

Control de un péndulo invertido simple por metodos de realimentación de estados

Control of a simple inverted pendulum by state feedback methods

CAMILO A. SANABRIA T.

Ingeniero Electrónico con grado de honor en ingeniería de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC), estudiante de Maestría en Ingeniería Electrónica Universidad Javeriana, docente Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, integrante Grupo de Robótica GIRA-UPTC, Correo electrónico: camilo.sanabria@uptc.edu.co.

OSCAR M. HERNÁNDEZ G.

Ingeniero Electrónico de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC), especialista en Automatización Industrial Universidad Nacional de Colombia, estudiante de Maestría en Ingeniería Electrónica Universidad Javeriana, docente Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, integrante Grupo de Procesamiento de Señales DSP-UPTC, Correo electrónico: oscar.hernandez@uptc.edu.co.

Clasificación del artículo: Investigación (conciencias)

Fecha de recepción: 14 de agosto de 2009

Fecha de aceptación: 26 de noviembre de 2009

Palabras claves: Control, observador de estados, péndulo invertido simple, realimentación de estados.

Key words: Control, states observer, simple inverted pendulum, states feedback.

RESUMEN

Este artículo presenta el modelo por medio de dinámica de Lagrange de un péndulo invertido simple, que es controlado con las técnicas de realimentación de estados tipo regulador y servomecanismo. Se presentan los diseños de los controladores y de un observador de estado usado en el funcionamiento práctico de la planta IP02 de la compañía Quanser. La comprobación de los diseños se realiza por medio del software Simulink de Matlab, por lo cual se implementan en la planta mencionada. Además, se realiza una comparación del controlador propuesto mediante el uso del índice de desempeño de la integral de error, con un control LQR dado por el fabricante del péndulo.

ABSTRACT

This article shows a single Inverted pendulum modeled by mean of Lagrange dynamic, the pendulum is controlled with a regulator state feedback and servomechanism techniques. The controllers and states observer design and its use in a practical situation on the IP02 pendulum of QUANSER Company are shown. The development designs are evaluated by mean of SIMULINK of MATLAB, and physically implemented on the mentioned pendulum. The error integral performance index comparison between the purposed controller and an LQR developed by Quanser is depicted.

1. Introducción

Las técnicas de control moderno han sido ampliamente utilizadas en diferentes tipos de plantas, entre las que se encuentra el péndulo invertido simple. El presente artículo muestra el modelado para la obtención del espacio de estados realizado al péndulo invertido simple IP02 de la compañía Quanser [4], sobre el que se diseñan controladores por realimentación de estados tipo regulador y servomecanismo [3], incorporándose al último controlador el diseño de un observador de estados a fin de comparar la respuesta simulada de la planta, cuando sus variables de estado son estimadas y cuando son encontradas mediante derivación y filtraje en forma directa. El control de realimentación de estados diseñado, se compara con un control LQR [5] planteado por la empresa Quanser.

2. Descripción de la planta

En la Figura 1 se presenta el carro para el movimiento del péndulo invertido simple IP02 de Quanser; éste se desliza sobre un riel, por medio de un piñón acoplado a un motor DC, su posición es sensada por medio de un encoder incremental que está acoplado a un segundo piñón para tal labor. El ángulo del péndulo es sensado con otro encoder óptico incremental el cual no genera ningún tipo de fricción a la barra del péndulo. Adicionalmente la planta posee un módulo universal de potencia para la alimentación del motor.

La interfaz con el control se realiza por medio de una tarjeta universal de conectores MultiQ4-PCI, que sirve de interfaz entre Simulink de Matlab y la planta [4].

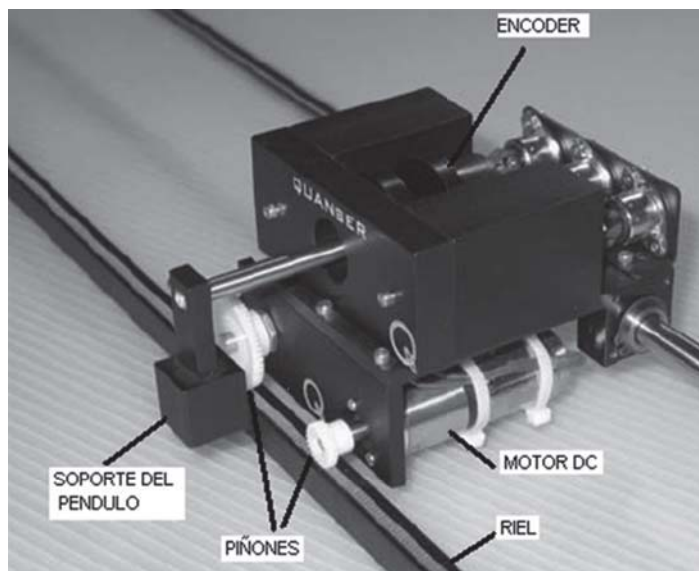


Figura 1. Carro para el movimiento del péndulo]

