa del diagrama de Moody, partiendo de los datos de rugosidad relativa (ϵ_i/D_i)

Tabla 4. Resultados calculados a partir de las pérdidas supuestas en la primera iteración

Empleando el número de Reynolds hallado y la rugosidad relativa (ϵ/D) para cada rama es posible refinar el valor de f ; sin embargo, los números de Reynolds encontrados son bastante altos (tabla 4) y se acercan a la turbulencia completa, de tal manera que f mantiene los mismos valores para iteraciones sucesivas.

Verificando la continuidad se encuentra que hay un delta de Q residual, que significa que el flujo de entrada es mayor que el de salida; esto es,

$$1.380 - 0.278 - 0.811 = 0.291 \text{ m}^3/\text{s} \quad (5)$$

Si para la próxima iteración se supone,

$$z_J + \frac{P_J}{\gamma} = 24.6 \text{ m} \quad (6)$$

Las pérdidas por fricción sobre cada rama se presentan en la tabla 5.

Tramo	Elevación del tanque [m] z_i	Elevación de la altura motriz supuesta [m] $z_J + \frac{P_J}{\gamma}$	Pérdidas por fricción [m] (hf)
1	30	24,6	5,4
2	18	24,6	6,6
3	9	24,6	15,6

Tabla 5. Pérdidas por fricción determinadas como la diferencia entre la altura de cada tanque y la elevación de la línea de altura motriz supuesta para la segunda iteración

En la tabla 6 se presenta un resumen de los resultados de velocidad, caudal y número de Reynolds, calculados a partir de las pérdidas supuestas de la tabla 4.

Tramo	f_i^*	hf_i	V_i [m/s]	Q_i [m ³ /s]	$N_R = \frac{VD}{\nu}$
1	0,014	$5,4 = f_1 \frac{3000}{1} \left(\frac{V_1^2}{2g} \right)$	1,588	1,247	1770345,6
2	0,024	$6,6 = f_2 \frac{600}{0,45} \left(\frac{V_2^2}{2g} \right)$	2,011	0,320	1008862,9
3	0,020	$15,6 = f_3 \frac{1000}{0,6} \left(\frac{V_3^2}{2g} \right)$	3,029	0,856	2026087,0

Tabla 6. Resultados calculados a partir de las pérdidas supuestas en la segunda iteración

Al verificar la continuidad se encuentra que aún existe un delta de Q residual que indica que el flujo de entrada todavía es mayor que el de salida ($0,071 \text{ m}^3/\text{s}$ más); esto es,

$$1,247 - 0,320 - 0,856 = 0,071 \text{ m}^3/\text{s} \quad (7)$$

Tomando como referencia las alturas motrices supuestas y los caudales residuales, por extrapolación se determina que la elevación de la línea de altura motriz en J para la siguiente iteración es aproximadamente:

$$z_J + \frac{P_J}{\gamma} = 25 \text{ m} \quad (8)$$

Las pérdidas por fricción sobre cada rama se presentan en la tabla 7.

Tramo	Elevación del tanque z_i [m]	Elevación de la altura motriz supuesta [m]	Pérdidas por fricción [m] (hf)
1	30	25	5
2	18	25	7
3	9	25	16

Tabla 7. Pérdidas por fricción determinadas como la diferencia entre la altura de cada tanque y la elevación de la línea de altura motriz supuesta para la tercera iteración

En la tabla 8 se presenta un resumen de los resultados de velocidad, caudal y número de Reynolds, calculados a partir de las pérdidas supuestas de la tabla 7.

Tramo	f_i^*	hf_i	V_i [m/s]	Q_i [m ³ /s]	$N_r = \frac{VD}{\nu}$
1	0,014	$5,0 = f_i \frac{3000}{1} \left(\frac{V_i^2}{2g} \right)$	1,528	1,200	1.703.447,9
2	0,024	$7,0 = f_i \frac{600}{0,45} \left(\frac{V_i^2}{2g} \right)$	2,071	0,330	1.039.094,5
3	0,020	$16,0 = f_i \frac{1000}{0,6} \left(\frac{V_i^2}{2g} \right)$	3,068	0,868	2.052.297,8

Tabla 7. Resultados calculados a partir de las pérdidas supuestas en la tercera iteración

Para fines prácticos, es posible detener el proceso en la tercera iteración, ya que al verificar la continuidad se encuentra un delta de Q pequeño ($0,002 \text{ m}^3/\text{s}$).

