



OBTENCIÓN DE MAPAS DE PSEUDOGRAVEDAD Y PSEUDOMAGNÉTISMO

OBTAINING MAPS OF PSEUDOGRAVITY AND PSEUDO-MAGNETISM

Fecha de recepción: 15 de abril de 2010 / Fecha de aprobación: 6 de febrero de 2011

Miguel Antonio Ávila Angulo

Resumen

A partir del comportamiento similar en términos matemáticos de los potenciales terrestres gravitatorio y magnético (relación de Poisson) y de su respectivo desarrollo en series de Fourier 2D, se diseña el filtro en derivadas parciales en el dominio de la frecuencia, que permite elaborar los mapas de pseudogravedad y pseudomagnetismo a partir de valores reales de cada campo mediante la metodología propuesta. Inicialmente deben llevarse los datos de cualquiera de los campos a una transformada de Fourier para luego multiplicar en el dominio de la frecuencia por el filtro diseñado y así obtener el pseudocampo, presentando una mejoría sustancial en el tratamiento de datos respecto a la técnica utilizada de derivadas totales utilizada hasta el presente.

Palabras claves: convolución, filtros, potencial terrestre, relación de Poisson, pseudocampo.

Abstract

Since similar behavior in mathematical terms of terrestrial gravitational and magnetic potential (Poisson ratio) and their respective development in 2D Fourier series, the design of partial differential filter in the frequency domain, which allows the maps were pseudo gravity and pseudo magnetism from real values of each field using the proposed methodology. Should initially carry data of any of the fields to a Fourier transform and then multiply in the frequency domain the filter and get the pseudo field. Presenting a substantial improvement in the treatment of data on the total derivative technique used to date.

Key words: convolution filters, ground potential, Poisson's ratio, pseudo field.

Introducción

Las manifestaciones reales del comportamiento de la Tierra se estudian a partir del conocimiento de sus campos de fuerza magnético y gravitatorio (utilizando una representación geométrica de sus líneas de campo), los cuales se asocian utilizando

modelos matemáticos que describen de la mejor manera posible el comportamiento intrínseco de los campos terrestres. Una primera aproximación al estudio de este comportamiento es el planteamiento de las funciones potenciales (modelamiento matemático del comportamiento natural del planeta) que se corresponden con las primeras



derivadas espaciales de los campos de fuerza terrestres.

Del comportamiento matemático similar de los potenciales gravitacional y magnético Poisson dedujo una relación matemática que permite obtener el potencial magnético a partir del potencial gravitatorio y viceversa, y por consiguiente obtener una relación final para los campos de fuerza correspondientes.

Para el estudio y análisis de dichos campos pueden aplicarse técnicas espectrales simultáneamente y así, hacer una separación de las variables independientes en cada caso, las cuales equivalen al número de onda y a la frecuencia. De hecho, las partes comunes a los dos campos permiten que su análisis se pueda llevar a cabo mediante técnicas de cómputo aplicando conceptos generales tanto físicos como matemáticos.

De lo anterior se desprende que si se conoce el campo gravitacional de un cuerpo puede predecirse el comportamiento magnético de éste, sin conocimiento previo de su estructura. Dicho procedimiento consiste en cambiar su densidad por material magnético con reducción al polo (dado que en un punto la magnetización inducida es una continuación analítica descendente) en proporción constante y asumiendo una dirección de magnetización, el campo magnético esperado es igual a la primera derivada (respecto a z) del campo gravitacional multiplicado por una constante que convierte el campo gravitacional en campo magnético (Dobrin, 1988).

Los mapas magnéticos calculados de esta manera se denominan pseudomagnéticos; lo mismo ocurre si los mapas de gravedad hubiesen sido obtenidos a partir de datos magnéticos, los cuales se conocen como seudo gravedad. De éstos pueden deducirse algunas conclusiones geológicas y geofísicas que permiten establecer la naturaleza del cuerpo.

1. Gravitación y gravedad

Desde la Antigüedad el conocimiento de la forma de la Tierra ha sido reflexionado por muchos pensadores, obteniendo como conclusión que la figura terrestre es un cuerpo cercano a un globo por su forma y posteriormente, su aproximación geométrica a un elipsoide (Mironov, 1981).

