

Determinación de la superficie libre en presas de tierra mediante técnicas de optimización

Determination of the free surface in ground dams through optimization techniques

WILSON RODRÍGUEZ CALDERÓN

Ingeniero Civil Universidad Industrial de Santander, M.S. Métodos Numéricos para Ingeniería Universidad Politécnica de Catalunya.
Docente Pontificia Universidad Javeriana (Colombia).
wilroca@javeriana.edu.co

MYRIAM ROCÍO PALLARES MUÑOZ

Ingeniera Civil Universidad Industrial de Santander, M.S.
Métodos Numéricos para Ingeniería Universidad Politecnico de Catalunya
mrocio03@hotmail.com

Fecha de recepción: septiembre 09 de 2004

Clasificación del artículo: Investigación
Fecha de aceptación: diciembre 20 de 2004

Palabras clave: Optimización, variables de diseño, variables de estado, función objetivo.

Key words: Optimization, design variables, state variables, target function.

RESUMEN

Con el presente trabajo se desarrolla una alternativa para determinar la superficie libre en presas de tierra, empleando las técnicas de optimización que están disponibles en el programa comercial de elementos finitos ANSYS. El programa tiene la capacidad de manejar mallas variables a través de las iteraciones de los algoritmos de optimización; este aspecto presenta una ventaja de precisión respecto a los métodos que usan una malla constante. Las variables de diseño se definen paramétricamente por medio de las coordenadas verticales o cotas de unos puntos clave, que se interconectan por medio de *splines* para aproximar la superficie libre. Las variables de estado son los valores de temperatura en los puntos clave, que por analogía térmica son análogos a la cabeza de fluido. La función objetivo es el valor absoluto de la diferencia entre las coordenadas verticales y los valores de temperatura calculados en los puntos clave.

ABSTRACT

With this paper an alternative to determine the free surface in ground dams is developed by using the optimization techniques available in the commercial program of finite elements, ANSYS. The program can handle variable meshes through the iteration of the optimization algorithms; this aspect presents a precision advantage with respect to the methods used in a constant mesh. The design variables are parametrically defined by means of vertical coordinates or key points coat that are interconnected by means of *splines* to move near the free surface. The state variables are the temperature values in the key points that due to thermal analogy are analogous with the top of the fluid. The target function is the absolute value of the difference between the vertical coordinates and the temperature values calculated in the key points.

1. Introducción

El problema de filtración de fluidos a través de medios porosos es significativo en disciplinas como la mecánica de suelos y rocas, depósitos de recursos subterráneos, irrigación y drenaje, hidrología, hidráulica, geología del petróleo y, en general, problemas relacionados con hidrología subterránea. La filtración a través de materiales geológicos involucra usualmente flujo a través de medios multifásicos: esqueleto del suelo y líquidos (agua) o gases. El presente trabajo particulariza el caso de flujo de fluidos en materiales inconfiados en régimen estacionario, teniendo en cuenta algunas propiedades de los fluidos incompresibles como el agua.

Para solucionar los problemas de flujo se han utilizado gran número de procedimientos. Algunas de las alternativas generalmente empleadas son soluciones analíticas complejas gobernadas por ecuaciones diferenciales; también se usan analogías eléctricas y térmicas y ensayos de simulación en el laboratorio. Sin embargo, las soluciones analíticas solo son posibles para casos que involucran ecuaciones lineales y problemas en los que la geometría y las condiciones de borde se puedan describir mediante funciones simples. Un problema de flujo puede resolverse construyendo un modelo a escala y estudiando la filtración en él. Los modelos de laboratorio resultan muy útiles para la ilustración del fenómeno; sin embargo, los modelos de suelo son de empleo limitado para la solución general de problemas de filtración, debido al tiempo y al trabajo necesarios para construirlos y a las dificultades creadas por la capilaridad.

Para lograr soluciones económicas, exactas y rápidas se ha recurrido al empleo de analogías con modelos computacionales de transferencia de calor por conducción, que representan de una manera equivalente el comportamiento del flujo a través de una masa de suelo, dado que la ecuación de Poisson rige los dos comportamientos.

El problema de flujo inconfinado está revestido de una complejidad adicional, que consiste en el desconocimiento de la frontera constituida por la

superficie libre. Por tal motivo, este trabajo busca dar solución al problema a través de técnicas avanzadas de optimización, dejando de lado las técnicas de malla constante (menos precisas que las de malla variable), suficientemente referenciadas en gran parte de la literatura que trata el problema de flujo en medio poroso o flujo subterráneo.

2. Marco teórico

Matemáticamente, el problema de filtración en un medio poroso en condiciones estacionarias puede plantearse mediante las ecuaciones de Laplace o Poisson, usando como variable de trabajo la altura piezométrica:

$$\nabla^T \mathbf{K} \nabla h + Q = 0 \quad (1)$$

En la ecuación (1), h es la altura piezométrica y Q es una función que representa una fuente o un sumidero (una entrada o salida puntual de agua), que en la mayoría de los problemas suele ser cero. \mathbf{K} es la permeabilidad del medio, que en muchos casos se considera un escalar constante. Por otra parte ∇^T representa el operador divergencia y ∇ el operador gradiente. En el caso de permeabilidad constante (suelo homogéneo e isotrópico a efectos de flujo) y en ausencia de fuentes y/o sumideros, la expresión (1) da lugar a la conocida ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 h = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (2)$$

Las expresiones pueden resolverse directamente empleando alguno de los programas comerciales que solucionan la ecuación de Laplace (2) o la de Poisson (1); en ambos casos será necesario definir las condiciones de contorno apropiadas, que normalmente son de tipo *Dirichlet* (altura piezométrica impuesta) o *Neumann* (derivada de la altura piezométrica impuesta), o en algunos casos puede ser una combinación de ambas.