3. Modelamiento de la planta

La literatura sobre el modelado del péndulo invertido es muy abundante, por lo cual se encuentran modelos basados tanto en técnicas de dinámica de Lagrange [1], como en leyes de Newton [3]. Para este caso se presenta un modelo basado en

dinámica de Lagrange. En la Figura 2 se ilustra un diagrama esquemático del péndulo en el que se presentan las variables usadas para la obtención del modelo.

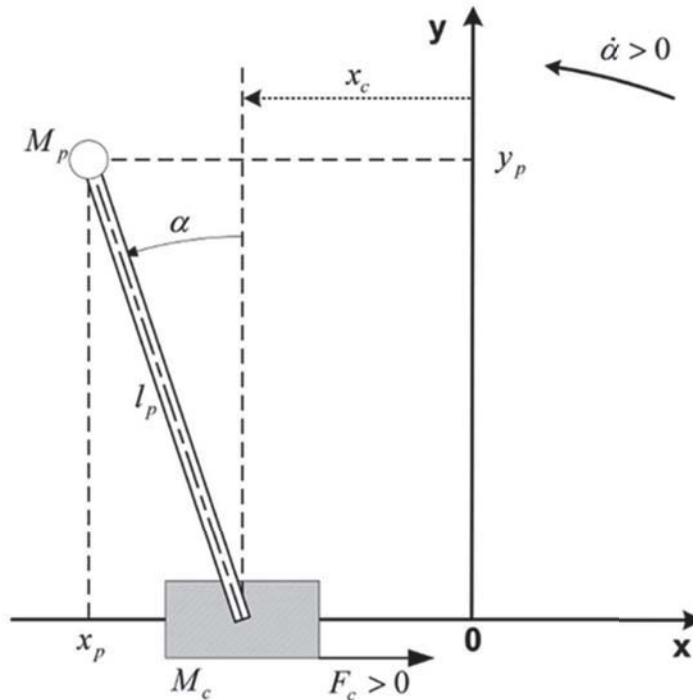


Figura 2. Esquemático y variables para el modelo del péndulo

Las variables más representativas del péndulo son:

- α : ángulo con respecto al eje.
- l_p : longitud.
- M_p : masa.
- X_p : posición de la masa a lo largo del eje.
- X_c : posición del carro con respecto al origen.

En el modelo se designan como variables de estado la posición del carro (X_c) y el ángulo (α) del péndulo. La posición del centro de gravedad de la barra del péndulo con respecto a los ejes x y y se presenta en las ecuaciones 1 y 2.

$$x_p(t) = x(t) - l_p \sin \alpha(t) \quad (1)$$

$$y_p(t) = l_p \cos \alpha(t) \quad (2)$$

La energía potencial total está dada en la ecuación (3):

$$U = M_p g l_p \cos \alpha(t) \quad (3)$$

La energía cinética total del carro es la suma de la energía traslacional y rotacional debida al motor DC (4)

Donde M es la masa del carro, J_m el momento de

$$K_c = \frac{1}{2} M \dot{x}(t)^2 + \frac{1}{2} \frac{J_m K_g^2}{r_{mp}^2} \dot{x}(t)^2 \quad (4)$$

inercia del rotor, K_g la relación de marcha de la caja planetaria y r_{mp} el radio del piñón del motor. Factorizando y simplificado la ecuación (4) se obtiene la ecuación (5) en la cual M_c corresponde a la masa total del carro.

$$K_c = \frac{1}{2} M_c \dot{x}(t)^2 \quad (5)$$

Ahora la energía cinética total del péndulo está dada en la ecuación (6), donde I_p es el momento de inercia del péndulo.

