

# MODELADO MULTIESCALA DE UNA SUPERFICIE DE REFERENCIA VERTICAL PARA COLOMBIA

## MULTISCALE MODELING OF A SURFACE OF VERTICAL REFERENCE FOR COLOMBIA

Fecha de recepción: 12 de julio de 2007, Fecha de aprobación: 15 de septiembre de 2007

Laura Téllez Pedroza • Iván Herrera Pinzón • Fredy Bolívar Gómez

### Resumen

Este proyecto pretende combinar recientes metodologías computacionales y avances en el desarrollo del potencial gravitacional y en la solución de la ecuación de Stokes (la introducción de la teoría de Wavelet esféricas), con el objeto de obtener un modelo de ondulaciones cuasi-geoidales (alturas anómalas) para Colombia, mediante el uso de la técnica remove-restore.

**Palabras clave:** geodesia, cuasi-geoide, wavelet, análisis multiescala, nivelación GPS.

### Abstract

This project pretends combine recent computational methodologies and advance in the Gravitational Potential's development and Stokes equations solution (introduction to spherical wavelet's theory), with the purpose to obtain a quasi-geoid undulation model (anomalous heights) for Colombia, using remove-restore technique.

**Key words:** geodesy, quasi-geoid, multiscale, wavelet, GPS leveling.

## 1. Introducción

Uno de los problemas más interesantes en la Teoría del Potencial Gravitacional es el Valor en la Frontera (PVF), que consiste en determinar el campo gravitacional en el exterior del espacio, dada la densidad de la Tierra, pero con la restricción de un potencial en la frontera. En otras palabras, con una

función arbitraria dada en una superficie  $S$ , determinar una función  $V$  que sea armónica, ya sea dentro o fuera de  $S$  y que en  $S$  asuma los valores de la función preestablecida. Funciones de frontera de uso común en la Geodesia son los valores de neopotencial (Dirichlet), perturbaciones en la gravedad (Neumann) y anomalías de gravedad (Robin). Sin embargo, en el contexto Geodésico, la frontera, i.e., el geoide, debe ser considerado como desconocido. Esto es conocido como el problema del valor en la frontera geodésico y, usualmente, se soluciona utilizando Dirichlet y Robin [1].

En particular, el caso geopotencial tiene dos enfoques diferentes:

la ecuación de Poisson ( $\nabla^2 V = -4\pi G\rho$ ), para el interior del espacio ( $\Omega_{int}$ ) y la ecuación de Laplace para el exterior del espacio ( $\Omega_{ext}$ ).

### 1.1. Cálculo del cuasi-geoide

Al aplicar la tercera identidad de Green al geopotencial  $W$  es posible desarrollar la fórmula:

$$-2\pi W + \iint_S \left[ W \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{l} \right) - \left( \frac{1}{l} \right) \frac{\partial W}{\partial n} \right] dS + 2\pi\omega^2(x^2 + y^2) + 2\omega^2 \iiint_{tierra} \frac{d\rho}{r} = 0 \quad (1)$$

Donde  $S$  representa la superficie física de la Tierra,  $l$  es la distancia entre un punto fijo  $P$ , al cual están referidos el primer y el tercer término y el elemento variable de superficie  $dS$ ,  $n$  es la normal a la superficie física en  $dS$ , en dirección hacia afuera,  $\partial W / \partial n$  es la componente de la normal vectorial de la gravedad a  $S$ , el eje  $z$  corresponde al eje de rota-

ción de la Tierra,  $\omega$  es la velocidad angular y  $l$  es la distancia entre  $P$  y el elemento de volumen  $dv$ .

Esta ecuación relaciona la superficie terrestre  $S$  con el potencial  $W$  y su derivada normal  $\partial W / \partial n$  y constituye la formulación matemática más directa del problema de la determinación gravimétrica de la configuración de la Tierra  $S$ . El problema de (1) es despejar  $S$ . Debido a que (1) es una ecuación integral no lineal no es posible resolverla directamente; sin embargo, es posible encontrar una solución aproximada, si (1) se linealiza y se introducen los valores aproximados apropiados [1]. Si  $S$  corresponde con el geode, su aproximación está dada por la superficie del elipsoide de referencia (Stokes). Si  $S$  es la superficie física de la Tierra, la aproximación está dada por el teluroide (Molodensky) [2].

