



REVISTA UD Y LA GEOMÁTICA

<http://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/UDGeo/index>

DOI:<http://dx.doi.org/10.14483/udistrital.jour.udgeo.2013.7.a02>

INVESTIGACIÓN

Simulación y comparación de una superficie tipo movimiento browniano fraccionado con una superficie topográfica real

Simulación y comparación de una superficie tipo movimiento browniano fraccionado con una superficie topográfica real

Oscar Yesid Quintero Delgado^a, Jonathan Ruiz Delgado^b,

Quintero Delgado O. Y. & Ruiz Delgado J. (2013). Simulación y comparación de una superficie tipo movimiento browniano fraccionado con una superficie topográfica real. *UD y la Geomática*, (7), pp 13 – 21.

Fecha de recepción: 08 de octubre de 2013 / **Fecha de aceptación:** 01 de noviembre 2013

RESUMEN

En este artículo se presenta la comparación entre la representación de una superficie topográfica real y una superficie generada a través de la simulación del movimiento browniano fraccionado en 2D. Se estima el exponente de Hurst de algunos perfiles extraídos de la gráfica de contornos, para así elegir el valor más representativo de la superficie; una vez obtenido el valor de Hurst, se realiza la simulación del movimiento browniano fraccionado en 2D, tomando dicho valor como parámetro principal. Finalmente, se compara la superficie simulada aleatoria con la superficie topográfica real y se identifican sus principales diferencias y similitudes.

Palabras clave: geometría fractal, exponente de Hurst, dimensión fractal, movimiento browniano fraccionado, superficies topográficas.

ABSTRACT

This article presents the comparison between the representation of a real topographic surface and a surface generated by the 2D Fractional Brownian Motion Simulation. The Hurst index creates estimates from the extracted profiles (topographic) and uses the 2D Fractional Brownian Motion simulation making this the main choice. Finally the computer simulated surface is compared with the real topographic surface identifying it's differences and similarities.

Keywords: fractal geometry, Hurst exponent, fractal dimension, fractional brownian motion, topographic surfaces.

^aIngeniero Catastral y Geodesta de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas; especialista en Geomática de la Universidad Militar Nueva Granada. Bogotá, Colombia. Correo Electrónico: oskr.kintero@gmail.com

^bIngeniero Catastral y Geodesta de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas; estudiante Maestría en Hidrosistemas de la Pontificia Universidad Javeriana. Bogotá, Colombia. Correo Electrónico: jonathan.ruiz.icg@gmail.com

1. Introducción

En los últimos años, las diversas aplicaciones que han tenido las superficies aleatorias brownianas fraccionadas se aprecian en campos tan diversos como el modelado o simulación de paisajes y nubes a través del uso del computador (Mandelbrot, 1982), modelado de la rugosidad de las superficies en física, química, ingeniería e imágenes en medicina. Los parámetros para lograr el modelado de estos campos aleatorios deben ser escogidos de tal manera que se obtenga el mejor ajuste de los datos. Como un ejemplo, muchos de los paisajes encontrados en la naturaleza poseen un exponente de Hurst de aproximadamente 0,85, en donde la dimensión fractal toma un valor de 2,15. Cabe anotar que, en algunas ocasiones, otras características o parámetros deben ser tenidos en cuenta en la simulación, ya que pueden ser relevantes y se debe asegurar tener el control fractal de dichas características (Mandelbrot, 1982).

Una de las propiedades del movimiento browniano fraccionado es la de ser un proceso estadísticamente autosimilar, esta característica se convierte en la clave para buscar la textura natural de la superficie, en donde la rugosidad de la superficie es invariante a la escala y cuyos incrementos son estacionarios.

Para la simulación del movimiento browniano fraccionado en $2D$, se empleó el método de *síntesis de incrementos de Fourier* utilizando la herramienta computacional FracLab 2.0, dado que dicho aplicativo implementa este método para simular superficies fractales aleatorias.

2. Síntesis de incrementos de Fourier para generar MBF en 2D

Para la descripción y el planteamiento matemático del presente método se tomó como base el artículo titulado “An improved method for 2D self-similar image synthesis” (Kaplun, 1996).

Entre las ecuaciones fundamentales para el desarrollo de este aparte se hace necesario referenciar las siguientes:

(1) Incrementos de segundo orden del MBF en $2D$

$$=B(m_x + 1, m_y + 1) + B(m_x, m_y) - B(m_x + 1, m_y + 1) - B(m_x, m_y + 1) \quad (1)$$

(2) Función de autocorrelación en x

$$r_x(m_x, m_y) = \frac{\sigma^2}{2} [f(m_x + 1, m_y) + f(m_x - 1, m_y) - 2f(m_x, m_y)] \quad (2)$$

(3) Función de autocorrelación en y

$$r_y(m_x, m_y) = \frac{\sigma^2}{2} [f(m_x, m_y + 1) + f(m_x, m_y - 1) - 2f(m_x, m_y)] \quad (3)$$

(4) Función de autocorrelación conjunta

$$r_2(m_x, m_y) = \frac{\sigma^2}{2} [2(f(m_x + 1, m_y) + f(m_x - 1, m_y) + f(m_x, m_y + 1) + f(m_x, m_y - 1)) - (f(m_x + 1, m_y + 1) + f(m_x + 1, m_y - 1) + f(m_x - 1, m_y + 1) + f(m_x - 1, m_y - 1)) - 4f(m_x, m_y)] \quad (4)$$