$$K_p = \frac{1}{2}M_p(\dot{x}(t)^2 - 2l_p\dot{x}(t)\dot{\alpha}(t)\cos\alpha(t) + l_p^2\dot{\alpha}(t)^2) + \frac{1}{2}I_p\dot{\alpha}(t)^2 \quad (6)$$

La energía cinética total del sistema es la suma de la energía del péndulo (K_p) y la del carro (K_c) (7):

$$K = \frac{1}{2}(M_c + M_p)\dot{x}(t)^2 - M_p l_p \dot{x}(t)\dot{\alpha}(t)\cos\alpha(t) + \frac{1}{2}\dot{\alpha}(t)^2 + \frac{1}{2}(M_p l_p^2 + I_p)\dot{\alpha}(t)^2 \quad (7)$$

Para encontrar el modelo se obtiene el Lagrangiano, correspondiente a la energía cinética total menos la energía potencial (8)

$$L = \frac{1}{2}(M_c + M_p)\dot{x}^2 - M_p l_p \dot{x}\dot{\alpha}\cos\alpha + \frac{1}{2}\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}(M_p l_p^2 + I_p)\dot{\alpha}^2 - M_p g l_p \cos\alpha \quad (8)$$

Las ecuaciones de Lagrange respecto a las coordenadas generalizadas se presentan en (9)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = F - B_{eq}\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = -B_p\dot{\alpha} \quad (9)$$

Donde B_{eq} es el coeficiente de amortiguamiento viscoso visto en el piñon del motor y B_p coeficiente de amortiguamiento viscoso visto en el eje del péndulo. Resolviendo las ecuaciones de Lagrange (9) para las segundas derivadas, se tienen las ecuaciones (10).

$$\ddot{x} = \frac{\left[-(I_p + M_p l_p^2)B_{eq}\dot{x} - (M_p^2 l_p^3 + I_p M_p l_p)\sin\alpha\dot{\alpha}^2 - M_p l_p B_p \dot{\alpha}\cos\alpha + M_p^2 l_p^2 g \sin\alpha \cos\alpha + (I_p + M_p l_p^2)F \right]}{(M_c + M_p)I_p + M_c M_p l_p^2 + M_p^2 l_p^2 \sin^2\alpha}$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{\left[(M_c + M_p)M_p l_p g \sin\alpha - (M_c + M_p)B_p \dot{\alpha} - M_p^2 l_p^2 \dot{\alpha}^2 \sin\alpha \cos\alpha - M_p l_p B_{eq}\dot{x}\cos\alpha + M_p l_p \cos\alpha F \right]}{(M_c + M_p)I_p + M_c M_p l_p^2 + M_p^2 l_p^2 \sin^2\alpha} \quad (10)$$

Linealizando alrededor del punto de funcionamiento con $\alpha=0$, $\sin(\alpha)\approx\alpha$, $\cos(\alpha)\approx 1$, las ecuaciones (10) se reducen a:

$$\ddot{x} = \frac{\left[M_p^2 l_p^2 g \alpha - (I_p + M_p l_p^2)B_{eq}\dot{x} - M_p l_p B_p \dot{\alpha} + (I_p + M_p l_p^2)F \right]}{(M_c + M_p)I_p + M_c M_p l_p^2}$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{[(M_c + M_p)M_p l_p g \alpha - M_p l_p B_{eq} \dot{x} - (M_c + M_p)B_p \dot{\alpha} + M_p L_p F]}{(M_c + M_p)I_p + M_c M_p l_p^2} \quad (11)$$

La fuerza del motor se puede expresar en términos de su voltaje aplicado, mediante el análisis del circuito de armadura, de acuerdo con la Figura 3.

Las ecuaciones para la dinámica del motor se presentan en (12).

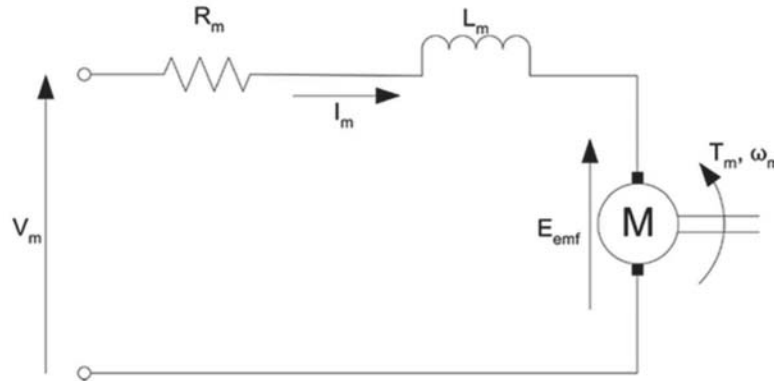


Figura 3. Circuito equivalente para un motor DC

$$F = \frac{n_g K_g T_m}{r_m p}$$

$$T_m = n_m K_t I_m \quad (12)$$

$$I_m = \frac{V - K_m \omega_m}{R_m}$$

Reemplazando T_m e I_m en F se tiene (13):

