

Generalizando patrones figurales con estudiantes de 8 y 9 años: una interpretación de los medios semióticos de objetivación movilizados *

Generalizing figural patterns with students of 8 and 9 years old: an interpretation of the semiotic means of objectification mobilized

Adriana Lasprilla Herrera

Docente de matemáticas
Colegio Santa Ana Fontibón
Bogotá, Colombia
E-mail: arranala@gmail.com

Francisco Javier Camelo Bustos

Docente de matemáticas
Especialización en Educación Matemática
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Bogotá, Colombia
E-mail: fjcamelob@udistrital.edu.co

Received: 15 - Feb - 12 / Accepted: 15 - Jun - 12

Resumen

Se da cuenta de los medios semióticos de objetivación que emergieron, en niños y niñas de 8 y 9 años de edad de una institución educativa de Bogotá D. C. (Colombia) en una clase de matemáticas, al abordar una tarea de generalización de patrones figurales, como un proceso de producción de significados. El análisis se realizó teniendo en cuenta la teoría cultural de la objetivación (Radford, 2008), particularmente los estratos de generalidad y los medios semióticos de objetivación desarrollados por los estudiantes. Se encontró que los estudiantes emplearon los medios semióticos identificados por Radford (2010) y se ubicaron en un estrato de generalidad factual.

Palabras clave: generalización, teoría de la objetivación, gestos, medios semióticos.

Abstract:

This paper reports the semiotic objectification means that arose among 7 and 8 year-old children from a school in Bogota D.C., Colombia in a math class, when they addressed a generalization task of figural patterns as a process of meaning production. The analysis was conducted according to the cultural theory of objectification (Radford, 2008), particularly the layers of generality and the semiotic means of objectification developed by the student it. Found that students in this study identified the semiotic means employed by Radford (2010) and were located in a layer of factual generality.

Key words: generalization, objectification theory, gestures, semiotic means.

Résumé

Ce travail rend compte des moyens sémiotiques d'objectivation qui ont émergé chez des enfants de 8 et 9 ans, étudiants d'un établissement éducatif de Bogota, D.C. (Colombie) dans un cours de mathématiques, en abordant une tâche de généralisation de patrons figuraux comme



un processus de production de significations. L'analyse a été effectuée tenant compte de la théorie culturelle de l'objectivation (Radford, 2008), notamment les strates de généralité et les moyens sémiotiques d'objectivation développés par les étudiants. On a trouvé que les étudiants ont employé les moyens sémiotiques de Radford (2010) et se sont placés dans une strate de généralité factuelle.

Mots clés: généralisation, théorie de l'objectivation, gestes, moyens sémiotiques.

Resumo

Ter conhecimento dos meios semióticos de objetivação que emergiram, em meninos e meninas de 8 e 9 anos de idade de uma instituição educativa de Bogotá D. C. (Colômbia) em uma classe de matemática, ao abordar uma tarefa de generalização de padrões figurais, como um processo de produção de significados. A análise foi realizada tendo em conta a teoria cultural da objetivação (Radford, 2008), particularmente os estratos de generalidade e os meios semióticos de objetivação desenvolvidos pelos estudantes. Encontrou-se que os estudantes empregaram os meios semióticos identificados por Radford (2010) e situaram-se em um estrato de generalidade factual.

Palavras chave: generalização, teoria da pesquisa, gestos, meios semióticos.

* Este artículo reporta algunos de los resultados de la investigación: Medios semióticos de objetivación que emergen de estudiantes de tercero de básica primaria en torno a una tarea de generalización de patrones figurales. Realizada para la obtención del título de la Especialización de Educación Matemática de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, entre enero de 2010 y enero de 2011.



Introducción

Sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar han desarrollado diversas investigaciones a nivel nacional e internacional (Socas, Camacho, Palarea y Hernández, 1996; Azarquiel, 1993; Mason, Graham, Pimm y Gowar, 1989; Grupo Pretexto, 1999; Fernández, 1997; Segura, 2001; Radford, 2008; Lasprilla, 2012 y Vergel, 2010) en las que la comprensión y construcción de algunos conceptos y procedimientos del álgebra (interpretación de la letra, procesos de generalización y simbolización, planteamiento de sistemas de ecuaciones, y desarrollo de competencias algebraicas), son objeto de estudio y, en donde se ha evidenciado, que el tratamiento escolar de éstos procesos genera dificultades, que pueden estar relacionadas con el profesor y con el estudiante.

De las investigaciones realizadas por Radford (2008) puede inferirse que uno de los intereses actuales en la comunidad de investigadores a nivel internacional, es diseñar y aplicar actividades para la clase de matemáticas sobre generalización de patrones, que puedan ofrecer a los estudiantes la oportunidad de reflejar su pensamiento algebraico. En particular, en la perspectiva semiótica cultural, esto es considerado un problema didáctico, pues posibilita el entender formas de aparición de dicho pensamiento. Por tal razón en este documento se propone identificar los medios semióticos que emergen y utilizan los estudiantes específicamente en torno a una tarea sobre generalización de patrones figurales.

En este sentido, el propósito de este trabajo¹ se enmarca en una perspectiva teórica de orientación semiótica, derivada de corrientes contemporáneas socioculturales de aprendizaje (la teoría cultural de la objetivación). Dicha

¹ Éste documento muestra algunos de los resultados encontrados por Lasprilla (2012) en el trabajo de grado que desarrolló para optar el título de Especialista en Educación Matemática en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

perspectiva teórica centra su atención en el proceso de aprendizaje, bajo el ángulo de la interacción social y la movilización tanto de signos como de artefactos que realizan los estudiantes (Radford, 2006).

Para dar cuenta de ello, se ha estructurado este documento de la siguiente manera: en la primera parte se presenta la problemática sobre la cual se trabajó. En la segunda parte, se presentan algunos elementos, en donde se da una breve descripción de consideraciones teóricas que se tomaron como antecedentes y sustento para el desarrollo del escrito. La tercera parte, presenta los aspectos metodológicos y, a continuación, el análisis de las producciones de los estudiantes. Para finalmente realizar una discusión en torno a las conclusiones.