2.1. Sistema de ecuaciones resultante

El problema matemático planteado puede expresarse mediante la siguiente ecuación diferencial en

derivadas parciales, y las siguientes condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} \nabla^T \mathbf{K} \nabla h + Q &= 0 \\ -(\mathbf{K} \nabla h)^T \mathbf{n} - q &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

En (3), n es un vector unitario normal a un contorno por el que sale o entra agua. La condición de contorno –segunda expresión de (3)– significa que el caudal en la dirección definida por el vector n vale q . Si se aplican “residuos ponderados” a (3) utilizando *Galerkin*, y luego se aplica el teorema de Green (es decir, se usa la forma débil), con la discretización típica del método de los elementos finitos, sustituyendo la variable altura piezométrica por sus valores en los nodos, resulta finalmente:

$$\int_{\Omega} \nabla^T \mathbf{N} \mathbf{K} \nabla \mathbf{N} \phi d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{N} Q d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{N} q d\Gamma = 0 \quad (4)$$

En (4), Ω es el dominio en el que se aplica la ecuación diferencial, y Γ el contorno; \mathbf{N} son las funciones de forma que permiten obtener la altura piezométrica en cualquier punto del interior y \mathbf{f} es el vector de alturas piezométricas en los nodos (también llamadas potenciales). Es decir, la altura piezométrica en un punto del interior del elemento finito se puede expresar en función de las alturas piezométricas en los nodos mediante: $h = \mathbf{N}\phi$. La primera integral sobre el dominio de esta misma ecuación puede escribirse separando el vector de alturas piezométricas o potenciales nodales del resto, ya que son valores numéricos y pueden salir de la integral. Las dos integrales siguientes, por su parte, dan lugar a vectores que pueden escribirse como un término independiente. Finalmente, (4) se puede expresar en forma de un sistema de ecuaciones algebraico como:

$$\mathbf{H}\phi = \mathbf{f} \quad (5)$$

En (5), \mathbf{H} es la matriz de permeabilidad y representa la primera integral de (4), salvo el término ϕ , que es el vector de alturas piezométricas en los nodos

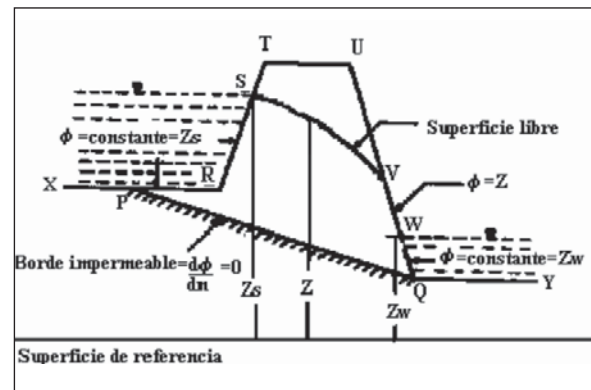
(unidades de longitud); por su parte, \mathbf{f} es un vector de caudales en los nodos (tiene unidades de m^3/s).

1.2. Tratamiento de la superficie libre

La expresión (5) permite resolver problemas de filtración en un medio poroso. La figura 1 representa de forma esquemática una presa homogénea con un nivel de embalse a la izquierda y un nivel inferior a la derecha, que involucra una superficie libre (freática) cuya ubicación no es conocida exactamente; de aquí que su localización deba ser determinada durante el proceso de solución; en el caso indicado, el agua se filtrará de izquierda a derecha (de puntos de más energía a puntos de menos energía). El dominio de trabajo está representado por el área RSVWQP. La línea SV se denomina superficie libre, y es equivalente al nivel freático en terrenos naturales; así, es la línea de presión de agua nula en el interior de la presa. Las condiciones que debe satisfacer la superficie libre son:

- La cabeza de potencial (ϕ) en cualquier punto de la superficie es equivalente a la cabeza de elevación Z en estos puntos desde alguna superficie de referencia (desde este punto de vista la presión atmosférica actúa en cualquier lugar de la superficie).
- El flujo a través de la superficie libre en la dirección normal es igual a cero.

Figura 1. Geometría básica y condiciones de contorno para un problema de filtración en una presa homogénea



Para este problema, las condiciones en RS y en WQ son de energía constante prescrita. En efecto, en ellas la altura piezométrica es la suma de la cota “Z” y de la presión de agua hidrostática debida al nivel del embalse, de manera que la suma de ambas es siempre constante. Por otra parte, en PQ la condición es de impermeabilidad, y utilizando la ley de Darcy esto es equivalente a anular la derivada de la altura piezométrica en la dirección perpendicular al contorno impermeable; en VW la presión de agua es cero y, por tanto, la altura piezométrica coincide con la cota; en algunos casos los puntos V y W pueden llegar a coincidir. Finalmente, el problema aparece en SV, ya que esa línea no es conocida a priori. En realidad, este problema es muy complejo desde un punto de vista matemático, porque el dominio W de suelo por donde circula el agua no está definido inicialmente; es decir, se tiene una ecuación diferencial en derivadas parciales definida en un dominio que no se conoce; de aquí que cuando se usan métodos computacionales sea necesario adoptar un procedimiento iterativo en la localización de la superficie libre.