$$F = \frac{n_g K_g n_m K_t}{r_m p R_m} V - \frac{n_g K_g^2 n_m K_t K_m}{r_m p^2 R_m} \dot{x} \quad (13)$$

Donde:

- n_g : eficiencia Planetaria Gearbox.
- n_m : eficiencia del motor.
- K_m : constante de la fuerza contraelectromotriz.
- K_t : constante de torque del motor.
- R_m : resistencia de armadura del motor.

A partir de la expresión de la fuerza de entrada del sistema en términos del voltaje de entrada de motor, y las ecuaciones linealizadas de las segundas derivadas de la posición del carro y el ángulo de la barra del péndulo, se plantean las ecuaciones de estado presentadas en (14) teniendo en cuenta como variables de estado $z_1 = x, z_2 = \alpha, z_3 = \dot{x}, z_4 = \dot{\alpha}$

$$\dot{z}_1 = z_3$$

$$\dot{z}_2 = z_4$$

$$\dot{z}_3 = \frac{\left[M_p^2 l_p^2 g z_2 - (I_p + M_p l_p^2) \left(B_{eq} + \frac{n_g K_g^2 n_m K_t K_m}{r_{mp}^2 R_m} \right) z_3 - M_p l_p B_p z_4 \right] + (I_p + M_p l_p^2) \frac{n_g K_g n_m K_t}{r_{mp} R_m} V}{(M_c + M_p) I_p + M_c M_p l_p^2} \quad (14)$$

$$\dot{z}_4 = \frac{\left[(M_c + M_p) M_p l_p g z_2 - M_p l_p \left(B_{eq} + \frac{n_g K_g^2 n_m K_t K_m}{r_{mp}^2 R_m} \right) z_3 - (M_c + M_p) B_p z_4 \right] + M_p l_p \frac{n_g K_g n_m K_t}{r_{mp} R_m} V}{(M_c + M_p) I_p + M_c M_p l_p^2}$$

Reemplazando las constantes de la planta en las ecuaciones (14) y ordenando en forma matricial

en $\dot{X} = AX + BU$, se obtiene el espacio de estados del péndulo (15).

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2.1972 & -16.797 & -0.0071 \\ 0 & 27.6669 & -38.7034 & 0.0891 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.206 \\ 5.083 \end{bmatrix} u(t) \quad (15)$$

Donde X es el vector de estados formados por las coordenadas generalizadas y sus primeras derivadas y u(t) es el voltaje de entrada al motor.

4. Diseño del controlador por realimentación de estados

4.1. Control tipo regulador por ubicación de polos

La Figura 4 muestra el diagrama de bloques para un control tipo regulador, el cual consiste en mantener la variable que se desea controlar en referencia cero. Esto se logra realimentando y multiplicando las variables de estado del sistema por medio de un vector de ganancias, siempre y cuando el sistema sea controlable [1], [3].

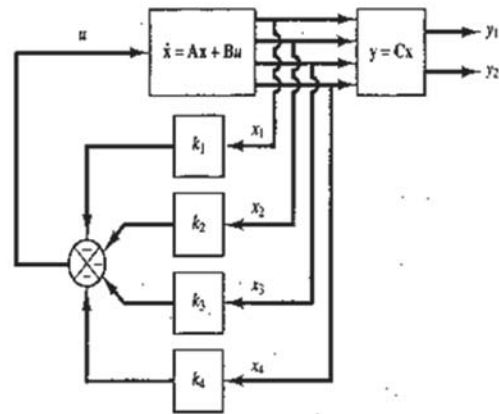


Figura 4. Diagrama de bloques para el control tipo regulador

A partir de la matriz de estados A , se determina el polinomio característico del sistema:

$$P_c = S^4 + 16.8861S^3 - 26.4438S^2 - 379.6803S \quad (16)$$

Cuyos polos se encuentran ubicados en:

$$S_1 = 0, S_2 = 4.8338, S_3 = -4.583638, S_4 = -17.136288$$

Para empezar el diseño como se mencionó anteriormente, se debe verificar la controlabilidad del sistema, determinando el rango de la matriz M (17).