Planteamiento del problema:

Es ampliamente reconocido que en la labor docente, es de vital importancia cuestionarse sobre las implicaciones que tienen las actuaciones del profesor en el desarrollo del pensamiento de los estudiantes, pues cada vez que se propone el estudio de una determinada temática, entran en juego, entre otras, las percepciones del docente, el tipo de actividades que se propone y la manera como los docentes interpretan la enseñanza y el aprendizaje; lo que determinará la imagen que se hagan los estudiantes de los distintos temas trabajados.

Por otro lado, debe considerarse que distintas investigaciones realizadas en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra, han identificado que algunas de las dificultades que muestran los estudiantes son originadas por la manera en que el docente desarrolla los temas. Por ejemplo: el Grupo Azarquiel (1993) afirma que en la enseñanza tradicional del álgebra se da prioridad a los procesos algorítmicos más que a desarrollar procesos de pensamiento que



permitan la construcción de un pensamiento algebraico. en relación a esto Mason et al. (1989) comentan que en el álgebra:

“[...] es indiscutible que la construcción del pensamiento algebraico tiene lugar a lo largo de un proceso paralelo y continuo dentro del trabajo aritmético y geométrico que se inicia en los primeros años del ciclo básico” (pág. viii, 1999).

De este modo es importante iniciar el desarrollo del pensamiento algebraico en los primeros cursos de educación, Button y Rojano (2000) afirman que los tiempos didácticos para el aprendizaje del álgebra son prolongados y por ello es conveniente iniciar en edades tempranas, aprovechando las fuentes de significados que están presentes en los contenidos matemáticos de la educación primaria.

En esta misma línea, Fernández (1997) y Espinosa (2001) atribuyen los errores cometidos por los estudiantes en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra a la enseñanza tradicional, dado que ella frecuentemente se enfoca en los resultados de los procesos de cálculo más que en los aspectos relacionales y estructurales, oponiéndose así al desarrollo del pensamiento algebraico.

De este modo, es evidente que el desarrollo de pensamiento algebraico en los estudiantes debe contemplar aspectos relacionados, de manera fundamental con los registros semióticos, dado que, es posible que la comprensión de éstos permita que los estudiantes puedan abordar situaciones o problemas algebraicos. Es así que surge la necesidad de indagar frente a los medios semióticos, en particular, en detectarlos e identificarlos para intentar analizar su evolución en el desarrollo de pensamiento algebraico.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, es de resaltar, que muchas de las dificultades al trabajar aspectos asociados al álgebra escolar, pueden encontrar su causa en

la gestión de aula que se emplea para abordarla, ya que algunos profesores dejan la impresión en los estudiantes, de que el trabajo algebraico es netamente algorítmico, y no advierten suficientemente que hay una construcción semiótica que le da sentido, como el simple hecho de realizar un dibujo o gráfico para abordar una situación. Es por ello, que es importante fijar la mirada en los medios semióticos de objetivación, pues son los que le darán sentido al objeto matemático.

Es así que, con el interés de abordar los procesos seguidos por estudiantes de tercer grado de educación básica² en relación a tareas de desarrollo de pensamiento algebraico, se propuso este trabajo, modificando una actividad de generalización de patrones figurales, propuesta por Radford (2010).

Teoría cultural de la objetivación:

Como ya se ha mencionado, la teoría bajo la cual se realiza este trabajo se enmarca dentro de las investigaciones de tipo sociocultural, planteadas inicialmente por Vygotsky, donde se establece una manera de teorizar los procesos de aprendizaje de las matemáticas, visualizando dos aspectos principales: la naturaleza histórica del saber movilizado por la escuela y la manera en que ese saber es retomado por los estudiantes en el curso de procesos sociales de producción de significados Radford (2006).

Dentro del estudio de la producción de significados mediante un proceso social, se enmarca la teoría cultural de la objetivación, en la cual se definen varios conceptos fundamentales dentro del estudio de los procesos de enseñanza aprendizaje. Uno de estos es el conocimiento de los objetos matemáticos, el cual es interpretado

² En Colombia, el sistema educativo se divide en Educación Preescolar, Educación Básica y Educación Media Vocacional. Se espera que los estudiantes de tercer grado de educación básica tengan entre 8 y 9 años.



como el resultado de una construcción o reconstrucción más o menos viable que resulta de las acciones de adaptación ejercidas por el estudiante frente a un problema o situación (Miranda, Radford y Guzmán, 2010). Para la teoría de la objetivación, el saber no es agotado por la situación que ha podido darle origen, pues la concepción de la misma situación ha sido posible únicamente en cuanto parte de una manera de plantear y buscar soluciones a dicho problema. El aprendizaje es visto como una “adquisición comunitaria de formas de reflexión del mundo guiadas por modos epistémico culturales históricamente formados” (Radford, 2006, p. 105).

La progresiva dotación de sentido en torno al objeto cultural que subyace en el aprendizaje es vista como un proceso social denominado objetivación, el cual se da a través del uso de diversos medios semióticos, que permiten la objetivación del objeto y a la vez los procesos de producción de significados.

Otro concepto importante dentro de la teoría es el pensamiento, el cual está íntimamente relacionado con los signos, como dice Vygotski (citado por Miranda, Radford y Guzmán, 2007), nuestro funcionamiento cognitivo está íntimamente ligado y afectado por el uso de los signos. Pero es fundamental resaltar que los signos son interpretados desde lo escrito, oral, términos lingüísticos, símbolos, gestos y movimientos tal como establece Radford (2008, citando a Azarello, 2006). Es así que dentro de la teoría, el signo no se refiere únicamente al papel de representante y representado como lo establecen algunas teorías semióticas, sino que es un concepto mucho más amplio.

Por otra parte, dentro de esta teoría, la generalización algebraica de patrones puede ser entendida como observar algo que va más allá de lo que realmente se ve (Radford, 2008). Siendo

más específicos, la generalización algebraica de un modelo, se basa en el darse cuenta de una comunalidad³ local, que luego se generaliza a todos los términos de la sucesión y que sirve como una orden para construir expresiones de los elementos de la secuencia que siguen estando fuera del campo perceptivo. En otras palabras, es establecer lo que es particular dentro una construcción y estar en la capacidad de verlo aún cuando perceptivamente no es evidente. En este contexto, la idea de objetivación se entiende como el proceso social de toma de conciencia progresiva de algo frente a nosotros, una figura, una forma, algo cuya generalidad notamos gradualmente (Radford, 2006). En este orden de ideas, el aprendizaje no consiste en construir o reconstruir un conocimiento, se trata de dotar de sentido a los objetos conceptuales que encuentra el alumno en su cultura.