(5) Función de autocorrelación con simetría en el origen

$$R(m_x, m_y) = R(N - m_x, N - m_y) \quad (5)$$

(6) Función de autocorrelación con simetría alrededor de los ejes

$$R(m_x, m_y) = R(N - m_x, m_y) \quad \text{y} \quad R(m_x, m_y) = R(m_x, N - m_y) \quad (6)$$

La idea de crear muestras de un MBF a través de una grilla de $(M+1)*(M+1)$ es la de generar incrementos estacionarios por medio de una grilla de $M*M$. Se aprovecha el hecho que la DFT (*discrete fourier transform*) representa la KLT (*Karhunen-Loève Transform*) para un campo aleatorio gaussiano periódico estacionario (*Periodic Stationary Gaussian Random Fields*) PSGRF. Lo ideal es que se genere un $N*N$ PSGRF (en donde $N = 2M$) cuya función de correlación en la región $[-M, M] * [-M, M]$ coincide con la correlación de los incrementos del MBF.

La síntesis se lleva a cabo por medio de la ampliación del ruido blanco y con la raíz cuadrada del espectro de potencia deseado (i.e., la DFT de la función de correlación), aplicando posteriormente la inversa de la DFT. Después se cortan $M * M$ segmentos del PSGRF de manera que la función de correlación para el segmento coincide con la verdadera correlación de los incrementos del MBF para los rezagos $(I_x, I_y) \in [-M, M] \times [-M, M]$. Además, el segmento M evita el efecto envolvente de la función de correlación periódica para el PSGRF.

Algunos problemas se plantean en el procedimiento de la síntesis citado anteriormente, dado que limita la creación exacta de incrementos en el MBF. Un problema a considerar es que la función de correlación periódica no puede ser definida positiva. Esto puede suceder porque

periódicamente se extiende la función de correlación truncada y es equivalente a la convolución del espectro de potencia por una sincronización para después tomar las muestras y crear el espectro de potencia del campo aleatorio periódico. Debido al fenómeno de Gibbs, algunos de los valores de la DFT de la función de correlación periódica pueden ser negativos. Considerando estos valores malos igual a cero, se crea el actual espectro de potencia que genera los incrementos. Puesto que los valores negativos ocurrirán cerca de las frecuencias en donde el espectro de potencia original es cero, la diferencia entre la actual y las funciones de correlación objetivo será pequeña.

Otro punto a considerar es que los incrementos de primer y segundo orden no pueden ser generados independientemente, ya que mayor rugosidad aparecerá. La dependencia de $I_2(m_x, m_y)$, $I_x(m_x, m_y)$ y $I_y(m_x, m_y)$ se debe a (1), en donde la resta es tomada del modulo N . De hecho, al tomar la DFT de (1), se aprecia que los coeficientes de los incrementos de primer orden de la DFT cuando las frecuencias son diferentes de cero (i.e., $k_x > 0, k_y > 0$), son completamente determinados por los correspondientes coeficientes de los incrementos de segundo orden de la DFT. Por otra parte, los coeficientes de la DFT para $I_2(m_x, m_y)$ deben ser cero para las frecuencias cero (i.e. $k_x = 0$ o $k_y = 0$) y, por lo tanto, el espectro de potencia actual de $I_2(m_x, m_y)$ se ve obligado a ser cero para las frecuencias cero. Puesto que el espectro de potencia del campo no-periódico es cero para las frecuencias cero, el cambio en el espectro de potencia no afectará en gran medida la diferencia entre la actual y las funciones de correlación objetivo. A continuación se describe en detalle el nuevo algoritmo.

3. Algoritmo: método síntesis de incrementos de Fourier

- i. Se crean procesos de ruido blanco de tal manera que para:

$$k_x = 0, \dots, N$$

$$k_y = 0, \dots, N/2$$

$$\hat{W}(k_x, k_y) \sim N(0, 1)$$

$$\hat{\phi}(k_x, k_y) \sim \text{Uniforme}[0, 2\pi] \text{ y}$$

$$\phi(0, 0) = \phi(N/2, N/2) = \phi(N/2, 0) = \phi(0, N/2) = 0$$

- ii. Calcular $R_2(m_x, m_y)$ (la función de correlación deseada de $I_2(m_x, m_y)$) de (4) para $m_x, m_y = 0, \dots, N/2$, y simétricamente expandir la función de correlación a través de (5) y (6).