4. Marco teórico⁵ de la solución numérica con Ansys

En este apartado se presentan algunas definiciones básicas de la formulación matricial del elemento finito con que se modela el problema.

4.1 Elemento FLUID116

Es un elemento tridimensional con capacidad para modelar conducción de calor y transporte de fluidos entre dos nodos primarios I-J (figura 2). En este trabajo sólo se emplea la opción de flujo, luego cada nodo poseerá un solo grado de libertad (la presión). La tubería se idealiza con elementos FLUID116 y los tanques con tramos cortos de cabeza de bombeo constante.

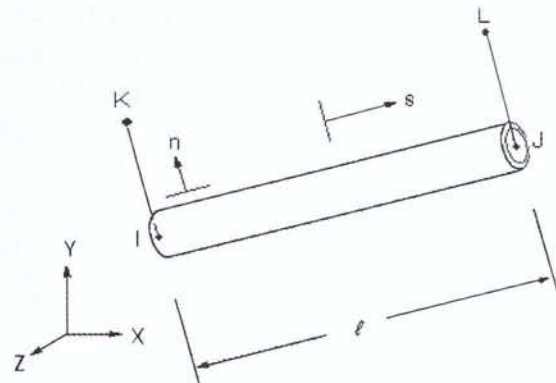


Figura 2. Elemento finito FLUID116 [2]

4.2 Ecuaciones básicas

Con *FLUID116* es posible trabajar temperatura y presión. Dado que el interés de este trabajo es resolver sólo el problema de flujo, a continuación se presenta la ecuación de equilibrio simplificada para el sistema; la ecuación de equilibrio completa presenta mayores complejidades, debido a la presencia de los términos de acoplamiento y temperatura.

⁵ Referenciado del manual de teoría del programa.

La ecuación básica del problema tiene la forma:

$$[K_p]\{P\} = \{W\} + \{H\} \quad (9)$$

En (9), $[K_p]$ = matriz de conductividad de presión para un canal de flujo

$\{P\}$ = vector de presión nodal

$\{W\}$ = vector de flujo de fluido nodal

$\{H\}$ = vector de efectos de gravedad y bombeo para un canal de flujo.

4.3. Funciones de forma

La función de forma empleada para la interpolación de la variable principal (presión) es:

$$P = \frac{1}{2}(P_1(1-s) + P_2(1+s)) \quad (10)$$

En (10), P = presión en cualquier punto del elemento

s = coordenada natural en dirección axial.

4.4. Ecuaciones de fluidos

Antes de describir la estructura matricial de los términos de la ecuación básica (9) deben conocerse los principios de la mecánica de fluidos que les dan origen. Partiendo de la ecuación de energía planteada entre los nodos I y J (figura 2), se tiene:

$$Z_I + \frac{P_I}{\gamma} + \frac{V_I^2}{2g} + \frac{P_{PMP}}{\gamma} = Z_J + \frac{P_J}{\gamma} + \frac{V_J^2}{2g} + C_L \frac{V_a^2}{2g} \quad (11)$$

En (11): Z = coordenada en la dirección negativa de la aceleración

$$\gamma = \rho g$$

P_{PMP} = presión de bombeo

C_L = coeficiente de pérdida definido como,

$$C_L = \frac{f \ell}{D} + \hat{a} \ell$$

$$\hat{a} = \begin{cases} \frac{f \ell_a}{D \ell} \\ \text{ó} \\ \frac{k}{\ell} \end{cases}$$

β = factor de pérdidas menores; ℓ_a = longitud adicional equivalente para pérdidas menores; k = coeficiente de pérdida para accesorios típicos; f = factor de fricción de Moody

Para la primera iteración del primer paso de carga el factor de fricción se define como:

$$f = \begin{cases} f_m & \text{si } f_m \neq 0.0 \\ 1.0 & \text{si } f_m = 0.0 \end{cases} \quad (f_m = \text{factor de fricción constante})$$