Utilizando la solución de Molodensky se obtiene una solución para (1) dada por la serie:

$$T = T_0 + T_1 + \dots \quad (2)$$

donde: 
$$T_0 = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} G_0 S(\psi) d\sigma, \quad (3)$$

con  $G_0 = \Delta g$ ,

$$T_1 = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} G_1 S(\psi) d\sigma \quad (4)$$

De esta forma, la fórmula de Bruns [1] da como resultado:

$$\zeta = \zeta_0 + \zeta_1 = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma + \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} G_1 S(\psi) d\sigma, \quad (5)$$

donde 
$$G_1 = \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{h - h_p}{l_0^3} \left( \Delta g + \frac{3G}{2R} \zeta_0 \right) d\sigma \quad (6)$$

Aquí, lo denota la distancia esférica,  $h$  la altura sobre el elipsoide del punto de cálculo y  $h_p$  es la altura elipsooidal de los puntos que contribuirán al valor de la ondulación<sup>1</sup> en el punto de cálculo. En esta última ecuación el término que contiene  $\zeta_0$  se puede omitir sin afectar la precisión.

<sup>1</sup> En la teoría de Molodensky  $N$ , la ondulación es conocida como altura anómala.

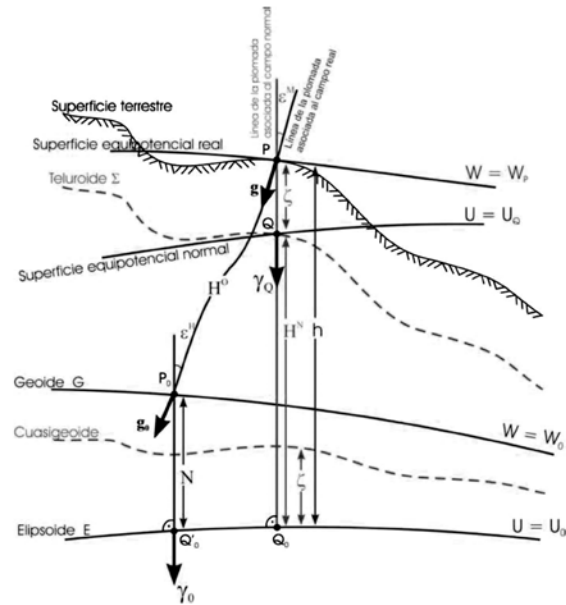


Figura 1. Superficies de referencia verticales

La figura 1 muestra un esquema de las superficies de referencia verticales que resultan de aplicar la técnica de Molodensky [3].

El teluroide  $\Sigma$  es una superficie conformada por aquellos puntos  $Q$ , cuyo valor de potencial normal  $UQ$  es idéntico al potencial de gravedad verdadero  $WP$  de los puntos  $P$  correspondientes, ubicados sobre la superficie terrestre. La conexión entre  $P$  y  $Q$  se define a través de la línea perpendicular (normal) al elipsoide que pasa por  $P$ ; la distancia entre ellos se conoce como altura anómala  $\zeta$ . La altura normal corresponde con la separación entre el teluroide y el elipsoide (distancia entre  $Q$  y  $Q_0$ ). Si de la superficie terrestre se descuenta la altura normal  $H^N$ , a lo largo de la perpendicular al elipsoide, se obtiene el cuasigeoide. Dado que el potencial  $WP$  varía de punto a punto sobre la superficie de la Tierra, el teluroide  $\Sigma$  y, en consecuencia, el cuasigeoide no son superficies equipotenciales y, por lo tanto, no tienen un significado físico directo [1].

