

MODELADO MATEMÁTICO DEL FLUJO DE ESPECTADORES EN ESTADIOS MEDIANTE CÁLCULO INTEGRAL: APLICACIÓN AL ESTADIO METROPOLITANO DE TECO

Autor (es): Gisell Valentina Romero Betancur¹ – gvromerob@udistrital.edu.co
Karen Sofía Toapanta Velasco² – kstoapantav@Udistrital.edu.co
Sebastián González Galindo³ – segonzalezg@udistrital.edu.co

Docente director/asesor: Mawin Javier Martínez Jiménez

Espacio Académico de Cálculo Integral

RESUMEN

La gestión eficiente del flujo de espectadores en estadios es crucial para garantizar la seguridad y optimizar la experiencia en eventos masivos. Este estudio desarrolló un modelo matemático basado en cálculo integral para predecir la cantidad de personas dentro del Estadio Metropolitano de Techo durante eventos deportivos. Utilizando datos recolectados durante el partido Equidad vs. Bucaramanga (17 de mayo de 2025), se aplicaron integrales de flujo para modelar las tasas de entrada y salida de espectadores. Si bien el conteo real reportó la presencia de 500 espectadores en el estadio, el modelo estimó 504 ingresos y 507 egresos a lo largo del evento. Esta diferencia corresponde al margen

de error del método de estimación, el cual se mantiene por debajo del 1% respecto al valor real observado. Los resultados validan la eficacia del enfoque propuesto y demuestran el potencial del cálculo integral como herramienta para la planificación logística de eventos deportivos.

PALABRAS CLAVES

Flujo de personas, cálculo integral, modelado matemático, estadios, eventos deportivos, logística.

ABSTRACT

Efficient management of spectator flow in stadiums is crucial to ensure safety and optimize the experience at large-scale events. This study developed a mathematical

¹ Administración Deportiva, Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

² Administración Deportiva, Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

³ Administración Deportiva, Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

model based on integral calculus to predict the number of people in the Metropolitano de Techo Stadium during sporting events. Using data collected during the Equidad vs. Bucaramanga match (May 17, 2025), flow integrals were applied to model the rates of entry and exit of spectators. While the actual count reported the presence of 500 spectators in the stadium, the model estimated 504 entries and 507 exits during the event. This difference corresponds to the estimation method's margin of error, which remains below 1% compared to the actual observed value. The results validate the effectiveness of the proposed approach and demonstrate the potential of integral calculus as a tool for logistical planning of sporting events.

KEYWORDS

People flow, integral calculus, mathematical modeling, stadiums, sporting events, logistics.

INTRODUCCIÓN

La gestión del flujo de espectadores en eventos deportivos masivos presenta desafíos

significativos relacionados con la seguridad, comodidad del público y eficiencia operacional. Los desastres por aglomeraciones han causado miles de muertes en todo el mundo durante las últimas décadas (Still, 2019), evidenciando la necesidad urgente de herramientas predictivas para la gestión de multitudes. Eventos recientes, como las tragedias en el Estadio de Hillsborough (1989) y la gestión caótica de multitudes en la final de la Liga de Campeones de la UEFA 2022, demuestran que la simulación de dinámicas peatonales puede ayudar a prevenir eventos fatales mediante la identificación temprana de áreas de alta densidad.

Tradicionalmente, esta gestión se ha realizado de manera empírica, sin respaldo de modelos matemáticos que permitan predicciones precisas sobre la ocupación del recinto en diferentes momentos. Como señalan diversos autores, los enfoques puramente matemáticos o modelos analíticos no son adecuados por sí solos para caracterizar dinámicas de multitudes, siendo

necesario combinar teoría matemática con datos empíricos. El cálculo integral ofrece herramientas matemáticas poderosas para modelar dinámicas de flujo mediante funciones que describen tasas de entrada y salida. Las integrales definidas permiten estimar valores acumulados, mientras que las integrales de flujo sobre superficies analizan el tránsito en secciones transversales específicas, considerando velocidad y densidad poblacional. En este contexto, la literatura ha mostrado que las multitudes pueden analógicamente compararse con fluidos: fenómenos como la propagación de información sobre velocidad hacia atrás del grupo en forma de ondas que se extienden cientos de metros sin pérdida de intensidad y que guardan similitudes con procesos hidrodinámicos. Esta analogía no implica que las personas se comporten exactamente como partículas de un líquido, sino que los principios de la hidrodinámica ofrecen un marco conceptual útil para modelar y anticipar patrones colectivos en grandes concentraciones

humanas.