Para Radford (2006), el objeto no es un objeto monolítico u homogéneo, es un objeto compuesto de laderas de generalidad, en consecuencia, el aprendizaje consistiría en aprender a notar o percibir esas laderas de generalidad y estas son notadas de manera progresiva por el alumno (p.116).

En relación al dominio de la sintaxis algebraica, Radford señala que el enfoque teórico de la semiótica cultural centra su atención en el discurso y los signos puestos en juego cuando los alumnos se refieren a objetos matemáticos, ya que desde el marco teórico sociocultural, se presta atención al proceso discursivo y semiótico a través del cual los estudiantes intentan dar sentido a los gráficos.

Los procesos interpretativos de los estudiantes se investigan a través del constructo teórico de la objetivación del conocimiento y la configuración de los signos matemáticos, los gestos y las palabras que recurren a fin de

³ Comunalidad hace referencia a toda la información que puede ser importante para percibir un patrón.



alcanzar mayores niveles de conceptualización Vergel (2010).

Metodología aplicada

El trabajo se realizó bajo un paradigma de investigación cualitativa, en donde hubo una preocupación centrada en indagar los hechos o fenómenos educativos en su “realidad natural”. Por lo que se hizo necesario aceptar que la investigación cualitativa plantea una concepción holística, esto es, posibilita comprender en profundidad y desde la totalidad contextual en que se producen las prácticas, el significado de los hechos educativos, tal como lo plantean Bravin y Pievi (2008).

La toma de datos se llevó a cabo con estudiantes de grado tercero (8-9 años), durante el desarrollo de tres sesiones de clase (durante una semana, dos de una hora y una de dos horas). La recolección de la información se realizó en cuatro momentos como se describe a continuación:

Momento 1: Se inició con la ubicación de la problemática, en relación al interés de dar una mirada a los medios semióticos de objetivación, encontrando referentes teóricos que fueron considerados en el marco teórico, posteriormente se realizó la planeación de la intervención, para ello fué necesario revisar algunas de las actividades que ha empleado Radford (2010 y 2008) en sus investigaciones y de ellas determinar la tarea y los ajustes necesarios para el desarrollo del trabajo.

Momento 2: En la implementación de la tarea, se determinó la manera en que se realizarían las grabaciones y se consideró necesario recoger en cada sesión las hojas de trabajo desarrollado por los estudiantes, como también se tuvieron en cuenta las notas teóricas y personales tomadas por la profesora.

Momento 3: Luego de aplicada la tarea se procedió a realizar la transcripción de algunos de los discurso de los estudiantes, teniendo presente que fueran los que permitieran mayor evidencia de medios semióticos, durante la solución de la actividad y revisión de las elaboraciones escritas.

Momento 4: finalmente se realizó el análisis de videos (identificación de medios semióticos de objetivación). El análisis de los datos se realizó bajo una concepción multimodal del pensamiento humano, en la que es importante fijar la atención en los diferentes sistemas semióticos (elementos perceptivos, quinesiológicos, gestuales, simbólicos y verbales) utilizados y emergentes durante la actividad (lenguaje escrito, lenguaje hablado, gestos, acciones, etc.) y los distintos estratos o laderas de generalidad presentes.

Se realizó una búsqueda, en términos de la tarea que fuera pertinente para el trabajo, así que se tomo una actividad empleada por Radford (2008) en sus investigaciones y se adaptó a los intereses. Luego se aplicó, teniendo en cuenta que se realizara la filmación de cada una de las sesiones, con los datos recolectados, se desarrolló el análisis teniendo presente los estratos de generalidad propuestos por Radford, con ellos se pudo determinar además de los medios semióticos empleados, algunos indicios del proceso de objetivación seguido por los niños.

Para el desarrollo de este trabajo se seleccionó la primera actividad empleada por Radford (2008) con niños de octavo grado.

Parte 1:

En la actividad se pidió continuar con la figura número 5 ya que se proporcionaba solo las figuras uno, dos y tres, luego se propuso calcular el número de círculos en las figuras 25 y 100 y, finalmente, establecer una fórmula para hallar la cantidad de círculos en la figura n.

Los estudiantes a los que se aplicó la actividad encontraron que las cantidades de las posiciones



pedidas se podían hallar sumando la cantidad superior y la inferior mas uno, inicialmente lo plantearon de manera oral y posteriormente utilizando letras.

La modificación realizada a la actividad, consistió en agregar las preguntas 2, 3 y 4,

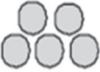
pretendiendo con ellos esbozar los momentos en que se desarrolló la clase, y de permitirle a los estudiantes que fueran aclarando la manera como estaban estableciendo el patrón, en la medida que debían escribir los procedimientos seguidos.

Generalización de patrones

Parte 1

Nombre: _____

1. Dibuja las figuras correspondientes a las posiciones 4 y 5.

				
Fig. 1	Fig. 2	Fig. 3	Fig. 4	Fig. 5

2. Establece la cantidad de bolas que tendrá la sexta y la séptima figura y escribe el procedimiento que seguiste para hallar estas cantidades.

3. En grupos socializa tus respuestas y establece la cantidad de bolas en las figuras ocho, nueve y diez y escriban el procedimiento que utilizaron para encontrar estas cantidades.

4. Socialización de respuestas en todo el curso.

Parte 2:

De acuerdo a las estrategias establecidas en la anterior sesión, responde:

1. Encuentra el número de bolas que tienen las figuras 25, 50 y 100. Escribe el procedimiento que seguiste para hallar estas cantidades.
2. Realiza una carta para enviarla a un compañero que no pudo asistir a las clases pues debe enterarse del trabajo que realizaron. En la carta se debe explicar todas las actividades que se hicieron y la manera como se procedió para encontrar la solución a las preguntas planteadas inicialmente, además de lo más importante que se haya discutido.
3. Socialización de respuestas en todo el curso.