$$M = [B \ AB \ A^2B \ A^3B] \quad (17)$$

La matriz M resulta ser:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -36 & 588 \\ 0 & 5 & -84 & 1479 \\ 2 & -36 & 588 & -9539 \\ 5 & -84 & 1479 & -23982 \end{bmatrix} \quad (18)$$

El rango de (18) es 4, por tanto, el sistema es controlable y se puede continuar con el diseño del control; a partir del polinomio característico del sistema se obtiene la matriz W , siendo:

$$M = \begin{bmatrix} -356.0866 & -26.6641 & 15.9762 & 1 \\ -26.6641 & 15.9762 & 1 & 0 \\ 15.9762 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Como el sistema no se encuentra en la forma canónica controlable [3], se debe determinar la matriz de transformación $T=MW$:

$$M = \begin{bmatrix} -51.4716 & 0.1657 & 2.2772 & 0 \\ 0 & 0.0015 & 5.247 & 0 \\ 0 & -51.4716 & 0.1657 & 2.2772 \\ 0 & 0 & 0.0015 & 5.247 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Para el control en lazo cerrado se elige un coeficiente de amortiguamiento $\rho=0.$, y un tiempo de respuesta $t_r=3s$, que se puede lograr con dos polos dominantes en $-1,53 \pm 1,56i$, los otros dos polos se ubican en -10 y -8 para que no interfieran en la dinámica deseada. Con estos datos se determina el polinomio característico deseado, cuyos coeficientes se muestran en (21).

$$Q = [23.0667 \ 166.125 \ 402.4901 \ 479.1006] \quad (21)$$

Con el polinomio deseado y el característico del sistema se determinan las ganancias del vector de realimentación K tal que:

$$K = [23.0667 \ 166.125 \ 402.4901 \ 479.1006]T^{-1} \quad (22)$$

$$K = [-9.3081 \ 41.2477 \ -14.8249 \ 10.6396] \quad (23)$$

4.2. Control tipo servomecanismo

La Figura 5 muestra el diagrama de bloques para el control tipo servomecanismo, el cual permite el seguimiento de una referencia para la posición del carro; nótese que se ha agregado un integrador y una variable de control más, debido a que el sistema no posee un integrador que corrija el error en estado estacionario.

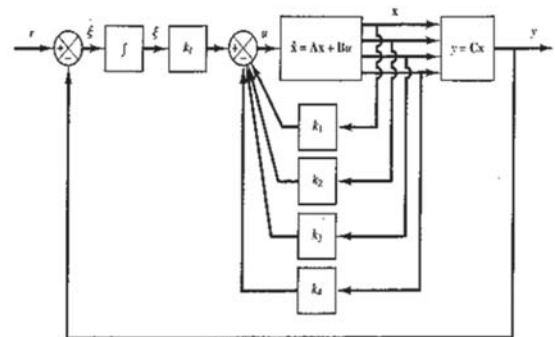


Figura 5. Diagrama de bloques para el control tipo servomecanismo

Para aplicar un procedimiento de diseño similar al control regulador, se definen un nuevo espacio de estados dado en (24), en el que e es un nuevo vector de error.

$$\dot{e} = \Gamma e + \Phi u_e \quad (24)$$

Donde:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$KI = [-90.635 \quad 124.292 \quad -53.5441 \quad 29.5463 \quad -96.0812] \quad (26)$$

Las matrices A y B son las usadas anteriormente; la nueva matriz C se define ahora como:

$$C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

A partir de las definiciones antes dadas, el diseño del servomecanismo se reduce a diseñar un control regulador estable de orden 5 que lleve a cero el vector de error e . La matriz de ganancias tiene la forma presentada en (25).

$$KI = [K \quad -ki] \quad (25)$$

Programando un algoritmo para encontrar KI se obtienen las ganancias deseadas presentadas en (26).

