

ESTIMACIÓN DEL EXPONENTE DE HURST Y LA DIMENSIÓN FRACTAL DE UNA SUPERFICIE TOPOGRÁFICA A TRAVÉS DE LA EXTRACCIÓN DE PERFILES

Hurst exponent and fractal dimension estimation of a topographic
surface through a profiles extraction

Oscar Yesid Quintero Delgado^{1} y Jonathan Ruiz Delgado^{2†}*

¹ Universidad Distrital “Francisco José de Caldas”, ² Universidad Distrital “Francisco José de Caldas”.

Correspondencia: * oskr.kintero@gmail.com † jonathan.darkside@gmail.com

Recibido: mayo de 2011 Aceptado: julio de 2011

Resumen

La geometría fractal nace como una alternativa para interpretar y representar de manera más precisa las diferentes formas presentes en la naturaleza. Es así como en este artículo, el cual nace del trabajo de investigación del proyecto de grado titulado “Simulaciones de campos aleatorios tipo movimiento browniano fraccionado aplicadas al estudio de observables espaciales en geociencias” se presenta una alternativa para estimar el exponente de Hurst y la dimensión fractal de una superficie a través de la evaluación de algunos perfiles topográficos extraídos de la misma, los cuales se presentan como parámetros importantes dentro de dicha geometría.

Para lograr el objetivo se extrajo, en primera instancia, un mosaico del Modelo Digital de Elevación generado de las planchas oficiales de Colombia a escala 1:100.000, obteniendo para la superficie de trabajo valores representativos entre 0,53 y 0,79 en el exponente de Hurst, mientras que por otro lado se obtuvo un valor característico para la dimensión fractal de dicha superficie de 2,42; permitiendo así catalogar las superficies topográficas como objetos de naturaleza fractal.

Palabras clave: dimensión fractal, exponente de Hurst, geometría fractal, perfiles, superficies topográficas.

Abstract

Fractal Geometry was created as an alternative to interpret and represent more accurately the different forms present in nature. Thus, in this article, which is born of the research Project grade entitled “Simulation of random fields type fractional brownian motion applied to the geosciences space observations study” presents an alternative to estimate of a surface the Hurst Exponent and its Fractal Dimension through the evaluation of some topographic profiles drawn from the same, the surface, which are presented as important parameters in this geometry.

To achieve the goal was extracted in the first instance a mosaic of Digital Elevation Model generated from Colombia official plates at 1:100.000 scale, getting to the work surface representative values in the Hurst Exponent between 0.53 and 0.79, while on other side scored to the surface a characteristic value for the Fractal Dimension of 2.42, catalog allowing topographic surfaces as objects of fractal nature.

Key words: Fractal dimension, Hurst exponent, fractal geometry, profiles, topographic surfaces.

Introducción

Dadas las complejas formas de la geografía terrestre se hace necesario encontrar modelos que vayan más allá de la clásica geometría euclídea. A principios del siglo XX, con el surgimiento de la geometría fractal o geometría moderna, la cual estudia los aspectos geométricos que son invariantes con el cambio de escala, se origina una nueva herramienta para la representación de las diversas formas presentes en la naturaleza.

Para encontrar una respuesta sólida, que solucione el problema de representar elementos de la superficie de forma más precisa, se presenta la forma de evaluar dos atributos de gran relevancia en el estudio de la geometría fractal, como son el exponente de Hurst y la dimensión fractal, los cuales se relacionan con el grado de rugosidad que pueden llegar a adquirir las superficies topográficas.

De esta manera, para el caso de la variable de interés (topográfica), el procedimiento consistió en extraer del modelo digital del terreno (MDT) original las coordenadas específicas de la zona de estudio, de donde se obtuvo la gráfica de la superficie real, luego se trazaron varios perfiles sobre el mapa de contornos y, por medio de un algoritmo, se estimaron los exponentes de Hurst (H) para cada perfil, obteniéndose de esta forma un valor representativo para dicho exponente (H).

Exponente de Hurst

El coeficiente o exponente de Hurst es una medida de independencia de las series de tiempo que fue estudiada inicialmente por el científico británico Harold Edwin Hurst (1880-1978), como elemento para distinguir series fractales. Hurst descubrió que muchos fenómenos naturales exhiben un comportamiento que puede ser caracterizado por un proceso aleatorio sesgado, en el cual existe “memoria de largo plazo” entre las observaciones, es decir, que los eventos de un periodo influyen en todos los siguientes.