La segunda parte de la actividad surgió por la necesidad de ver la cantidad de círculos en posiciones no cercanas a la que habían encontrado en la parte uno de la actividad y de nuevo se establecían los momentos en que se desarrollaron la sesiones y los procedimientos que siguieron.

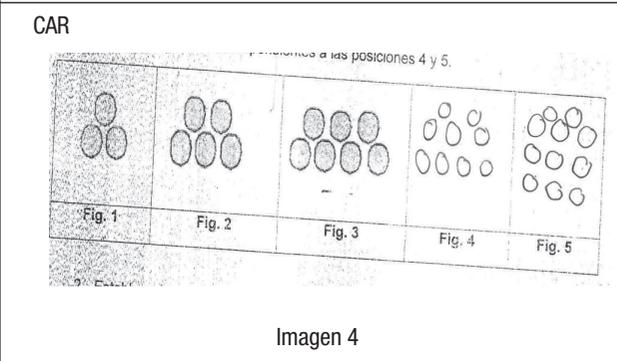
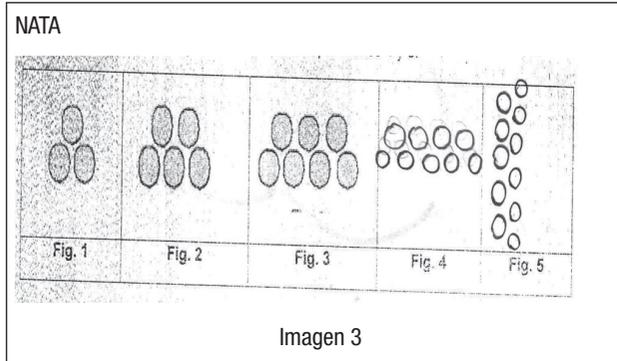
El desarrollar la actividad en dos partes, fue necesario, por la edad de los estudiantes (8 y 9 años), ya que era pertinente darles tiempos para abordar cada una de las preguntas, de manera

que pudieran tener una visión más detallada de la generalidad allí relacionada.

Análisis de la implementación:

El primer medio semiótico emergente fue el realizar los dibujos de las posiciones cuatro y cinco, en este se dieron dos posibilidades, en una los estudiantes conservaron la forma de las anteriores figuras y otros no, como puede en la imagen 3 y 4:





Nata consideró necesario conservar la distribución geométrica de la figura aunque por cuestiones de espacio la figura cinco la hizo en sentido vertical, mientras que el Car, al parecer, no le dio importancia a la distribución de los círculos, para él era necesario considerar las cantidades de cada posición, este aspecto fue importante posteriormente, ya que el grupo que

prestó atención a la distribución pudo establecer una generalización más eficiente en relación a quienes no tuvieron en cuenta este aspecto.

Aunque es importante considerar que en un primer momento los estudiantes realizaron gestos que evidenciaban que no comprendían con claridad la situación⁴. Como muestran las imágenes 5 y 6.



La interacción en los pequeños grupos permitió comprender mucho mejor la situación y llegar a acuerdos, como sucedió con Fel y Nat, al discutir cuántos puntos habían en las posiciones seis y siete, como puede leerse en la siguiente transcripción de un fragmento del video de la primera sesión:

Nat: están mal, en la 6 hay trece [señalando lo que escribió Felipe].

Fel: [borra lo que había realizado].

Nat: ... y en el otro son catorce,... tú tienes que escribir en total hay.... [Dictándole lo que ella escribió] veintiséis,... ahora hay que hacer el ocho el nueve y el diez.

Fel: veinte, diez y ocho... ¿no es?, ¿no es el doble?

Nat: es lo que creamos, [realizando un gesto que muestra no entender lo que el compañero le decía].

⁴ La filmación y las fotos aquí mostradas fueron autorizadas para los fines de éste trabajo por los padres de los niños.





Imagen 7



Imagen 8

Mientras que en el grupo de lui, Feli y Nata, establecieron que para hallar las cantidades pedidas era necesario sumar dos a la cantidad de la posición anterior, y dieron las cantidades como razón, comparando la cantidad de bolas y la posición, por ejemplo para la posición ocho escribieron: 17/8, en la nueve: 19/9 y en la 10 21/10.



Imagen 10

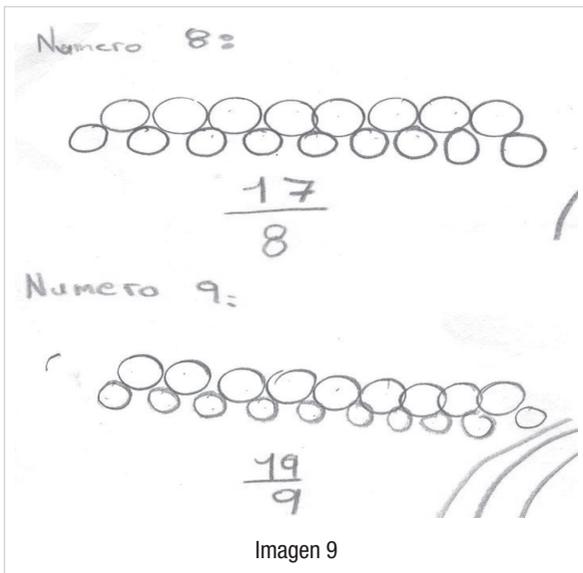


Imagen 9

Para ellos fue necesario el uso de la regla para dibujar las posiciones pedidas conservando la distribución espacial de los círculos de las primeras posiciones.

Los medios semióticos movilizados para abordar la primera parte de la actividad, que en un principio surgieron como signos que les permitieron acercarse a la tarea se convierten en medios semióticos en la medida que en las posteriores sesiones les permitieron objetivar la generalización planteada.