- iii. Calcular el espectro de potencia por:

$$\hat{R}_2(k_x, k_y) = \sum_{m_x=0}^{N-1} \sum_{m_y=0}^{N-1} R_2(m_x, m_y) e^{-j \frac{2\pi k_x m_x}{N}} e^{-j \frac{2\pi k_y m_y}{N}} \quad (7)$$

- iv. Definir los reales positivos del espectro de potencia semidefinidos como:

$$\hat{S}_2(k_x, k_y) = \begin{cases} 0, & k_x = 0 \text{ o } k_y = 0, \\ 0, & \text{si } \hat{R}_2(k_x, k_y) < 0, \\ \hat{R}_2(k_x, k_y) & \text{de otro modo} \end{cases} \quad (8)$$

- v. Sintetizar los coeficientes de la DFT $I_2(m_x, m_y)$ por la ampliación del ruido blanco del paso 1, tal y como se muestra en la siguiente expresión:

$$\hat{I}_2(k_x, k_y) = \begin{cases} N \sqrt{\hat{S}_2(k_x, k_y)} \hat{W}(k_x, k_y) e^{j \phi(k_x, k_y)}, & \text{para } k_x = 0, \dots, N-1 \text{ y} \\ & k_y = 0, \dots, N-1 \\ I_2(N - k_x, N - k_y), & \text{para } k_x = 0, \dots, N-1 \text{ y} \\ & k_y = \frac{N}{2} + 1, \dots, N-1 \end{cases}$$

- vi. Calcular los incrementos de segundo orden para $m_x, m_y = 0, \dots, M-1$ de la siguiente forma:

$$I_2(m_x, m_y) = \frac{1}{N^2} \sum_{k_x=0}^{N-1} \sum_{k_y=0}^{N-1} \hat{I}_2(k_x, k_y) e^{j \frac{2\pi k_x m_x}{N}} e^{j \frac{2\pi k_y m_y}{N}}$$

- vii. Crear un proceso de ruido blanco de tal manera que:

$$k_x, k_y = 0, \dots, N/2$$

$$W_x(k_x) \sim N(0, 1)$$

$$W_y(k_y) \sim N(0, 1)$$

$$\phi_x(k_x) \sim \text{Uniforme}[0, 2\pi]$$

$$\phi_y(k_y) \sim \text{Uniforme}[0, 2\pi]$$

$$\phi_x(0) = \phi_y(0) = \phi_x(N/2) = \phi_y(N/2)$$

- viii. Calcular $R_x(k_x, k_y)$ y $R_y(k_x, k_y)$ para $k_x, k_y = 0, \dots, N/2$ usando (2) y (3) y simétricamente expandir las funciones de correlación usando (5) y (6).

ix. Calcular el espectro de potencia deseado de los incrementos de primer orden en las frecuencias cero, a través de:

$$\hat{R}_x(k_x, 0) = \sum_{m_x=0}^{N-1} \sum_{m_y=0}^{N-1} R_x(m_x, m_y) e^{-j \frac{2\pi k_x m_x}{N}} \quad (9)$$

$$\hat{R}_y(0, k_y) = \sum_{m_x=0}^{N-1} \sum_{m_y=0}^{N-1} R_y(m_x, m_y) e^{-j \frac{2\pi k_y m_y}{N}} \quad (10)$$

x. Definir los reales positivos del espectro de potencia semidefinidos, de los incrementos de primer orden en las frecuencias cero a través del siguiente caso:

$$\hat{S}_x(k_x, 0) = \begin{cases} 0, & \text{si } \hat{R}_x(k_x, 0) < 0 \\ \hat{R}_x(k_x, 0), & \text{de otro modo} \end{cases}$$

$$\hat{S}_y(0, k_y) = \begin{cases} 0, & \text{si } \hat{R}_y(0, k_y) < 0 \\ \hat{R}_y(0, k_y), & \text{de otro modo} \end{cases}$$

xi. Sintetizar los coeficientes de la DFT de los incrementos de primer orden por la ampliación del ruido blanco del paso 7, como se muestra en el siguiente caso:

$$\hat{I}_x(k_x, k_y) = \begin{cases} -j \frac{\hat{I}_2(k_x, k_y)}{2\text{sen}(\pi k_y/N)} e^{-j\pi k_y/N}, & \text{para } k_x, k_y = 1, \dots, N-1 \\ N \sqrt{\hat{S}_x(k_x, 0)} \hat{W}_x(k_x) e^{-j\phi_x(k_x)}, & \text{para } k_x = 0, \dots, \frac{N}{2}, \text{ y } k_y = 0 \\ I_x^*(N - k_x, 0), & \text{para } k_x = \frac{N}{2} + 1, \dots, N-1 \text{ y } k_y = 0, \\ 0, & \text{de otro modo} \end{cases}$$

$$\hat{I}_y(k_x, k_y) = \begin{cases} -j \frac{\hat{I}_2(k_x, k_y)}{2\text{sen}(\pi k_x/N)} e^{-j\pi k_x/N}, & \text{para } k_x, k_y = 1, \dots, N-1 \\ N \sqrt{\hat{S}_y(0, k_y)} \hat{W}_y(k_y) e^{-j\phi_y(k_y)}, & \text{para } k_x = 0, \text{ y } k_y = 0, \dots, \frac{N}{2} \\ I_y^*(0, N - k_y), & \text{para } k_x = 0 \text{ y } k_y = \frac{N}{2} + 1, \dots, N-1, \\ 0, & \text{de otro modo} \end{cases}$$

xii. Calcular los incrementos de primer orden a lo largo de los límites de la imagen para $m_x, m_y = 0, \dots, M-1$ de la siguiente forma:

$$I_x(m_x, 0) = \frac{1}{N^2} \sum_{k_x=0}^{N-1} \sum_{k_y=0}^{N-1} \hat{I}_x(k_x, k_y) e^{-j \frac{2\pi m_x k_x}{N}} \quad (11)$$