Posteriormente, las ideas de Hurst fueron retomadas por Benoit B. Mandelbrot quien generalizó su trabajo y lo llamó análisis de rango reescalado (R/S), definido como un método estadístico utilizado para evaluar la ocurrencia de eventos poco comunes, dando origen a una herramienta ideal para procesos físicos y financieros, aunque no se limita solamente a este tipo de eventos, por lo que puede ser usado en cualquier serie de tiempo (Gutiérrez, 2008).

Análisis de Rango Reescalado (R/S)

El permite encontrar el parámetro o exponente de Hurst, el cual es un valor numérico que hace posible determinar la auto-correlación en una serie de datos.

A continuación se describe la metodología desarrollada por Hurst: [2]

1. Se inicia con una serie de tiempo de tamaño M , pero como interesa los rendimientos logarítmicos entonces la serie original se reduce a una nueva serie de tiempo de tamaño $N=M$ donde cada rendimiento está definido por:

$$N_i = \log \left(\frac{M_{i+1}}{M_i} \right), \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (1)$$

2. Este periodo de tiempo N se divide en A subperiodos contiguos de longitud n , tal que $A * n = N$. Se nombra cada uno de los subperiodos o subgrupos I_a , con $a = 1, 2, 3, \dots, A$. Cada elemento en I_a , es etiquetado $N_{k,a}$, tal que $k = 1, 2, 3, \dots, n$. Para cada subperiodo I_a de longitud n , el valor promedio está definido por la siguiente expresión:

$$e_a = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n N_{k,a}. \quad (2)$$

3. Las diferencias de cada elemento $N_{k,a}$ con respecto a la media e_a para cada subperiodo I_a se van sumando para obtener la serie de tiempo acumulada ($X_{k,a}$), definida como:

$$X_{k,a} = \sum_{i=1}^k (N_{i,a} - e_a), \quad k = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (3)$$

4. El rango RI_a se define como la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de $X_{k,a}$ para cada subperiodo I_a :

$$RI_a = M_{ax}(X_{k,a}) - M_{in}(X_{k,a}), \quad \text{donde } 1 \leq k \leq n. \quad (4)$$

5. Se calcula la desviación estándar muestral SI_a de la forma tradicional para cada periodo I_a :

$$SI_a = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (N_{k,a} - e_a)^2 \right)^{1/2} \quad (5)$$

- Para cada periodo I_a , su rango RI_a se normaliza dividiendo por su desviación estándar muestral SI_a correspondiente. Por lo tanto el rango reescalado para cada subperiodo I_a es igual a RI_a/SI_a . Como tenemos periodos continuos de longitud n , entonces tomamos el valor promedio R/S para periodos de longitud n y que está definido como:

$$(R/S)_n = (1/A) \sum_{a=1}^A (RI_a/SI_a) \quad (6)$$

- La longitud n o el tamaño del subperiodo se incrementa al siguiente valor posible de tal forma que $\frac{M-1}{n}$ sea un valor entero. Iniciamos con el valor más pequeño de acuerdo a la condición anterior y se repiten los pasos del 1 al 6 hasta $n = (M-1)/2$ utilizando siempre la serie completa (ver Figura 1). Posteriormente aplicamos una regresión de mínimos cuadrados de $\log(R/S)_n$ contra $\log(n)$. La ordenada al origen es el $\log(c)$ y la pendiente de la ecuación es la estimación del exponente Hurst H .

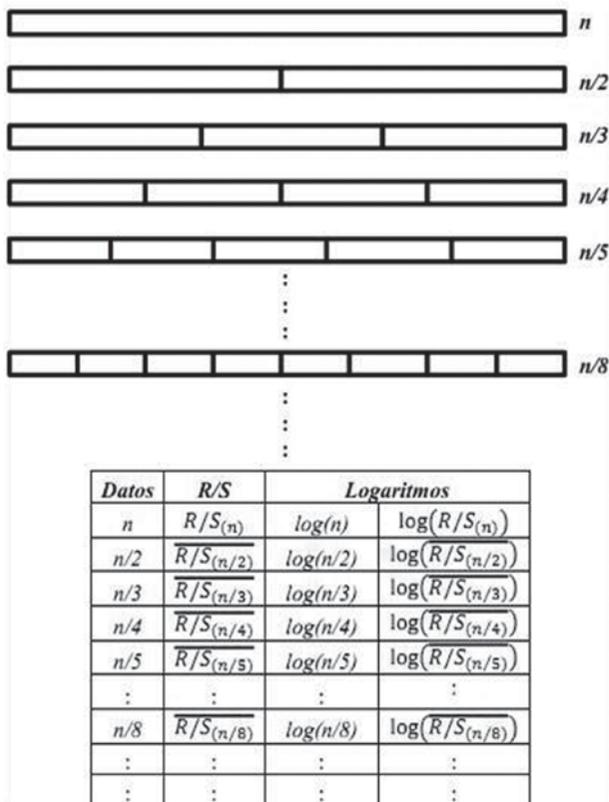


Figura 1. Construcción de grupos en la metodología del (R/S).