## 2. Modelamiento multiescala de la superficie de referencia vertical

El problema del valor de la frontera geodésico comprende la determinación de la superficie de la

Tierra y de su campo de gravedad externo, a partir de observaciones sobre su superficie [4]. El potencial perturbado  $T$  en se define como la diferencia entre el potencial real y el potencial normal asociado al elipsoide de referencia; usualmente, esta representación es llevada a cabo mediante armónicos esféricos. El análisis multiescala se presenta como una herramienta capaz de aproximar una función, considerando el carácter dinámico de la variable espacial.

### 2.1. Evaluación numérica

Para la evaluación numérica se utiliza el siguiente procedimiento:

1. La suma infinita  $\sum_{j=j_0}^{\infty} \dots$  se puede expresar de la forma  $\sum_{j=j_0}^{J_{max}-1} \dots$  para cierto  $J_{max}$ .
2. Una integral de la forma:

$$(\Psi_j * T)(x) = \int_{\Omega_R} \Psi_j(x, y)T(y)d\omega(y), \quad (7)$$

se puede aproximar por medio de la suma:

$$\sum_{i=1}^{N_j} \omega_i^j \Psi_j(x, y_i^j)T(y_i^j), \quad x \in \overline{\Omega_R^j} \quad (8)$$

con pesos de integración  $\omega_i^j \in \mathbb{R}$  y puntos  $y_i^j \in \Omega_R$  sobre una grilla equiangular.

La grilla corresponde al parámetro  $m$  que denota el máximo grado para la integración dado sobre la esfera unitaria  $\Omega$  por  $[0, \pi] \times [0, 2\pi]$ ,  $k, l = 0, \dots, m$ .

Los correspondientes pesos en la integración son<sup>2</sup> [5]:

$$\omega_{k,l} = \frac{2\pi}{m+1} \frac{4}{m+1} \sin\left(\frac{\pi}{m+1}\right) \sum_{s=0}^{[\frac{m+1}{2}-1]} \frac{1}{2s+1} \sin\left((2s+1)l \frac{\pi}{m+1}\right) \quad (9)$$

### 2.2. Representación del potencial mediante el uso de las Wavelet esféricas

Con la anterior evaluación numérica se obtiene la representación del potencial gravitacional en tér-

<sup>2</sup> Cabe anotar que el parámetro  $m$  debe ser un número impar.

minos de la función de escala y la función Wavelet escogida con su correspondiente dual [4]: donde

$\omega_i^{j_0}, \omega_i^j$  Pesos de integración .

$v_i^{\Phi_{j_0}}$  Coeficientes de escala  $j_0$ .

$v_i^{\Psi_j}$  Coeficientes Wavelet  $j$ .

$y_i^{j_0}, y_i^j$  Puntos que pertenecen a la esfera en la escala respectiva.

$N_{j_0}, N_j$  Número de puntos y coeficientes en el nivel  $j_0$  y  $j$  respectivamente.

$R$  Radio de la esfera de referencia.

$GM$  Constante gravitacional multiplicada por la masa de la Tierra.

$\Phi_{j_0}$  Kernel asociado a la función de escala en el nivel  $j_0$ .

$\tilde{\Psi}_j$  Kernel asociado a la función Wavelet dual.

Los coeficientes  $t_i^{\tilde{\Psi}_j}$  y  $t_i^{\Phi_{j_0}}$  son el resultado del siguiente procedimiento [4]:

$$\frac{GM}{R} v_i^{\tilde{\Psi}_j} = \int_{\Omega_R} \tilde{\Psi}_j(y_i^j, y)V(y)d\omega(y) \quad (11)$$

$$\frac{GM}{R} v_i^{\Phi_{j_0}} = \int_{\Omega_R} \Phi_{j_0}(y_i^{j_0}, y)V(y)d\omega(y) \quad (12)$$