Para las iteraciones subsecuentes, como cualquiera de las siguientes opciones:

$$f = \begin{cases} f_x \\ f_m \\ \text{definido por tabulación} \end{cases}$$

Para tubería lisa, la correlación empírica es:

$$f_x = \begin{cases} \frac{64}{Re} & 0 < Re \leq 2500 \\ \text{ó} \\ \frac{0.316}{(Re)^{1/4}} & 2500 < Re \end{cases}$$

La ecuación de energía puede simplificarse, puesto que el área de la sección transversal no cambia. Por tanto, la continuidad exige que las velocidades no varíen a lo largo de la longitud. Por ello, y la ecuación de energía se reduce a:

$$Z_I - Z_J + \frac{P_I - P_J}{\gamma} + \frac{P_{PMP}}{\gamma} = C_L \frac{V^2}{2g} \quad (12)$$

re-creaciones

Escribiendo esta expresión en términos del flujo másico ($w = \rho AV$) y reorganizando términos para igualar a la segunda mitad de la ecuación de partida (11) se tiene:

$$\frac{2A^2\rho}{C_L}(P_I - P_J) = w^2 + \frac{2gA^2\rho^2}{C_L} \left(-Z_I + Z_J - \frac{P_{PMP}}{\gamma} \right) \quad (13)$$

Puesto que la caída de presión ($P_I - P_J$) está relacionada no linealmente con el flujo (w), se requiere una solución no lineal. Dado que el término w puede no ser cuadrático en la solución, utilizando una vía heurística se calcula la raíz cuadrada de todos los términos.

$$A\sqrt{\frac{2\rho}{C_L}}\sqrt{P_I - P_J} = w + A\sqrt{\frac{2\rho}{C_L}} \left((-Z_I + Z_J)\rho g - P_{PMP} \right) \quad (14)$$

definiendo: $B_c = A\sqrt{\frac{2\rho}{C_L}}$

y, $P_L = (-Z_I + Z_J)\rho g - P_{PMP}$,

En la expresión (14), la gravedad, $g = \{a_i\}\{\Delta x\}$, se define como, siendo: $\{a_i\}$ = vector de aceleración translacional; $\{\Delta x\}$ = vector desde el nodo I al nodo J.

La expresión (14) se reduce a:

$$B_c\sqrt{P_I - P_J} = w + B_c P_L \quad (15)$$

Nótese de las expresiones (9) y (15), que la matriz de conductividad de presión $[K_p]$ está basada en el término

$$\frac{B_c}{\sqrt{P_I - P_J}}$$

El vector de carga de presión (gravedad y bombeo) $\{H\}$ está basado en el término $B_c P_L$.

En la expresión (15), B_c se denomina coeficiente de conductancia y se puede definir como:

$$B_c \begin{cases} A\sqrt{\frac{2\rho}{C_L}} \Rightarrow A\sqrt{\frac{2\rho}{\frac{f\ell}{D} + \beta\ell}} \\ \text{una constante} \\ \text{una propiedad a partir de una tabulación} \end{cases}$$

4.5. Definición de la matriz de conductividad del fluido $[K_p]$ y el vector de efectos de gravedad y bombeo $\{H\}$

La matriz de conductividad de presión está dada por:

$$K^P = G_n \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde, G_n = coeficiente de flujo de fluido.
 n = número de iteración.

El coeficiente de flujo de fluido se considera en la relación no lineal existente entre la caída de presión y el flujo:

$$w = B_c\sqrt{P_{I,n} - P_{J,n}} \quad (17)$$

donde, $P_{I,n}$ = presión en el nodo I en la iteración n ;
 B_c = coeficiente de conductancia descrito en la expresión (14),