Fuente: Moros, 2010.

Valores del coeficiente de Hurst

Si $H=0.5$ (ruido blanco) implica un proceso completamente aleatorio e independiente, con ausencia de correlación entre los incrementos de la señal. Correlación = 0.

Si $0.5 < H \leq 1$ implica series de tiempo que muestran procesos persistentes o correlacionados (un periodo de crecimiento es seguido de otro análogo) y presentan un aspecto suave. Una serie persistente está caracterizada por efectos de memoria de largo plazo. Teóricamente lo que suceda hoy impactará en el futuro por siempre, todos los cambios diarios están correlacionados con todos los cambios futuros. Se ha encontrado que las series persistentes son las más comunes en la naturaleza. Un $H=1$ indicaría un comportamiento determinístico. A este comportamiento también se le atribuye el nombre de *Ruido Negro*, ya que se relaciona con procesos cíclicos de largo plazo, como niveles de ríos, cambios de precios en la bolsa de valores, entre otros.

Si $0 \leq H < 0.5$ corresponde a un comportamiento de anti-persistencia o anti-correlacional en la serie de tiempo (un periodo de crecimiento es seguido de otro de decrecimiento) que se caracteriza por un mayor contenido de alta frecuencia. Un incremento en los sucesos del pasado, supone un descenso en los sucesos futuros y viceversa. Un sistema anti-persistente tiende a regresar constantemente al lugar de procedencia y tienen la particularidad de ser señales muy irregulares. A este tipo de comportamientos se le conoce también como *Ruido Rosa* y se caracterizan por que abundan en la naturaleza y se encuentran relacionados con procesos de turbulencia. [3]

En 1975 Mandelbrot demostró que el valor del exponente de Hurst (H) se encuentra acotado entre 0 y 1, explicando que este fenómeno ocurría debido a un síntoma de invariancia al cambio de escala, que es la característica clave de las series de tiempo fractales. (figura 2)

Dimensión fractal

El concepto de *dimensión fractal* se introduce dado el hecho de que los objetos de la naturaleza en su gran mayoría no cuentan con dimensión entera, es decir, se encuentran en una *dimensión fraccionada* (claro está que algunos objetos pueden contar con dimensión entera); asimismo, esta dimensión debe ser mayor que su dimensión topológica.

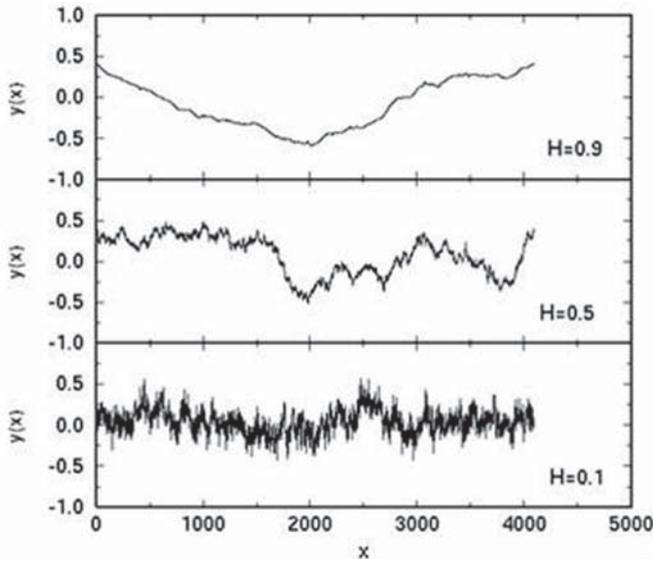


Figura 2. Valores del exponente de Hurst (H) en modelos de topología terrestre: $H = 0,9$, comportamiento persistente; $H = 0,5$, comportamiento aleatorio; $H = 0,1$, comportamiento antipersistente.

Fuente: Cooperative Phenomena Group.

De una manera más general, la dimensión fractal se puede definir como el número que sirve para cuantificar el grado de irregularidad y fragmentación de un conjunto geométrico o de un objeto natural (Strecker, 2004).