$$I_y(0, m_y) = \frac{1}{N^2} \sum_{k_x=0}^{N-1} \sum_{k_y=0}^{N-1} \hat{I}_y(k_x, k_y) e^{-j \frac{2\pi m_y k_y}{N}} \quad (12)$$

xiii. Se suman los incrementos para calcular el MBF del campo para $m_x, m_y = 0, \dots, M$, a través de:

$$\begin{aligned} B(0, 0) &= 0, \\ B(m_x, 0) &= B(m_x - 1, 0) + I_x(m_x - 1, 0), \\ B(0, m_y) &= B(0, m_y - 1) + I_y(0, m_y - 1), \\ B(m_x, m_y) &= B(m_x, m_y - 1) + B(m_x - 1, m_y) \\ &\quad - B(m_x - 1, m_y - 1) + I_2(m_x - 1, m_y - 1) \end{aligned}$$

La síntesis de incrementos de Fourier del MBF utiliza las estadísticas exactas del MBF, con tan sólo dos veces el costo computacional que la síntesis de Fourier estándar.

4. Simulación del movimiento browniano fraccionado en 2D

Para la simulación se trabajó con matrices o grillas de tamaño $N \times N$ datos; los tamaños utilizados fueron de 512×512 , 1024×1024 y 2048×2048 datos aleatorios, con unos valores de evaluación del exponente de Hurst de 0,1, 0,5 y 0,9, respectivamente (figuras 1 y 2). En las gráficas obtenidas por el método de síntesis de incrementos de Fourier se puede observar cómo en cada una de las grillas realizadas (512×512 y 2048×2048), evaluadas con los diferentes valores del exponente de Hurst (0,1 y 0,9), el aspecto que presentan es muy similar en dichos valores del exponente, por lo que se puede inferir que sin importar el tamaño de las grillas, las gráficas siempre tendrán un patrón o similitud entre ellas. Este patrón es el que se encuentra asociado con la persistencia o antipersistencia que toman los valores en las gráficas, puesto que, para este tipo de simulaciones en 2D, se logra identificar a través de la textura que adquieren cuando se comparan los diferentes valores de H . Para el primer caso ($H = 0,1$), se aprecia cómo las texturas presentan un aspecto mucho más rugoso y caótico en las gráficas correspondientes a la representación de las

superficies; en cuanto a las gráficas en el plano $2D$, muestran una clara dispersión en los datos que se traduce en la presencia difusa de los colores en la totalidad de la grilla. En el segundo caso ($H = 0,9$) se puede apreciar todas las gráficas evaluadas con este exponente muestran una textura completamente suavizada y la dispersión en los colores se hace mucho más definida y clara a lo largo y ancho de la grilla.

De las gráficas que representan las superficies se puede observar cómo el criterio de persistencia o antipersistencia

se identifica en la rugosidad de la superficie, como ya se mencionó; es importante recalcar que una mejor manera de identificar dicho criterio en este tipo de gráficas es realizando un corte vertical en donde se logre obtener una visualización de los datos en una dimensión ($1D$). Es claro que lo que representa esta visualización es la simulación del MBF en una dimensión ($1D$), por lo que así se hace más fácil identificar si los datos siguen un comportamiento persistente o antipersistente en cada una de las simulaciones.