Durante la socialización de la actividad se pudieron observar las elaboraciones que hicieron los niños, en términos de sus construcciones mentales, ya que, explicaban la razón de ser de las acciones que siguieron; como se ve en el siguiente apartado, donde a partir de la argumentación dada por Án se posibilitó que el grupo se pusiera de acuerdo frente a la necesidad de sumar dos bolitas a la cantidad de la anterior posición, para hallar la cantidad de las posiciones pedidas, como se lee a continuación:

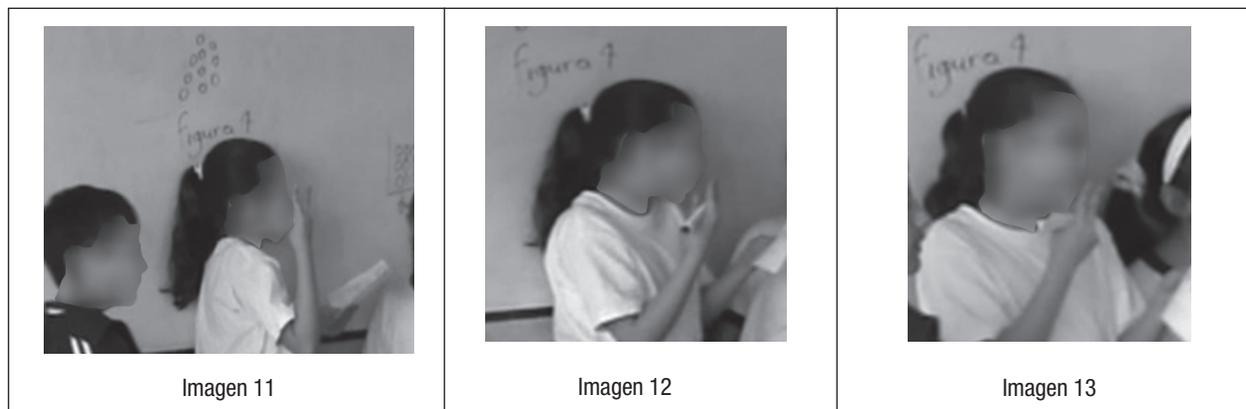
Profe: [dirigiéndose a Ángela] ¿Qué hiciste tú para saber cuál era la figura cuatro?.

Án: ... pues en la figura tres habían [sic] siete bolitas entonces le sumé dos [mostrando con sus dedos esta cantidad].

Profe: ¿Por qué le sumaste dos?

Án: porque...en la primera hay una [mostrando en sus dedos la cantidad] y le sumas dos [mostrando con los dedos] en la siguiente como en la figura una hay tres y le sumas dos me da cinco.

Profe: ok.



Profe: ¿Cuántas bolitas tiene la posición cuatro?.

Lui: [escribe] nueve.

Profe: y en la figura cinco.

Lui: [escribe] 11.

Profe: ¿qué hiciste para saber?

Lui: [señalando con el marcador en el dibujo de la posición cuatro en el

tablero] sumé esto cuatro más [de nuevo señaló las figuras en el tablero] estos cinco y después sumé todo [encerrando en un círculo el total de bolitas].

Profe: y para la posición seis ¿la dibujaron también?

Lui: sí, hicimos lo mismo [señala la fila inferior y la fila superior].



Es importante notar que Án estableció que necesitaba la cantidad de la anterior posición para determinar cualquier posición pedida, es decir, planteó una generalidad que depende de la figura, en este caso del anterior, sino la tiene, le es imposible hallar la cantidad para cualquier

cantidades a las que hacía referencia.

Desarrollo Parte 2

En el grupo 2, el primer medio empleado para hallar la solución fue establecer una tabla que relacionara las posiciones y las cantidades en cada posición, teniendo en cuenta siempre sumados al anterior, como se muestra en la imagen 17:

21	25-51	40-81	56-111	73-141	91-181
23	26-53	42-85	59-117	77-151	95-191
25	27-55	43-87	60-119	79-153	97-193
27	29-59	45-91	62-123	81-157	99-197
29	30-61	46-93	64-127	83-161	101-201
31	31-63	47-95	66-131	85-165	103-205
33	32-65	48-97	68-135	87-169	105-209
35	33-67	49-99	70-139	89-173	107-213
37	34-69	50-101	72-143	91-177	109-217
39	35-71	51-103	74-147	93-181	111-221
41	36-73	52-105	76-151	95-185	113-225
43	37-75	53-107	78-155	97-189	115-229
45	38-77	54-109	80-159	99-193	117-233
47	39-79	55-111	82-163	101-197	119-237
49	40-81	56-113	84-167	103-201	121-241
51	41-83	57-115	86-171	105-205	123-245
53	42-85	58-117	88-175	107-209	125-249
55	43-87	59-119	90-179	109-213	127-253
57	44-89	60-121	92-183	111-217	129-257
59	45-91	61-123	94-187	113-221	131-261
61	46-93	62-125	96-191	115-225	133-265
63	47-95	63-127	98-195	117-229	135-269
65	48-97	64-129	100-199	119-233	137-273
67	49-99	65-131	102-203	121-237	139-277
69	50-101	66-133	104-207	123-241	141-281
71	51-103	67-135	106-211	125-245	143-285
73	52-105	68-137	108-215	127-249	145-289
75	53-107	69-139	110-219	129-253	147-293
77	54-109	70-141	112-223	131-257	149-297
79	55-111	71-143	114-227	133-261	151-301
81	56-113	72-145	116-231	135-265	153-305
83	57-115	73-147	118-235	137-269	155-309
85	58-117	74-149	120-239	139-273	157-313
87	59-119	75-151	122-243	141-277	159-317
89	60-121	76-153	124-247	143-281	161-321
91	61-123	77-155	126-251	145-285	163-325
93	62-125	78-157	128-255	147-289	165-329
95	63-127	79-159	130-259	149-293	167-333
97	64-129	80-161	132-263	151-297	169-337
99	65-131	81-163	134-267	153-301	171-341
101	66-133	82-165	136-271	155-305	173-345
103	67-135	83-167	138-275	157-309	175-349
105	68-137	84-169	140-279	159-313	177-353
107	69-139	85-171	142-283	161-317	179-357
109	70-141	86-173	144-287	163-321	181-361
111	71-143	87-175	146-291	165-325	183-365
113	72-145	88-177	148-295	167-329	185-369
115	73-147	89-179	150-299	169-333	187-373
117	74-149	90-181	152-303	171-337	189-377
119	75-151	91-183	154-307	173-341	191-381
121	76-153	92-185	156-311	175-345	193-385
123	77-155	93-187	158-315	177-349	195-389
125	78-157	94-189	160-319	179-353	197-393
127	79-159	95-191	162-323	181-357	199-397
129	80-161	96-193	164-327	183-361	201-401
131	81-163	97-195	166-331	185-365	203-405
133	82-165	98-197	168-335	187-369	205-409
135	83-167	99-199	170-339	189-373	207-413
137	84-169	100-201	172-343	191-377	209-417
139	85-171	101-203	174-347	193-381	211-421
141	86-173	102-205	176-351	195-385	213-425
143	87-175	103-207	178-355	197-389	215-429
145	88-177	104-209	180-359	199-393	217-433
147	89-179	105-211	182-363	201-397	219-437
149	90-181	106-213	184-367	203-401	221-441
151	91-183	107-215	186-371	205-405	223-445
153	92-185	108-217	188-375	207-409	225-449
155	93-187	109-219	190-379	209-413	227-453
157	94-189	110-221	192-383	211-417	229-457
159	95-191	111-223	194-387	213-421	231-461
161	96-193	112-225	196-391	215-425	233-465
163	97-195	113-227	198-395	217-429	235-469
165	98-197	114-229	200-399	219-433	237-473
167	99-199	115-231	202-403	221-437	239-477
169	100-201	116-233	204-407	223-441	241-481
171	101-203	117-235	206-411	225-445	243-485
173	102-205	118-237	208-415	227-449	245-489
175	103-207	119-239	210-419	229-453	247-493
177	104-209	120-241	212-423	231-457	249-497
179	105-211	121-243	214-427	233-461	251-501
181	106-213	122-245	216-431	235-465	253-505
183	107-215	123-247	218-435	237-469	255-509
185	108-217	124-249	220-439	239-473	257-513
187	109-219	125-251	222-443	241-477	259-517
189	110-221	126-253	224-447	243-481	261-521
191	111-223	127-255	226-451	245-485	263-525
193	112-225	128-257	228-455	247-489	265-529
195	113-227	129-259	230-459	249-493	267-533
197	114-229	130-261	232-463	251-497	269-537
199	115-231	131-263	234-467	253-501	271-541
201	116-233	132-265	236-471	255-505	273-545
203	117-235	133-267	238-475	257-509	275-549
205	118-237	134-269	240-479	259-513	277-553
207	119-239	135-271	242-483	261-517	279-557
209	120-241	136-273	244-487	263-521	281-561
211	121-243	137-275	246-491	265-525	283-565
213	122-245	138-277	248-495	267-529	285-569
215	123-247	139-279	250-499	269-533	287-573
217	124-249	140-281	252-503	271-537	289-577
219	125-251	141-283	254-507	273-541	291-581
221	126-253	142-285	256-511	275-545	293-585
223	127-255	143-287	258-515	277-549	295-589
225	128-257	144-289	260-519	279-553	297-593
227	129-259	145-291	262-523	281-557	299-597
229	130-261	146-293	264-527	283-561	301-601
231	131-263	147-295	266-531	285-565	303-605
233	132-265	148-297	268-535	287-569	305-609
235	133-267	149-299	270-539	289-573	307-613
237	134-269	150-301	272-543	291-577	309-617
239	135-271	151-303	274-547	293-581	311-621
241	136-273	152-305	276-551	295-585	313-625
243	137-275	153-307	278-555	297-589	315-629
245	138-277	154-309	280-559	299-593	317-633
247	139-279	155-311	282-563	301-597	319-637
249	140-281	156-313	284-567	303-601	321-641
251	141-283	157-315	286-571	305-605	323-645
253	142-285	158-317	288-575	307-609	325-649
255	143-287	159-319	290-579	309-613	327-653
257	144-289	160-321	292-583	311-617	329-657
259	145-291	161-323	294-587	313-621	331-661
261	146-293	162-325	296-591	315-625	333-665
263	147-295	163-327	298-595	317-629	335-669
265	148-297	164-329	300-599	319-633	337-673
267	149-299	165-331	302-603	321-637	339-677
269	150-301	166-333	304-607	323-641	341-681
271	151-303	167-335	306-611	325-645	343-685
273	152-305	168-337	308-615	327-649	345-689
275	153-307	169-339	310-619	329-653	347-693
277	154-309	170-341	312-623	331-657	349-697
279	155-311	171-343	314-627	333-661	351-701
281	156-313	172-345	316-631	335-665	353-705
283	157-315	173-347	318-635	337-669	355-709
285	158-317	174-349	320-639	339-673	357-713
287	159-319	175-351	322-643	341-677	359-717
289	160-321	176-353	324-647	343-681	361-721
291	161-323	177-355	326-651	345-685	363-725
293	162-325	178-357	328-655	347-689	365-729
295	163-327	179-359	330-659	349-693	367-733
297	164-329	180-361	332-663	351-697	369-737
299	165-331	181-363	334-667	353-701	371-741
301	166-333	182-365	336-671	355-705	373-745
303	167-335	183-367	338-675	357-709	375-749
305	168-337	184-369	340-679	359-713	377-753
307	169-339	185-371	342-683	361-717	379-757
309	170-341	186-373	344-687	363-721	381-761
311	171-343	187-375	346-691	365-725	383-765
313	172-345	188-377	348-695	367-729	385-769
315	173-347	189-379	350-699	369-733	387-773
317	174-349	190-381	352-703	371-737	389-777
319	175-351	191-383	354-707	373-741	391-781
321	176-353	192-385	356-711	375-745	393-785
323	177-355	193-387	358-715	377-749	395-789
325	178-357	194-389	360-719	379-753	397-793
327	179-359	195-391	362-723	381-757	399-797
329	180-361	196-393	364-727	383-761	401-801
331	181-363	197-395	366-731	385-765	403-805
333	182-365	198-397	368-735	387-769	405-809
335	183-367	199-399	370-739	389-773	407-813
337	184-369	200-401	372-743	391-777	409-817
339	185-371	201-403	374-747	393-781	411-821
341	186-373	202-405	376-751	395-785	413-825
343	187-375	203-407	378-755	397-789	415-829
345	188-377	204-409	380-759	399-793	417-833
347	189-379	205-411	382-763	401-797	419-837
349	190-381	206-413	384-767	403-801	421-841
351	191-383	207-415	386-771	405-805	423-845
353	192-385	208-417	388-775	407-809	425-849
355	193-387	209-419	390-779		