Existen varios tipos de dimensión fractal, entre las más utilizadas se encuentran la *dimensión de similaridad*, la *dimensión de Box Counting* y la *dimensión de Hausdorff-Besicovitch*, cada una de estas se enfoca en medir la dimensión de acuerdo con las propiedades de cada objeto fractal y de esta manera obtener diferentes resultados. Todas estas dimensiones concuerdan con el objetivo de encontrar qué tanto espacio ocupa el objeto y su relación con la invariancia de la escala (Gutiérrez, 2008).

En la figura 3 se presenta la relación entre la dimensión euclidiana y la dimensión fractal de algunos objetos.

El exponente de Hurst y la dimensión fractal

El exponente de Hurst puede ser determinado a partir de la dimensión fractal o viceversa, utilizando la fórmula:

$$D = 2 - H \quad (7)$$

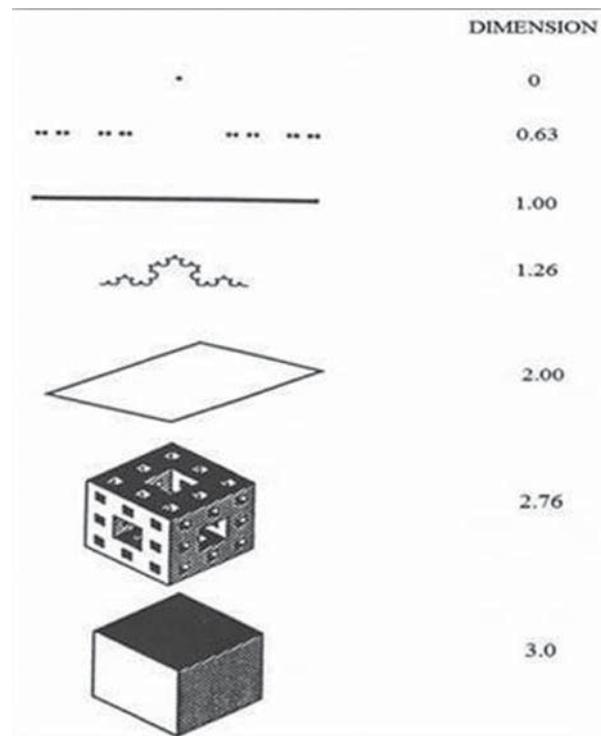


Figura 3. Relación entre las dimensiones euclidiana y fractal de algunos objetos.

Fuente: Obregón (2010).

Dado lo anterior, si $H = 0,5$, entonces $D = 1,5$, lo que significa que los dos valores coinciden con un proceso aleatorio e independiente. Para valores que se encuentren entre $0,5 > H > 1$, es decir, series de tiempo *persistentes*, la dimensión fractal se acercará a una línea con un aspecto de suavidad y menos picos que un proceso aleatorio; para una serie que tome valores entre $0 < H < 0,5$, es decir, una serie *antipersistente*, la dimensión fractal arrojará un valor mayor que la anterior y tomará un aspecto más puntiagudo e irregular que un proceso aleatorio, con tendencia a acercarse cada vez más a una superficie.

Metodología

Descripción general de la zona de trabajo

Para la estimación de la rugosidad de una superficie se trabaja con el modelo digital de elevaciones de Colombia a 30 m de resolución (figura 4), modelo para el cual se utilizaron las planchas a escala 1:100.000. Como zona de trabajo específica se generó un mosaico compuesto

por cuatro de estas planchas correspondientes a una zona limítrofe entre los departamentos de Tolima, Caldas y Cundinamarca, teniendo como coordenadas planas de referencia del marco de dicha zona los siguientes valores: 1079753,270576, 1000084,538439 m en el norte, 999875,295327, 879903,557521 m en el este, cubriendo un área total de 9557,996118 km² de extensión; el departamento de Cundinamarca es el de mayor aporte de información en el mosaico tal como se muestra en la figura 5, en la cual el rectángulo de color naranja corresponde al mosaico extraído para la generación de la superficie.

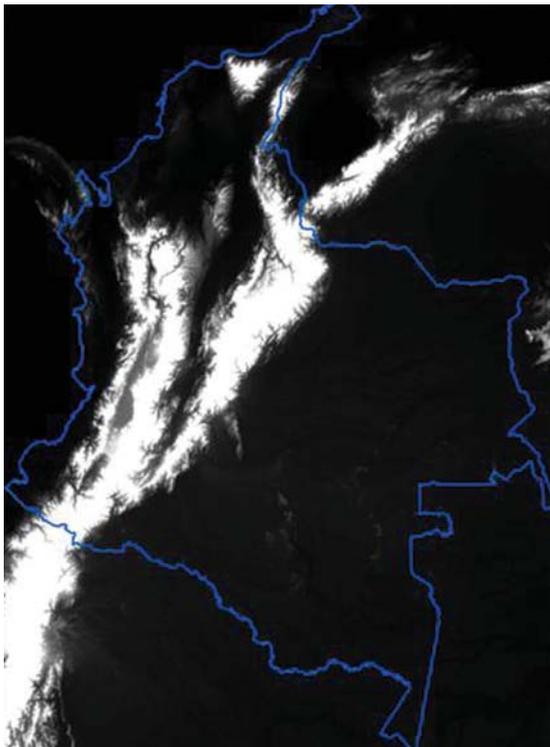


Figura 4. Modelo digital de elevación de Colombia, resolución de 30 m.