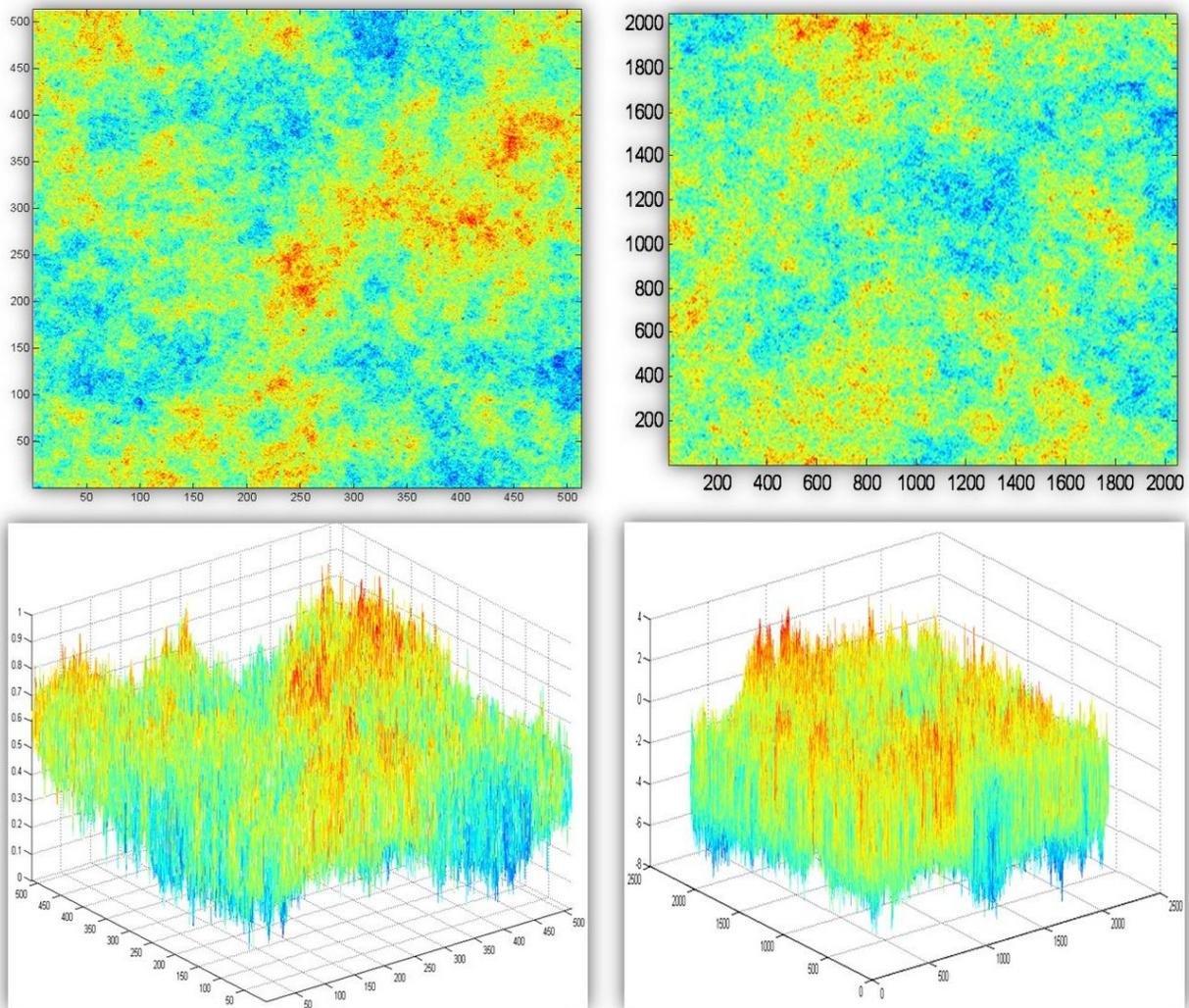


Figura 1. Método síntesis de incrementos de Fourier; a la izquierda grilla de 512×512 , a la derecha grilla de 2048×2048 con $H=0,1$ en ambos casos. Las gráficas en el plano $2D$ corresponden a la vista superior, las gráficas en el plano $3D$ corresponden a la superficie.

Fuente: elaboración propia.