Dado que todas las ecuaciones resueltas son lineales, la relación expresada en la ecuación (17) debe ser rescrita como:

$$w = \frac{B_c}{\sqrt{|P_{I,n} - P_{J,n}|}} (P_{I,n} - P_{J,n}) \quad (18)$$

Entonces el término G_n de la expresión (16) tiene la forma:

$$G_n = \frac{B_c}{\sqrt{|P_{I,n} - P_{J,n}|}} \quad (19)$$

En general, P_1 y P_J no son conocidos, así que para la primera iteración G_1 se define como:

$$G_1 = B_c \quad (20)$$

Para la segunda iteración:

$$G_2 = \frac{B_c}{\sqrt{|P_{1,1} - P_{J,1}|}} \quad (21)$$

Para la tercera iteración la forma es:

$$G_3 = \frac{B_c \sqrt{|P_{1,1} - P_{J,1}|}}{(P_{1,2} - P_{J,2})} \quad (22)$$

La forma G_n se alterna entre las dos formas antes descritas, expresiones (21) y (22), hasta alcanzar la convergencia, de tal manera que en la próxima iteración, G_4 , es:

$$G_4 = \frac{B_c}{\sqrt{|P_{1,3} - P_{J,3}|}} \quad (23)$$

El vector de efectos de gravedad y bombeo es:

$$\{H\} = \begin{Bmatrix} H_n \\ -H_n \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (24)$$

El coeficiente H_n está definido por:

$$H_n = G_n \rho (g_x (X_j - X_i) + g_y (Y_j - Y_i) + g_z (Z_j - Z_i) - H_{PMP} g_c) \quad (25)$$

En (25), G_n = coeficiente en la matriz de conductividad de presión;

g_i = aceleración en la dirección global i ;

X_i, Y_i, Z_i = coordenadas globales cartesianas del nodo i ;

H_{PMP} = cabeza de bombeo.

Nótese que g_i es un término que indica aceleración, mientras que g_c se usa sólo para conversión de unidades de la cabeza de bombeo.

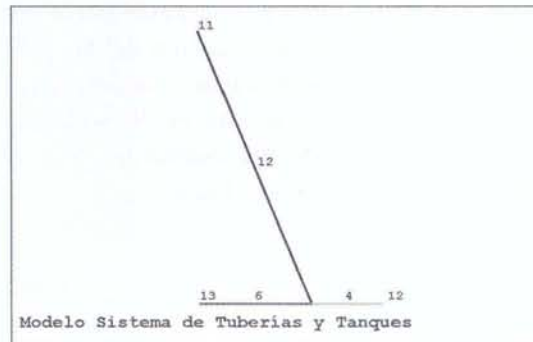
5. Resultados de la formulación numérica con Ansys

En la gráfica 1 se presenta la configuración de la malla de elementos finitos *FLUID116*, que consta de seis elementos. En la tabla 9 se relacionan los componentes del sistema de la figura 1 con los elementos del modelo en Ansys.

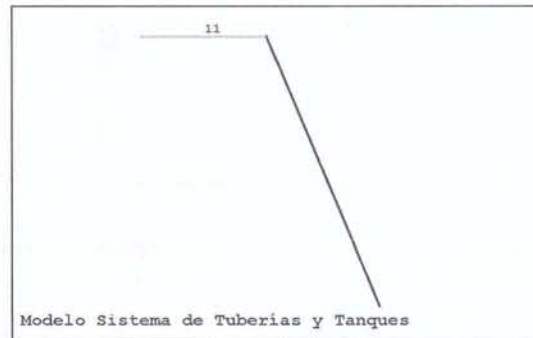
Elemento finito (figura 3)	Componente sistema (figura 1)
2	Rama 1
4	Rama 2
6	Rama 3
11	Tanque 1
12	Tanque 2
13	Tanque 3

Tabla 9. Elementos del modelo en Ansys

Dado que los tanques son idealizados por tramos muy cortos, en la gráfica 2 se muestra un detalle del tanque 1 representado por el elemento 11.