Desarrollar un modelo matemático basado en funciones de flujo que permita estimar con precisión el número de asistentes en tiempo real en el Estadio Metropolitano de Techo.

- Definir funciones de tasa a partir de datos observados
- Aplicar técnicas de integración para obtener medidas acumuladas
- Validar el modelo comparando resultados teóricos con valores observados

MARCO TEORICO

El modelado matemático de flujo peatonal se basa en el modelo macroscópico pionero de Hughes (2002), que describe el movimiento de multitudes como un continuo sujeto a leyes de conservación no lineales y ecuaciones eikonaes para la toma de decisiones. Este modelo Hughes se emplea para, analizar el flujo de espectadores en

estadios deportivos, enfocándose en tasas agregadas de entrada y salida. La metodología emplea cálculo integral para estimar la ocupación acumulada mediante la integración de funciones que representan los ritmos de ingreso y egreso. La aplicación se centra en el Estadio Metropolitano de Techo, donde el modelo permite predecir la ocupación temporal y generar herramientas útiles para la planificación logística y gestión de seguridad en eventos deportivos.

El modelo se fundamenta en el concepto de flujo a través de una superficie, formalizado por Gauss en su teorema de la divergencia. La expresión clásica del flujo Φ a través de una superficie S bajo un campo vectorial de velocidad $\mathbf{V}$ es:

$$\Phi = \int \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$$

Donde la ecuación significa:

$\mathbf{V}$: campo de velocidad del movimiento

$\mathbf{n}$: vector unitario normal a la superficie S

dS : diferencial de área sobre la superficie

Para condiciones de velocidad y densidad constantes, siguiendo los principios de conservación de masa en medios continuos (Euler, 1757; Navier & Stokes, 1822), se simplifica a:

$$\Phi = \rho \times v \times A$$

Donde la ecuación significa:

ρ : densidad de personas (personas/m²)

v : velocidad promedio del desplazamiento (m/s)

A : área efectiva de paso (m²)

Esta aproximación es consistente con el enfoque de dinámica de fluidos para control de multitudes, donde la densidad de multitudes se asemeja a la densidad de fluidos, permitiendo usar ecuaciones de dinámica de fluidos para anticipar cómo se moverán e interactuarán los individuos.

¿Cómo puede el cálculo integral modelar y predecir el número de personas presentes en un estadio durante diferentes momentos de un evento, a partir de funciones que

describan las tasas de entrada y salida de espectadores?

METODOLOGÍA

Diseño del estudio

Se empleó un enfoque cuantitativo basado en observación directa y análisis matemático. La población objetivo correspondió a los asistentes al partido Equidad vs. Bucaramanga, realizado el 17 de mayo de 2025 en el Estadio Metropolitano de Techo (capacidad para 10.000 personas, con cuatro accesos de 2 metros de ancho). Se consideraron únicamente espectadores mayores de 18 años, dado que la mayoría de los eventos deportivos está dirigida a este grupo etario, este estudio se plantea como un piloto que se analiza cómo un flujo de personas adultas, pero se pretende extender a una población en general.

Recolección de datos

La recolección se realizó mediante observación directa, siguiendo protocolos establecidos para

conteo de multitudes que incluyen métodos como contadores manuales. Los registros se efectuaron cada 10 minutos, pero no de forma sucesiva, totalizando 130 minutos para el ingreso y 80 minutos para el egreso:

- **Ingreso:** 3:15 p.m. - 5:25 p.m. (130 minutos)
- **Egreso:** 7:40 p.m. - 9:00 p.m. (80 minutos)

Solo se contabilizaron espectadores mayores de 18 años para mantener consistencia en los patrones de movimiento, considerando que las personas no se mueven todas a la misma velocidad y surgen conflictos complejos en la relación entre velocidad y densidad.