1 suma 25 + 26 y se dio la 51 y medio 51

$$\begin{array}{r} 51 \\ - 25 \\ \hline \end{array}$$

suma 50 + 51 use y medio 101

$$\begin{array}{r} 101 \\ - 50 \\ \hline \end{array}$$

suma 100 + 101 use y medio 201

$$\begin{array}{r} 201 \\ - 100 \\ \hline \end{array}$$

Siguiendo el procedimiento descrito pudieron hallar la cantidad de bolitas para cualquier posición. Para ellos fue importante ver que la configuración de la secuencia se hacía siempre la cantidad de círculos de la posición, que iba en la fila superior de la construcción y esa misma cantidad más uno que iba en la fila inferior, de este modo pudieron establecer la cantidad para cualquier posición.

Para el grupo 1, Felipe insistía que debían ser el doble la cantidad de bolitas para cada posición, pero en diálogo con la profesora determinó que era el doble más uno, como se muestra en el siguiente fragmento:

Profe: Felipe ¿cuántos hay en la 10?

Fel: 20.

Profe: ¿Por qué veinte?

Fel: [no respondió y empezó a dar golpes sobre la mesa].

Profe: en la cuatro hay nueve, en la cinco hay 11, en la seis 12, en la siete 15, en la ocho 17, cuántas hay entonces en la 20.

Fel: pues 20... [Pensando un rato] a no 21.

Profe: entonces ¿cuántas hay en la veintiuno?

Fel: [no respondió].

Es de notar que la intervención de la profesora le permitió observar el comportamiento en las cantidades, pero que a pesar de hacer esta observación no pudo establecer con claridad una nueva forma que le permitiere hallar el total de bolas para determinada posición.

En la socialización de las respuestas de cada uno de los grupos a la segunda parte de la actividad, la profesora construyó una tabla donde relacionaba cada uno de los grupos con sus respuestas para las posiciones 25, 50 y 100.

Profe: ¿Cuántos hay en la posición 25?

Nat: 26.

Profe: en la 50.

Nat: 101.

Profe: en la 100.

Nat: 201.

Profe: ¿cómo hicieron para saberlo?

Nat: nosotros sumamos dos..... dos veces cincuenta y más uno.

Profe: listo, y en la 100.

Nat: heeee.

Profe: hicieron lo mismo.

Nat: sí [moviendo su cabeza afirmando lo que decía].

De la misma manera se preguntó a cada grupo las cantidades en cada posición, en el grupo dos, establecieron lo siguiente:

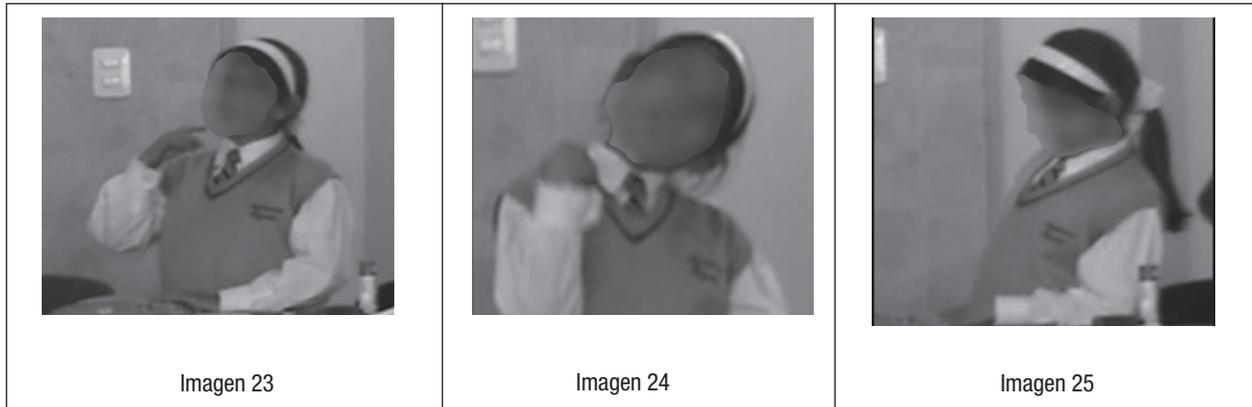
Profe: ¿Cómo hicieron para encontrar estas cantidades?

ÁN: nosotros hicimos esto, mostrando la tabla desde la posición 10.

En el grupo tres:

Profe: ¿Cómo hicieron para encontrar la respuesta?





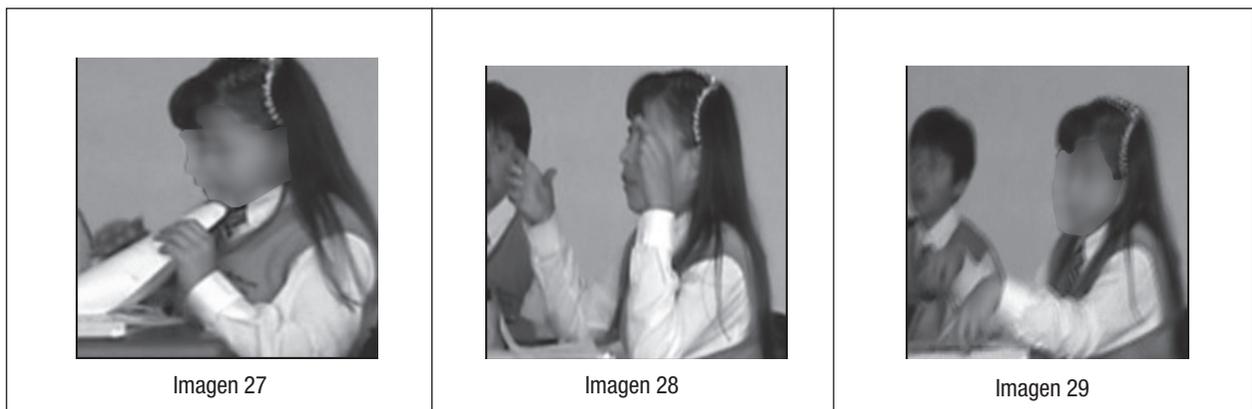
Lui: pues nosotros hicimos 25 más 26 y eso da 51 y nosotros dijimos que es 51 de 25.