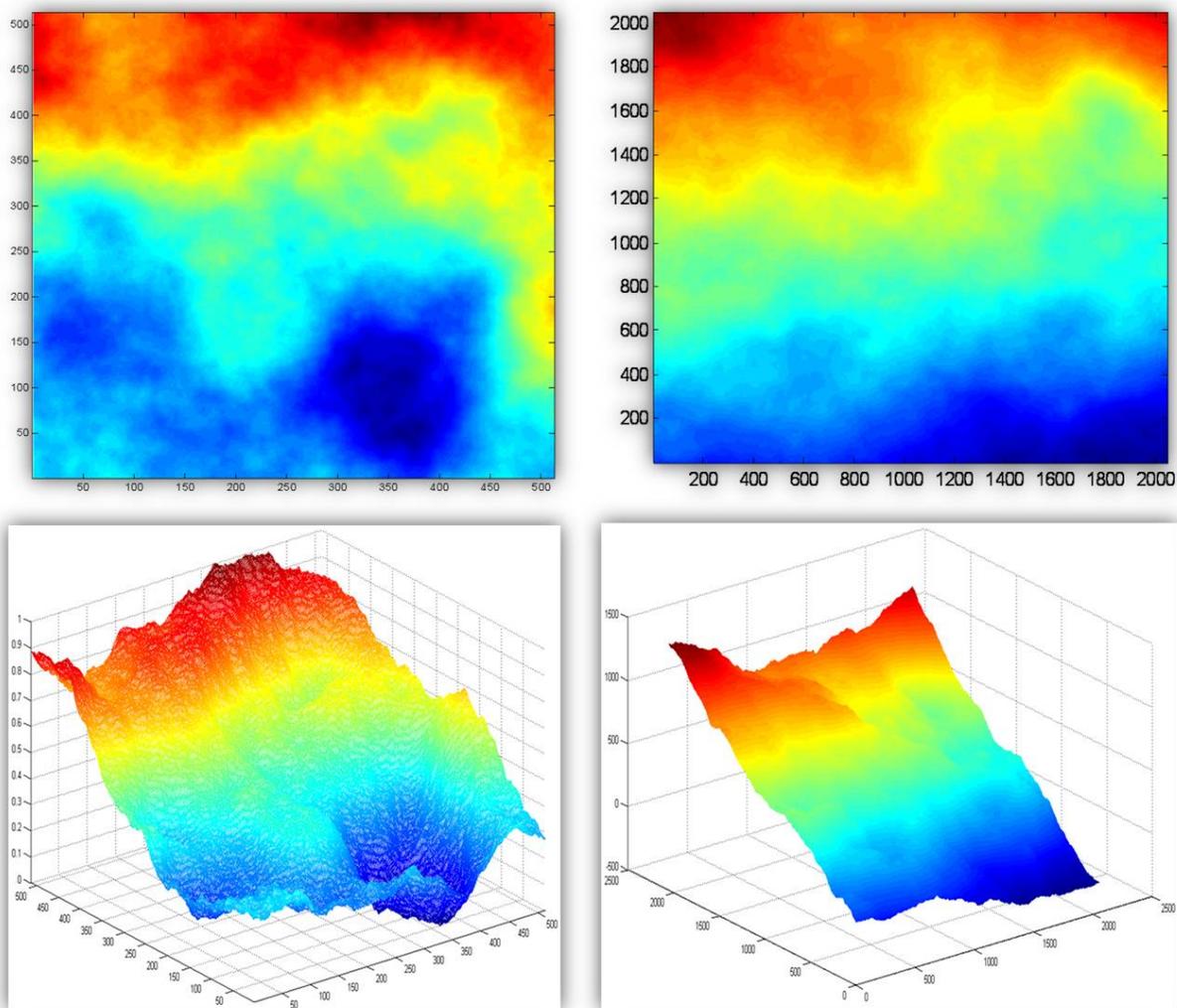


Figura 2. Método síntesis de incrementos de Fourier; a la izquierda grilla de 512×512 , a la derecha grilla de 2048×2048 con $H = 0,9$ en ambos casos. Las gráficas en el plano 2D corresponden a la vista superior, las gráficas en el plano 3D corresponden a la superficie.

Fuente: elaboración propia, 2011.

5. Metodología

5.1. Descripción general de la zona de trabajo

Para la estimación de la rugosidad de una superficie se trabajó con el modelo digital de elevaciones de Colombia a 30 metros de resolución (figura 3), modelo para el cual se utilizaron las planchas a escala 1:100.000. Como zona de trabajo en específico se generó un mosaico compuesto por cuatro de estas planchas correspondientes a una zona limítrofe entre los departamentos de Tolima, Caldas y Cundinamarca, teniendo como coordenadas planas de referencia del marco de dicha zona los siguientes valores: 1079753,270576, 1000084,538439 metros en

el norte; 999875,295327, 879903,557521 metros en el este, cubriendo un área total de 9.557,996118 kilómetros cuadrados de extensión. El departamento de Cundinamarca es el de mayor aporte de información en el mosaico, tal como se muestra en la figura 4, en la cual el rectángulo de color naranja corresponde al mosaico extraído para la generación de la superficie.

En la zona elegida se identificó que el mosaico preparado comprende alrededor de 5 municipios en el departamento de Caldas, 18 municipios del departamento de Tolima y 53 municipios en el área del departamento de Cundinamarca, cubriéndolos en parte de su área o en su totalidad; además de estos municipios, también se encuentra la zona noroccidente de la ciudad de Bogotá. Para todos estos municipios

se encontró un rango de alturas que oscila entre los 150 y los 3.720 metros sobre el nivel del mar, donde los puntos de menor altitud (3) se encuentran en los municipios de Guaduas (Cundinamarca) y La Dorada (Caldas), en inmediaciones o zonas aledañas al río Magdalena en lo que se refiere a su presencia a lo largo del límite entre los departamentos mencionados; por otra parte, los puntos con la mayor altura (4) se encuentran en los municipios de Pacho y Subachoque, ambos del departamento de Cundinamarca.

El siguiente proceso que se realizó fue la extracción de los puntos con coordenadas X , Y y Z a partir del mosaico descrito, mediante la generación de los contornos para dicho modelo raster, a los cuales posteriormente se le crearon los puntos respectivos en el centroide de cada una de las respectivas curvas de nivel generadas, con lo que se obtuvo un total de 22.643 puntos, los cuales representan la superficie que se muestra en la figura 5, al igual que sus respectivos contornos.

La representación de la figura 5 fue realizada a través del software SURFER 8 a partir de los datos descritos anteriormente, los cuales van a ser la base para la estimación y posterior evaluación de los exponentes de Hurst de cada perfil.

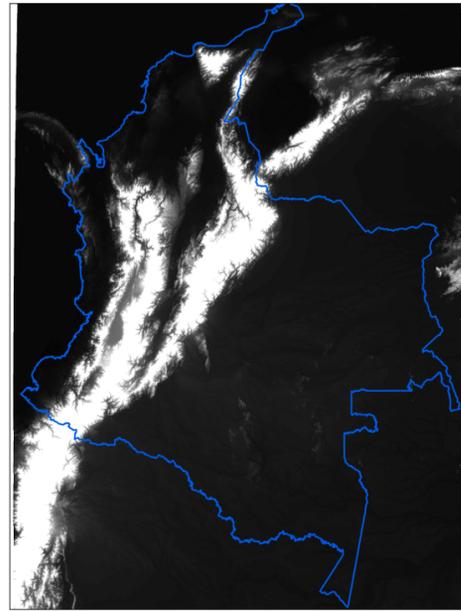


Figura 3. Modelo digital de elevación de Colombia, resolución de 30 metros.

Fuente: Instituto Geográfico Agustín Codazzi (IGAC).