Esta aproximación es el resultado de la investigación, cuyo soporte está contenido en la teoría del inverso del cuadrado para la gravitación universal, propuesta por Isaac Newton a mediados del siglo XVII, la cual determina que dos cuerpos de masas M y m se atraen mutuamente en proporción directa del producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado del radio vector que une sus centros de masa, en la forma:

$$\vec{F}_G = -\frac{KMm}{r^2} \hat{r} \quad (1)$$

Si se supone un cuerpo de masa m situado en la superficie de la Tierra en reposo con respecto a ésta, la fuerza total que actúa sobre él es la suma vectorial de la fuerza gravitacional y la fuerza centrífuga debida a la rotación de la Tierra. La combinación de estas dos fuerzas proporciona la fuerza de gravedad dada en la forma:

$$(t_o \leq t \leq t_o + 5) \quad (2)$$

Utilizando las herramientas del cálculo vectorial, un campo vectorial puede obtenerse a partir de $\mathbf{F} = \text{Grad}$ (función potencial), lo que evidencia que la fuerza de gravedad tiene asociado un potencial de gravedad dado por:

$$g_n^m(t) \quad (3)$$

2. Geomagnetismo

Desde épocas remotas las propiedades atractivas de los materiales eran conocidas por los griegos y chinos, siendo estos últimos los inventores del compás magnético; pero es W. Gilbert quien inicialmente introduce la idea de que la Tierra es un gran imán, concepto que sirvió para que el inglés H. Halley (1656-1742) elaborara la primera carta magnética para la declinación. Con este soporte, Poisson (1781-1840) define los conceptos de dipolo e intensidad de magnetización, contribuyendo de esta forma a la teoría general del potencial y su aplicación al campo magnético (Udías, 1986).

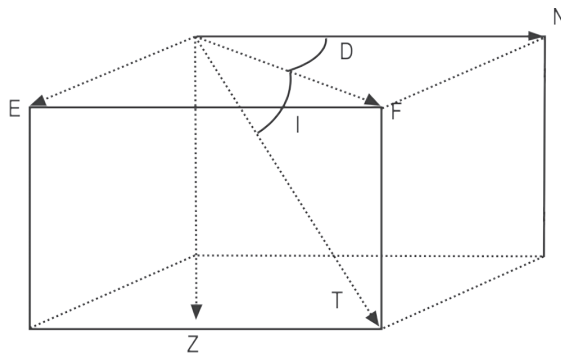


Figura 1. Componentes del campo magnético para un punto sobre la superficie terrestre.

Retomando la teoría de Poisson para el potencial magnético A , éste se puede separar en la suma de dos (2) potenciales correspondientes a los campos interno y externo, de modo que:

$$A(\vec{r}) = A_i + A_e \quad (4)$$

Para una región libre de fuentes magnéticas cerca de la superficie terrestre, se tiene que el potencial magnético cumple con la ecuación de Laplace, dada por la expresión:

$$\nabla^2 A(\vec{r}) = 0 \quad (5)$$

Cuya solución tanto para el campo interno como para el campo externo será en términos de funciones armónicas, en la forma:

$$A_e = a \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^n P_n(\cos \theta) (g_m \cos m \lambda + h_m \sin m \lambda) \quad (6)$$

siendo g_{nm} y h_{nm} constantes y P_{nm} los polinomios de Legendre.

La metodología del presente trabajo exige el conocimiento del desarrollo de la ecuación de Laplace en términos de una serie discreta de Fourier en 2D, ya que las mediciones se realizan sobre una porción pequeña de la superficie terrestre, la cual se puede asumir como un plano tangente a la superficie terrestre. Teniendo de esta manera la expresión final para el potencial en términos de una serie discreta doble de Fourier como:

$$V_{x,y} = V_k = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_m \ell^{z K_m} \ell^{i \vec{K}_m \cdot \vec{r}} \quad (7)$$

3. Filtros

El sistema intermedio entre una señal de entrada y una señal de respuesta se conoce como filtro. Lo que significa que dada una señal inicial continua $f(t)$, ésta es modificada obteniendo una señal de salida $g(t)$.



