



REVISTA UD Y LA GEOMÁTICA

<http://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/UDGeo/index>

DOI:<http://dx.doi.org/10.14483/udistrital.jour.udgeo.2013.7.a10>

REVISIÓN

Modelo de representación del espacio geográfico mediante matroides orientados

Geographic space representation model by oriented matroids

José Antonio Valero Medina^a

Citation / Para citar este artículo: Valero Medina, J. (2013). Modelo de representación del espacio geográfico mediante matroides orientados. UD y la Geomática, (7), pp. 99 – 110.

Fecha de recepción: 16 de Mayo de 2013 / **Fecha de aceptación:** 01 de Noviembre de 2013

RESUMEN

En el contexto de los sistemas de información geográfica (SIG) se emplea una noción clásica del espacio que abarca, entre otros, dos conceptos: la continuidad y la externalidad. Estas nociones se encuentran presentes en las dos formas de representación basadas en campo y en objeto. Ya que cualquiera de estas dos formas conlleva básicamente un ejercicio de muestreo, el modelo de la realidad espacial así obtenido carece de exactitud y precisión, además de posición real, en muchas ocasiones. Dadas las deficiencias que tiene la representación de un modelo continuo (basado en los números reales \mathbb{R}) implementado en un entorno de computación el cual es finito y no continuo (basado en un subconjunto de los números enteros \mathbb{Z}), han aparecido propuestas alternativas que pretenden subsanar dichas deficiencias. Una de las más prometedoras son los matroides orientados, esta propuesta está basada en estructuras combinatoriales complementadas con el concepto de convexidad. A lo largo de la presente revisión temática se exponen los conceptos básicos que subyacen a los matroides orientados y se relacionan algunas áreas de aplicación potencial en la representación de conceptos espaciales.

Palabras clave: representación, arreglo de esferas, matroides.

ABSTRACT

In the context of Geographic Information Systems (GIS) is employed a classical notion of space that includes, among others, two concepts: continuity and externality. These notions are present in the two forms of representation field-based and object-based. Either of these two forms involves basically a sampling task, thus the spatial model of reality obtained in this way lacks accuracy and precision, as well as right position frequently. Due to the deficiencies that has the representation of a continuous model (based on real numbers \mathbb{R}) implemented in a computing environment which is finite and non-continuous (based on a subset of the integers \mathbb{Z}), there have been alternative proposals that seek tackle these issues. One of the most promising are oriented matroids, this proposal is based on combinatorial structures supplemented with the concept of convexity. This thematic review presents the basic concepts underlying the oriented matroids and relates some areas of potential application in the representation of spatial concepts

Keywords: space, representation, spheres arrangement, matroids.

^aDoctor, Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá, Colombia. Correspondencia: *jvalero@udistrital.edu.co

1. Introducción

Como lo plantean John Stell, de la Escuela de Cómputo en la Universidad de Leeds, y Julián Webster, del Departamento de Computación del Imperial College de Londres, la concepción clásica de espacio que se tiene dentro del contexto de los sistemas de información geográfica (SIG) se fundamenta en varios conceptos dentro de los que se incluyen la continuidad y la externalidad (Stell y Webster, 2007). La continuidad se refiere al hecho de que una región puede ser siempre subdividida en subregiones más pequeñas, o lo que Worboys y Duckham (2004) llaman conjuntos densos; mientras que la externalidad se refiere al hecho de que el espacio existe independientemente de los objetos que allí se modelan. Estas perspectivas son vigentes en las dos formas más usuales de representación del espacio: la basada en campo y la basada en objeto. Cualquiera de esas dos formas es imprecisa e inexacta, pues se basa en muestreos o discretización de la realidad. Solo se representan algunos elementos de esa realidad (que es continua) y la posición de ellos tampoco es real, ya que no es posible recorrer la "realidad" continua supuesta sino una porción de ella.

En el modelo basado en campo, el espacio se pre-establece con base en un marco espacial fijo compuesto por elementos espaciales conformados a partir del punto (acompañado de sus coordenadas) como elemento espacial primitivo. El modelo completa la abstracción de las entidades espaciales que modela, asignando a cada uno de estos elementos espaciales un valor de atributo conveniente; de tal manera que la capacidad de representación queda restringida espacialmente al máximo nivel de detalle proporcionado por los elementos espaciales que conforman el marco espacial.

En el modelo basado en objeto, las entidades espaciales son modeladas de manera individual con base en un conjunto de características que le dan vida a su definición. Algunas de estas características están representadas por un conjunto de atributos convenientes, entre los cuales se puede tener su representación espacial. Para esta última, se adopta nuevamente el punto (acompañado de sus coordenadas) como elemento espacial primitivo, a partir del cual se pueden definir elementos espaciales más complejos (generalmente segmentos de línea y polígonos) los cuales proporcionan mayor flexibilidad que lo propuesto por el modelo basado en campo.

Si bien es cierto que, en teoría, el modelo basado en objeto no sufre de la restricción de un nivel de detalle máximo, lo cierto es que a la hora de implementar cualquiera de estos dos modelos en un sistema de cómputo, se depende de la capacidad máxima que este último proporciona. De otro lado, ya que los modelos basados en campo y en objeto más usualmente empleados se fundamentan en una concepción del espacio la cual es continua (y por ende eminentemente infinita), es necesario realizar un proceso de simplificación con

el propósito de implementarlos en un sistema de cómputo. Esta simplificación consiste en tomar sólo un subconjunto de ese espacio que no sea ni infinito ni denso (en el sentido explicado anteriormente); propósito que se logra haciendo uso por ejemplo de un subconjunto de los enteros (\mathbb{Z}) muy natural en los sistemas de cómputo. Para subsanar las deficiencias mencionadas, propuestas como la de Schneider (1997) introducen el concepto de "realm" como una malla de puntos en el plano (un subconjunto de \mathbb{R}) junto con un conjunto de segmentos de línea recta entre pares de estos puntos, de forma que la intersección de cualquier par de segmentos de recta o es vacía o se da sólo en alguno de los puntos extremos de esos segmentos de recta (Figura 1).

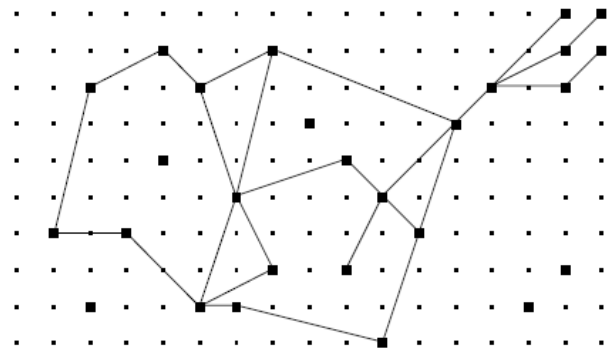


Figura 1. Ejemplo de un Realm de Schneider.

Fuente: Schneider, 1997.

Sin embargo, de acuerdo con Stell y Webster (2007), la restricción geométrica impuesta por un realm, hace que sea muy limitada la cantidad de operaciones matemáticas de \mathbb{R}^n y \mathbb{Q}^n que puede ser usada. Aun así, la propuesta de Schneider ha mostrado su utilidad, lo cual puede ser visto en los modelos adoptados por herramientas SIG como ArcGis, el cual en su Geodatabase emplea un modelo muy similar. Una alternativa adicional es considerar el espacio (plano euclidiano) como una malla de cuadrados en \mathbb{R}^2 ; pero esta alternativa sufre de los mismos problemas que los realms de Schneider, es decir, que el espacio "discreto" así planteado en realidad está embebido en un espacio Euclidiano idealizado. La dificultad de este enfoque es que la definición de conceptos tales como conectividad, en este caso "discreta", está en términos de criterios infinitos, mientras que los algoritmos que los verifican implementan criterios finitos.