El procedimiento comienza con un cálculo inicial acerca de la localización de la superficie libre. Sobre los valores básicos de cabeza del fluido (ϕ) computados en cada iteración se modifica la localización de la superficie libre; la condición de borde a lo largo de la superficie libre ($\phi = Z$ y $\delta\phi/\delta v = 0$) se verifica al final de cada iteración; el procedimiento se lleva a cabo hasta que el movimiento de la superficie libre durante una y otra iteración consecutiva comience a hacerse despreciable.

2.3. Solución del problema por analogía térmica

La solución a un problema que involucra el régimen estacionario de flujo de calor bajo condiciones de borde dadas producirá un campo térmico consistente de líneas de igual temperatura o isotérmicas interceptadas con ángulos rectos por líneas de flujo de calor. Existe una correspondencia directa entre la temperatura y la cabeza total del fluido, la conductividad térmica y la permeabilidad, y el flujo de calor

con el flujo de fluidos; esta relación puede expresarse de la siguiente forma:

$$v_x = -k_x \frac{\partial h}{\partial x} \Rightarrow q_x = -c_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (6)$$

En (6), c_x es el coeficiente de conductividad térmica y θ es la temperatura. De esta manera, un modelo de flujo térmico idéntico al de flujo de agua puede desarrollarse si se conoce una región de flujo bajo condiciones de borde establecidas.

2.4. Optimización del diseño en ANSYS

La optimización del diseño es una técnica que pretende determinar el mejor diseño o diseño óptimo, que es aquel que reúne un conjunto de requisitos específicos con un costo mínimo de ciertos factores como peso, área, volumen, esfuerzos, etc. En otras palabras, el diseño óptimo es normalmente aquel que logra “ser lo más eficaz posible”.

El programa ANSYS ofrece dos métodos de optimización adaptables a una gama amplia de problemas: a) la “aproximación del subproblema” es un método de orden cero avanzado que puede aplicarse eficazmente a la mayoría de problemas de ingeniería; b) el método de primer orden, que se basa en la sensibilidad del diseño y está recomendado para problemas que requieren gran exactitud, como el caso que aquí se trata. Para los dos métodos, el programa ejecuta una serie de ciclos de análisis-evaluación-modificación: se desarrolla un análisis inicial del diseño, se evalúan los resultados contra los criterios de diseño especificados en el modelo (por ejemplo, las condiciones de borde que debe satisfacer la superficie libre) y se modifica el diseño, si es necesario. Este proceso se repite hasta que se satisfagan todos los criterios especificados.

2.4.1. Definiciones básicas en optimización.

Antes de describir el procedimiento de optimización es necesario definir la terminología básica empleada en estos tipos de análisis: variables de diseño, variables de estado y función objetivo (que

colectivamente son llamadas variables de optimización), diseño factible y diseño no factible, archivo de análisis, iteraciones, ciclos, conjunto de diseño, etc.

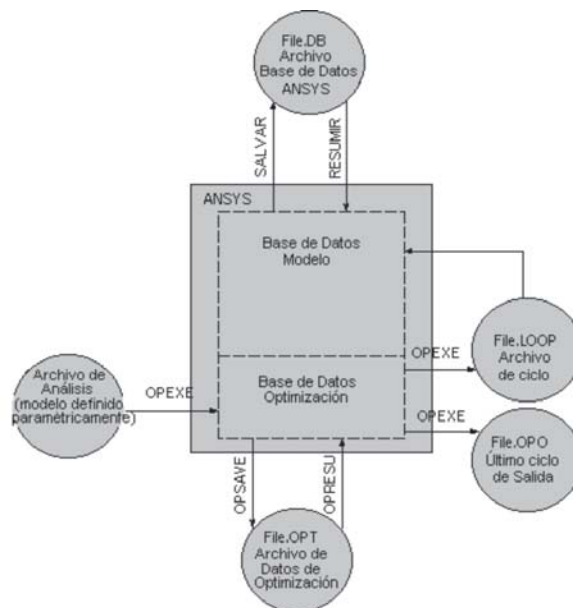
- *Variables de diseño (VD)*: son cantidades independientes que se varían para alcanzar el diseño óptimo (las variables independientes del problema); es necesario especificarles límites superiores e inferiores como “restricciones” de cada una, los cuales definen su rango de variación.
- *Variables de estado (VE)*: son cantidades que condicionan o restringen el diseño. Se conocen también como “variables dependientes” y típicamente son cantidades de respuesta que son funciones de las variables de diseño [$VE = f(VD)$]. Una variable de estado puede estar restringida con uno o dos límites (en el último caso, uno máximo y uno mínimo).
- *Función objetivo*: es la variable dependiente que se intenta minimizar. Debe ser función de las VD [$F = f(VD)$]; así, si los valores de las VD cambian, el valor de la función también debe cambiar.
- *Conjunto de diseño* (o diseño): es un conjunto único de valores de los parámetros que representan una configuración particular del modelo; típicamente se caracteriza por los valores de las variables de optimización.
- *Diseño factible*: es el diseño que satisface todas las restricciones o condiciones especificadas por las VE y las VD. Si una de las restricciones no se satisface, el diseño se considera no factible; el mejor diseño es aquel que satisface todas las restricciones impuestas y produce el mínimo valor en la función objetivo; si todos los conjuntos de diseño son no factibles, el mejor conjunto de diseño será el que más se acerca a la factibilidad, independientemente del valor que produzca en la función objetivo.
- *Archivo de análisis* en ANSYS: es el archivo de entrada; contiene una secuencia de análisis completa (preproceso, solución, posproceso); debe contener un modelo definido paramétricamente, esto es, usando parámetros para

representar las entradas y las salidas que serán usadas como VD, VE y función objetivo.