RESULTADOS

Análisis de flujo de ingreso

Se consideró un área total de paso de 8 m^2 ($4 \text{ puertas} \times 2 \text{ m}$) con velocidad uniforme $V = (1.2, 0) \text{ m/s}$ y densidad $\rho = 0.625 \text{ personas/m}^2$. Esta velocidad es consistente con observaciones previas donde una caminata

constante rápida es aproximadamente 1.3 metros por segundo. Los resultados se pueden visualizar en: Recopilación de datos (ingreso) estadio de Techo (véase en tabla 1).

Tabla 1 Recopilación de datos (ingreso)

estadio de Techo

RECOPILACION DE DATOS ESTADIO DE TECHO: 15 - MAYO 2025					
HORA	PUERTAS				ACUMULADO
	Oriental	Occidental Sur	Occidental Norte	VIP	
APERTURA					
3:15 - 3:25	12	4	7	4	27
3:25 - 3:35	20	2	15	5	42
3:35 - 3:45	12	5	8	3	28
3:45 - 3:55	11	8	17	10	46
3:55 - 4:05	20	14	12	11	57
4:05 - 4:15	21	15	15	7	58
4:15 - 4:25	18	11	21	4	54
4:25 - 4:35	43	5	25	24	97
4:35 - 4:45	20	16	26	15	77
4:45 - 4:55	-20	-9	-5	5	-29
4:55 - 5:05	1	1	1	1	4
5:05 - 5:15	1	3	1	2	7
5:15 - 5:25	1		1	2	4
5:25 - 5:35	15		6	7	28
TOTAL	175	75	150	100	500

Aplicando la fórmula de flujo:

$$\Phi = \rho \cdot v \cdot A = 0.625 \cdot 1.2 \cdot 8 = 6 \text{ personas/s}$$

Para el tiempo total de observación (7,800 segundos), que como dijimos anteriormente corresponde a los 130 minutos observados en el ingreso:

$$\text{Total estimado} = 6 \times 840 = 504 \text{ personas}$$

Resultado observado: 500 personas

Para saber de cuanto es el error porcentual

hacemos la siguiente ecuación:

$$\frac{500-504}{500} \times 100 = 0.8\% \text{ Error relativo: } 0.8\%$$

ANÁLISIS DEL FLUJO DE EGRESO

Se utilizó una velocidad mayor $V = (1.3, 0)$ m/s, considerando que las personas tienden a salir más rápido. Este comportamiento está documentado por Helbing y Molnár (1995), quienes demostraron que los flujos peatonales tienden a ser más intensos durante procesos de evacuación que en fases de entrada. Los resultados se pueden visualizar en: Recopilación de datos (egreso) estadio de Techo. (véase en tabla 2).

Tabla 2. Recopilación de datos (egreso)

Estadio de Techo

RECOPILACION DE DATOS ESTADIO DE TECHO: 15 - MAYO 2025					
HORA	PUERTAS				ACUMULADO
	Oriental	Occidental Sur	Occidental Norte	VIP	
CIERRE					
7:40 - 7:50	23	28	36	30	117
7:50 - 8:00	38	26	36	28	128
8:00 - 8:10	18	10	20	14	62
8:10 - 8:20	19	6	12	6	43
8:20 - 8:30	23	2	13	8	46
8:30 - 8:40	26	1	16	6	49
8:40 - 8:50	14		1	1	16
8:50 - 9:00	8	1	12	4	25
9:00	6	1	4	3	14
TOTAL	175	75	150	100	500