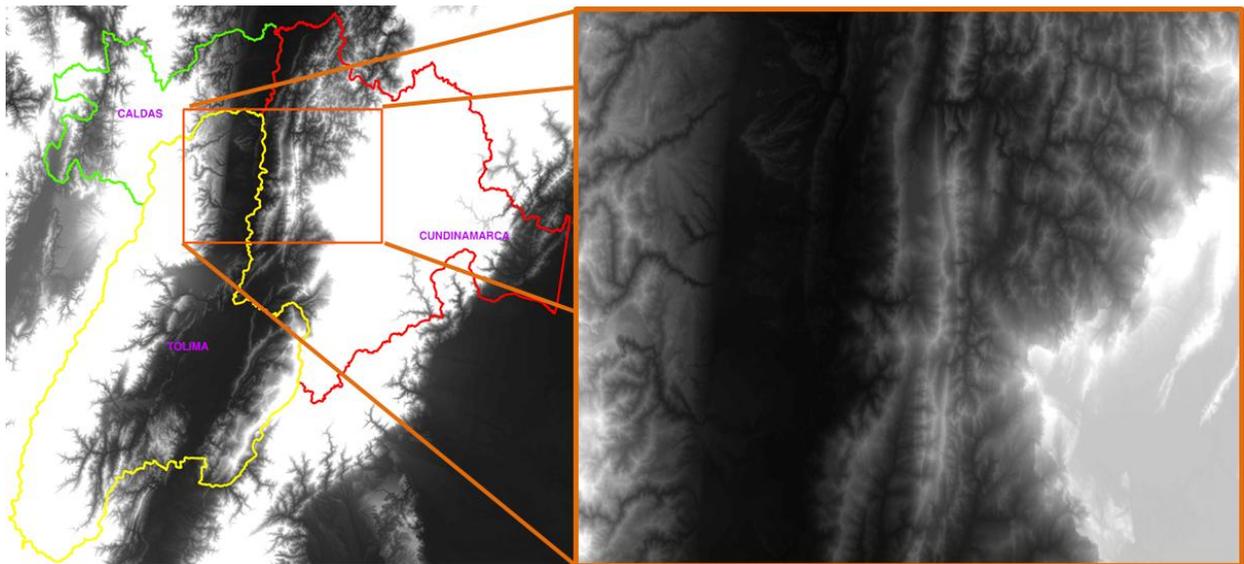


Figura 4. Mosaico en naranja correspondiente a la zona de trabajo específica.

Fuente: elaboración propia.

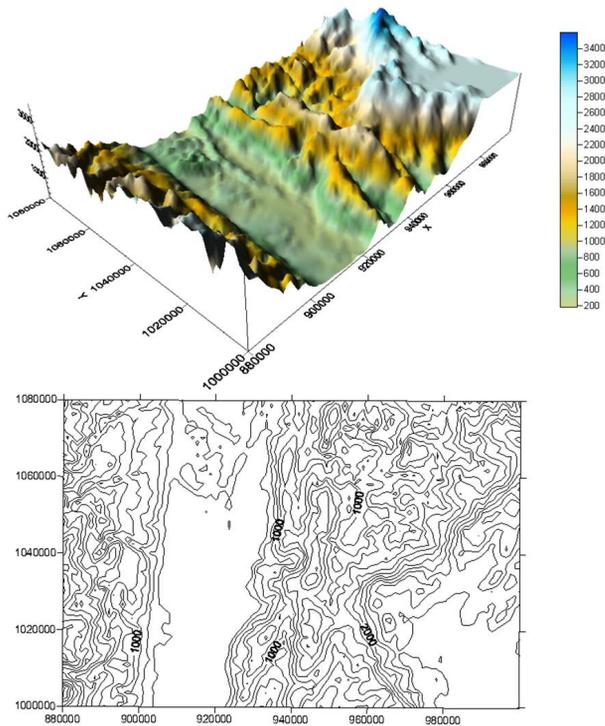


Figura 5. Superficie generada (arriba) y mapa de contornos o curvas de nivel de dicha superficie (abajo).

Fuente: elaboración propia.

6. Resultados obtenidos y conclusiones

Para generar la simulación aleatoria tipo movimiento browniano fraccionado en $2D$, se decidió tomar uno de los dos valores obtenidos como representativos del exponente de Hurst, debido a que se encuentran muy cercanos y la superficie aleatoria generada es prácticamente la misma; así, el valor escogido fue el más alto, que corresponde a 0,576158 (Quintero, 2011). Utilizando el software FracLab 2.0, se ingresó dicho valor como parámetro para la generación de la superficie aleatoria, la grilla con la que se trabajó fue de 150×150 datos, debido a que del modelo original se extrajeron 22.643 puntos, donde cada punto generado corresponde al centroide de cada curva de nivel. La grilla elegida cuenta con este tamaño puesto que se hizo necesario tener la misma cantidad de puntos tanto en la superficie real como en la superficie aleatoria, para así lograr que las dos superficies se fueran generadas con los mismos parámetros.

Una vez obtenida la superficie aleatoria, se comparó con la superficie real (figura 6), de lo cual se obtuvo una leve similitud con el paisaje real. La superficie aleatoria fue generada —como su nombre lo indica— a través de datos normalmente distribuidos aleatoriamente, por lo cual es poco probable que este tipo de superficies se encuentren similares a las superficies reales. Cabe destacar que lo que tienen en común los dos tipos de superficies es que comparten el expo-

nente de Hurst, es decir, se preserva como principal y único atributo fractal, el cual se estimó de la superficie real para poder generar la superficie aleatoria, que para el caso de análisis de paisajes topográficos se asemeja a la rugosidad de la superficie.