- *Ciclo*: es un paso a través del ciclo de análisis (como un paso a través del archivo de análisis).
- *Iteración de optimización* (o iteración): es uno o más ciclos que resultan en un nuevo conjunto de diseño. Típicamente, una iteración equivale a un ciclo; sin embargo, para el método de primer orden una iteración representa más de un ciclo.
- *Base de datos de optimización*: contiene el último entorno de optimización e incluye las definiciones de las variables de optimización, parámetros, especificaciones de optimización y conjuntos de diseño acumulados.

Algunos de los conceptos así descritos pueden ser entendidos mejor a través de una ilustración. La figura 2 muestra el flujo de información durante un análisis de optimización.

Figura 2. Flujo de datos de optimización en ANSYS



Es de notar que las variables de estado y los límites sobre las variables de diseño hacen que el problema

de optimización sea *restringido*. El programa ANSYS convierte este problema en uno de optimización *sin restricciones*, dado que las técnicas de minimización para este último son más eficaces. La conversión se hace agregando penalidades a la aproximación de la función objetivo (en el método del subproblema) o a la función objetivo real (en el método de primer orden), de acuerdo con las restricciones impuestas.

2.4.2. Procedimiento de optimización.

El siguiente es el procedimiento usual en un análisis de optimización:

- a. Crear un archivo de análisis para ser usado durante las iteraciones, el cual debe contener una secuencia completa del análisis y estar diseñado de tal manera que se encuentre en capacidad de construir paramétricamente el modelo, obtener la(s) solución(es) y recuperar y asignar a los parámetros las cantidades de respuesta (temperaturas) que serán usadas como variables de estado y función objetivo.
- b. En la base de datos de ANSYS, establecer los parámetros que corresponden a los usados en el archivo de análisis (paso del archivo de análisis a binario).
- c. Declarar las variables de optimización (coordenadas verticales de los puntos clave utilizados para aproximar la superficie libre).
- d. Determinar el método de optimización (subproblema o de primer orden) y especificar los controles de ciclos de optimización (número de iteraciones y tolerancias).
- e. Desarrollar el análisis de optimización y revisar los datos de los conjuntos de diseño resultantes y los resultados del posproceso.

2.4.3. Métodos de optimización.

‘Son técnicas tradicionales que se esfuerzan por la minimización de una función (la función objetivo) sujeta a restricciones. Para utilizar uno de los métodos disponibles en el programa ANSYS es necesario tener definida una función objetivo.

El método de aproximación del subproblema usa aproximaciones (ajuste de curvas) para todas las variables dependientes (VE y función objetivo). Es un método que puede aplicarse eficazmente a una gama amplia de problemas de ingeniería; requiere solo de los valores de las variables dependientes y no de sus derivadas.

El método de primer orden usa la información de la derivada, es decir, los gradientes de las variables dependientes con respecto a las variables de diseño. Es un método muy exacto y trabaja bien para problemas que tienen variables dependientes que cambian bastante en un rango grande del espacio de diseño; sin embargo, puede ser computacionalmente costoso. Al igual que el método anterior, convierte el problema inicialmente restringido en un problema sin restricciones agregando funciones de penalización a la función objetivo; la diferencia entre ambos radica en que en este último caso se minimiza la representación del elemento finito real y no una aproximación.

El método de primer orden realiza cálculos del gradiente para cada iteración, con el fin de determinar una dirección de búsqueda y adoptar una estrategia de búsqueda de línea (*line search*) para minimizar el problema sin restricciones. Bajo estas consideraciones, cada iteración está compuesta de varias subiteraciones que incluyen cálculos de la dirección de búsqueda y del gradiente; por eso una iteración de optimización para el método de primer orden realiza varios ciclos de análisis.

3. Planteamiento del problema

3.1. Descripción

El problema consiste en determinar la solución de flujo bidimensional en una presa de tierra heterogénea (compuesta de tres materiales: dos espaldones, un núcleo y un *dren* de talón) y anisotrópica (diferente valor de permeabilidad en las dos direcciones: $K_x > K_y$), por medio de un modelo 2D de elementos finitos utilizando analogía térmica de flujo de calor por conducción con el programa

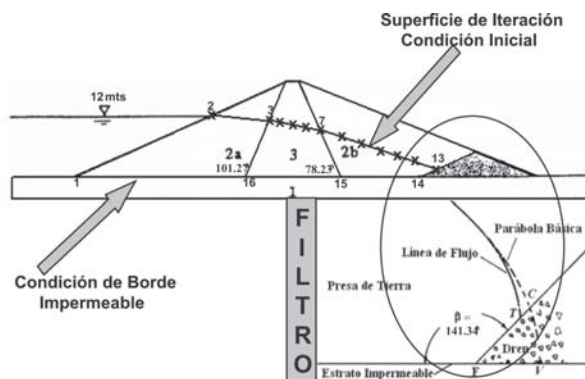
comercial de elementos finitos ANSYS. Por supuesto, dicha solución incluye la determinación de la posición de la superficie libre mediante técnicas de optimización (objetivo de este trabajo); para ello se hace uso del módulo de optimización del programa OPT .

3.2. Especificaciones

3.2.1. Propiedades geométricas y condiciones de contorno.

En las líneas 1-2 y 14-13 del modelo presentado en la figura 3, la condición de contorno impuesta es la cabeza de fluido existente en dichas fronteras. Sobre la frontera de la superficie libre se localizan diez puntos clave (del punto 3 al 12, dado que los puntos 2 y 13 definen condiciones de contorno) de manera arbitraria; sobre ellos se realizan las iteraciones del algoritmo de optimización, para finalmente determinar las cotas correctas.