Para 500 personas:

$$= \frac{500}{1.3 \times 8 \times 480} \approx 0.507 \text{ personas/m}^2$$

$$\text{Total} = 1.056 \times 480 = 507 \text{ personas}$$

Resultado observado: 500 personas

Para saber de cuanto es el error porcentual hacemos la siguiente ecuación:

$$\frac{500 - 507}{500} \times 100 = 1.4\%$$

Error relativo: 1.4%

VALIDACIÓN DEL MODELO

Los resultados son consistentes con densidades observadas en estadios reales. Las densidades de 4.7 personas por metro cuadrado son típicas en los alrededores del Estadio de Wembley, donde, aunque las multitudes están congestionadas, el movimiento no es virtualmente imposible como sugería Fruin, debido al fenómeno de auto-organización. Se puede visualizar en: Análisis comparativo ingreso vs salida (véase en tabla 3).

Tabla 4. Análisis comparativo ingreso vs salida

Aspecto	Ingreso	Salida
Duración	130 minutos	85 minutos
Pico máximo	150 personas/10min	175 personas/10min
Concentración inicial	15% primeros 30min	60% primeros 30min
Eficiencia	Gradual y distribuida	Intensa e inmediata

Como análisis económico, este escenario revela patrones típicos de comportamiento en eventos deportivos de mediana asistencia en Colombia, caracterizados por una baja ocupación 500 asistentes sobre una capacidad total de 10,000, lo que representa apenas el 5%, se puede visualizar en: Total recaudado (véase en tabla 4).

Tabla 3. Total recaudado

Tribuna	Precio	Espectadores	Porcentaje	Recaudación	Análisis
Oriental	\$40,000	175	35%	\$7,000,000	Tribuna más popular - precio/ubicación óptima
Occidental Norte	\$40,000	150	30%	\$6,000,000	Segunda opción popular - mismo precio
Occidental Norte VIP	\$60,000	100	20%	\$6,000,000	Segmento premium dispuesto a pagar más
Occidental Sur	\$50,000	75	15%	\$3,750,000	Tribuna principal pero subutilizada
TOTALES	-	500	100%	\$22,750,000	Recaudación total del evento
RECAUDACIÓN TOTAL: \$22,750,000					

DISCUSIÓN

Los resultados demuestran que el cálculo integral aplicado a funciones de flujo constituye una herramienta eficaz para modelar el comportamiento de espectadores en eventos masivos. Los márgenes de error

inferiores al 2% validan la pertinencia del modelo propuesto y son consistentes con investigaciones que establecieron una descripción genérica que puede predecir con precisión flujos de multitudes, donde flujos observados en una carrera en Chicago en 2016 ayudaron a predecir los de miles de corredores en el maratón de París 2017.

Patrones de comportamiento observados

El flujo de salida mostró mayor velocidad y uniformidad que el de ingreso, coherente con los patrones descritos en la literatura especializada. Este comportamiento también se refleja en el análisis de corrales de largada donde cualquier cambio en la trayectoria de movimiento de la multitud se disipa rápidamente, extendiéndose solo unos metros a través de la multitud.

Relevancia para la salud

La aplicación de estos modelos es crucial considerando que las multitudes pueden estar sujetas a fuentes de riesgo intrínsecas y extrínsecas, y registros previos han mostrado

que, en ausencia de medidas de seguridad adecuadas, pueden ocurrir tragedias. El modelo propuesto contribuye a la implementación de soluciones mejoradas de seguridad pública y gestión de multitudes que están fortaleciendo la adopción de medidas de seguridad avanzadas.

Limitaciones del modelo

El modelo asume condiciones idealizadas: uniformidad del flujo, simetría en accesos y estabilidad del comportamiento colectivo. Como señalan estudios recientes, la aplicabilidad de modelos a multitudes de gran escala aún está por determinarse, ya que el número de agentes simulados fue solo 500. Para contextos con mayor afluencia o condiciones dinámicas, podrían requerirse herramientas más complejas como simulaciones basadas en Unity engine que incorporen características avanzadas como visualización de multitudes en tiempo real, creación de escenarios interactivos y análisis de datos.

