

Análisis de filtros con simulink

Analysis of filters with simulink

LIDA BUITRAGO GARCÍA

Licenciada en Matemáticas, Ingeniera Electricista, candidata a Magister en Matemáticas Aplicadas. Docente de la Escuela Tecnológica Instituto Técnico Central. Bogotá, Colombia. lidabg@gmail.com

JUAN ZAMBRANO CAVIEDES

Licenciado en Matemáticas y Física, Especialista en Educación Matemática, candidato a Magister en Matemáticas Aplicadas. Docente de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá, Colombia. jzambranoc@udistrital.edu.co

Clasificación del artículo: Revisión de Tema (recreaciones)

Fecha de recepción: febrero 22 de 2010

Fecha de aceptación: agosto 3 de 2010

Palabras clave: Filtro, Función de transferencia, Frecuencia de corte.

Key words: Filter, Transfer function, Cutoff frequency.

RESUMEN

En este artículo se hace una breve introducción a los filtros electrónicos y se muestra el diseño de un filtro Chebysheva partir de dos formas de trabajo. Una, obteniendo los coeficientes de la función de transferencia a partir de las especificaciones del filtro; la otra, mediante la utilización de los bloques de Simulink, tomando como parámetros de estos las especificaciones de diseño. En la parte final se analizan los resultados obtenidos con filtros diseñados con similares características, utilizando diferentes métodos.

ABSTRACT

This paper briefly introduces electronic filters and the design of a Chebyshev filter is shown from two different working approaches. The first one is designed by obtaining the coefficient of the transfer function taking into account the specification of the filter; the second one, through Simulink blocks whose specific design is used as parameters. Finally, the results obtained by using different approaches on filters with similar characteristics are discussed.

1. Introducción

Generalmente, un sistema digital actúa sobre señales de entrada entregando una salida que tiene modificadas sus propiedades (de amplitud o de fase) en alguna medida; es decir, un sistema actúa como un filtro. En muchas aplicaciones se desea eliminar por completo algunos componentes de frecuencias de una señal o, por el contrario, se desea cambiar las amplitudes relativas de los componentes de frecuencia de esta. A dicho proceso se le conoce como filtrado. Los sistemas lineales e invariantes en el tiempo que cambian la forma del espectro se conocen como filtros conformadores de frecuencia y los que se diseñan con el fin de dejar pasar ciertas frecuencias no distorsionadas y atenuar de manera importante o, porque no, atenuar por completo otras, se conocen como filtros selectivos de frecuencia [1]. Un buen ejemplo de este último tipo de filtros es un sistema de comunicaciones, gracias al cual es posible enviar diferentes clases de información separada por bandas de frecuencia, haciendo necesario utilizar los filtros selectores de frecuencia para separar la información. Este es el caso de las emisoras de radio y canales de televisión.

En este artículo se analizan los efectos de diferentes tipos de filtros selectores de frecuencia, sobre una señal compuesta por 5 señales senoidales de diferentes frecuencias, a la cual se le ha sumado una señal de ruido. Primero se hace una descripción teórica de los filtros electrónicos mostrando cómo se pueden clasificar y los diferentes métodos de diseño.

2. Filtros

2.1. Definición

Un filtro electrónico es un circuito que pretende separar señales según sus frecuencias, las cuales pueden presentar modificaciones de amplitud o fase. Los filtros se pueden clasificar de acuerdo a varios aspectos:

a la ganancia en pasivos o activos, a la frecuencia en pasabajas, pasaaltas, pasabanda o supresor de banda, o al método de diseño, ya sea Butterworth, Chebyshev I y Chebyshev II, Elíptico o Bessel [3].

Los filtros pasivos implementan en su circuito elementos pasivos (condensadores, bobinas y resistencias). Los activos implementan elementos activos y pasivos, y por lo tanto se usan amplificadores operacionales. De acuerdo al tipo de frecuencias que deseen filtrarse se tendrá filtro pasabajas, el cual deja pasar señales con frecuencias menores a una frecuencia establecida, denominada frecuencia de corte; el pasaalta que permite el paso de frecuencias mayores a la frecuencia de corte; un pasabanda que limita las frecuencias a un rango determinado, y el supresor de banda que elimina las señales en un intervalo de frecuencias dado [6][3].