5. Simulación de los controladores tipo regulador y servomecanismo

Las simulaciones de los controladores realizadas por medio de simulink de Matlab, se muestran en la Figura 6 y en la Figura 7. La Figura 6 presenta la respuesta de la posición del carro, el ángulo y la señal de control para el péndulo; ante perturbaciones en las variables de estado, se observa que tanto la posición del carro como el ángulo retornan a su estado cero, sin presentar una señal de control excesiva al motor del péndulo. Para el controlador por servomecanismo o de seguimiento, se aplica una señal de referencia del tipo onda cuadrada a la posición del carro, luego de alcanzado el estado estacionario se perturban las variables de estado tal como se observa en la Figura 7; después de la perturbación, las variables vuelven a seguir la referencia.

6. Verificación y comparación entre controladores

Mediante el uso de simulink y la interfaz de Quanser con la tarjeta de adquisición se realizó la implementación del control sobre la planta real. La respuesta de la posición del carro y el ángulo se muestran en las figuras 8 y 9 para LQR y realimentación de estados respectivamente; en cada una se observa el índice de desempeño del controlador basado en la integral del valor absoluto del error, alcanzándose un índice de 0,18 para realimentación de estados y de 0,32 para LQR. Los índices se explican observando el mayor error en estado estacionario de la Figura 8 con respecto a la Figura 9, lo cual hace que el índice de desempeño sea mayor en LQR que en realimentación de estados, aunque en esta última se presenta oscilación alrededor del setpoint establecido lo que no ocurre con LQR. Los índices de desempeño fueron obtenidos para un tiempo de 30 segundos.

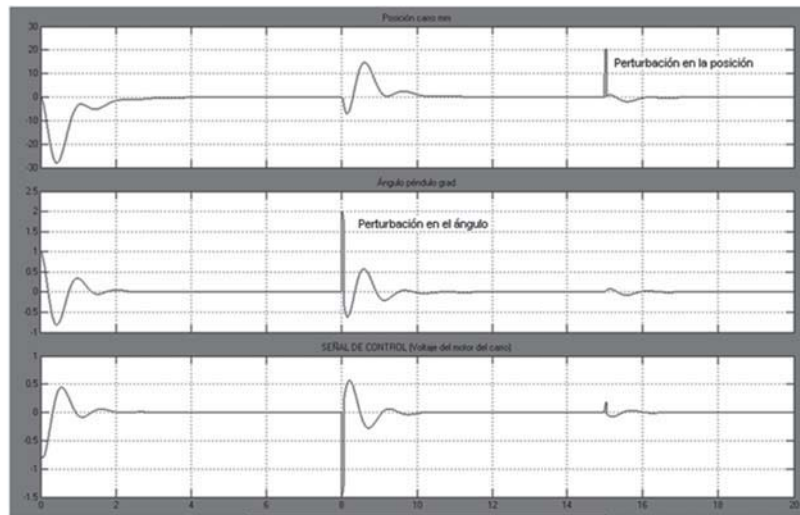


Figura 6. Respuesta de la posición y ángulo del péndulo con el control tipo regulador

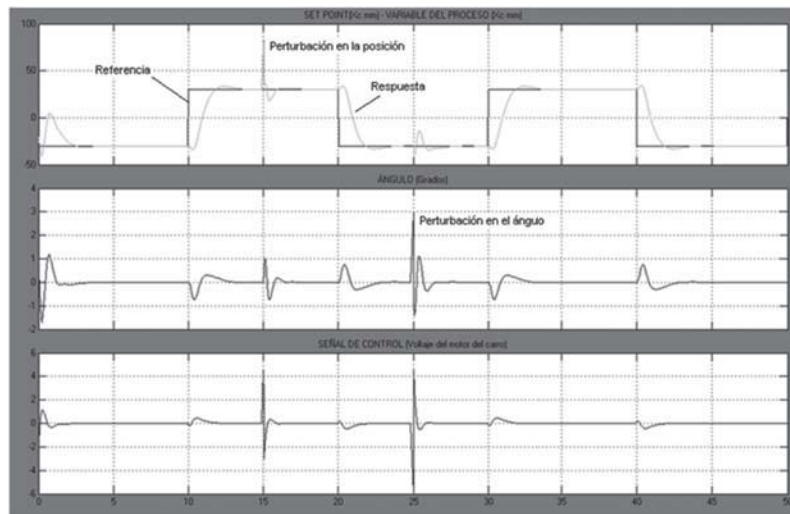


Figura 7. Respuesta de la posición y ángulo del péndulo con el control tipo servomecanismo