En el sentido planteado por Stell y Webster (2007), se considera que un espacio es discreto cuando se ve el mundo como una red de interrelaciones entre objetos de interés situados en ese espacio; es decir, entre los eventos que componen la historia de mundo. Las relaciones definen el espacio y no al contrario. Se requiere entonces, de acuerdo con los autores, de una teoría matemática que sea tanto relacional como discreta; sin embargo, una teoría semejante aún no ha sido construida en forma completa. Desde este punto de vista, la propuesta de dichos autores

pretende proporcionar algunos ingredientes para demostrar que se puede partir de los matroides orientados como una base particularmente prometedora.

La presente revisión temática inicia con una introducción de los conceptos básicos que subyacen a los matroides, tomando como base la propuesta original de Whitney (1935), la cual parte de los arreglos matriciales y la teoría de grafos que buscan su generalización en elementos conceptuales más abstractos, incluyendo el concepto de conjuntos independientes. Posteriormente, se presentan los conceptos necesarios para abordar los matroides orientados, partiendo de los poliedros convexos, pasando por los arreglos de hiperplanos y los arreglos de esferas, para finalmente incluir los que son particularmente relevantes a los matroides orientados. Por último, se presentan las áreas potenciales de empleo de los matroides orientados de acuerdo con el punto de vista de varios autores.

2. Matroides

Antes de dar la definición de matroide orientado, es necesario definir las estructuras asociadas con un matroide cualquiera y esto se puede realizar con base en varias axiomatizaciones todas equivalentes. Whitney (1935) introduce el concepto de matroide en su artículo titulado "Sobre las propiedades abstractas de la dependencia lineal". De acuerdo con Oxley (2003), "los matroides fueron introducidos por Whitney en 1935 para tratar de capturar de manera abstracta la esencia de dependencia". En la introducción de su artículo, el autor inicia con la siguiente definición:

Sea M un conjunto de elementos y N un subconjunto "independiente" o "dependiente" de M . Sean los dos siguientes postulados satisfechos:

- (I₁) Cualquier subconjunto independiente de un conjunto independiente es independiente.
- (I₂) Si $N = e_1 + \dots + e_p$ y $N' = e'_1 + \dots + e'_p + 1$ son independientes, entonces para algún i tal que e'_i no está en N , $N + e'_i$ es independiente.

El sistema resultante es un matroide.

Si bien es cierto que esta definición es básicamente igual a la dada en la introducción de su artículo, el sentido que se le da aquí a "independiente" no es el de independencia lineal. Para colocar en un contexto más claro el sentido de independiente dado aquí, es pertinente adoptar aquél dado por Oxley (2003):

Un matroide M es una par (E, I) en el cual E es un conjunto finito y I un conjunto de subconjuntos de E que satisfacen:

- (I₁) I no es vacío
- (I₂) Todo subconjunto de cualquier miembro de I está también en I .

- (I₃) Si X y Y están en I y $|X| = |Y| + 1$, entonces hay un x elemento en $X - Y$ tal que $Y \cup \{x\}$ está en I ."

El conjunto E y los conjuntos miembros de I son el conjunto tierra y los conjuntos independientes respectivamente del matroide. De acuerdo con Oxley (2003), Whitney (1935) usó las condiciones (I₁) - (I₃) para capturar de manera abstracta la esencia de dependencia. Si $E = \emptyset$ (vacío), hay exactamente un matroide sobre E con $I = \{\emptyset\}$. Por ejemplo, si $E = \{\heartsuit\}$, hay exactamente dos matroides sobre E , uno con $I = \{\emptyset\}$ y otro con $I = \{\emptyset, \{\heartsuit\}\}$. Si $E = \{\heartsuit, \spadesuit\}$, hay exactamente 5 matroides sobre E , con sus conjuntos de conjuntos independientes dados por $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\heartsuit\}\}$, $\{\emptyset, \{\spadesuit\}\}$, $\{\emptyset, \{\heartsuit, \spadesuit\}\}$, y $\{\emptyset, \{\heartsuit, \spadesuit\}, \{\heartsuit, \spadesuit\}\}$; sin embargo, los matroides segundo $M_2 = (E, \{\emptyset, \{\heartsuit\}\})$ y tercero $M_3 = (E, \{\emptyset, \{\spadesuit\}\})$ tienen exactamente la misma estructura y hay una biyección entre ellos dos, de modo que un conjunto es independiente en el primer matroide si y sólo si su imagen es independiente en el segundo. Tales matroides son llamados isomorfos ($M_2 \simeq M_3$).

Si se tiene un conjunto E de n elementos y un conjunto I de subconjuntos de E con máximo r elementos ($0 \leq r \leq n$), la pareja (E, I) conforma un matroide llamado el matroide uniforme $U_{r,n}$. En este contexto, un conjunto independiente máximo es un conjunto independiente que no es subconjunto propio de ningún otro conjunto independiente y un conjunto es dependiente mínimo cuando todos sus subconjuntos propios son independientes.

2.1. Matrices y matroides

Whitney (1935) realiza el siguiente planteamiento con respecto a una matriz dada A y sus columnas C_1, \dots, C_n . Cualquier subconjunto N de estas columnas forma una matriz con rango $r(N)$. Si se consideran las columnas como elementos abstractos, se conforma un matroide M con rango dado por el número de columnas linealmente independientes en N . Whitney da dos interpretaciones geométricas diferentes a este matroide:

- (a) Sea E_m el espacio euclidiano de m dimensiones con un punto X_i correspondiente a cada columna C_i de M con coordenadas a_{1i}, \dots, a_{mi} . El subconjunto C_{i_1}, \dots, C_{i_p} de M es linealmente independiente si y sólo si los puntos $0(0, \dots, 0)$, X_{i_1}, \dots, X_{i_p} son linealmente independientes en E_m ; es decir, si y sólo si estos $p + 1$ puntos determinan un hiperplano en E_m de dimensión p .
- (b) Sea E_n el espacio euclidiano de n dimensiones. Sea R_1, \dots, R_m las filas de M . Si Y_1, \dots, Y_m son los puntos correspondientes de $E_n : Y_i = (a_{1i}, \dots, a_{mi})$, entonces los puntos $0, Y_1, \dots, Y_m$ determinan un hiperplano $H = H(M)$, denominado el hiperplano asociado con M .

A partir de una matriz A sobre cualquier campo F es posible definir un matroide. Particularmente, el interés desde un punto de vista computacional está en los campos finitos para los cuales los campos de Galois $GF(p^k)$ proporcionan exactamente p^k elementos cuando p es un número primo. Con $k = 1$, el respectivo campo $GF(p)$ puede ser visto como el conjunto $\{0, 1, 2, \dots, p - 1\}$ con las operaciones de adición y multiplicación módulo p . Oxley propone entonces el siguiente teorema:

Sea A una matriz sobre un campo F . Sea E el conjunto de rótulos para las columnas de A , y I el conjunto de subconjuntos I de E para el cual el multiconjunto de columnas rotuladas por I es linealmente independiente sobre F . Entonces (E, I) es un matroide.

El matroide así obtenido se denota por $M[A]$ y se le llama matroide vector de A . A un matroide M que es isomorfo a $M[A]$ para alguna matriz A sobre un campo F se le llama F -representable y A es una F -representación de M . A los matroides que son representables sobre $GF(2)$ y $GF(3)$ se les llama binarios y ternarios, respectivamente. Un ejemplo de ello es el matroide $U_{2,4}$, el cual es ternario.