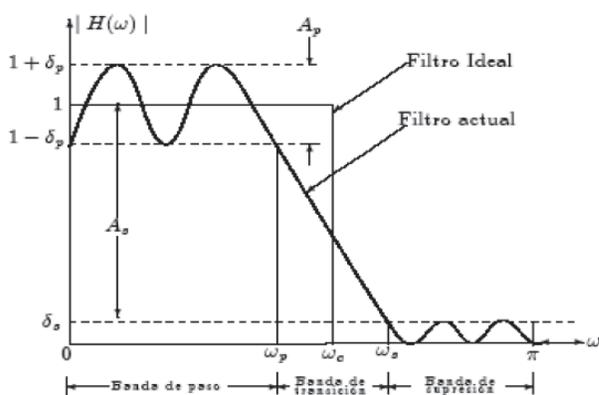


Figura 1. Regiones de paso y supresión.

Las características principales de un filtro electrónico son: su función de transferencia que describe el comportamiento del filtro y el efecto que este tiene en la amplitud y fase de la señal que pasa por él, y el orden, el cual describe el grado de aceptación o rechazo por arriba o por abajo de las frecuencias de corte.

La gráfica de la magnitud de la función de transferencia presenta diferentes regiones llamadas: banda de paso, que es la región del espectro de frecuencias que el filtro permite pasar; banda de transición, que es el intervalo de frecuencias en el cual la magnitud de la función de transferencia se atenúa, y banda de supresión, región de las frecuencias eliminadas. La Figura 1 muestra las diferentes regiones de la función de transferencia del filtro.

La región de transición se hace más angosta o más ancha dependiendo del orden del filtro y del método de diseño elegido, así como del rizado que se presenta en la banda de paso y en la banda de supresión.

3. Métodos de diseño

Cuando se va a diseñar un filtro, sea este pasabajas, pasaltas, pasabandas o supresor de bandas, se pueden utilizar diferentes métodos para aproximar su función de transferencia. Los más conocidos son el de Butterworth, Chebyshev I y II, Elíptico, Bessel. La diferencia entre los métodos de diseño es, básicamente, el tipo de polinomios que se utilizan para aproximar los coeficientes de la función de transferencia. La Tabla 1 muestra la función de transferencia y el polinomio asociado a cada uno de los métodos.

Tabla 1. Función de transferencia de acuerdo al método de diseño.

Método	Función de transferencia	Polinomio
Butterworth	$ H(v) ^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 L_n^2(v)}$	$L_n(v) = v^{2n}$
Chebyshev I	$ H(v) ^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(v)}$	$T_n(v)$ $n > 1$
Chebyshev II	$ H(v) ^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{v^2 T_n^2\left(\frac{1}{v}\right)}}$	$T_n(v)$ $n > 1$
Elíptico	$ H(v) ^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 R_n^2(v, \delta)}$	$R_n(v, \delta)$
Bessel	$H(v) = \frac{1}{Q_n(v)}$	$Q_n(v)$

En donde los polinomios $L_n(v) = v^{2n}$ tienen forma exponencial compleja, como se presenta en la tabla; los $T_n(v) = \cosh(n \cosh^{-1} v)$ son los llamados polinomios de Chebyshev.

Para el caso de los filtros elípticos los polinomios $R_n(v, \delta)$ representan la función racional de Chebyshev, la cual es una función racional de la forma

$\frac{A(v)}{B(v)} = C v^N \prod_{k=1}^{\frac{N}{2}} \frac{v^2 - v_k^2}{v^2 - \frac{B}{v_k^2}}$, donde B y C son constantes tales que $R_n(v, \delta) = 1$ para n par y $R_n(v, \delta) = 0$ para n impar, v_k es la raíz del numerador y $N = 0$ para n par y $N = 1$ para n impar.