Figura 3. Bosquejo del modelo 2D



La cara aguas arriba de la presa (línea 1-2; $\phi = h = 12$ m) representa una condición de potencial conocida, al igual que la superficie FT sobre el dren o línea 13-14 del modelo, en la cual la cabeza del

fluido corresponde a 0,961 m, que es la elevación del punto T (*keypoint* 13 del modelo). En la fundación de la presa y en la superficie libre el flujo en la dirección normal es igual a cero.

Tabla 1. Coordenadas del modelo 2D

Punto clave	Coordenada X(*)	Coordenada Y
1	0,00	0,00
2	15,00	12,00
3	17,45	11,75
4	18,74	11,50
5	20,49	11,00
6	22,25	10,00
7	24,18	9,79
8	25,52	9,00
9	27,03	8,00
10	28,55	7,00
11	30,07	5,00
12	31,58	3,00
13	33,37	1,10
14	32,00	0,00
15	26,00	0,00
16	15,00	0,00

* Los puntos subrayados son los clave del modelo 2D (seleccionados de manera arbitraria), utilizados para la aproximación de la superficie libre.

3.2.2. Propiedades de los materiales componentes de la presa.

Quedan definidas a través de los coeficientes de permeabilidad horizontal K_x y vertical K_y . La anisotropía de los materiales está justificada en la modificación que la compactación introduce en sus permeabilidades, dado que el amasado y la vibración hacen que la estructura laminar de las arcillas se oriente horizontalmente, haciendo que la permeabilidad horizontal sea mayor que la vertical. En la tabla 2 se presentan estas propiedades,

Tabla 2. Propiedades de los materiales

ÁREAS		ESPALDONES		NÚCLEO
		2 ^a	2b	3
Propiedades de los materiales (Permeabilidades [m/seg])	Kx	0,3E-06	0,3E-06	0,5E-07
	Ky	0,3E-07	0,3E-07	0,5E-08

3.3. Variables de optimización

3.3.1. Función objetivo.

La función a minimizar es el valor absoluto de la diferencia entre la cota y la temperatura (análoga a la cabeza del fluido) de los puntos clave utilizados en la aproximación por *splines* de la curva de la superficie libre mostrada en la figura 3. Para evitar problemas de error por redondeo se suma a la función objetivo un valor arbitrario (se asumió un valor de 10,00). Como está definida, la función objetivo debe tender al valor arbitrario señalado o a cero, en caso de no utilizarlo; en otras palabras, la temperatura y la cota de cada punto deben tender a ser iguales.

3.3.2. Variables de diseño.

Son las cotas de los puntos clave utilizados para la aproximación de la superficie libre. Estas coordenadas se encuentran restringidas entre dos límites: un valor mínimo que corresponde a la cota del punto vecino inmediatamente anterior con menor cota, que siempre va a ser correcto si se tiene en cuenta que ya ha sido iterado (físicamente, el punto en estudio no podrá estar por debajo de su vecino de menor cota, dado que no hay succiones en el modelo), y un valor máximo de 12 m, correspondiente a la cabeza máxima en el modelo, que es el nivel de agua del embalse.

3.3.3. Variables de estado.

Son las temperaturas (cabeza de fluido) de los puntos de la superficie libre. Físicamente y de manera flexible, como restricciones mínima y máxima pueden establecerse 0 y 12 m, respectivamente; el valor de 12 m corresponde a la cabeza máxima de fluido y está definido por el nivel del embalse aguas arriba.

4. Solución del problema y discusión

El desarrollo del problema en el programa ANSYS requiere de la elaboración de un archivo de análisis, empleando los tres niveles de procesamiento

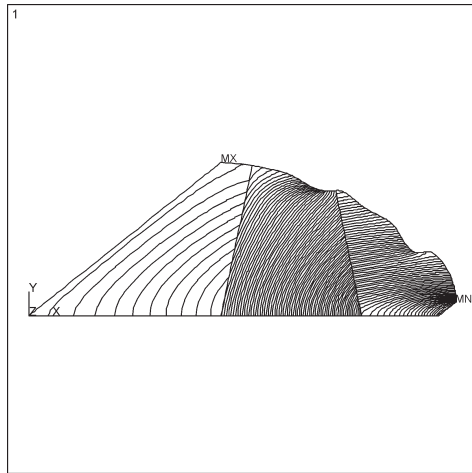
básicos ya mencionados. Con la ejecución de este algoritmo se obtienen finalmente los valores de las variables de estado, actualizadas de acuerdo con las variables de diseño obtenidas utilizando el módulo de optimización.

La optimización del diseño se constituye en un cuarto módulo, y a través de él se plantea todo el escenario de optimización, en cuanto a variables de estado y de diseño, función objetivo, tolerancias, método de solución y número máximo de iteraciones. De acuerdo con los resultados registrados en los archivos de datos de optimización (que contienen el último entorno de optimización e incluyen las definiciones de las variables de optimización), los parámetros, las especificaciones de optimización y los conjuntos de diseño acumulados, es posible analizar el comportamiento de cada uno de los métodos. La convergencia, suavidad en la curva de convergencia y costo computacional (en términos de tiempo CPU) son los resultados más importantes. Finalizada la solución empleando los dos métodos, se realiza una comparación cuantitativa y cualitativa entre ellos; a continuación se presenta el análisis del problema por ambos métodos.