2.2. Matroides gráficos

Como lo menciona Oxley (2003), dado un conjunto finito E y un conjunto \mathcal{C} de subconjuntos de E que satisfacen $(C1) - (C3)$ dados a continuación, y sea I el conjunto de aquellos subconjuntos de E que no contienen miembro alguno de \mathcal{C} ; entonces, (E, I) es un matroide que tiene a \mathcal{C} como su conjunto de circuitos.

- (C_1) El conjunto vacío no está en \mathcal{C} .
- (C_2) Ningún miembro de \mathcal{C} es un subconjunto propio de otro miembro de \mathcal{C} .
- (C_3) Si C_1 y C_2 son miembros distintos de \mathcal{C} y $e \in C_1 \cap C_2$, entonces $C_1 \cup C_2 - \{e\}$ contiene un miembro de \mathcal{C} .

De hecho, si se toma al conjunto de arcos de un grafo G como el conjunto finito E y como I al conjunto de subconjuntos de E que no contienen todos los arcos de camino o ciclo alguno de G ; entonces, el par (E, I) es un matroide llamado el *matroide ciclo* del grafo G y se denota por $M(G)$.

Un matroide que es isomorfo al matroide ciclo de algún grafo se le denomina *gráfico* (Pico, 2010). Grafos no isomorfos pueden tener matroides ciclo isomorfos (Figura 2).

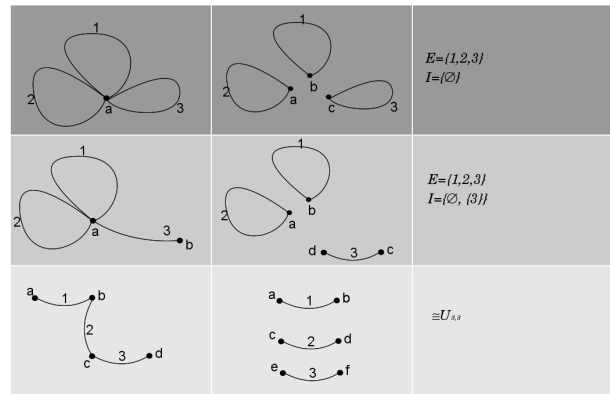


Figura 2. Grafos no isomorfos con matroide ciclo isomorfo. Fuente: Pico, (2010).

El matroide ciclo del grafo mostrado en la Figura 3 tiene a $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y su conjunto de conjuntos independientes igual al conjunto I de $U_{3,6}$ excepto $\{\{5, 6\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 3, 6\}\}$. Oxley (2003) también muestra que todo matroide gráfico es binario usando la matriz de incidencia vértice-arco de un grafo (ver Figura 3); para un grafo G y su matriz de incidencia A_G vista sobre $GF(2)$, su matroide vector $M[A_G]$ tiene como sus conjuntos independientes a todos los subconjuntos de $E(G)$ que no contienen los arcos de un ciclo y que por tanto $M[A_G] = M(G)$ y todo matroide gráfico es binario.

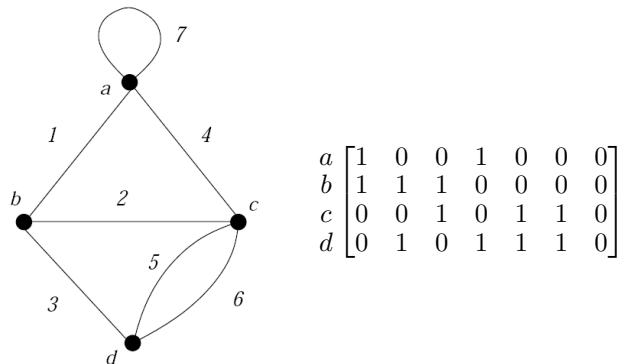


Figura 3. Grafo con su matriz de incidencia vértice-arco. Fuente: Oxley (2003).

Para un matroide M sobre un conjunto E y el conjunto B de las bases de M hay un conjunto $B^* = \{E - B | B \in B\}$ el cual corresponde al conjunto de bases de un matroide M^* sobre E . Al matroide M^* se le llama el matroide dual de M . Las bases y circuitos de M^* son llamadas cabases y cocircuitos de M (en el grafo de la Figura 4 se aprecian los circuitos $\{e\}$, $\{a, b\}$, $\{a, d, f\}$ y $\{b, d, f\}$, y en la Figura 5, su dual con los circuitos $\{c\}$, $\{d, f\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, b, f\}$); obviamente, $(M^*)^* = M$. En contraste con los grafos, para los cuales sólo en el caso de los grafos planares está definido el grafo dual, en el caso de los matroides, todo matroide tiene un dual.

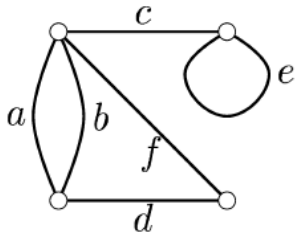


Figura 4. Grafo con los circuitos.
Fuente: Stell y Webster (2007).

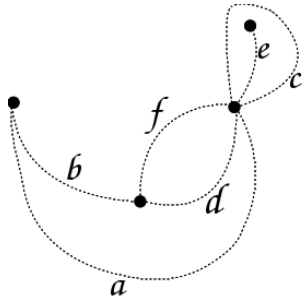


Figura 5. Grafo dual de la Figura 4.

Para el grafo mostrado en la Figura 3, el conjunto de bases de su matroide ciclo está dado por

$$B = \left\{ \begin{array}{llll} \{1,2,3\}, & \{1,2,5\}, & \{1,2,6\}, & \{1,3,4\}, \\ \{1,3,5\}, & \{1,3,6\}, & \{1,4,5\}, & \{1,4,6\}, \\ \{2,3,4\}, & \{2,4,5\}, & \{2,4,6\}, & \{3,4,5\}, \\ \{3,4,6\} \end{array} \right\}$$

por lo tanto,

$$B^* = \left\{ \begin{array}{llll} \{1,2,5,7\}, & \{1,2,6,7\}, & \{1,3,5,7\}, & \{1,3,6,7\}, \\ \{1,5,6,7\}, & \{2,3,5,7\}, & \{2,3,6,7\}, & \{2,4,5,7\}, \\ \{2,4,6,7\}, & \{2,5,6,7\}, & \{3,4,5,7\}, & \{3,4,6,7\}, \\ \{4,5,6,7\} \end{array} \right\}$$

el cual corresponde con el conjunto de bases del matroide ciclo correspondiente al grafo dual de la Figura 3.

Además de obtener el dual de un matroide, Oxley (2003) introduce otras dos operaciones (borrado y contracción), las cuales generalizan sus análogas para grafos. Sea M un matroide (E, \mathcal{F}) y e un elemento de E , entonces el par $(E - \{e\}, \mathcal{F}')$ es un matroide con $\mathcal{F}' = \{I \subseteq E - \{e\} \mid I \in \mathcal{F}\}$, denotado por $M \setminus e$ y denominado el matroide de *borrado* de e en E . De otro lado, el par $(E - \{e\}, \mathcal{F}'')$ es un matroide con $\mathcal{F}'' = \{I \subseteq E - \{e\} \mid I \cup \{e\} \in \mathcal{F}\}$, denotado por M/e y denominado el matroide de *contracción* de e en E . Un *menor* de M es un matroide obtenido de una secuencia de borrados y contracciones $M \setminus X/Y$, donde X y Y son subconjuntos disyuntos de E . Si $X \cup Y \neq \emptyset$,

entonces $M \setminus X/Y$ es un *menor propio* de M . Las tres operaciones (dualidad, borrado y contracción) están relacionadas mediante las expresiones $M^*/T = (M \setminus T)^*$ y $M^* \setminus T = (M/T)^*$.