El potencial de perturbación se calcula mediante la sustracción del potencial normal ( $V_{ell}$ ) al potencial real ( $V$ ). Este potencial de perturbación tiene la siguiente representación multiescala [4]:

$$T(x) = \frac{GM}{R} \sum_{i=1}^{(N_{j_0}+1)^2} \omega_i^{j_0} t_i^{\Phi_{j_0}} \Phi_{j_0}(x, y_i^{j_0}) + \frac{GM}{R} \sum_{j=j_0}^{J_{max}-1} \sum_{i=1}^{(N_j+1)^2} \omega_i^j t_i^{\tilde{\Psi}_j} \tilde{\Psi}_j(x, y_i^j) \quad (13)$$

Los coeficientes Wavelet  $t_i^{\tilde{\Psi}_j}$  y de escala  $t_i^{\Phi_{j_0}}$  son el resultado del siguiente procedimiento [4]:

$$\frac{GM}{R} t_i^{\Phi_{j_0}} = \frac{GM}{R} v_i^{\Phi_{j_0}} - (\Phi_{j_0} * V_{ell})(y_i^{j_0}) \quad (14)$$

$$\frac{GM}{R} t_i^{\tilde{\Psi}_j} = \frac{GM}{R} v_i^{\tilde{\Psi}_j} - (\tilde{\Psi}_j * V_{ell})(y_i^j) \quad (15)$$

Con la ayuda de las ecuaciones (14) y (15) se obtienen los coeficientes del potencial de perturbación

$$t_i^{\Phi_{j_0}} = v_i^{\Phi_{j_0}} - V_{cil}^{\wedge}(0,0)Y_{0,0}\left(\frac{y_i^{j_0}}{R}\right) - \sum_{n=2}^m \varphi_{j_0}(n)V_{cil}^{\wedge}(n,0)Y_{n,0}\left(\frac{y_i^{j_0}}{R}\right) \quad (16)$$

$$y, \quad t_i^{\Psi_j} = v_i^{\Psi_j} - \sum_{n=2}^m \psi_j(n)V_{cil}^{\wedge}(n,0)Y_{n,0}\left(\frac{y_i^j}{R}\right), \quad (17)$$

La anomalía de gravedad se da a través de la fórmula:

$$\Delta g(x) = -\frac{\partial T}{\partial r_x}(x) - \frac{2}{|x|}T = \delta g(x) - \frac{2}{|x|}T, \quad (18)$$

lo que se conoce como la ecuación fundamental de la geodesia física [1], cuya representación multiescala corresponde con [4]:

$$\Delta g(x) = \frac{GM}{R|x|} \sum_{i=1}^{(N_{j_0}+1)^2} \omega_i^{j_0} t_i^{\Phi_{j_0}} \Phi_{j_0}^{\Delta g}(x, y_i^{j_0}) + \quad (19)$$

$$\frac{GM}{R|x|} \sum_{j=j_0}^{j_{max}-1} \sum_{i=1}^{(N_j+1)^2} \omega_i^j t_i^{\Psi_j} \Psi_j^{\Delta g}(x, y_i^j) \quad (20)$$

con:

$$\Phi_{j_0}^{\Delta g}(x, y_i^{j_0}) = \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \varphi_{j_0}^{\Delta g}(n) \frac{2n+1}{4\pi R^2} \left(\frac{R^2}{|x||y_i^{j_0}|}\right)^{n+1} P_n\left(\frac{x \cdot y_i^{j_0}}{|x||y_i^{j_0}|}\right) \quad (21)$$

$$\Psi_j^{\Delta g}(x, y_i^j) = \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \psi_j^{\Delta g}(n) \frac{2n+1}{4\pi R^2} \left(\frac{R^2}{|x||y_i^j|}\right)^{n+1} P_n\left(\frac{x \cdot y_i^j}{|x||y_i^j|}\right) \quad (22)$$

### 2.3. Representación del potencial mediante el uso de las Wavelet esféricas

Los detalles de la anomalía de altura son determinados por una convolución de la Transformada Wavelet [6] de las anomalías de gravedad con un kernel de integración, que resulta de una convolución entre la función de Stokes y la función Wavelet de escala  $j$ . El kernel de integración es finito para distancias esféricas pequeñas ( $d\Omega$ ), por lo tanto, no es necesario introducir ninguna corrección adicional para zonas interiores, es decir, la singularidad en la ecuación de Stokes es removida [6].