Fuente: IGAC.

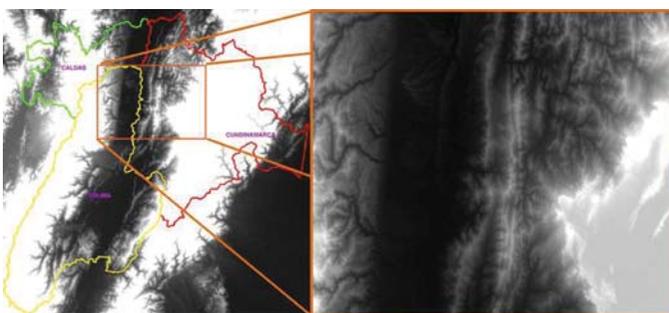


Figura 5. Mosaico en naranja correspondiente a la zona de trabajo específica.

En la zona elegida se identificó que el mosaico preparado abarca alrededor de 5 municipios en el departamento de Caldas, 18 municipios del departamento de Tolima y 53 municipios en el área del departamento de Cundinamarca, cubriéndolos en parte de su área o en su totalidad; adicional a estos municipios también se encuentra la zona noroccidental de la ciudad de Bogotá D.C.; para todos los municipios anteriormente descritos se encontró un rango de alturas que oscila entre los 150 y los 3720 m sobre el nivel del mar, donde los puntos de menor altitud (3) se encuentran en los municipios de Guaduas en Cundinamarca y La Dorada en Caldas, en inmediaciones o zonas aledañas al río Magdalena en lo que se refiere a su presencia a lo largo del límite entre los departamentos mencionados; por otra parte, los puntos con la mayor altura (4) se encuentran en los municipios de Pacho y Subachoque, ambos del departamento de Cundinamarca.

El siguiente proceso que se llevó a cabo fue la extracción de los puntos con coordenadas X, Y y Z a partir del mosaico descrito con anterioridad, mediante la generación de los contornos para dicho modelo raster, a los cuales posteriormente se les crearon los puntos respectivos en el centroide de cada una de las respectivas curvas de nivel generadas, obteniendo así un total de 22.643 puntos, los cuales representan la superficie que se muestra en la figura 6, al igual que sus respectivos contornos.

La representación que se muestra en la figura 6 fue realizada a través del software Surfer 8, a partir de los datos descritos anteriormente, los cuales van a ser la base para la estimación y posterior evaluación de los exponentes de Hurst de cada perfil.

Evaluación del exponente de Hurst para los diferentes perfiles

Una vez obtenida la superficie topográfica y los contornos (curvas de nivel) del área de estudio, se procedió a evaluar el exponente de Hurst para ocho perfiles trazados sobre el mapa de contornos y en diferentes direcciones. En las figuras 7 y 8 se observa el trazado que se realizó en dos de los ocho perfiles y su vista en corte longitudinal, la cual relaciona la distancia (eje X) con la elevación (eje Y) de cada uno de los puntos por donde pasa el corte o perfil.