2.3. Matroides affine

Stell y Webster (2007) introducen el concepto de matroide affine basado en el concepto de independencia affine sobre *conjuntos affine* (en \mathbb{R}^2 son el conjunto vacío, los puntos en sí mismos, las líneas rectas y el plano en sí mismo). La *envoltura affine* de un conjunto es el conjunto affine más pequeño que lo contiene. Un conjunto es *independiente affine* si y sólo si su envoltura affine no es la envoltura affine de ninguno de sus subconjuntos propios.

En realidad, un conjunto x_1, \dots, x_k es dependiente affine en $V (= F^n)$ si y sólo si $(x_1, 1), \dots, (x_k, 1)$ es linealmente dependiente en el espacio de vectores F^{n+1} (Smitgh & Webster, 2007). Entonces, dado un conjunto de puntos E en el plano y un conjunto \mathcal{F} de subconjuntos de E independientes affine, la pareja (E, \mathcal{F}) así definida conforma un matroide M llamado *matroide affine*. Por ejemplo, para un conjunto P de $n \geq 3$ puntos del plano que no tiene subconjunto alguno de tres puntos colineales, su matroide affine es isomorfo al matroide uniforme $U_{3,n}$. Para el conjunto de puntos mostrados en la Figura 1, el conjunto de los conjuntos independientes son todos los subconjuntos de tres o menos elementos excepto $\{\{b, d, h\}, \{a, d, e\}\}$.

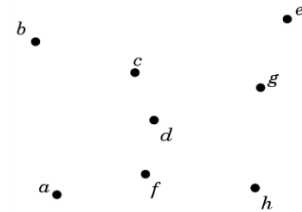


Figura 6. Conjunto P de puntos en el plano.
Fuente: Smitgh & Webster, (2007).

3. Matroides orientados

De acuerdo con Smyth y Webster (2007), la geometría de los matroides está basada en lo que proporcionan los conjuntos affine o lineales, pero no tienen ninguna estructura de convexidad. No hay noción de dualidad ni de intermediación (*betweenness*) entre los puntos de una línea recta, tampoco los hiperplanos separan el espacio en dos semiespacios. De acuerdo con estos autores, los espacios de vectores no tienen estructura suficiente para soportar una teoría de la convexidad, por lo tanto, es difícil esperar que los matroides lo hagan. Las dos fuentes mencionadas coinciden en que hay que dotar a los matroides de una estructura adicional (de una orientación) a partir de la cual se pueda

derivar la convexidad, y esa es la teoría de los matroides orientados.

Richter-Gebert y Ziegler (1997) indican que el matroide orientado de un conjunto finito de puntos \mathcal{P} extrae la información de la posición relativa y orientación a partir de la configuración, la cual puede ser proporcionada por una lista de signos que codifican la orientación de todas sus bases. Aunque en el paso de una configuración concreta de puntos a su matroide orientado se pierde información métrica, muchas de las propiedades estructurales de \mathcal{P} tienen su contraparte en el nivel puramente combinatorial del matroide orientado. Es decir, que los matroides orientados no solamente describen la estructura de incidencia entre los elementos del matroide y sus respectivos hiperplanos, sino que adicionalmente codifican la posición de los elementos relativa a los hiperplanos, esto es, qué elementos caen en el lado positivo, cuáles en el lado negativo y cuáles en el hiperplano (Anderson & Delucchi, 2012).

De acuerdo con Smyth y Webster (2007), hay dos concepciones de un matroide: la llana (plana) y la esférica. Fukuda (2004) indica que todo matroide orientado puede ser representado por un arreglo de esferas topológicas, el cual es una generalización de los arreglos de las esferas. Por lo tanto, los arreglos de esferas son una estructura natural que abordar en el estudio de matroides orientados. A continuación se incluyen apartes de la exposición que realiza Fukuda sobre los conceptos de arreglos centrales de hiperplanos y arreglos de esferas. Una visión completa de los conceptos subyacentes de poliedros, politopos, arreglos de hiperplanos y arreglos de esferas se pueden consultar en el trabajo del autor citado.

3.1. Arreglo central de hiperplanos y arreglo de esferas

Un arreglo central de hiperplanos es un arreglo de hiperplanos en el cual todos los hiperplanos contienen el origen 0, es decir $\cup_{i=1}^m h_i = \{0\}$.

El interés en los arreglos centrales radica en que poseen una estructura de caras homogéneas lo cual los hace mucho más fácil de tratar matemáticamente. En efecto, el vector de posición de un arreglo central de hiperplanos $\mathcal{F}(A) = \{\delta(x) | x \in \mathbb{R}^d\}$ está estrechamente relacionado con un subespacio de vectores (Kang y Müller, 2011). Si $(A, 0)$ es la representación de un arreglo central \mathcal{A} , y V es el espacio de columnas de A , $V = \{y \in \mathbb{R}^m | y = Ax, x \in \mathbb{R}^d\}$. Si σV es el vector de signos de los vectores en V ($\sigma(y)_j = \text{sign}(y_j)$), se puede observar que $\delta(x) = \sigma(Ax)$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$, por lo que $\mathcal{F}(A) = \sigma V$. En otras palabras, la estructura combinatorial de un arreglo central corresponde a los patrones de signo de los vectores en un subespacio de vectores y viceversa. En la Figura 1, se muestra para la matriz A el respectivo arreglo central de hiperplanos con sus semiespacios abiertos y los vectores signo para tres puntos particulares.

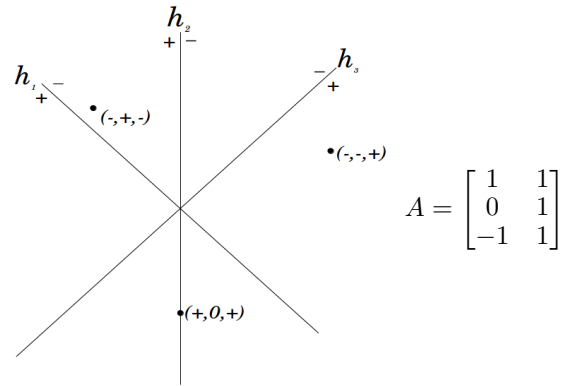
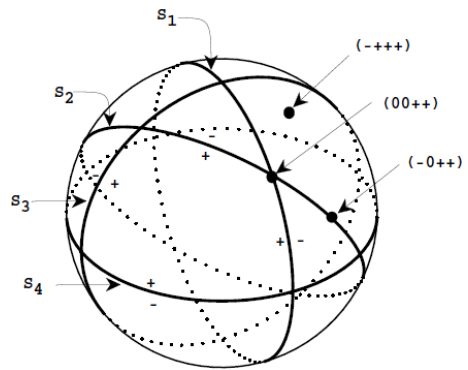


Figura 7. Arreglo central de hiperplanos. Fuente: Oxley (2003).

Por su parte, un arreglo de esferas sobre la esfera S^d unitaria de dimensión d (d -esfera) en \mathbb{R}^{d+1} es un conjunto $\mathcal{A} = \{s_i | i = 1, 2, \dots, m\}$ de esferas de dimensión $d - 1$ sobre S^d . En realidad, un arreglo de esferas puede ser visto como la sección de corte de un arreglo central de hiperplanos en \mathbb{R}^{d+1} con la esfera unitaria S^d . Para un arreglo central con representación $(A, 0)$ cada esfera es el conjunto $s_i = \{x | A_i x = 0\} \cap S^d$.