En el caso de los filtros de Bessel, la expresión $Q_n(v)$ se denomina polinomio de Bessel y se obtiene mediante la relación de recurrencia $Q_0(v) = 1$, $Q_1(v) = v + 1$ y $Q_n(v) = (2n - 1) Q_{n-1}(v) + v^2 Q_{n-2}(v)$ para $n > 1$ [2].

Cada método de diseño lleva a la determinación de los polos de la función de transferencia, de acuerdo a las especificaciones del filtro.

4. Diseño de los filtros

El siguiente ejemplo muestra el diseño de un filtro pasabajas, utilizando el método de Chebyshev I [4], con frecuencia de corte $\omega_p = 2.500 \text{ rad/s}$ límite de banda de supresión de $\omega_s = 12.500 \text{ rad/s}$, considerando una atenuación en el límite de la banda de paso de $A_p = 0.5 \text{ dB}$ y una atenuación en el límite de la banda de supresión de $A_s = 30 \text{ dB}$. Tomando como valor máximo de la banda de paso, para un filtro prototipo, a $\nu_p = \frac{\omega_p}{\omega_s} = 1$ y como frecuencia de corte $\nu_s = \frac{\omega_s}{\omega_p} = \frac{12.500}{2.500} = 5$, se calcula la medida de rizo, en la banda de paso, mediante la Ec. (1)

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0.1A_p} - 1} = 0,349311 \quad (1)$$

Con este valor se calcula el orden n del filtro, utilizando la Ec. (2)

$$n = \frac{\cosh^{-1}\left(\sqrt{\frac{10^{0.1A_p-1}}{\varepsilon}}\right)}{\cosh^{-1}(\nu_s)} = 2,26759 \approx 3 \quad (2)$$

Ahora se calculan los polos de la función de transferencia, mediante la Ec. (3)

$$\nu_k = -\text{sen}(\theta_k)\text{senh}(\alpha) + j\cos(\theta_k)\cosh(\alpha) \quad (3)$$

$$\text{con, } \theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n}, k = 1, 2, 3 \text{ y } \alpha = \frac{1}{n} \text{senh}^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \nu_{1,2} &= -0,313229 \pm j1,02193 \\ p_a &= -0,626457 \end{aligned} \quad (4)$$

De donde la función de transferencia está dada por la Ec. (5)

$$H(\nu) = \frac{H_0}{\nu^3 + 1,2529\nu^2 + 1,5349\nu + 0,71566} \quad (5)$$

Para calcular la ganancia H_0 , se evalúa la función de transferencia en $\nu = 0$, así:

$$H_0 = 0,715698 \quad (6)$$

Luego la función de transferencia del filtro prototipo para una ganancia de 0 dB está dada por la Ec. (7)

$$H(\nu) = \frac{0,715698}{\nu^3 + 1,2529\nu^2 + 1,5349\nu + 0,71566} \quad (7)$$

Finalmente, para las especificaciones del diseño se sustituye $\nu = \frac{s}{2.500}$, obteniendo la función de transferencia de la Ec. (8)

$$H(s) = \frac{1,1183 \times 10^{10}}{s^3 + 3,1232s^2 + 9,5931 \times 10^6 s + 1,1182 \times 10^{10}} \quad (8)$$

5. Análisis de resultados

El filtro Chebyshev de orden 3 diseñado en la sección anterior fue simulado en Simulink, utilizando como señal de entrada la suma de cinco señales senoidales de diferentes características, más una señal aleatoria (ruido blanco), a las cuales se les ha adicionado una señal constante atenuada mediante la planta representada por la función de transferencia de la Ec. (9)

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 3} \quad (9)$$

El diagrama de bloques correspondiente se puede observar en la Figura 2. En esta fase de la simulación se utilizó el bloque *Transfer fcn*, en donde se colocaron los coeficientes de la función de transferencia del filtro.

La Figura 3 muestra la señal de entrada del filtro, la salida y la señal senoidal con frecuencia inferior a la frecuencia de corte $\omega_s = 12.500 \frac{rad}{s}$. En ella se observa que en la salida no se ha eliminado del todo el ruido, pero si pasa la señal con frecuencia menor a ω_s , en este caso la señal con frecuencia es $\omega_i = 2.000 \frac{rad}{s}$.