4.1. Método del subproblema o de orden cero

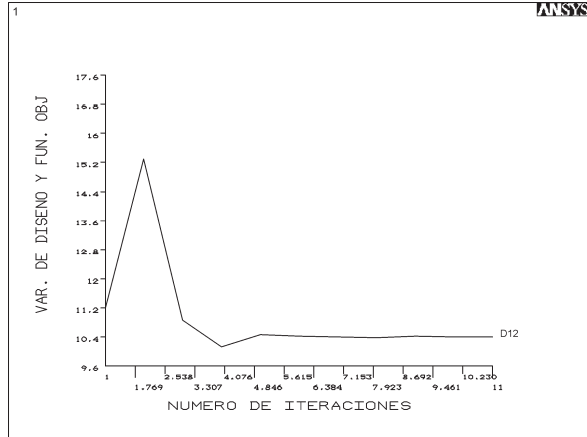
Con este método es posible determinar que la convergencia es “relativamente rápida” (véanse los tiempos CPU en la tabla 3). Cuando se alcanza la convergencia no se presentan variaciones importantes de las variables de diseño; su valor se ajusta al rango de factibilidad. El método converge con un diseño factible en pocas iteraciones, sin llegar a alcanzar el número máximo predefinido de iteraciones. El tiempo computacional o tiempo CPU empleado para resolver el problema es de 141,22 segundos.

Figura 4. Curvas de convergencia de la función objetivo. Método del subproblema

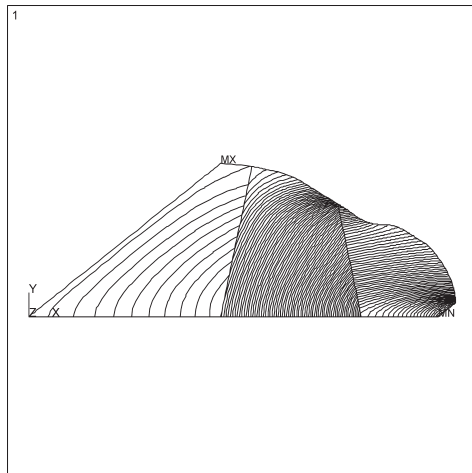


ANSYS 5.5.3
 FEB 14 2004
 16:30:20
 PLOT NO. 33
 NODAL SOLUTION
 STEP=1
 SUB =1
 TIME=1
 TEMP (AVG)
 RSYS=0
 PowerGraphics
 EFACET=1
 AVRES=Mat
 SMN =1.095
 SMX =12
 1.15
 1.701
 2.362
 3.023
 3.684
 4.234
 4.895
 5.556
 6.217
 6.768
 7.429
 8.09
 8.751
 9.301
 9.962
 10.623
 11.284
 11.945

INTERACCIÓN PUNTO 12

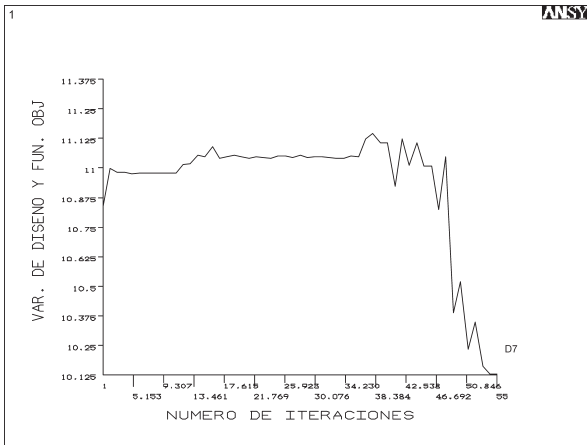


CONVERGENCIA PUNTO 12

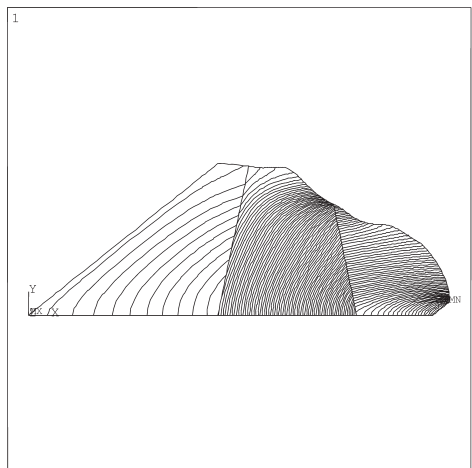


ANSYS 5.5.3
 FEB 14 2004
 16:37:48
 PLOT NO. 175
 NODAL SOLUTION
 STEP=1
 SUB =1
 TIME=1
 TEMP (AVG)
 RSYS=0
 PowerGraphics
 EFACET=1
 AVRES=Mat
 SMN =1.095
 SMX =12
 1.15
 1.701
 2.362
 3.023
 3.684
 4.234
 4.895
 5.556
 6.217
 6.768
 7.429
 8.09
 8.751
 9.301
 9.962
 10.623
 11.284
 11.945