(a) Fuente: Fukuda (2004)

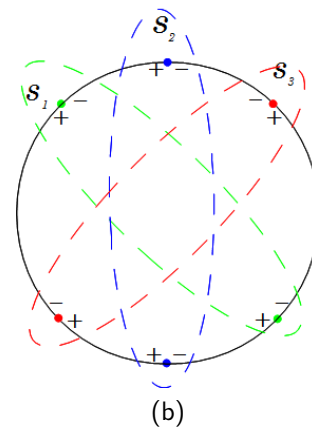


Figura 8. Arreglo de esferas: a) en S^2 (\mathbb{R}^3), b) en S^1 (\mathbb{R}^2).

Un subconjunto F de S^d es una cara si es la intersección de S^d y alguna cara del arreglo central de hiperplanos correspondiente. Por lo tanto, como objetos combinatoriales, un arreglo de esferas es equivalente a algún arreglo central de hiperplanos. Fukuda (2004) da dos razones para preferir los arreglos de esferas sobre los arreglos centrales de hiperplanos. La primera tiene que ver con aspectos puramente visuales, pues en \mathbb{R}^3 es más fácil visualizar un arreglo de esferas que una arreglo central de hiperplanos (Figura 1a). La segunda razón es más "profunda": todo matroide orientado puede ser representado por un arreglo de esferas topológicas, el cual es una generalización de los arreglos de esferas. En la Figura 1b se muestra el arreglo de esferas (las esferas son los pares de puntos encerrados por las elipses punteadas colocadas allí solo para dar claridad) correspondiente al arreglo central de hiperplanos mostrado en la Figura 1.

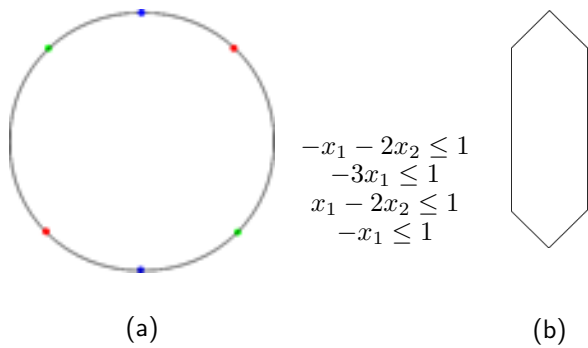


Figura 9. Sistema de esferas y (b) su respectiva materialización como politopo P_A .

Un arreglo de esferas es combinatorialmente equivalente a algún politopo convexo (Emiris *et al.*, 2012); sin embargo, ya que el poset $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ del arreglo no contiene el elemento más grande, es necesario agregarlo de manera artificial incluyendo el elemento 1, el nuevo conjunto $\hat{\mathcal{F}}(\mathcal{A})$ corresponde al face lattice del arreglo \mathcal{A} . Dado el politopo

$$P_A = \{x | y^T A x \leq 1 \forall y \in \{-1, +1\}^m\},$$

el face lattice $\hat{\mathcal{F}}(\mathcal{A})$ es isomorfo al face lattice del politopo P_A ; en la Figura 9a se muestra el sistema de esferas para el arreglo de esferas de la Figura 8b y el correspondiente politopo P_A (Figura 9b) obtenido del conjunto solución para el respectivo sistema de desigualdades (sólo se muestran cuatro de las ocho inecuaciones, las otras cuatro se obtienen multiplicando por -1 la parte izquierda de cada desigualdad mostrada). El polar del politopo P_A está dado por

$$\begin{aligned} (P_A)^* &= \text{conv} \{y^T A \in \mathbb{R}^d \mid y \in \{-1, +1\}^m\} \\ &= \{y^T A \in \mathbb{R}^d \mid y \in \{-1, +1\}^m\} \\ &= L_1 + L_2 + \dots + L_m, \end{aligned}$$

donde L_i es el segmento de línea $[-A_i, A_i]$

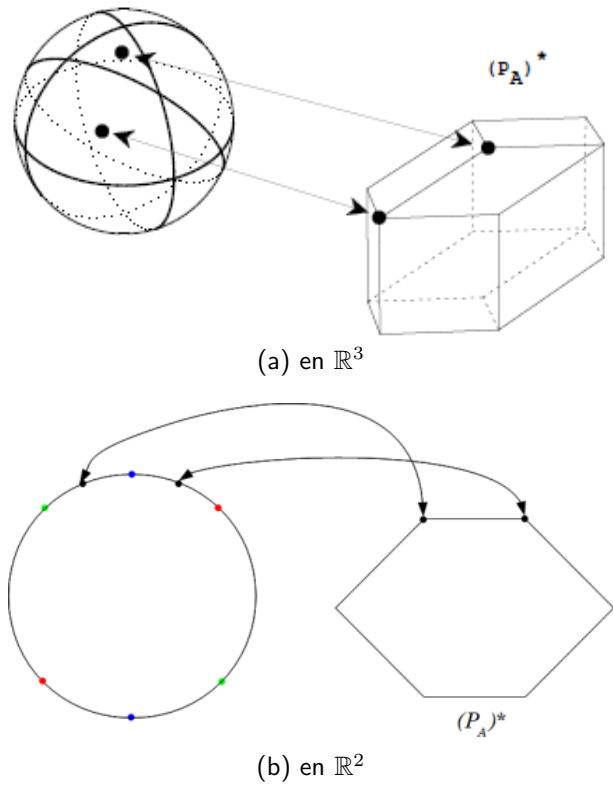


Figura 10. Correspondencia de cara entre un arreglo de esferas y su zonotopo.

Fuente: Fukuda (2004).

Este conjunto corresponde a la suma de Minkowski de un conjunto finito de segmentos de línea conocido como zonotopo (Figura 10). El vector signo $\sigma(y)$ de un vector y en $\{-1, +1\}^m$ está en $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ si y sólo si el vector yA es un vértice del zonotopo $(P_A)^*$. En la Figura 10 (b) se muestra la correspondencia de cara entre el arreglo de esferas de la Figura 8b y su correspondiente zonotopo.

3.2. ¿Qué es un matroide orientado?

Con los elementos conceptuales mínimos ahora se introduce el concepto de matroide orientado. De acuerdo con Fukuda (2004), dado un conjunto finito E , un vector de signos sobre E es un vector en $\{+, 0, -\}^E$. El negativo $-Y$ de un vector de signos Y es el vector de signos Z sobre E con $Z_j = -Y_j$ para todo j . Se dice que un índice $j \in E$ separa a dos vectores signo Y y Y' sobre E si $Y_j = -Y'_j \neq 0$. El conjunto de todos los elementos que separan a Y de Y' se denota por $D(Y, Y')$. La composición Y o Y' de dos vectores signo Y y Y' sobre E es el vector signo Z sobre E con

$$Z_j = \begin{cases} Y_j & \text{Si } Y_j \neq 0 \\ Y'_j & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Un matroide orientado sobre E es un par $M = (E, \nu)$, donde E es un conjunto finito y \mathcal{F} es un conjunto de vectores signo sobre E que satisface los siguientes axiomas:

- (F1) $0 \in \mathcal{F}$
- (F2) $Y \in \mathcal{F} \longrightarrow -Y \in \mathcal{F}$
- (F3) $Y, Y' \in \mathcal{F} \implies Y \circ Y' \in \mathcal{F}$
- (F4) $Y, Y' \in \mathcal{F} \wedge f \in D(Y, Y') \implies \exists Z \in \mathcal{F}$
tal que $Z_f = 0$ y $Z_j = (Y \circ Y')$

Cada miembro de \mathcal{F} es una cara (algunas veces llamada covector) del matroide orientado. El teorema de representación topológica Folkman y Lawrence muestra que los matroides orientados están en biyección a los arreglos de esferas orientadas por lo que pueden ser considerados tanto como objetos topológicos como combinatoriales.