Para funciones Wavelet de banda limitada, donde los coeficientes de la serie son diferentes de 0 para un rango limitado, la suma puede ser acotada hasta  $j = 2^{j_0+1} - 1$ ; sin embargo, el cálculo exacto consume mucho tiempo, por lo que se hace necesario escoger adecuadamente  $j_0$ . Otro problema radica en la necesidad de realizar una suma infinita en (21) para la reconstrucción de la función.

Para efectos computacionales la escala máxima es dada por el teorema de muestreo. Si el ancho de banda de la función es mayor que la resolución de los datos, efectos de traslape pueden ocurrir. Consecuentemente, la escala  $j_0$ , a la que se truncan los datos, es dada conjuntamente por la elección de la función Wavelet y la resolución de los datos.

En síntesis, la técnica Wavelet divide la información en varias bandas espectrales por medio de un filtrado pasa banda y luego determina la figura por medio de la manipulación de cada banda espectral por separado. Entonces, son necesarias dos convoluciones por cada banda espectral, donde la segunda convolución se asemeja a la integración utilizando la función de Stokes [6].

De esta forma, las ecuaciones (5) y (6) en términos Wavelet se convierten en

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma} \sum_{j=0}^{\infty} \left( WT_j(\Delta g) * (S(d_\Omega) * \tilde{\Psi})_j \right) + \frac{R}{4\pi\gamma} \sum_{j=0}^{\infty} \left( WT_j(G_1) * (S(d_\Omega) * \tilde{\Psi})_j \right) \quad (23)$$

en la cual:

$$G_1 = \frac{R^2}{2\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \left( WT_j\left(\frac{h-h_p}{l_0^3}\right) * (WT_j(\Delta g)) \right) \quad (24)$$

$$S(d_\Omega) := S(\psi)$$

$WT_j(V; \cdot)$  indica la Transformada de Wavelet de la función  $V$  en la escala  $j$

### 3. Análisis de los resultados

Para evaluar los resultados obtenidos en cuanto a alturas anómalas (ondulaciones), se seleccionaron un total de 50 puntos divididos en siete zonas distribuidas en la región de estudio, de los cuales se

conocen perfectamente sus valores de coordenadas geodésicas ( $\phi$ ,  $\lambda$ ,  $h$ ), así como su altura nivelada (altura ortométrica). Los puntos elegidos en cada zona no tienen una separación mayor a 5 km. En una primera aproximación, es posible afirmar que el error en la ondulación está dado por la cantidad  $E = h - H_c - \zeta$ , en la cual corresponden a la altura elipsoidal, altura ortométrica (certificada por el IGAC) y la ondulación, respectivamente [3].

Punto	h	C	H	E
CD-240	2579,43	27,85	2556,488	-4.9
CD-239-A	2579,78	27,84	2556,733	-4.79
CD-237-A	2579,03	27,79	2555,907	-4.67
CD-225-A	2577,63	27,7	2554,538	-4.61
CD-245-A	2578,27	27,76	2555,234	-4.72
CD-246-A	2577,87	27,75	2554,797	-4.67
CD-222	2572,38	27,56	2549,291	-4.48
CD-263-A	2577,71	27,64	2554,600	-4.53
CD-262	2578,44	27,61	2555,202	-4.38
BOGOTA-2	2661,57	27,54	2638,257	-4.22
C- TI 464	2597,07	27,48	2573,795	-4.20
C- Ti 463	2601,53	27,48	2578,253	-4.20
2-A-CD	2583,03	27,43	2559,708	-4.11
CD-316-A	2581,94	27,38	2558,596	-4.03
CD-175	2578,41	27,33	2555,023	-3.95
CD-176	2578,79	27,31	2555,425	-3.95
CD-177-A	2577	27,3	2553,678	-3.98
CD-178	2579,86	27,27	2556,438	-3.85
CD-320-A	2578,96	27,25	2555,564	-3.86
CD-349-A	2580,8	27,21	2557,358	-3.77
CD-350	2579,88	27,18	2556,503	-3.80
CD-373	2580,67	27,15	2557,264	-3.74