Así mismo, a partir del valor representativo del exponente de Hurst (0,576158), se procedió a estimar la dimensión fractal de las dos superficies por medio de la relación $D=3-H$, obteniéndose un valor de 2,42, el cual también se considera representativo tanto para la superficie aleatoria como para la superficie topográfica real. Con ello se consolida el concepto de dimensión fractal de superficies, dado que este valor es consecuente con lo que visualmente se puede identificar en las dos superficies estudiadas.

Por último, se destaca el hecho de que el exponente de Hurst es la base para la generación de las simulaciones de superficies aleatorias. Para el presente caso de estudio, y en particular de las superficies topográficas reales, este parámetro se logró extraer a partir de unos perfiles con la finalidad de realizar comparaciones y analizar las semejanzas y diferencias existentes en este tipo de simulaciones.

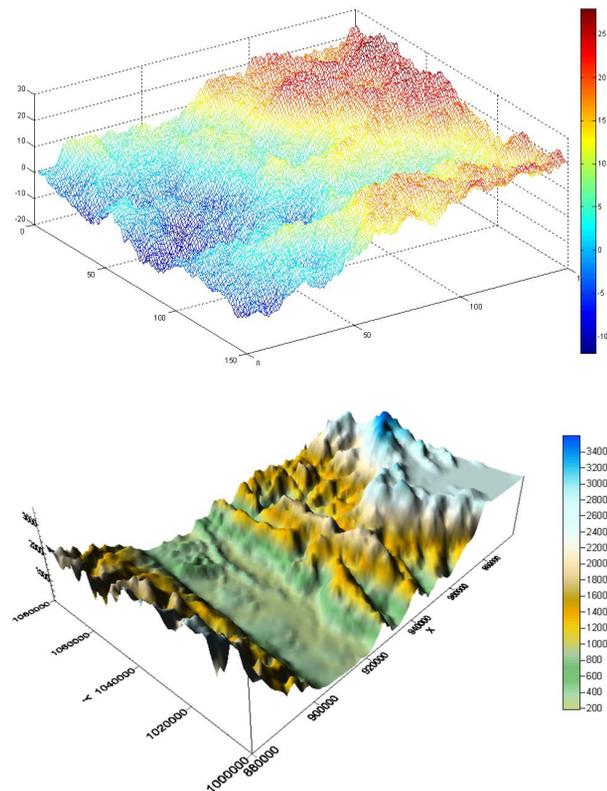


Figura 6. Comparación de superficies: superficie generada aleatoriamente a través del MBF con un $H = 0,57$ (arriba); superficie topográfica real de la zona de estudio (abajo).

Fuente: elaboración propia.

7. Agradecimientos

A Nelson Obregón Neira, PhD, por convertirse en el principal motivador en la elaboración del proyecto, por sus conocimientos en el área de trabajo y por ser la guía y luz en nuestro arduo camino durante el desarrollo de la investigación.

A la Pontificia Universidad Javeriana y en particular al Instituto Geofísico, por brindarnos desinteresadamente sus espacios académicos e instalaciones.

A la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, por ser la institución que durante todo este tiempo nos brindó las bases y el conocimiento para lograr enfrentar este proyecto, por convertirse en el pilar de nuestra formación íntegra como ingenieros.

Referencias

- Addison, P. (1997). *Fractals and Chaos: An Illustrated Course*. Bristol: Institute of Physics Publishing.
- Coeurjolly, J-F. (June 2000). *Simulation and Identification of the Fractional Brownian Motion: A Bibliographical and Comparative Study*.
- Decreusefond, L. & Ustunel, A. S. *Stochastic Analysis of the Fractional Brownian Motion*. Francia: École Nationale Supérieure des Télécommunications.
- Es-Sebaiy, K., Ouassou, I. y Ouknine, Y. (2009). Estimation of the Drift of Fractional Brownian Motion. *Statistics and Probability Letters*, 79, pp. 1647-1653
- Falconer, K (2003). *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications*, (2nd ed.). UK: University of St. Andrews.
- Freeman, J. M. (December 2007). *Procedural Terrain Generation with Fractional Brownian Motion*. Intel Software Solutions Group. Intel Corporation.
- Garzón, J., Gorostiza, L. G. y León, J. A. (2009). A Strong Uniform Approximation of Fractional Brownian Motion by Means of Transport Processes. *Stochastic Processes and Their Applications*, 119, pp. 3435-3452.
- Kaplan, L. M. y Jay, C. C. (May 1996). An Improved Method for 2-D Self-Similar Image Synthesis. *IEEE Transactions on Image Processing*, 5 (5).
- Mandelbrot, B. B. (1982). *The Fractal Geometry of Nature*. EUA: International Business Machines Thomas J. Watson Research Center.
- Mandelbrot, B. B. & Van Ness, J. W. (October 1968). Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications. *SIAM Review*, 10 (4), pp. 422-437.
- Quintero, O. y Ruiz J. (2011). Estimación del exponente de Hurst y la dimensión fractal de una superficie topográfica a través de la extracción de perfiles. *Revista UD y la Geomática*, 1 (5).
- Sierra Juárez, G. *Procesos Hurst y Movimiento Browniano Fraccional en Mercados Fractales: Valuación y Aplicaciones a los Derivados y Finanzas*. México: Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey.
- Strecker, J. (April 2004). *Fractional Brownian Motion Simulation: Observing Fractal Statistics in the Wild and Raising Them in Captivity*. Department of Mathematics and Computer Science. The College of Wooster.