Sea S^d la d -esfera unitaria en \mathbb{R}^{d+1} y $S_{(d-1)}$ la $(d-1)$ -esfera embebida en S^d . La $(d-1)$ -esfera $\{x \in S \mid x_1 = 0\}$ particiona a S^d en tres conjuntos $\{S_{(d-1)}^+, S_{(d-1)}^0, S_{(d-1)}^-\}$ donde

$$\begin{aligned} S_{(d-1)}^0 &= S_{(d-1)} \\ S_{(d-1)}^+ &= \{x \in S \mid x_1 > 0\} \text{ y} \\ S_{(d-1)}^- &= \{x \in S \mid x_1 < 0\} \end{aligned}$$

Una d -esfera es un espacio topológico homeomorfo a S^d , y una esfera es una d -esfera para algún d . Un subconjunto s de una esfera S es un ecuador de S si hay un homomorfismo tal que $f(S_{(d-1)}) = s$. Todo ecuador particiona a S en tres conjuntos s^+ , s^0 y s^- los cuales son las imágenes de $S_{(d-1)}^+$, $S_{(d-1)}^0$ y $S_{(d-1)}^-$ bajo f . Un *sistema de esferas* de dimensión d es una tripleta (E, S, A) donde E es un conjunto finito, S una d -esfera y A es una familia $\{\{s_i^+, s_i^0, s_i^-\} \mid i \in E\}$ que satisface los siguientes axiomas:

- (S1) Cada s_i^0 es un ecuador de S cuyos lados son s_i^+ , s_i^0 , s_i^- para cada $i \in E$;
- (S2) Para cada subconjunto F de E , $\cap_{i \in F} s_i^0$ es una esfera, llamada una *llana* (*flat* en inglés);
- (S3) Para cada *llana* t y cualquier $i \in E$, $t \subset s_i^0$ o $t \cap s_i^0$ es un ecuador de t cuyos lados son $t \cap s_i^+$ y $t \cap s_i^-$.

Para un sistema de esferas (E, S, A) , hay una forma natural de definir el vector posición de cada punto en S como:

$$\delta(x)_i = \begin{cases} + & \text{Si } x \in s_i^+ \\ 0 & \text{Si } x \in s_i^0, i \in E \\ - & \text{Si } x \in s_i^- \end{cases}$$

Finalmente, el teorema establece que para un matroide orientado $M = (E, \mathcal{F})$, existe un sistema de esferas

(E, S, A) tal que $\delta(S) = \mathcal{F}$; y viceversa, es decir que si (E, S, A) es un sistema de esferas, entonces $(E, \delta(S))$ es un matroide orientado. Este teorema es uno de los más importantes en la teoría de matroides orientados, pues por medio de él es posible pasar de los arreglos de esferas a los matroides orientados.

4. APLICACIONES DE LOS MATROIDES

Como lo expresa Fukuda (2004), los matroides orientados han sido usados para extender la teoría de programación lineal (LP), cuyo desarrollo ha sido un aporte, en buena parte, de Bachem y Kern (1992). Esto ha dado origen a la programación de matroides (OMP), y en el proceso de su formulación se han descubierto muchos algoritmos finitos para LP. La OMP también ha sido extendida para generalizar la programación cuadrática (QP) y la teoría complementaria lineal (LPC).

4.1. Sistemas CC

No obstante este campo de aplicación, el interés particular en los matroides orientados es su empleo como construcciones matemáticas finitas para formular modelos alternativos de representación del espacio. A este respecto, Knuth (1991) realizó una investigación acerca de la relación existente entre la computación geométrica y los matroides en su trabajo sobre sistemas CC (*counter clockwise systems*), los cuales están estrechamente relacionados con los

matroides. Al respecto, Smyth y Webster (2007) comentan que Knuth se enfocó en la aplicación de los matroides orientados llanos (*flats*) como fundamento para realizar geometría computacional. Un sistema CC está conformado por un conjunto finito E junto con una relación ternaria B —para abreviar se escribe xyz para indicar que (x, y, z) hace parte de la relación o $\neg xyz$ para indicar que no— tal que:

- (CC1) $xyz \implies yzx$,
- (CC2) $xyz \implies \neg xyz$,
- (CC3) $xyz \vee yzx$,
- (CC4) $zxy \wedge wzy \wedge wxz \implies wxy$,
- (CC5) $zyv \wedge zyw \wedge zyx \wedge zvw \wedge zwx \implies zvx$.

Knuth (1991) propone que cada pareja $\{a, b\}$ de puntos distintos conforman una línea recta, y sus correspondientes semiespacios abiertos son los conjuntos $\{x|abx\}$ y $\{x|axb\}$. La envoltura convexa (*convex hull* en inglés) de un conjunto es el conjunto de aquellos puntos que no pueden ser separados de él: x está en la envoltura convexa de X si no hay semiespacio alguno que contenga a x y no se interseque con X . Stell y Webster (2007) acotan que, con base en el sistema así definido, Knuth desarrolla algoritmos, expresados únicamente en la estructura del modelo, para hallar

computacionalmente la geometría de los sistemas CC con una mejora significativa en su diseño.

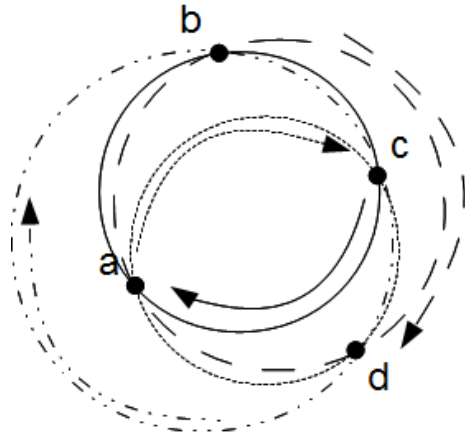


Figura 11. Relación de ordenamiento en el sentido de las manecillas del reloj.
Fuente: Knuth (1991).

Knuth (1991) define los modelos principales de la siguiente manera:

considere cualquier subconjunto finito del plano el cual no contiene tripletas de puntos colineales. Para cualquier tripleta de puntos (x, y, z) considere el círculo único que los contiene en su circunferencia. Así, la relación xyz se da si cuando al moverse sobre la circunferencia en el sentido de las manecillas del reloj después de encontrar a x , se encuentra a y antes que a z .

A esta relación se le denomina ordenamiento en el sentido de las manecillas del reloj y satisface las cinco condiciones de la axiomatización de Knuth.

Para los cuatro puntos mostrados en la Figura 11, el ordenamiento en el sentido de las manecillas del reloj está dado por $abc, cab, bca, acd, dac, cda, abd, dab, bda, bcd, dbc$ y cdb . En el sistema CC resultante, los semiespacios abiertos correspondientes a la línea recta $\{a, c\}$ son $\{b\}$ y $\{d\}$. Un hiperplano es cualquier conjunto que contiene exactamente dos puntos y el complemento de un hiperplano $\{x, y\}$ es llamado un cocircuito y puede ser particionado en los dos conjuntos $\{z|xyz\}$ y $\{z|xzy\}$. De otro lado, para una tripleta de puntos $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ y $z = (z_1, z_2)$ y

$$\det(x, y, z) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= x_1(y_2 - z_2) - y_1(x_2 - z_2) - z_1(x_2 - y_2)$$

$B(x, y, z)$ está definido si $\det(x, y, z) > 0$. Knuth se enfoca en la propiedad de ordenamiento en el sentido de

las manecillas del reloj que posee el plano y cómo este orden puede ser calculado por medio de determinantes de matrices; los algoritmos geométricos se pueden diseñar en términos de esta sola propiedad, lo cual conduce a un diseño de algoritmos significativamente mejorado. De acuerdo con Smyth y Webster (2007), el conjunto resultante de cocircuitos satisface los axiomas de los matroides orientados planos. En efecto, los sistemas CC son equivalentes a matroides orientados planos de rango 3 en los cuales todos los conjuntos de cardinalidad 3 son bases del matroide subyacente.