Gráfica 1. Malla de elementos finitos del sistema



Gráfica 2. Detalle del elemento 11. (Tanque 1)

re-creaciones

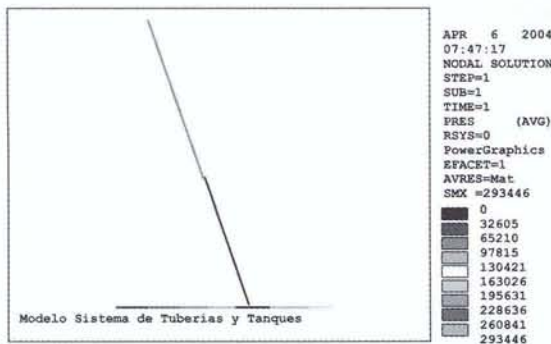
Las conectividades entre los nodos del modelo de elementos finitos se relacionan en la tabla 10. En ella se observa que el nudo J en la figura 1 (punto de encuentro de los tres tramos) corresponde al nudo 3.

Elemento	Nodo inicial	Nodo final
2	6	3
4	4	3
6	2	3
11	7	6
12	5	4
13	1	2

Tabla 10. Conectividades entre los elementos

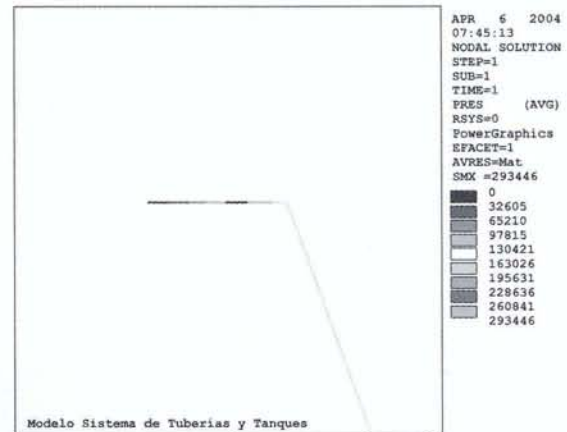
A continuación, se muestra la solución de presiones en el sistema⁶. Las otras variables (velocidad, flujo másico, caudal y número de Reynolds) se calculan a partir de ésta. De acuerdo con la escala de colores, en la gráfica 3 se observa que la presión en el nodo 3 (Nudo J) se encuentra en el rango de 228.236 y 260.841 Pascales. Ello indica que la línea piezométrica en J se encuentra entre 23,33 y 26,67 m. Este rango está de acuerdo con la elevación de la línea de altura motriz supuesta en la solución de tuberías ramificadas de la tabla 6.

En la gráfica 4 se observa que en el extremo izquierdo del elemento 11 (representación del tanque 1) existe presión cero (condición de superficie libre) y en el extremo derecho la presión es 293.446 Pascales (equivalentes a 30 m de columna de agua), que representan la elevación del Tanque 1.



Gráfica 3. Línea piezométrica. [unidades de presión]

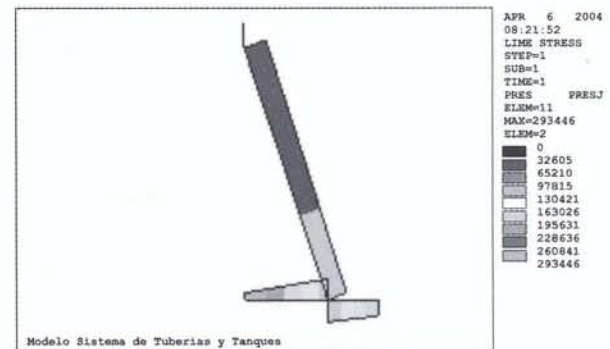
⁶ La presión es la variable primaria del problema obtenida a través de la formulación no lineal del fenómeno. Los resultados de presión que presenta el programa, corresponden realmente a la suma de la cabeza de elevación y la cabeza de presión.



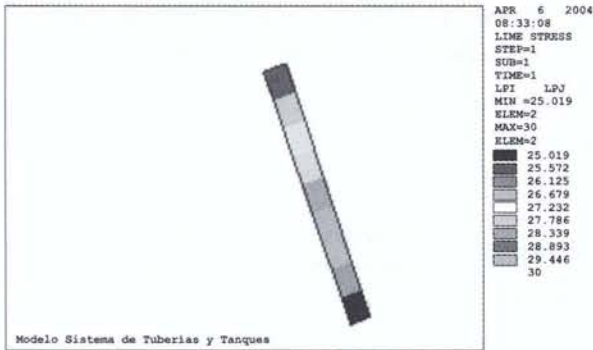
Gráfica 4. Detalle línea piezométrica. [unidades de presión]