Teniendo presente que este procesamiento es realizado en un tiempo que no es real, se requiere que los datos iniciales (señal análoga) entren en una secuencia finita de números. El proceso de convertir la señal análoga en una secuencia numérica se denomina digitalización, la cual consta de dos operaciones:

- Muestreo (*sampling*): define el instante del tiempo en el cual la señal es observada (medida).
- Cuantización: es la conversión de los puntos de la muestra en una señal continua de amplitudes dentro de una secuencia numérica.

Aunque algunas aplicaciones geofísicas dependen solamente del carácter observacional de los datos, la digitalización es realizada en un espaciado desigual para luego interpolarlos a puntos equidistantes de tal forma que la digitalización puede ser desarrollada con suficiente densidad y muestreo garantizando semejanza entre lo análogo y lo digital.

Como conclusión se tendrá que, si se conocen las funciones propias, valores propios y las propiedades del filtro, la relación entre la señal de entrada y de salida será conocida. Por tanto, el filtro debe cumplir, por sus condiciones matemáticas, dos propiedades fundamentales:

- Principio de linealidad: descrita como la relación entre $f(t)$ y $f(w)$ del sistema, este principio también se conoce como principio de superposición (operador lineal).
- Principio estacionario: representado en la condición de independencia del tiempo, presentando su respuesta invariante del tiempo, para lo cual $f(t-\tau)$ tendrá una salida $g(t-\tau)$ para cualquier τ .

3.1 Diseño de filtros

En una primera aproximación, el diseño de filtros está sujeto al siguiente procedimiento:

3.1.1 Propiedad del filtro

Obedece a la característica del filtro diferenciando (Bath, 1978):

- Filtro de distorsión lenta: donde la señal de entrada es multiplicada por un factor constante H_0 con decaimiento en t_0 , conservando la señal de entrada.
- Filtro de distorsión de amplitud: aplicado bajo la condición de que el valor absoluto de la función del sistema no es constante, ya que el ángulo de fase $\phi(\omega)$ depende de la definición de la función de transferencia (función del sistema).
- Filtro de distorsión de fase: utilizado con la condición de que el ángulo de fase no es lineal. La importancia de éste radica en la proporcionalidad directa que ofrece entre la energía de $f(t)$ y $f(\omega)$.

3.1.2 Mecanismo de filtrado

En ciencias se pueden dar diferentes formas de filtrado, entre ellos:

- Filtrado natural: en el cual no hay control humano sobre el filtro.
- Filtro instrumental: mecanismo sobre el cual se ejerce control humano.
- Filtro matemático: técnica especial usada básicamente para conjuntos digitales, con los que se puede obtener una separación de ondas.

3.1.3 Propósito del filtro

Se diseña de acuerdo a la necesidad del procesamiento, que puede ser la separación de ruido o preparación de la señal para análisis espectral.

3.1.4 Parámetros del filtro

Requiere tenerse con certeza la señal que se desea, siendo esta decisión la base del proceso de filtrado y para lo cual se cuenta con el filtrado de frecuencia, filtrado de velocidad y el filtrado de polarización.

3.2 Filtrado espacial bidimensional

El filtrado bidimensional tiene una significación especial en el estudio de los campos gravitatorio y geomagnético, debido a que la utilización de filtros hace que pequeñas anomalías tengan una mayor resolución y por ende el análisis arroja mejores interpretaciones de los perfiles obtenidos partir de los datos iniciales, de una función de entrada $f(x, y)$ con una respuesta de pulso $g(x, y)$, (Bracewell, 1986).

Si de la muestra se escoge un intervalo igual a 0,5 ciclos/s, se obtendrá el número de onda de Nyquist (Bath, 1978), teniendo en cuenta que el muestreo en 2D puede ser no equidistante a lo largo de los ejes coordenados X, Y . Entonces la frecuencia de Nyquist ($\sigma = 1/2h$) no corresponde con los números de onda.