4.2. Cálculo computacional de triangulaciones

Pfeifle y Rambau (2002) realizan la presentación de un procedimiento mediante el cual es posible realizar el cálculo de la triangulación de manera computacional a partir de un conjunto de puntos con base únicamente en las estructuras combinatoriales de los matroides orientados asociados. Su interés en las triangulaciones radica en que éstas son una herramienta básica en la descomposición de objetos compuestos en otros objetos más simples. De acuerdo con los autores, para una configuración \mathcal{A} de n puntos d -dimensionales, un subconjunto T de subconjuntos de \mathcal{A} , cada uno de $d + 1$ elementos es una triangulación si y sólo si

$$\cup_{\sigma \in T} \text{conv } \sigma = \text{conv } \mathcal{A}, \text{ y}$$

$$\text{conv } \sigma \cap \text{conv } \sigma' = \text{conv } (\sigma \cap \sigma') \quad \forall \sigma, \sigma' \in T$$

Lo importante de la propuesta de Pfeifle y Rambau (2002) es que en lugar de emplear la costosa programación lineal con aritmética exacta para garantizar las dos condiciones mencionadas, se emplean verificaciones puramente combinatoriales con base en el matroide orientado de \mathcal{A} . Para comprobar si la primera condición no se cumple, se usa el conjunto de todos los circuitos de \mathcal{A} y se verifica si para dos subconjuntos cualquiera $\sigma, \sigma' \in T$ existe un circuito $(Z^+, Z^-) \in \mathcal{A}$, $Z^+ \subset \sigma$ y $Z^- \subset \sigma'$.

De otro lado, para comprobar de manera puramente combinatorial el cumplimiento de la segunda condición, se usa el conjunto de todos los cocircuitos de \mathcal{A} . Hay un cocircuito por cada hiperplano affine $(d - 1)$ -dimensional que se extienda por subconjuntos de \mathcal{A} , en el cual se incluyen todos los puntos de \mathcal{A} que estén en el lado positivo (C^+) y todos los puntos de \mathcal{A} que estén en el lado negativo (C^-) del respectivo hiperplano. Para la comprobación final de la segunda condición se verifica que para cada $\sigma \in T$, cada cocircuito de \mathcal{A} contenido por este cuyo conjuntos C^+ y C^- sean ambos no vacíos también debe haber un $\sigma' \in T$ que también lo contenga.

De acuerdo con Pfeifle y Rambau (2002), ya que los circuitos de \mathcal{A} determinan de manera puramente combinatorial sus cocircuitos y viceversa, y ya que el matroide de \mathcal{A} está definido por cualquiera de ellos, el conjunto de

posibles triangulaciones de \mathcal{A} depende únicamente de su matroide orientado. El paso de la geometría a la combinatoria asociada con \mathcal{A} se establece mediante el concepto de su chirotopo (De Loera et al, 2010; Tsukamoto, 2012).

$$\chi : \begin{cases} \binom{\mathcal{A}}{d+1} \rightarrow \{+, -, 0\} \\ (i_1, i_2, \dots, i_{d+1}) \rightarrow \text{sign}(\det(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{d+1}})) \end{cases}$$

El cual le asigna a cada base ordenada de \mathcal{A} su orientación. Los circuitos de \mathcal{A} se pueden calcular con base en todos los subconjuntos de $d + 2$ elementos de \mathcal{A} y sus cocircuitos, con base en todos sus subconjuntos de d elementos y el cálculo de los chirotopos asociados. Pfeifle y Rambau (2002) finalmente propone soluciones algorítmicas que van desde la obtención de alguna triangulación posible hasta la obtención de todas las triangulaciones posibles, empleando únicamente las estructuras combinatoriales asociadas con el matroide orientado de la configuración de puntos \mathcal{A} . Estos algoritmos fueron implementados por los autores en el paquete TOPCOM (*Triangulations of Point Configurations and Oriented Matroids*) buscando el logro de una complejidad mínima y la consecuente maximización de su eficiencia.

4.3. Otras aplicaciones

Stell y Webster (2007) realizan una presentación de los posibles usos de los matroides orientados en el contexto de representación del espacio en cinco áreas particulares de aplicación. La aplicación más directa de los matroides orientados sería como estructuras geométricas de un conjunto de puntos discretos de manera semejante a como lo hace la retícula de puntos en el realm de Schneider. Los objetos geográficos que pudieran ser representados como puntos estarían referenciados a elementos del matroide orientado. De otro lado, los rasgos lineales y de área pueden ser representados pero haciendo uso de cierto subconjunto de matroides. Por ejemplo, el intervalo abierto entre un par de puntos adyacentes puede ser representado por el par de elementos correspondientes del matroide y, de forma similar, el interior de un cuadrado limitado por cuatro puntos adyacentes puede ser representado por los cuatro elementos correspondientes del matroide.

La Figura 12 da una presentación gráfica de esta idea con base en el concepto de celdas complejas (*cell complexes*), las cuales corresponden a todo punto, todo par adyacente vertical u horizontalmente de puntos y todo conjunto de cuatro puntos adyacentes (i, ii, iii). El diagrama iv muestra la parte continua que cada uno de los subconjuntos (celdas) representa. Finalmente, una región podría ser representada por un conjunto de celdas. Una segunda área de aplicación es identificar los elementos del matroide orientado con entidades particulares (casas, árboles, tiendas, etc.). En este enfoque, lo que se representaría serían ciertas

relaciones geométricas independientemente de su posición en el espacio.

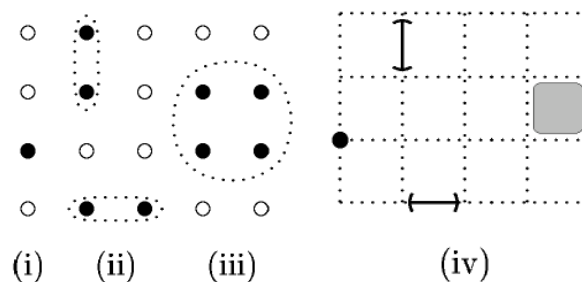


Figura 12. Celdas complejas vs. parte continua representada. Fuente: Stell y Webster (2007).

La tercera área de aplicación sería la representación de datos incompletos, lo cual es bastante frecuente en bases de datos espaciales. El potencial que Stell y Webster ven aquí radica en el poder dar soporte a la incertidumbre mediante la definición de regiones de posibilidad (celdas) representadas por los subconjuntos correspondientes del matroide orientado, indicando que la posición real está en algún lugar de la parte continua correspondiente, con lo que se logra un modelo en el que se prefiere proporcionar información incompleta a proporcionar información errada.