La gráfica 5 presenta la línea piezométrica por medio de isocontornos, que ilustran el sentido de la pendiente. Así es posible determinar el sentido real de los flujos en cada uno de los tramos que componen la red. Sabiendo que el agua siempre fluye en el sentido decreciente de la línea piezométrica, a partir de la gráfica 1 puede decirse que $Q_2 = Q_4 + Q_6$ (ecuación de continuidad). De acuerdo con la figura 1, $Q_1 = Q_2 + Q_3$ (ecuación 4).

Realizando un cálculo paramétrico es posible obtener el valor de la línea piezométrica a partir de la presión en cada tramo de la red. En la gráfica 6 se muestran los valores extremos de la línea piezométrica en el elemento 2. El valor de 30 m. indica la elevación del tanque 1, y el valor de 25,019 m la elevación de la línea piezométrica en J.

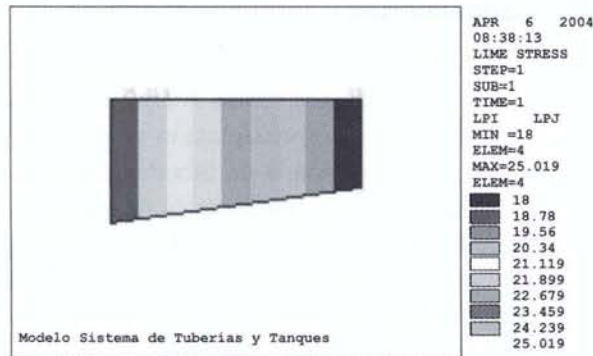


Gráfica 5. Isocontornos línea piezométrica [unidades de presión]

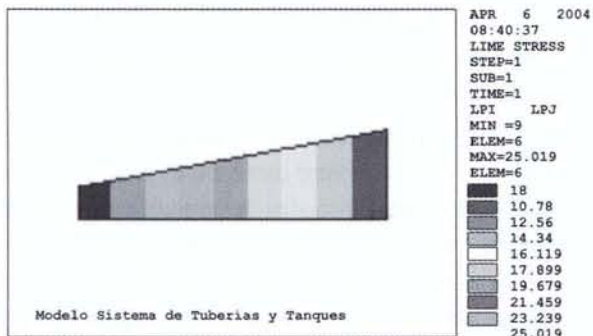


Gráfica 6. Línea piezométrica elemento 2 [metros]

Asimismo, en las gráficas 7 y 8 se observan valores de 18,0 y 9,0 m, que indican la elevación de los tanques 2 y 3, respectivamente. El valor de 25,019 m. corresponde a la elevación de la línea piezométrica en el nudo común J.



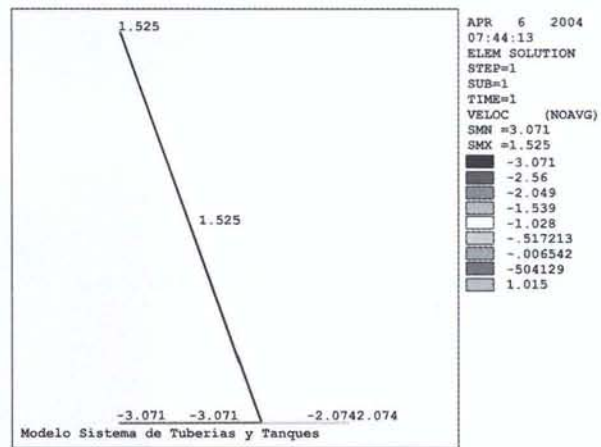
Gráfica 7. Línea Piezométrica elemento 4 [metros]