7. Diseño de un observador de estado

Con el objetivo de verificar el comportamiento de la planta ante la estimación de sus variables de estado, se diseñó un estimador (observador) para las derivadas de las variables de estado,

las cuales son entregadas por de los sensores de posición del carro y ángulo del péndulo que se encuentran en la planta. Para el diseño del observador, cuyo diagrama de bloques se

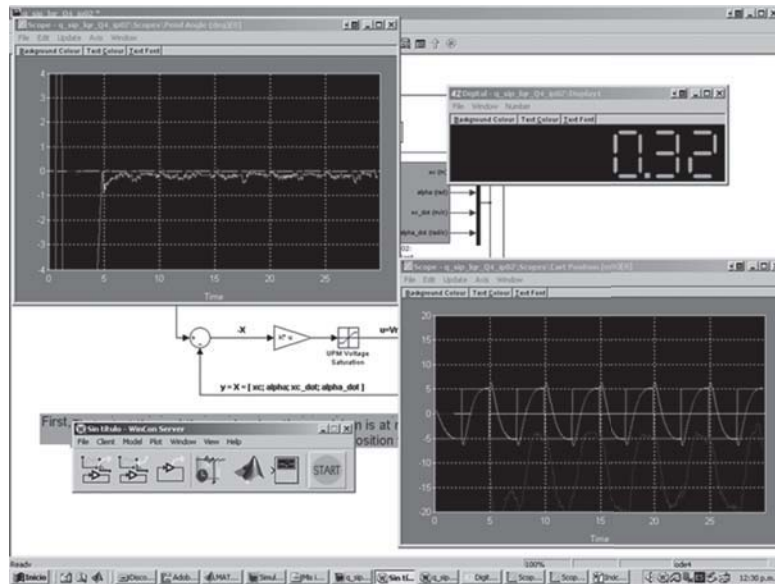


Figura 8. Índice de desempeño para LQR a 30 segundos.

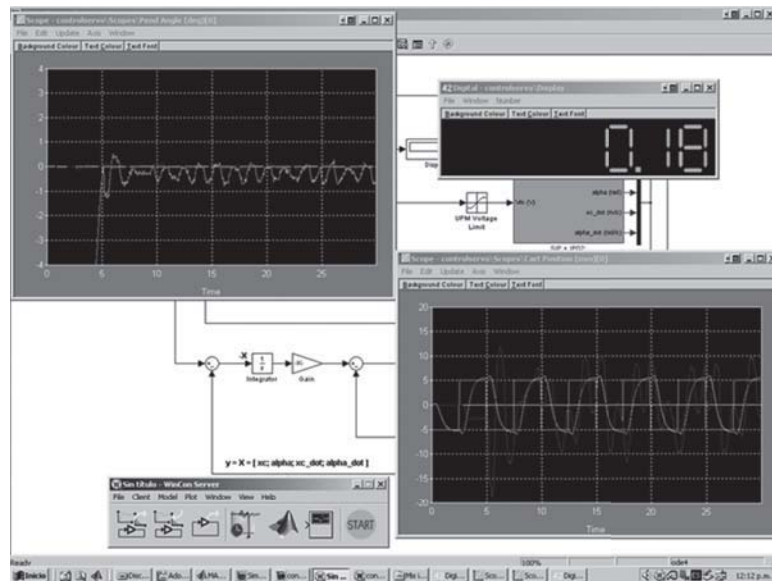


Figura 9. Índice de desempeño para realimentación a 30 segundos

ilustra en la Figura 10 se emplea la función place de matlab, que permite elegir los polos

deseados y entrega la matriz de ganancia de realimentación.

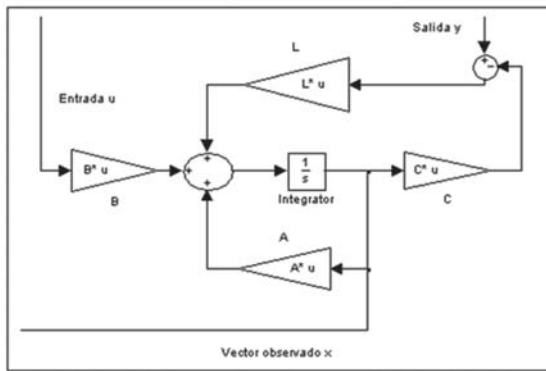


Figura 10. Diagrama de bloques para el observador de estados completo

La ecuación que corresponde al sistema con observador de estados está definida en (27).