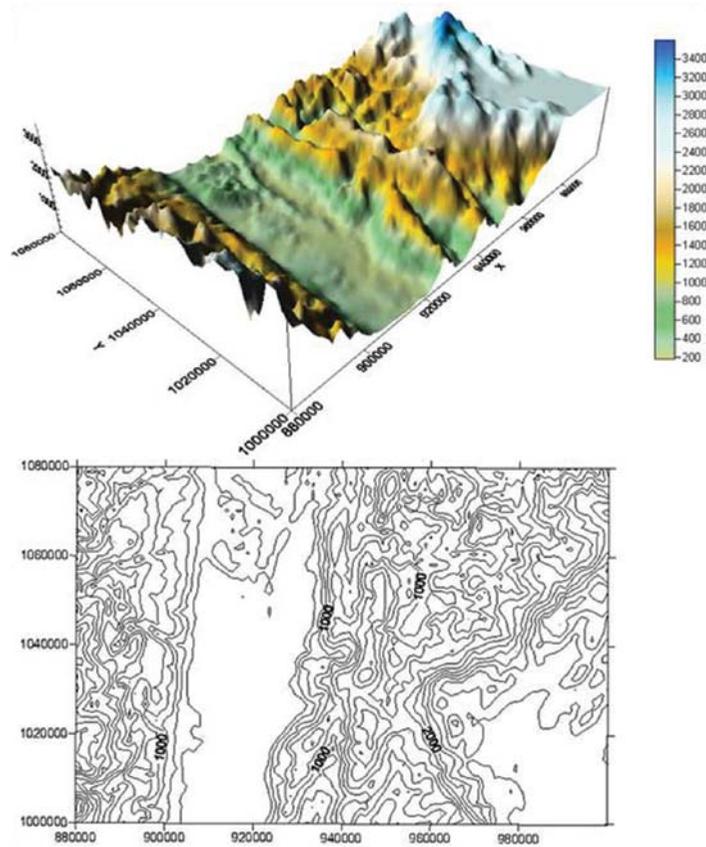


Figura 6. Parte superior, superficie generada; parte inferior, mapa de contornos o curvas de nivel de dicha superficie.

Perfil 1: trazado en sentido oeste-este.

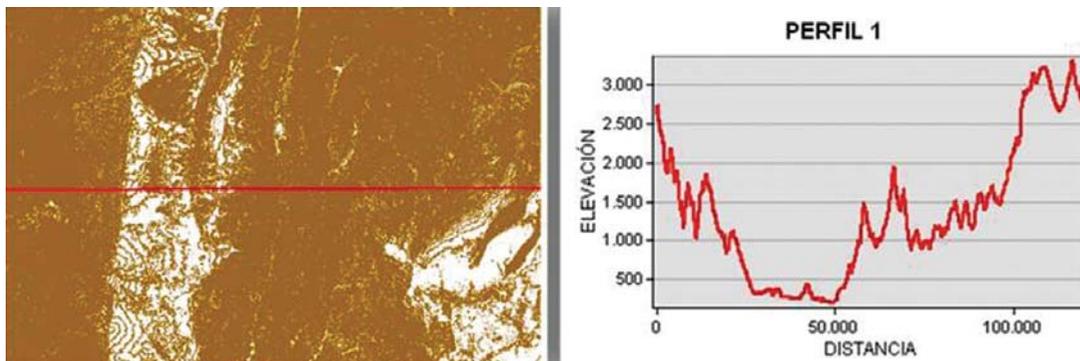


Figura 7. Perfil 1: izquierda, trazado del perfil sobre el mapa de contornos; derecha: vista en corte longitudinal

Perfil 8: trazado en sentido diagonal (superior izquierda-inferior derecha).

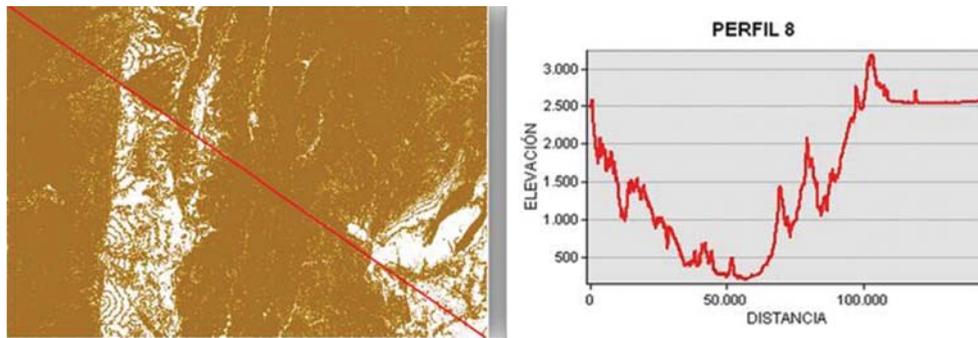


Figura 8. Perfil 8: izquierda, trazado del perfil sobre el mapa de contornos; derecha; vista en corte longitudinal

Para cada uno de los perfiles se obtuvo su respectiva serie de datos, la cual representa la variable de interés (elevación) de los puntos por donde se hizo el trazado de cada perfil, de esta manera se procedió a estimar el exponente de Hurst de cada una de las series por el método del Rango Reescalado.

Resultados y conclusiones

En las tablas 1 y 2 se observan los diferentes valores estimados del exponente de Hurst de cada perfil al igual que su media y su desviación estándar, realizando variaciones en el número de rezagos de la serie. El valor del campo N hace referencia al número total de datos de la serie, es decir, el número de datos de elevación obtenidos en cada perfil.