Tabla 1. Error relativo. Zona I. Bogotá (Cundinamarca)

En la tabla 1 se presenta el resultado de este análisis. Se podría suponer que los valores de las ondulaciones son incorrectos, pues de éstas se derivan errores que alcanzan hasta los 5 m. Sin embargo, este error –conocido como *error relativo*– está asociado a otras fuentes de error diferentes al cálculo de las ondulaciones, como por ejemplo, la discrepancia entre el geoides y el datum vertical clásico del país y la omisión de la corrección gravimétrica en el ajuste de las redes de nivelación [2].

Con el fin de dar solución a los problemas que plantea la metodología del error relativo, en [7] se presenta una metodología para el cálculo de las alturas ortométricas utilizando las ventajas del posicionamiento diferencial, que reduce la magnitud del error y permite calcular cotas de puntos a partir de modelos geoidales con una precisión similar a la que ofrece una nivelación de segundo orden<sup>3</sup> siempre que la distancia entre los puntos por nivelar no sea mayor a 5 km. Con el propósito de realizar este análisis se definen las siguientes abreviaciones:

- $h$  – Altura elipsoidal.
- $\zeta$  – Altura anómala (ondulación).
- $HGPS$  – Altura nivelada con metodología  $GPS^4$ .
- $H_c$  – Altura calculada por nivelaciones convencionales<sup>5</sup>, ajustada y certificada.
- $Dif$  – Es la diferencia de  $HGPS$  con  $H_c$ .

Los resultados obtenidos para las mismas zonas de estudio se muestran en la tabla 2. Si bien, la metodología diferencial [7] permite controlar la propagación de los errores en la determinación de las alturas, existen puntos para los que se presentan diferencias que alcanzan los 50 cm con su valor real. Sin embargo, este error es tolerable en este tipo de metodologías<sup>6</sup>, de lo que se concluye que las alturas anómalas calculadas satisfacen la precisión requerida.

Punto	h	C	HGPS	Hc	Dif.
CD-240	2579,43	27,85	2556,488	2556,488	0,00
CD-239-A	2579,78	27,84	2556,788	2556,733	0,05
CD-237-A	2579,03	27,79	2556,029	2555,907	0,12
CD-225-A	2577,63	27,7	2554,666	2554,538	0,13
CD-245-A	2578,27	27,76	2555,193	2555,234	0,04
CD-246-A	2577,87	27,75	2554,750	2554,797	0,05
CD-222	2572,38	27,56	2549,384	2549,291	0,09
CD-263-A	2577,71	27,64	2554,580	2554,600	0,02
CD-262	2578,44	27,61	2555,282	2555,202	0,08

(Continúa)

<sup>3</sup>  $8 \times \sqrt{K}$  siendo K la distancia en km.  
<sup>4</sup> Metodología de cálculo de alturas sobre el nivel del mar dada por el IGAC [7].  
<sup>5</sup> Nivelación trigonométrica o geométrica.  
<sup>6</sup> Para mayores referencias de cómo calcular la consistencia interna del modelo y de cómo el modelo oficial para Colombia, GEOCOL/2004, alcanza precisiones superiores a los 80 cm, ver [1].