$$\dot{x}_i = (A - LC)X_i + Bu + Ly \quad (27)$$

Para el presente caso C es una matriz 2x4, por lo tanto la matriz L buscada para obtener los polos deseados es una matriz 4x2. Los polos deseados para el observador de estado son P1=-200, P2=-220, P3=-20, P4=-25, con los que se obtiene la matriz L mostrada en (28).

$$L = \begin{bmatrix} 221.1 & 1.2 \\ -19.2 & 226.2 \\ 1497.2 & -175.6 \\ -4553.3 & 5222.9 \end{bmatrix} \quad (28)$$

7.1. Respuesta real del observador

Se realizó la implementación del observador en el control de servomecanismo aplicado a la planta. La respuesta obtenida en la planta se presenta en la Figura 11, mostrándose como la posición real del carro sigue la referencia aunque con oscilaciones, lo que prueba el funcionamiento del observador, pero también implica que se debe mejorar éste para corregir de una mejor manera las oscilaciones presentadas. La ubicación del ángulo del péndulo en torno a cero con el observador funcionando, se muestra en la Figura 12.

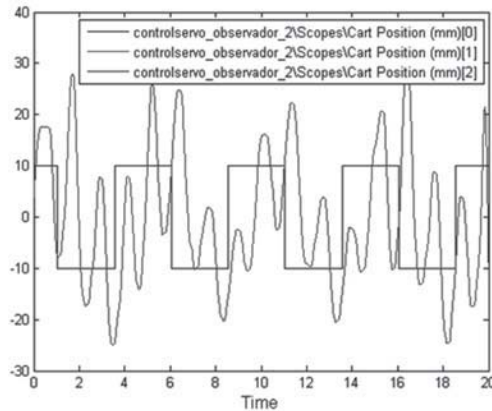


Figura 11. Posición del carro con controlador y observador de estados

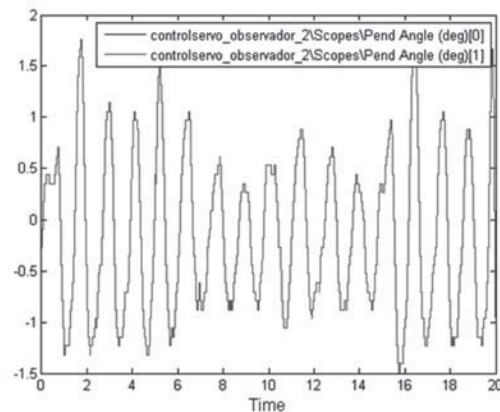


Figura 12. Ángulo del péndulo con controlador y observador de estados

8. Conclusiones

Por medio de la dinámica de Lagrange se obtuvo el modelo de un péndulo invertido simple de la empresa Quanser, sobre el que se diseñaron y comprobaron los controladores por ubicación de polos tipo regulador y por realimentación de estados tipo servomecanismo.

Se comparó el índice de desempeño de un controlador LQR proporcionado por la empresa Quanser y el controlador por realimentación de estados planteado en el artículo, dando como resultado un

índice de desempeño 50% menor en la realimentación de estados que en LQR.

La ubicación del observador de estados en el control tipo servomecanismo, proporcionó una buena

respuesta en cuanto a la posición del carro y el ángulo del péndulo, lo que permitió verificar el correcto funcionamiento del observador de estados diseñado.

Referencias

- [1] C.T. Chen (1999). *Linear system theory and design*. 3 edition.
- [2] X. Chen, H. Zhou and R. Ma (2007). “*Linear motor driven inverted pendulum and lqr controller design*”. IEEE International Conference on Automation and Logistics, 1750 a 1754.
- [3] K. Ogata *Ingeniería de control Moderna*. 3 edition. 1997.
- [4] I.E Quanser. *Linear motion servo plants: Ip01 and ip02*. Document number 503. 2003a.
- [5] I.E Quanser *Single Inverted Pendulum Experiment 5: LQR Control*. Quanser, document number 513 edition, 2003a.
- [6] L. Zhang and Y. Tu. *Research of car inverted pendulum model based on lagrange equation*. 6th World Congress on Intelligent Control and Automation, 820-824. 2006.