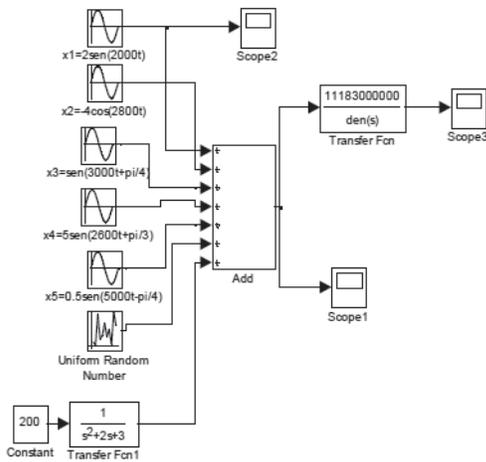


Figura 2. Diagrama de bloques para filtro Chebyshev I de orden 3.

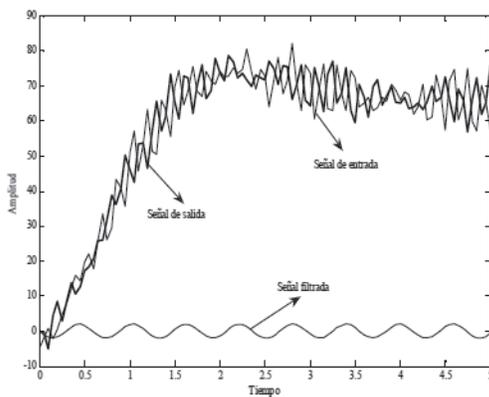


Figura 3. Señales de entrada y salida del filtro Chebyshev I de orden 3.

Tomando como base este modelo y utilizando los mismos criterios de diseño, se realiza la simulación implementando el bloque *AnalogFilterDesign*, para un filtro Chebyshev de tercer orden, con parámetros *passbandedgefrequency* de $2.500 \frac{rad}{s}$ y *passbandripple in* de 0.349311. La Figura 4 presenta los resultados obtenidos para este modelo, donde se observa claramente que los resultados obtenidos en las dos simulaciones son los mismos.

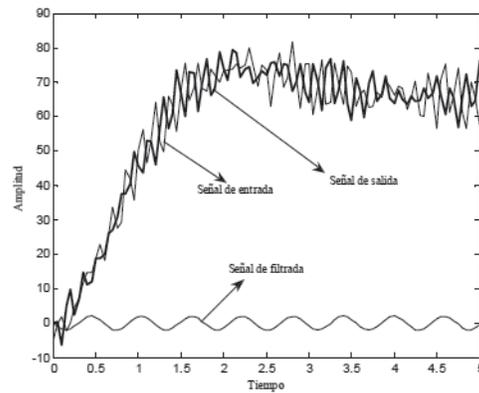


Figura 4. Señales entrada y salida para un filtro Chebyshev de orden 3 utilizando el AnalogFilterDesign.

Ahora se considera un filtro Butterworth de orden 5. En este caso se observa en la Figura 5 que la señal de salida presenta picos más pequeños que en el caso del filtro Chebyshev I.

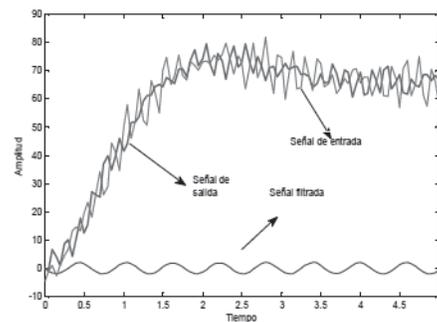


Figura 5. Señales de entrada y salida del filtro Butterworth de orden 5.

Al realizar la simulación con diferentes tipos de filtros con el mismo orden, mediante el modelo en Simulink que se presenta en la Figura 6, se observa que el filtro que mejor elimina el ruido es el diseñado con el método Chebyshev II, lo cual se muestra en la Figura 7, en la cual la línea más suave representa a este filtro.