Tabla 1. Valores de los exponentes de Hurst para cada uno de los perfiles con diferentes rezagos (media y desviación estándar estimadas dejando constante el número de rezagos y variando los perfiles)

	Datos (N)	Rezagos	H	Rezagos	H	Rezagos	H	Rezagos	H
PERFIL 1	4002	4	1,0027	5	0,88939	8	0,50703	10	0,57638
PERFIL 2	4002	4	0,5068	5	0,56062	8	0,60062	10	0,59227
PERFIL 3	4002	4	0,88996	5	0,93201	8	0,67284	10	0,68919
PERFIL 4	2669	4	0,2765	5	0,30207	8	0,32515	10	0,38462
PERFIL 5	2668	4	0,38178	5	0,3709	8	0,4162	10	0,49234
PERFIL 6	2669	4	0,57167	5	0,49746	8	0,60959	10	0,71331
PERFIL 7	4802	4	0,81727	5	0,86993	8	0,55026	10	0,54947
PERFIL 8	4797	4	0,72811	5	0,7337	8	0,60248	10	0,61175
Media (H)			0,847974		0,844548		0,53521		0,676158
Desviación estándar (H)			0,255933		0,245569		0,115007		0,106245

Tabla 2. Valores de los exponentes de Hurst para cada uno de los perfiles con diferentes rezagos (media y desviación estándar estimadas para cada perfil variando el número de rezagos)

	Datos (N)	Rezagos	H	Rezagos	H	Rezagos	H	Rezagos	H	Media (H)	Desviación estándar (H)
PERFIL 1	4002	4	1,0027	5	0,88939	8	0,50703	10	0,57638	0,74388	0,23066
PERFIL 2	4002	4	0,5068	5	0,56062	8	0,60062	10	0,59227	0,56514	0,04248
PERFIL 3	4002	4	0,88996	5	0,93201	8	0,67284	10	0,68919	0,70625	0,13621
PERFIL 4	2669	4	0,2765	5	0,30207	8	0,32515	10	0,38462	0,32209	0,04618
PERFIL 5	2668	4	0,38178	5	0,3709	8	0,4162	10	0,49234	0,41531	0,05487
PERFIL 6	2669	4	0,57167	5	0,49746	8	0,60959	10	0,71331	0,59891	0,08067
PERFIL 7	4802	4	0,81727	5	0,86993	8	0,55026	10	0,54947	0,68673	0,17065
PERFIL 8	4797	4	0,72811	5	0,7337	8	0,60248	10	0,61175	0,66901	0,07161

Como se mencionó, se realizaron pruebas para diferentes rezagos, esto se hizo debido a que los valores del exponente de Hurst siempre tienden a variar en su resultado. De esta forma, y a partir de los valores de la media y la desviación estándar obtenidos en cada perfil y rezago, se determinaron los valores más representativos para el exponente de Hurst y que tuvieran un mejor ajuste con las gráficas de los perfiles.

Para encontrar el valor del exponente de Hurst más representativo se decidió evaluar los valores a través de dos posibles alternativas, la primera consistió en hacer el análisis en cada rezago a lo largo de los ocho perfiles (tabla 1). La segunda alternativa se basó en tomar los resultados obtenidos para cada uno de los perfiles, pero ahora variando el número de rezagos (tabla 2).

En las dos alternativas el criterio que se utilizó para elegir los exponentes de Hurst más representativos se enfocó en elegir aquellos valores que tuvieran las desviaciones estándar más pequeñas. De esta forma, para la primera alternativa el mejor comportamiento se encuentra en los valores estimados con 10 rezagos, ya que el valor de la desviación estándar para este caso fue de 0,105245. En la segunda alternativa el perfil que arrojó la desviación estándar más pequeña fue el 2, con un valor de 0,04248.

Los valores representativos para el exponente de Hurst fueron de 0,576158, para la primera alternativa, y de 0,56514, para la segunda; estos valores hacen referencia a la media y se consideran representativos dado que se asocian con un comportamiento de *persistencia* del proceso ($H > 0,5$), y se validan en la medida en que la superficie real posee cambios significativos en sus alturas, los cuales se pueden asociar a su grado de rugosidad.

Se observa también que para las dos alternativas los valores obtenidos se encuentran muy cercanos, corroborándose aún más como valores significativos de la superficie.