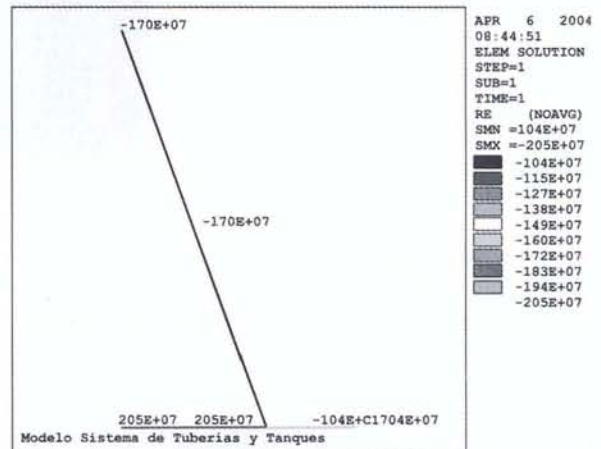
Gráfica 8. Línea Piezométrica elemento 6. [metros]

La solución de velocidad en los tramos se presenta en la gráfica 9. Los signos indican la correspondencia (+) o no correspondencia (-) del sentido del flujo con la conectividad del elemento (tabla 10).

La gráfica 10 presenta el valor del número adimensional Reynolds en cada tramo. Con base en los altos valores obtenidos se concluye que el flujo en todos los tramos es turbulento ($Nr > 4000$).



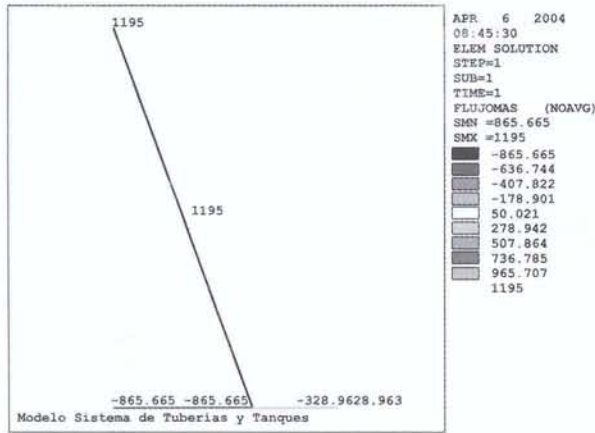
Gráfica 9. Velocidad en el sistema



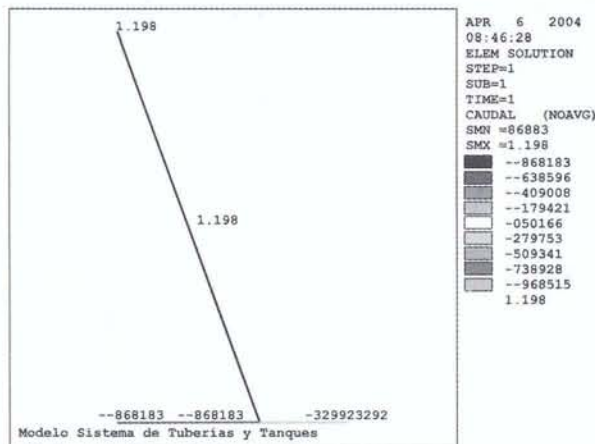
Gráfica 10. Número de Reynolds del sistema

En la gráfica 11 se presentan los resultados de flujo másico. Al igual que en las velocidades, la convención de signos depende de la conectividad de los elementos. Se observa que la suma algebraica

de los valores de flujo en el nudo común J (nodo 3 del modelo de elementos finitos) cumple con la ecuación de continuidad.



Gráfica 11. Resultado del flujo másico en los tramos del sistema



Gráfica 12. Resultado del caudal en los tramos del sistema

En la gráfica 12 se observa el resultado del cálculo paramétrico del caudal, obtenido a partir de los valores de flujo másico en el sistema. La convención de signos es la misma de la velocidad y del flujo. Nótese que la suma algebraica de los valores de caudal cumple nuevamente con la ecuación de continuidad, como ocurre con los de flujo.

6. Comparación de resultados entre la solución de referencia y Ansys

En la tabla 11 se resumen los resultados obtenidos de la solución aproximada de tuberías ramificadas y la numérica con elementos finitos de Ansys.