4. Relación de Poisson

Dado que los potenciales gravitatorio y magnético se pueden expresar matemáticamente de manera similar, y asumiendo que la densidad y la magnetización son constantes en todo el espacio y en todo el volumen, pueden relacionarse los potenciales A y U de los campos magnético y gravitacional, mediante la expresión:

$$A(\vec{r}) = \vec{M} \cdot \nabla \left(\frac{V(\vec{r})}{K\rho} \right) \quad (8)$$

De la condición de asumir la componente vertical de los dos campos para facilidad del estudio y multiplicando por el vector unitario correspondiente al campo gravitatorio, se sugiere la realización del producto escalar para obtener:

$$T\gamma_0 = \frac{M}{K\rho} \left(\frac{\partial}{\partial t} g \right) \quad (9)$$

Finalmente, la metodología arroja como resultado

$$T_{x,y} = T_k = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^n W_m \rho^{i.k_m \cdot \vec{r}} \rho^{z.k_m} \quad (10)$$

$$g_{x,y} = g_{jk} = \frac{1}{MN} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^n Wg_{mn} \ell^{i \cdot \bar{k}_{mn} \cdot \bar{r}} \ell^{z \cdot k_{mn}} \quad (11)$$

De las expresiones (10) y (11) se puede extraer la ecuación correspondiente al filtro diseñado, que corresponde con:

$$\frac{M}{K \rho} \left(\left(\left(\frac{2\pi m}{M} \right)^2 + \left(\frac{2\pi n}{N} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + i \left(\frac{\cos D}{\text{tg} I} \frac{2\pi m}{M} + \frac{\sin D}{\text{tg} I} \frac{2\pi n}{N} \right) \right) \quad (12)$$

5. Procedimiento metodológico

Para la construcción del mapa de pseudomagnetometría utilizando la metodología propuesta en el presente trabajo, se toma la grilla de valores reales de gravedad, cuya representación se tiene en la siguiente figura (1)

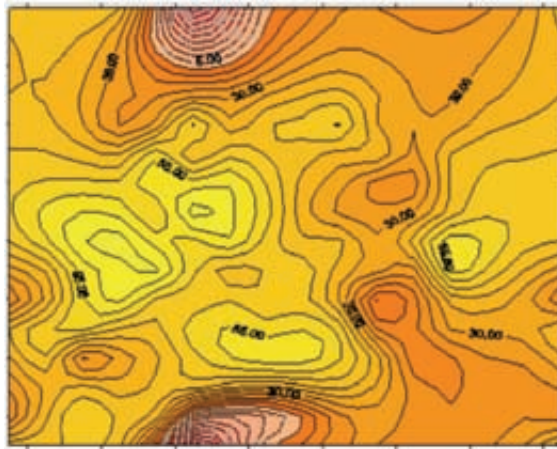


Figura 2. Mapa de valores reales de gravedad en mgal.

Los datos de gravedad se deben disponer en una grilla cuadrada de valores, cuyas filas y columnas deben ser de forma de potencias de dos (2, 4, 8, 16, 32, 64...), con la idea de poder llevarlos al dominio de la frecuencia, lo que indica tener una disposición para una transformada de Fourier en 2D. El dominio de la frecuencia de los valores de gravedad se muestra en la figura 2.

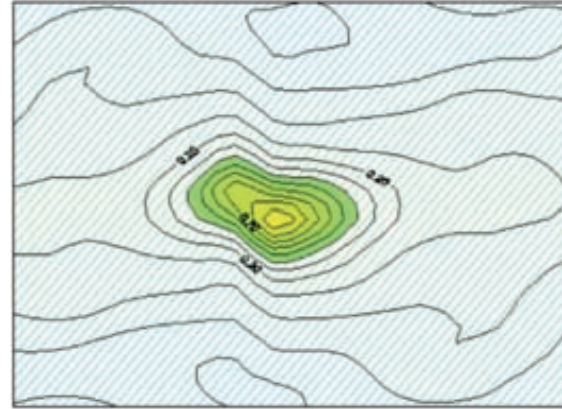


Figura 3. Mapa de valores de gravedad en el dominio de la frecuencia en mgal

Una vez que se tienen los valores de la transformada rápida de Fourier 2D, se procede a multiplicar esta transformada por el filtro diseñado en el presente trabajo, luego se llevan estos valores al dominio del tiempo mediante una transformada inversa de Fourier, arrojando datos cuya representación gráfica es:

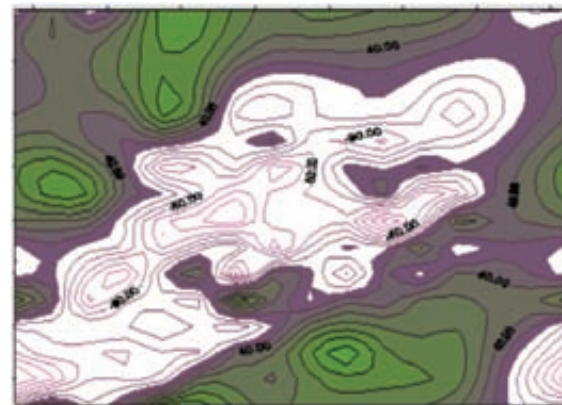


Figura 4. Representación del campo pseudomagnético en el dominio del tiempo

En la figura 3 se muestra el mapa de pseudomagnetometría que arroja la metodología propuesta, el cual presenta una gran similitud con el mapa de magnetometría de valores reales, cuya gráfica se tiene a continuación



Figura 5. Mapa de valores del campo magnético real

El proceso realizado para obtener el pseudocampo magnético es idéntico para obtener el campo de pseudogravedad.

6. Análisis de resultados

Una vez obtenidos los mapas de pseudogravedad y pseudomagnetismo podemos decir que los mapas son de un aceptable resultado ($\rho=0,97$) debido a su gran concordancia entre los mapas de valores reales y los obtenidos por la metodología del trabajo.

Los datos de cualquier modelo de pseudogravimetría o pseudomagnetometría presentan un mayor ajuste con el modelo real que los obtenidos a partir de la relación de Poisson con derivadas verticales totales, debido a que la metodología presenta una mayor resolución en el espectro de energía, facilitando así la interpretación geológica y geofísica de la zona de estudio.

La limitante existente entre la similitud de las señales análogas y digitales desaparece cuando la señal es transformada en el dominio de la frecuencia y su semejanza en este dominio es mayor al 97%, teniendo así que la poca disparidad final dependerá del factor $M/K\rho$ obtenido del desarrollo matemático del presente trabajo

7. Conclusiones

El presente trabajo contiene el desarrollo teórico y diseño de un filtro general cuyo mecanismo de filtrado es netamente matemático, con características de paso alto, realizando su proceso en el dominio de la frecuencia.

El filtro obtenido y presentado como propuesta de metodología contiene una rotación al polo y una continuación analítica descendente necesarias para una mayor resolución de las anomalías que se desean estudiar, tanto gravimétricas como magnéticas.

La metodología propuesta presenta una mayor estabilidad debido a las propiedades de simetría ofrecidas cuando se trabaja en el dominio de la frecuencia, la cual incluye las derivadas direccionales y la relación que guardan los campos respecto a la primera derivada vertical.

La limitante existente entre la similitud de las señales análogas y digitales desaparece cuando la señal es transformada al dominio de la frecuencia y su semejanza en este dominio es mayor a un rango del 0,97%; la poca disparidad final dependerá del factor de escala M/K (momento dipolar magnético / constante de gravitación * densidad), resultante del desarrollo matemático, para la obtención del filtro que hemos denominado "filtro de Poisson".

Referencias

- [1] Dobrin, Milton. *Geophysical prospecting*, 5ª edición, Singapore, Mc Graw-Hill, pp. 150-165, 1988.
- [2] Mironov, V. S. *Curso de prospección gravimétrica*. Bogotá, Reverté. 1977.
- [3] Udias, Agustín. *Fundamentos de geofísica*. Madrid, Alhambra, 1986.
- [4] Bath, Markus. *Spectral analysis in geophysics*. Elsevier, Netherlands, pp. 95-113, 1982.
- [5] Bracewell, Ronald. *The Fourier transform and It's applications*. Singapore, Mac Graw-Hill, pp. 60-80, 1986.

MIGUEL ANTONIO ÁVILA ANGULO

Licenciado en Física, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá. Ingeniero catastral y geodesta, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá. Especialista en Sistemas de Información Geográfica (SIG), Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

Docente de planta en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Facultad de Ingeniería, área de Geodesia. Catedrático de la Escuela de Ingenieros Militares en el área de Geodesia Aplicada. Catedrático de Ciencias Físicas en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Cooperativa de Colombia.