Punto	h	C	HGPS	Hc	Dif.
BOGOTA-2	2661,57	27,54	2638,441	2638,257	0,18
C- Ti 464	2597,07	27,48	2573,940	2573,795	0,15
C- Ti 463	2601,53	27,48	2578,343	2578,253	0,09
2-A-CD	2583,03	27,43	2559,833	2559,708	0,13
CD-316-A	2581,94	27,38	2558,745	2558,596	0,15
CD-175	2578,41	27,33	2555,204	2555,023	0,18
CD-176	2578,79	27,31	2555,550	2555,425	0,12
CD-177-A	2577	27,3	2553,713	2553,678	0,03
CD-178	2579,86	27,27	2556,552	2556,438	0,11
CD-320-A	2578,96	27,25	2555,613	2555,564	0,50
CD-349-A	2580,8	27,21	2557,438	2557,358	0,08
CD-350	2579,88	27,18	2556,493	2556,503	0,01
CD-373	2580,67	27,15	2557,264	2557,264	0,00

Tabla 2. Metodología diferencial GPS. Zona I. Bogotá (Cundinamarca)

### Conclusiones y recomendaciones

El análisis del comportamiento de las alturas anómalas fue realizado en siete zonas con características variadas en relación con la geología y geomorfología. Por esto se presentan discrepancias en las diferencias, tanto en las relativas como en las calculadas con la metodología GNSS, entre las cotas verdaderas y las calculadas apli-

cando el modelo (cuasi)- Geoidal. Estas diferencias varían entre los 0,13 m y los 5 m, en las relativas, y 0,01 m y 0,50 m en el análisis diferencial.

Estos resultados presentan una precisión similar, si se compara con los modelos con que se cuenta en la actualidad para Colombia (figura 2). La baja densidad de información gravimétrica con que se cuenta, así como su precisión (red de tercer orden) hacen que la interpolación de los valores de gravedad y, por lo tanto, las anomalías de gravedad regionales con las que finalmente se calculará el modelo no cuenten con la exactitud requerida. Las reducciones gravimétricas que se realizaron no son las más adecuadas, puesto que se dio por descontado el efecto que tienen la atmósfera y la transformación entre sistema de marea cero y sistema libre de marea para el modelo de potencial global. De manera similar, el modelo de geopotencial que se utilizó para el cálculo de las anomalías derivadas del modelo global (EIGEN-2) no es el mejor en la actualidad, sólo se tuvo en cuenta por la disponibilidad de información en la red (Coeficientes Wavelet).

Además, la elección de la Wavelet que se utilizó, tanto para el tratamiento del potencial global como para la resolución de la fórmula (23), se basó en criterios puramente computacionales, puesto