Propiedad	Tuberías ramificadas	ANSYS (FLUID116)	% Variación
V_1 (m/s)	1,528	1,526	0,13
V_2 (m/s)	2,071	2,074	0,14
V_3 (m/s)	3,068	3,071	0,10
Q_1 (m³/s)	1,200	1,198	0,17
Q_2 (m³/s)	0,330	0,330	0,00
Q_3 (m³/s)	0,868	0,868	0,00
Nr_1	0,17034479E+07	0,17014E+07	0,12
Nr_2	0,10390945E+07	0,10411E+07	0,19
Nr_3	0,20522978E+07	0,20548E+07	0,12
$z_J + \frac{P_J}{\gamma}$ (m)	25	25,019	0,08

Tabla 11. Comparación de resultados

7. Conclusiones y recomendaciones

- Los resultados obtenidos con el programa comercial de elementos finitos Ansys presentan un buen grado de aproximación respecto de la solución aproximada de tuberías ramificadas, dados los bajos porcentajes de variación obtenidos (inferiores al 1%). Esto garantiza la efectividad del modelo utilizado y otorga confiabilidad a los valores encontrados para las variables primarias y secundarias.
- El análisis realizado con el programa demuestra la gran versatilidad y eficiencia que puede obtenerse en el preproceso, solución y posproceso de un sistema cualquiera de tuberías y tanques. Los bajos porcentajes de variación así lo indican.
- La utilización de este método de solución implica ciertas ventajas. Entre otras, no es necesario introducir valores iniciales de caudales supuestos ni estar atento de la continuidad, como sí debe hacerse en el clásico método de Hardy-Cross. Estos aspectos conllevan a que el preproceso de una malla grande sea más ágil y menos susceptible al error humano.

- Antes de cargar un modelo de estas características es recomendable contar con un modelo

conceptual claro de lo que quiere analizarse con fines de diseño o de decisión ingenieril.

Referencias bibliográficas

- | | |
|--|--|
| [1] Aho, A. V. E. Hopcroft, J. D. Ullman. (1974). <i>The Design and Analysis of Computer Algorithms</i> . Editorial Addison Wesley. | [8] Munson, Bruce R., Young, Donald F., Okiishi, Theodore H. (2002). <i>Fundamentos de Mecánica de Fluidos</i> . Ed. Limusa, México. |
| [2] <i>Ansys User Manual / Revision 5.0</i> . Swanson Analysis Systems, Inc. Houston. | [9] Potter, Merle C., Wiggert, David C. (2002). <i>Mecánica de fluidos</i> . Ed. Thomson, México. |
| [3] Franzini J. B., Finnemore J. (1999). <i>Mecánica de fluidos con aplicaciones en ingeniería</i> . Editorial McGraw-Hill Interamericana, Madrid. | [10] R. Burden & Faires. (1998). <i>Análisis numérico</i> . Ed. Thompson Internacional, México. |
| [4] Gear, C. W. (1971). <i>Numeric Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations</i> . Ed. Prentice Hall, New York. | [11] Saldarriaga, Juan G. (1998). <i>Hidráulica de tuberías</i> . Ed. McGraw-Hill Interamericana, México. |
| [5] Giles R., Evett J., Liu C. (1994). <i>Mecánica de los fluidos e hidráulica</i> . Ed. McGraw-Hill Interamericana, Madrid. | [12] Smits, Alexander J. (2003). <i>Mecánica de fluidos, Una introducción física</i> . Ed. Alfaomega, México. |
| [6] Mathews. (2000). <i>Métodos numéricos con Matlab</i> . Ed. Pearson, México. | [13] Sotelo G. (1999). <i>Hidráulica general</i> . Ed. Limusa, México. |
| [7] Mott R.L. (1996). <i>Mecánica de fluidos aplicada</i> . Ed. Prentice-Hall Hispanoamericana, México. | [14] Streeter V.L., Wylie B. (2000). <i>Mecánica de fluidos</i> . Ed. McGraw-Hill Interamericana, México. |
| | [15] White F. (1994). <i>Fluid Mechanics</i> . Ed. McGraw Hill, Inc., New York. |
| | [16] Zienkiewicz, O. C. y Taylor, R. L. (1994). <i>El método de los elementos finitos</i> . Ed. Mc. Graw-Hill, Barcelona. |