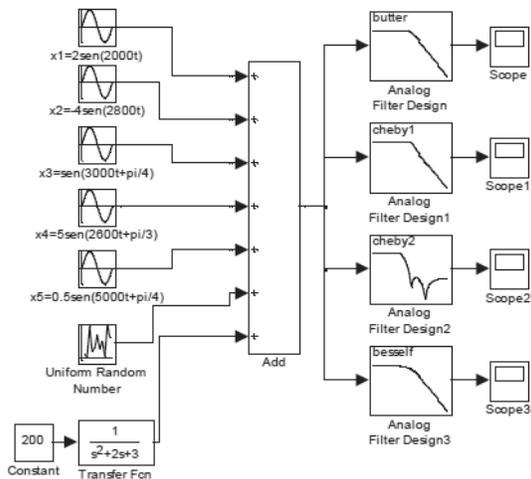


Figura 6. Modelo en Simulink para cuatro filtros de orden 4.

Finalmente se realiza la comparación entre la señal de salida de un filtro Chebyshev I de orden 4 y un Chebyshev I de orden 16. El resultado de esta simulación se observa en la Figura 8.

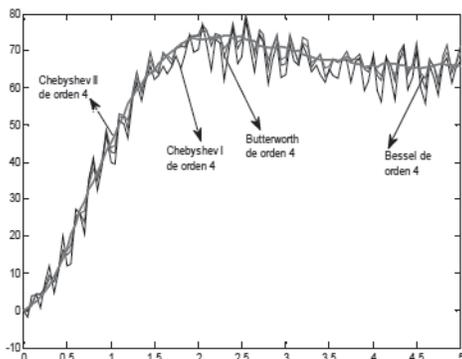


Figura 7. Señales de salida de diferentes filtros de orden 4.

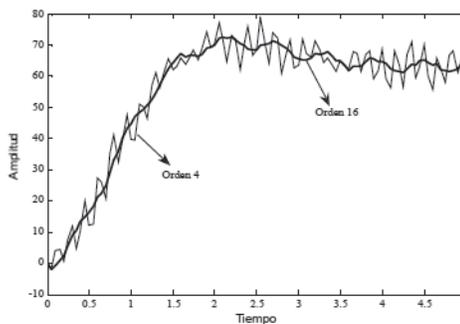


Figura 8. Señal de salida de 2 filtros Chebyshev I (orden 4 y 6).

6. Conclusiones

De acuerdo a los resultados observados en las Figuras 3 y 4, se puede concluir que el diseño de un filtro utilizando los bloques de Simulink es equivalente al diseño mediante la construcción de la función de transferencia, utilizando las herramientas matemáticas.

Una diferencia importante entre el diseño con Simulink y el diseño matemático es que mediante el diseño con bloques no se puede considerar ganancia en la señal de entrada, mientras que en el cálculo de la función de transferencia se puede incluir dicha ganancia.

Observando la Figura 7, se concluye que a mayor orden en el filtro, menor es el rizado que se presenta en la señal filtrada.

Si se requiere disminuir al máximo el rizado en la señal de salida, es adecuado utilizar el método de diseño Chebyshev II.

Referencias bibliográficas

- [1] A. Oppenheim, A. R. Schaffer, *Tratamiento de señales en tiempo discreto*. España: Prentice Hall, 2000.
- [2] A. Ambardar, *Procesamiento de señales analógicas y digitales*. México: Thomson Learning, 2002.
- [3] S. Winder, *Analogal and digital filter design*. USA: Newnes, 2002.
- [4] Sheno, B. A., *Introduction to Digital Systems, Theory and Design*. USA: Prentice Hall, 2005.
- [5] E. Umez-Eronini, *Dinámica de sistemas y control*. México: Thomson Learning, 2001.
- [6] E. Soria, *Tratamiento digital de señales*. Madrid: Prentice Hall, 2003.
- [7] F. Miyara, *Filtros Activos*. Argentina: Universidad Nacional del Rosario, 2004.
- [8] S. M. Kuo, B. H. Lee, *Real-time Digital Signal Processing*. Second Edition. England: John Wiley & Sons, Ltda., 2001.