Agradecimientos

Al Ph.D. Nelson Obregón Neira, por convertirse en el principal motivador en la elaboración del proyecto, por sus conocimientos en el área de trabajo y por ser la guía y luz en nuestro arduo camino durante el desarrollo de la investigación. A la Pontificia Universidad Javeriana, y en particular al Instituto Geofísico, por brindarnos desinteresadamente sus espacios académicos e instalaciones. A la Universidad Distrital “Francisco José de Caldas”, por ser la institución que durante todo este tiempo nos concedió las bases y el conocimiento para lograr enfrentar este proyecto, por convertirse en el pilar de nuestra formación integral como ingenieros.

Referencias bibliográficas

- Addison, P. (1997). *Fractals and Chaos: An Illustrated Course*. Bristol: Institute of Physics Publishing.
- Amaro, I. R., Demey, J. R. y Macchiavelli, R. (AÑO). *Aplicación del análisis R/S de Hurst para estudiar las propiedades fractales de la precipitación en Venezuela*. CIUDAD: EDITORIAL.
- Arguello, V. y Gustavo, H. (2005). *Diseño e implementación de un algoritmo con base fractal para realizar análisis de rango re-escalado en registros de pozo*. Sartenejas: Universidad Simón Bolívar-Ingeniería Geofísica.
- Barbulescu, A., Serba, C. y Maftai, C. (AÑO). Evaluation of Hurst Exponent for Precipitation Time Series. Constantza: Ovidius University of Constantza.
- Bras, R. L. y Rodríguez-Iturbe, I. (1985). *Random Functions and Hydrology*. Toronto-Ontario: Courier Dover Publications.
- Carbone, A. (2007). *Algorithm to Estimate the Hurst Exponent of High-Dimensional Fractals*. Torino: Physics Department. Politecnico di Torino.
- Cimino, G., Del Duce, G., Kadonaga, L. K., Rotundo, G., Sisani, A., Stabile, G. et al. (1999). Time Series Analysis of Geological Data. *Chemical Geology*, 161 (1-3), 253-270.
- Devynck, P., Wang, G., Antar, G. y Bonhomme, G. (2000). The Hurst Exponent and Long-Time Correlation. *ECA*, 24B, 632-635.
- Falconer, K. (2003). *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications*. 2nd ed. United Kingdom: University of St. Andrews.
- Feder, J. (1988). *Fractals*. Oslo: University of Oslo-Department of Physics.
- Gutiérrez, H. E. (2008). *Estudio de geometría fractal en roca fracturada y series de tiempo*. Santiago de Chile: Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile.
- Mandelbrot, B. B. (1977). *The Fractal Geometry of Nature*. Oxford: International Business Machines Thomas J. Watson Research Center.
- Mandelbrot, B. B. y van Ness, J. W. (1968). Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications. *SIAM Review*, 10 (4), 422-437.
- Ortiz-Romero, A. I. (2008). *Construcción y programación de un algoritmo paralelo para determinar el exponente de Hurst*. México D.F.: Centro de Innovación y Desarrollo Tecnológico en Cómputo-Instituto Politécnico Nacional.
- Paredes, C. (1995). *Aplicación de la geometría fractal en las ciencias de la tierra*. Oviedo: Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Minas, Departamento de Matemática Aplicada y Métodos Informáticos.
- Peters, E. (1994). *Fractal Market Analysis (Applying Chaos Theory to Investment and Economic)*. New York: John Wiley and Sons.
- Quezada-Len, A. (2006). *Fractales y opinión pública: una aplicación del exponente de Hurst al estudio de la dinámica de la identificación ideológica*. Barcelona: Universidad de Barcelona, Departamento de Psicología Social.
- Racine, R. (2011). *Estimating the Hurst Exponent*. Zurich: Mosaic Group.
- Salvador, A. A. (1996). *Fractales y caos: estructura fractal de las series temporales. Coeficiente de Hurst. Aplicaciones*. Madrid: Universidad Politécnica de Madrid.
- Sierra-Juárez, G. (2007). Procesos Hurst y movimiento browniano fraccional en mercados fractales: valuación y aplicaciones a los derivados y finanzas. México D.F.: Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey.
- Soria, B. K. y Zúñiga, J. S. (s. f.). *Algunas estimaciones del coeficiente de Hurst para el IGPA chileno*. Coquimbo: Universidad Católica, Escuela de Ingeniería del Norte.
- Strecker, J. (2004). *Fractional Brownian Motion Simulation: Observing Fractal Statistics in the Wild and Raising Them in Captivity*. Wooster: The College of Wooster, Department of Mathematics and Computer Science.
- Toro-Salas, K. J., Murcia-Durán, L. F. y Domínguez-Cajeli, D. (2007). Cálculo de la dimensión fractal de la falla geológica del sur occidente de Colombia. *Ciencia e Ingeniería Neogranadina*, 17, 35-45.