Como cuarta área de trabajo potencial, los mismos autores plantean la necesidad de investigar la geometría de las regiones empleadas para la representación de objetos espaciales con base en matroides orientados vía su triangulación, lo cual ya ha sido trabajado por ejemplo por Santos (1997). También plantean como área de investigación adicional el empleo de matroides orientados basado en celdas complejas, de modo que sea posible un modelo de datos unificado que presente las ventajas de las dos formas de representación espacial clásicas en sistemas de información geográfica: la *raster* y la *vector*, de las que se destaca el trabajo realizado por Winter (1998).

De acuerdo con Smyth y Webster (2007), cuando se está extendiendo la topología a geometría, pareciera que por lejos los modelos finitos más sofisticados de la estructura convexa y lineal del espacio euclidiano son los matroides orientados. La geometría finita es un área de investigación amplia y mucha de ella no tiene apariencia euclidiana y ninguna teoría parece igualar a la de matroides orientados cuando de establecer la geometría euclidiana combinatorial se trata. Sin embargo, de acuerdo con ellos, la teoría de matroides orientados presenta algunas deficiencias importantes. De manera práctica, se espera que una representación espacial algebraica pueda facilitar una mejor computación y almacenamiento de objetos espaciales, lo cual es muy poco probable con matroides orientados; por esta razón es que debería ser empleada la versión esférica de los matroides orientados. De allí que la propuesta de Borovik et al. (2003) de

matroides con un enfoque puramente algebraico y basado enteramente en la simetría parece muy prometedor.

5. Conclusiones

Los modelos tradicionales de representación digital de fenómenos geográficos, sean ellos objetos discretos o campos continuos, adolecen de imprecisión e inexactitud y no incluyen, en general, una medida de la incertidumbre inherente. Generalmente, la representación digital se realiza mediante muestreos espaciales que discretizan la realidad, por lo tanto solo se representan algunos elementos del mundo real; adicionalmente, la posición de dichos elementos en el computador tampoco es exactamente la existente en el terreno, ya que no es posible recorrer la "realidad" de una manera continua, sino una porción de ella (Schneider, 1997).

Esas imprecisiones e inexactitudes son particularmente graves cuando se modelan fenómenos geográficos que son complejos o dinámicos. Si la representación digital de esos fenómenos no se realiza apropiadamente, la tecnología de sistemas de información geográfica no podrá dar respuestas adecuadas a diversos problemas de ingeniería en áreas de infraestructura, comunicaciones, transporte y logística, tales como rutas óptimas y flujos de bienes y servicios sobre redes.

El uso de una representación computacional del espacio que "ocurre" en términos de coordenadas que varían continuamente y que se expresan en números reales involucra la obligatoria transformación al mundo digital de coordenadas expresadas en números enteros, con el agravante de que en no pocas ocasiones una transformación exacta no es posible.

Los matroides orientados tienen un gran potencial de aplicación en la definición de modelos de representación computacional de objetos geográficos. A pesar de las investigaciones realizadas hasta el momento (Santos, 1997; Smyth y Webster, 2007; Stell y Webster, 2007; De Loera et al, 2010), ese potencial no está completamente materializado y quedan muchos interrogantes por resolver, en particular lo relacionado con su aplicación en la solución de problemas de análisis espacial, ya que si bien es cierto que dentro de las estructuras puramente combinatorias proporcionadas por los matroides orientados es posible cubrir una gran porción de propiedades de la geometría, también es necesario establecer si existe un límite y si éste es claramente identificable.

La aplicación de los matroides en el campo de los modelos de representación espacial ha tenido su mayor evolución en los últimos años, con importantes contribuciones; sin embargo, luego de explorar los fundamentos matemáticos basados en los conjuntos finitos que los respaldan, se observa que son grandes las posibilidades de investigación en modelos de implementación computacional mucho más ade-

cuados que aquéllos de los que se dispone en la mayoría de soluciones comerciales, por ejemplo, en el campo de los sistemas de información geográfica. Lo anterior da origen a la pregunta: ¿Será posible definir un marco espacial fundamentado en los matroides orientados, más cercano al modelo conceptual discreto de la realidad, que facilite el proceso de implementación computacional?

Desde el punto de vista de la conceptualización matemática del espacio, resulta muy acertado replantear la necesidad de modelamiento no tanto del espacio en sí mismo, sino de los elementos de interés que se encuentran en él, mirando el problema desde un punto de vista eminentemente discreto (siempre y cuando el número de elementos sea finito), el cual está muy acorde con las capacidades limitadas de implementación automatizada con las que se cuenta en la realidad.

Referencias

- Anderson, L. & Delucchi, E. (2012). Foundations for a Theory of Complex Matroids. *Discrete Comput Geom*. Springer Science+Business Media, pp. 808-809.
- Bachem, A. & Kern, W. (1992) *Linear Programming Duality. An Introduction to Oriented Matroids*. Berlin Heidelberg: Universitext, Springer-Verlag.
- Borovik, A., Gelfand, I. & White, N. (2003). *Coxeter matroids*. Boston: Birkhauser.
- De Loera, J., Rambau, J. & Santos, F. (2010). *Triangulations: Structures for Algorithms and Applications*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Emiris, I., Konaxis, C., Fisikopoulos, V. & Peñaranda, L. (2012). An Output-sensitive Algorithm for Computing Projections of Resultant Polytopes. *ACM SCG'12*, June, Chapel Hill, North Carolina, USA, pp. 179-180.
- Fukuda, K. (2004). *Lecture Notes on Oriented Matroids and Geometric Computation*. Zurich, Switzerland: Institute for Operations Research ETH.
- Kang, R. & Müller, T. (2011). Sphere and Dot Product Representations of Graphs. *ACM SCG'11*, June, Paris, pp. 309-310.
- Knuth, D. (1991). *Axioms and hulls*. Berlin: Springer-Verlag. ISBN:9783540556114.
- Oxley, J. (2003). What is a matroid? [Versión electrónica]. *Cubo* 5, 179-218. Recuperado el 12 de abril de 2011, de www.math.lsu.edu/~oxley/survey4.pdf
- Pfeifle, J. & Rambau, M. (2002). *Computing Triangulations Using Oriented Matroids*. ZIB-Report 02-02, Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin.
- Pico, W. (2010). *Temas de representabilidad de matroides sobre campos finitos e infinitos*. Tesis de Maestría en Matemáticas. Universidad Nacional de Colombia.

- Richter-Gebert, J. & Ziegler, M. (2004). *Oriented Matroids*. Handbook of Discrete and Computational Geometry (2nd Ed.). Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press.
- Santos, F. (1997). *Triangulations of oriented matroids*. Mathematical Institute Oxford, January.
- Schneider, M. (1997). *Spatial Data Types for Database Systems: Finite Resolution Geometries for Geographic Information Systems*. Lecture Notes in Computer Science, Vol. 1288. Berlin: Springer.
- Smyth, M. & Webster, J. (2007). *Discrete Spatial Models*. En *Handbook of Spatial Logics* (pp. 764-787). Dordrecht, The Netherlands: Springer.
- Stell, J., & Webster, J. (July 2007). *Oriented Matroids as a Foundation for Space in GIS*. *Computers, Environment and Urban Systems*, 31 (4), 379-392.
- Tsukamoto, Y. (2012). *New Examples of Oriented Matroids with Disconnected Realization Spaces*. *Discrete Comput Geom*. Springer Science+Business Media, pp. 287-288.
- Whitney, H. (1935). *On the abstract properties of linear dependence*. *American Journal of Mathematics*, 57, 509-533.
- Winter, S. (1998). *Bridging Vector and Raster Representations in GIS*. ACM. Proceedings of the 6th International Symposium an Advances in GIS. ACM Press.
- Worboys, M., & Duckham, M. (2004). *GIS: A Computing Perspective* (2nd ed.). CRC Press.