INTERACCIÓN PUNTO 7

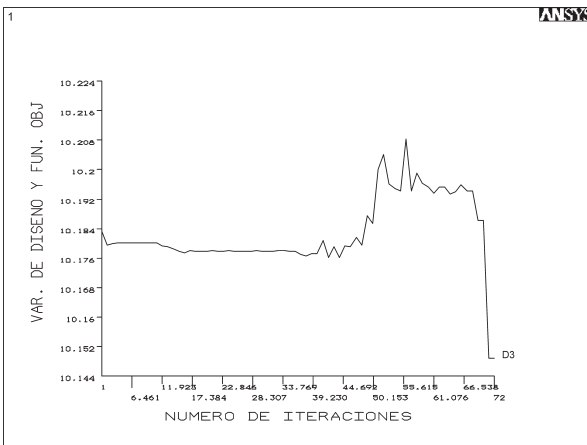


CONVERGENCIA PUNTO 7



ANSYS 5.5.3
 FEB 14 2004
 16:40:30
 PLOT NO. 231
 NODAL SOLUTION
 STEP=1
 SUB =1
 TIME=1
 TEMP (AVG)
 RSYS=0
 PowerGraphics
 EFACET=1
 AVRES=Mat
 SMN =1.095
 SMX =12
 1.1
 1.701
 2.362
 3.023
 3.684
 4.234
 4.895
 5.556
 6.217
 6.768
 7.429
 8.0
 8.751
 9.301
 9.962
 10.623
 11.284
 11.945

INTERACCIÓN PUNTO 3



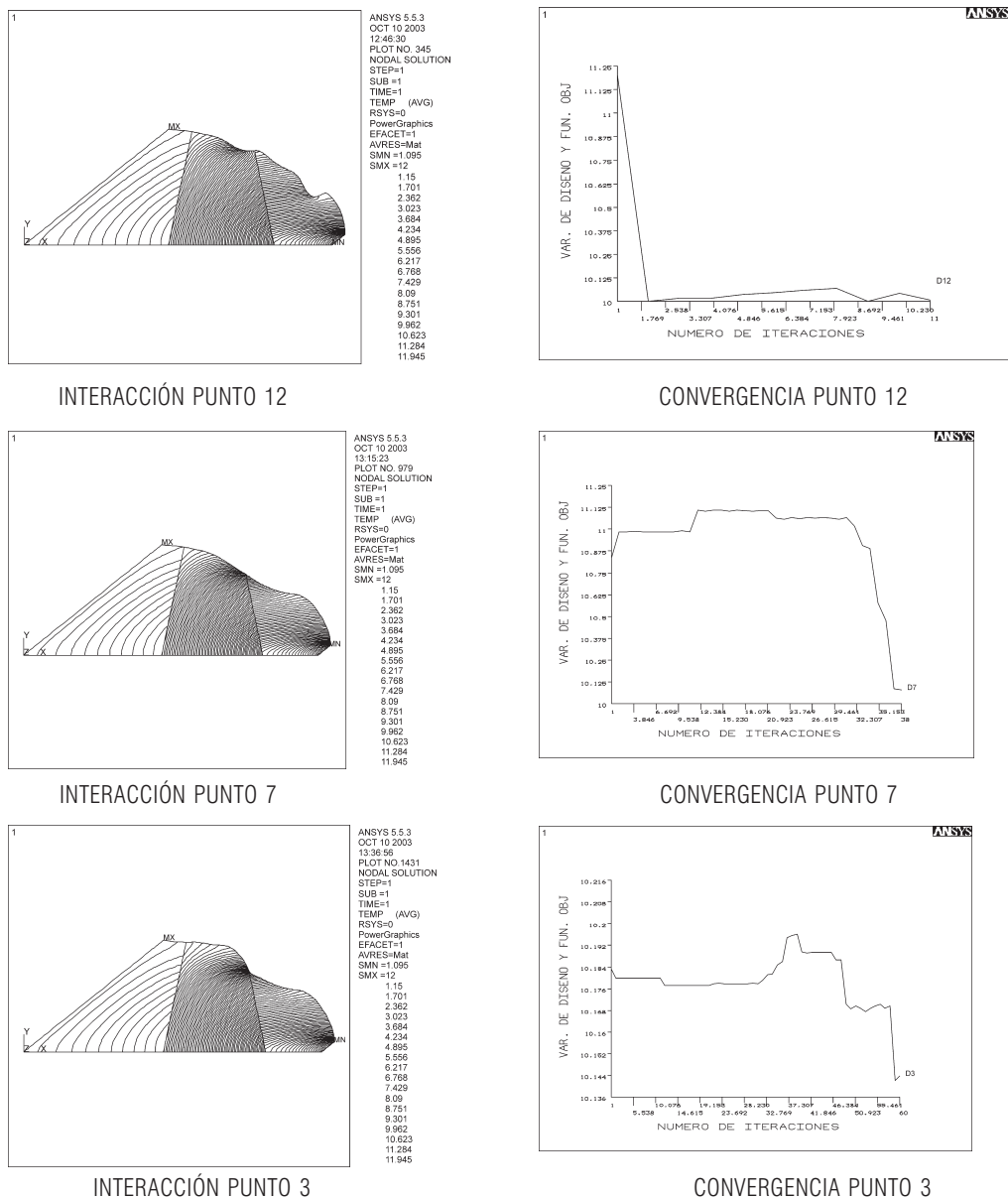
CONVERGENCIA PUNTO 3

4.2. Método de primer orden

Empleando este método, la convergencia es suave (sin sobresaltos apreciables en las curvas de convergencia) y lenta (véanse los tiempos CPU en la tabla 3), en comparación con el método de orden cero; sin embargo, la solución (aproximación de la superficie libre) es más suave y se intuye más precisión. Una vez se alcanza la convergencia, el nivel de variación en las variables de diseño y en la

función objetivo es mínimo. Aplicando este método, es común hacer uso del máximo número de iteraciones; sin embargo, debe tenerse en cuenta que se obtienen resultados más precisos (mayor exactitud) pero con mayor esfuerzo computacional, dado que cada iteración consta de varios ciclos. Las curvas trazadas por el programa ilustran muy bien este comportamiento (figura 5).