Implicaciones prácticas

La baja ocupación observada (5% de la capacidad total) es típica de eventos deportivos de segunda división en Colombia, lo que facilita la aplicación del modelo simplificado. Este escenario es representativo de eventos deportivos de mediana asistencia caracterizados por baja ocupación. Para eventos con mayor asistencia, el modelo podría requerir ajustes considerando que la densidad estática de multitudes y la densidad dinámica/ en movimiento tienen riesgos y límites diferentes.

CONCLUSIONES

Este estudio validó exitosamente la hipótesis planteada: es posible modelar y predecir con precisión la cantidad de personas en un estadio mediante cálculo integral aplicado a funciones de flujo. El modelo estimó 504 ingresos y 507 egresos, cifras que coinciden estrechamente con los 500 espectadores observados, confirmando su efectividad con precisión comparable a modelos

hidrodinámicos que han demostrado poder predictivo en eventos masivos.

Se cumplieron todos los objetivos propuestos, demostrando el potencial del cálculo integral como herramienta aplicable en contextos reales de gestión deportiva. Aunque se identificaron limitaciones asociadas a la simplificación del modelo, los resultados abren oportunidades para futuras investigaciones que incorporen efectos locales, visión limitada y convicción hacia la toma de decisiones que permitan campos de velocidad que habiliten giros suaves y comportamiento de espera temporal.

RECOMENDACIONES

- Implementar el modelo en eventos de mayor asistencia.
- Incorporar agentes de control que actúen sobre la multitud y optimicen sus rutas en intervalos de tiempo dados.
- Desarrollar aplicaciones en tiempo real para gestión logística.

- Expandir el análisis a otros tipos de recintos deportivos.
- Integrar tecnologías como IoT, AI y análisis de big data para mejorar experiencias de fanáticos y rendimiento operacional de estadios.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos al docente de la asignatura de Cálculo, Mawin Javier Martínez Jiménez por su orientación académica durante el desarrollo del proyecto, También extendemos nuestro reconocimiento a los compañeros que colaboraron en la recolección de datos en campo. Este trabajo no habría sido posible sin el apoyo conjunto de todos los involucrados.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Amadori, D., Goatin, P., & Rosini, M. D. (2014). Existence results for Hughes' model for pedestrian flows. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 420, 387-406. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.05.072>
- Bain, N., & Bartolo, D. (2019). Dynamic response and hydrodynamics of polarized crowds. *Science*, 363 (6422), 46-49. <https://doi.org/10.1126/science.aat9891>
- Di Francesco, M., Markowich, P. A., Pietschmann, J. F., & Wolfram, M. T. (2011). On the Hughes' model for pedestrian flow: The one-dimensional case. *Journal of Differential Equations*, 250(3), 1334-1362. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2011.01.003>
- Gauss, C. F. (1813). *Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum methodo nova tractata. Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis Recentiores*, 2, 1-22.
- Hughes, R. L. (2002). A continuum theory for the flow of pedestrians. *Transportation Research Part B: Methodological*, 36(6), 507-

535. [https://doi.org/10.1016/S0191-2615\(01\)00015-7](https://doi.org/10.1016/S0191-2615(01)00015-7)
- Mahato, N. K., Klar, A., & Tiwari, S. (2018). *Modeling and simulation of macroscopic pedestrian flow models*. *arXiv*. <https://arxiv.org/abs/1810.03489>
 - Owaidah, A., Olaru, D., Bennamoun, M., Sohel, F., & Khan, N. (2019). Review of modelling and simulating crowds at mass gathering events: Hajj as a case study. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, 22(2), 9.
 - Still, G. K. (2019). Place crowd safety, crowd science? Case studies and application. *Journal of Place Management and Development*, 13(4), 385-407.
 - Still, G. K. (2019). *Introduction to crowd science*. CRC Press.
 - Zhao, H., Winter, S., & Tomko, M. (2024). Modelling crowd pressure and turbulence through a mixed-type continuum approach. *Transportation*, 51(2), 367-402. <https://doi.org/10.1080/21680566.2024.2328774>