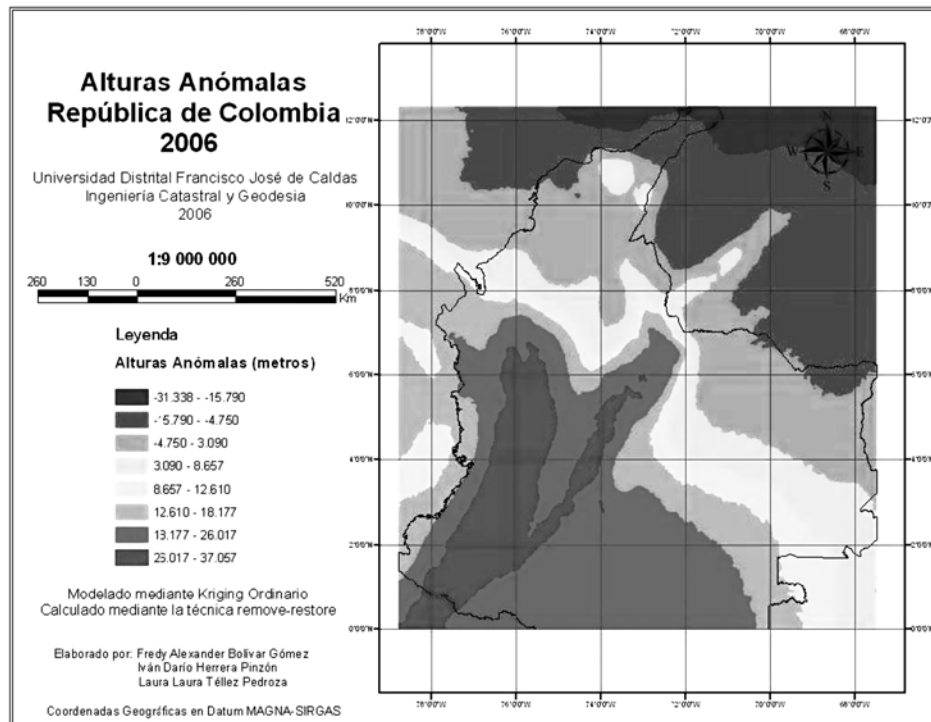


Figura 2. Alturas anómalas –modelo (cuasi) Geoidal

que no se contaba con equipos con suficiente capacidad para combinar el volumen de coeficientes Wavelet para el modelo del geopotencial con que se contaba. El uso de otros kernels (gaussiano, polinomial cúbico, etc.) utilizaría la totalidad de los coeficientes, aumentando la precisión del modelo, pero elevaría significativamente los tiempos de cálculo y los requerimientos de hardware. Sería interesante evaluar otros métodos de interpolación diferentes al Kriging Ordinario, así como variar la Wavelet utilizada por una que empleara la totalidad de los coeficientes Wavelet (por ejemplo, la Wavelet Gaussiana, la Abel-Poisson o la Polinomial cúbica), además de calcular el modelo de potencial global con todos los niveles de descomposición posibles. Además, dado que los coeficientes de integración Wavelet no fueron calculados en este

proyecto, sino que fueron descargados de la red, sería bueno adaptar las metodologías para realizar un cálculo propio de dichos coeficientes.

También se podría pensar en aprovechar la propiedad de multirresolución de la función Wavelet para combinar diferentes modelos Geopotenciales, aprovechando las características de cada uno. Con el fin de permitir una mejor aproximación a un modelo local, se pensaría que con ello mejoren los resultados obtenidos por la técnica Remove-Restore.

## Agradecimientos

Queremos extender un sincero agradecimiento al extenso aporte bibliográfico hecho por el profesor Willi Freeden desde la Universidad de Kaiserslautern (Alemania).

## Referencias bibliográficas

- [1] Heiskanen, W. y Moritz, H. (1967) Geodesia Física. W. H. Freeman and Company, San Francisco y Londres.
- [2] Torge W. (2003) Geodesy. Berlín- New York: Walter de Gruyter.
- [3] Sánchez, L. (2003) Determinación de una Superficie de Referencia Vertical para Colombia. IGAC.
- [4] Freeden W. "Multiscale Modelling of Spaceborne Geodata", European Consortium for Mathematics in Industry. Kaiserslautern, 1999.
- [5] Freeden, W. y Flenger Gutting M. Multiscale Modelling from EIGEN-1S, EIGEN-2S, EIGEN-GRACE01S, GGM01S, UCPH2002\_0.5, EGM96: Wavelet Coefficients, Variances and Reconstruction.
- [6] Nguyen, T. y Strang G. (1995) Wavelets and Filter Banks. Wesley – Cambridge Press.
- [7] Sánchez, L. (1997) Guía metodológica para la determinación de alturas sobre el nivel medio del mar utilizando el sistema GPS. IGAC.

## Autores

### Laura Téllez Pedroza

Ingeniera Catastral y Geodesta. Universidad Distrital Francisco José de Caldas (Bogotá, Colombia).  
Calculista de la Oficina de Cálculos y Geodesia Física e IGAC. Dos años.  
Correo electrónico: ltellez@igac.gov.co

### Iván Darío Herrera Pinzón

Ingeniero Catastral y Geodesta. Universidad Distrital Francisco José de Caldas (Bogotá, Colombia).  
Calculista de la Oficina de Cálculos y Geodesia Física. IGAC. Dos años.  
Correo electrónico: iherrera@igac.gov.co

### Fredy Alexander Bolívar Gómez

Ingeniero Catastral y Geodesta, Universidad Distrital Francisco José de Caldas (Bogotá, Colombia).  
Calculista de la Oficina de Cálculos y Geodesia Física. IGAC. Dos años.  
Correo electrónico: fabolivar@igac.gov.co