Figura 5. Curvas de convergencia de la función objetivo. Método de primer orden



4.3. Comparación cualitativa y cuantitativa de los dos métodos

En la tabla 3 se realiza una comparación entre los dos métodos de optimización en cuanto a convergencia, suavidad en la curva de convergencia y costo computacional.

Tabla 3. Comparación entre los dos métodos

Propiedad	Método de orden cero	Método de primer orden
Curva de convergencia	Oscilatoria	Curva suave
Nº de iteraciones de convergencia	Pocas e inferiores a la máxima (25)	Máxima (10)
Tiempo de CPU (minutos)	13,5	66,2
D12	10,4168989	10,3352681
D11	10,1073002	10,2998849
D10	10,5040321	10,3483231
D9	10,4019662	10,2906483
D8	10,2722347	10,2894836
D7	10,1676731	10,3318233
D6	10,8674368	10,0612992
D5	10,0879577	10,0612992
D4	10,1304530	10,0076219
D3	10,1488217	10,0551880
YK12	5,17964630	5,30638957
YK11	6,32803490	6,47889290
YK10	7,10812755	6,76108023
YK9	7,26396273	7,18961317
YK8	7,91302016	7,89851394
DK7	8,97626162	8,93298565
YK6	10,1169119	11,1974586
YK5	11,5967594	11,5000000
YK4	11,6567236	11,7736556
DK3	12,0417669	12,028396
ITERACIONES ACUMULADAS	72	60

En la tabla 3, la notación es la siguiente:

- YK Coordenada **Y** del *keypoint* (punto clave).
- DK Coordenada polar del punto ubicado sobre la interfase entre dos materiales (puntos 3 y 7).

- D Diferencia entre la temperatura y la cota en cada punto clave (como está definido, debe tender a un valor arbitrario de 10,00, para evitar problemas numéricos).

5. Conclusiones y recomendaciones

- Las dos técnicas de optimización empleadas para efectuar el análisis del problema de la superficie libre presentan un comportamiento muy similar en el valor de la solución de la función objetivo y en las variables de diseño
- En términos de tiempo computacional, el método de orden cero es recomendable, si se tiene en cuenta que solo representa un 20,4% del tiempo que emplea el método de primer orden para alcanzar resultados muy similares. Aunque con el método de primer orden aparentemente se realizan menos iteraciones, ellas tienen un costo computacional mayor, considerando que cada iteración está compuesta de varios ciclos de análisis internos y, adicionalmente, utiliza la información de las primeras derivadas, en tanto que el método de orden cero no realiza tales ciclos (1 iteración = 1 ciclo) y no se desgasta en calcular derivadas.
- Comparando las soluciones de la frontera de flujo obtenidas mediante las dos técnicas, puede notarse que la curva lograda con el método de primer orden es un poco más suave. Sin embargo, no es razón suficiente para descartar la solución del método de orden cero, teniendo en cuenta que tal diferencia no es considerable en términos de escala.
- La ventaja del método de primer orden se visualiza en la suavidad que presenta la curva de convergencia. Esto se ve reflejado en el número de diseños factibles que proporciona respecto al número de iteraciones que realiza.
- Es recomendable aprovechar las ventajas de los dos métodos; una estrategia para ello es realizar un primer acercamiento mediante el cálculo de la superficie libre con el método del subproblema y luego emplearla como referente para el

método de primer orden; esto conduce a la ejecución de menos iteraciones y, por consiguiente, a menor costo computacional, si se tiene en cuenta que cuando los puntos de partida se encuentran cerca de la solución (un espacio de diseño reducido) el método de primer orden converge rápidamente.

- La alternativa de utilizar análisis de optimización para determinar la posición de la frontera

desconocida en el problema de flujo en medio poroso abre la posibilidad de emplear también técnicas de optimización como opción para solucionar otro tipo de problemas, por ejemplo, en mecánica de fluidos (flujo en canales, oleaje, etc.); aunque estos problemas son diferentes al de medio poroso, su solución es no lineal y requiere de técnicas robustas para aproximarse con suficiencia al comportamiento real del fenómeno.

TC

Referencias bibliográficas

- [1] ANSYS. (1994) *User Manual revisión 5.0*, vol. I (procedures), vol. II (comands), vol. III (elements), vol. IV (theory). Houston, Swanson Analysis Systems Inc.
- [2] DESAI, Chandrakant S. y CHRISTIAN J. (1997). *Numerical Methods in Geotechnical Engineering*. Nueva York, McGraw-Hill, pp. 1-65, 458-506.
- [3] LAMBE, W. y R. WHITMAN (1963). *Mecánica de suelos*, México, Limusa-Wiley, pp. 225-441.
- [4] OLIVELLA, S. y J. CARRERA (2003). *Hidrología subterránea, Apuntes*. Barcelona, Centro Internacional de Métodos Numéricos (Cimne).
- [5] RAO, S. (1989). *The finite element method in engineering*. Nueva York, Pergamon Press, pp. 432-518, 521-592.
- [6] SCOTT, R. (1963). *Principles of soil mechanics*, London, Addison-Wesley, pp. 62-77, 90-134.
- [7] ZIENKIEWICZ, O. C. y R. L. TAYLOR (1994). *El método de los elementos finitos*, 4 ed., vol. 1. Nueva York, Cimne- McGraw-Hill, pp. 1-44, 271-298.