Profe: en la 50 ¿Cómo hicieron?

Lui: lo mismo, sumamos 50 más 51 y en la 100 sumamos 100 más 101.

Profe: ¿Cómo sabían que era sumar eso así?

Lui: porque en la primera parte que era ésta [mostrando el dibujo de la parte 1 de la actividad], en la figura tres habían [sic] tres arriba y cuatro abajo, entonces en la 25 son 25 arriba y 26 abajo [mostrando con sus manos arriba y abajo a la medida que hablaba].



Discusión

El desarrollo de este trabajo permitió analizar, entre otros aspectos, que existen diversas formas de evidenciar en un estudiante sus procesos de

objetivación, (como son los movimientos, las miradas, los gestos, las palabras, los escritos, etc.) y que muchas veces los docentes privilegian algunos de ellos (esto en relación a la enseñanza

y aprendizaje del álgebra, en donde varios autores han señalado que se da prioridad al lenguaje simbólico Grupo Azarquiél 1993; Espinosa 2002; Mason et al., 1989; Socas et al., 1989; Kieran 1994) y no se le da la importancia merecida a los que pueden desarrollar los estudiantes, ya que estos pueden brindar información en torno a sus procesos de objetivación.

Fue posible mostrar que el primer medio semiótico empleado por los estudiantes fue el gestual, ya que la primera reacción frente a la tarea propuesta, fue de no entendimiento, en donde mostraban con movimientos corporales, tomándose la cabeza, o mirando hacia los lados, sugiriendo que no tenían claridad frente a lo que se les planteaba. En la medida que se reunieron en grupos surgió el empleo de otros medios semióticos, ya que tuvieron la oportunidad de interactuar con sus compañeros frente a lo que habían comprendido de la tarea y aclarar en conjunto las dudas que tenían.

De esta manera abordaron la tarea, y es de resaltar que cada uno de los grupos generó una forma distinta de establecer el patrón observado, por ejemplo, para el primer grupo, la generalidad se observó en relación a las características de los números, ya que siempre se obtenían cantidades impares, para ellos era necesario establecer una lista de números impares desde la primera posición, para hallar la cantidad en cualquier posición pedida; para el grupo dos, las cantidades en cada posición dependían de la anterior posición, ya que siempre se sumaba dos al anterior, este grupo siempre se esforzó por mostrar a sus compañeros lo que habían observado y lo expresaban de manera gestual utilizando sus dedos y reforzándolo con sus palabras, para ellos era no fue posible, hallar una cantidad de determinada posición si no contaba con la cantidad de alguna de las anteriores posiciones cercanas.

En el grupo tres, se estableció una generalidad más elaborada, en términos del menor uso de medios semióticos perceptivos, ya que a partir de la disposición geométrica de las figuras, que corresponde a una visualización más estructural, fue posible establecer, que siempre era sumar la fila superior en inferior, la fila superior correspondía a la posición y la inferior a uno mas que ésta, así hallaron la cantidad para las posiciones pedidas, pero no pudieron desprenderse del superior e inferior, lo que posiblemente, limitó que establecieran una generalidad de tipo simbólico, aunque es de aclarar que este no era el interés del trabajo.

De este modo se evidenció que cada uno de los grupos estableció una manera de generalizar, y que el hecho de ir socializando sus hallazgos y escuchando los de los compañeros les permitió dar claridad a lo que hacían y a la vez de cuestionar si las producciones de sus compañeros eran correctas, constituyendo una interacción, al interior del curso, que les permitió progresar en los procesos de significación que fueron elaborando en relación a la generalización que establecieron.

En trabajos realizados por Radford (2008) con niños de las mismas edades ha sido posible identificar que el pensamiento algebraico no aparece en la ontogenia o por casualidad, ni tampoco aparece como una consecuencia necesaria de la maduración cognitiva, sino que el pensamiento algebraico aparece bajo algunas condiciones pedagógicas que deben ser creadas (Radford, 2010). Como fue el caso de este trabajo, en donde los niños desarrollaron pensamiento algebraico, a pesar de no estar operando con letras o despejando ecuaciones.

En particular Radford (2010) se refiere a introducir actividades que desarrollen pensamiento algebraico desde la básica primaria, ya que se ha evidenciado que formas de



pensamiento algebraico pueden aparecer entre los 7 y 8 años de edad, como lo pudimos evidenciar en este estudio.

Conclusiones

Los medios semióticos de objetivación empleados por los niños, en este trabajo, correspondieron con los identificados por Radford (2010); gestos, palabras y símbolos escritos. La movilización de éstos les permitió abordar la situación propuesta y luego plantear una solución. Es de resaltar que a pesar de que emplearon los mismos medios, para cada niño fue particular la forma de expresarlos, mientras que para una niña siempre fue necesario mostrar con sus manos el arriba y el abajo de la figura, para otra era necesario mostrar con sus dedos que las cantidades en los números aumentaban de a dos de una posición a otra, por citar unos ejemplos.

Los estratos de generalidad considerados por Radford (2010), son tres: factual, contextual y simbólico, como se explicaron anteriormente, en el desarrollo de este trabajo se evidenció que los grupos se encontraron en el estrato factual, ya que las generalizaciones que plantearon dependían directamente de las cantidades obtenidas en las posiciones anteriores y tan solo un grupo estableció un estrato de generalidad contextual, debido a que pudieron establecer una relación entre la cantidad superior e inferior de la figura. Aunque los dos son estratos de generalización, una es más elaborada que la otra en términos de procesos de significación y la consideración de elementos perceptivos y estructurales del patrón.

Durante el desarrollo del trabajo fue posible evidenciar una relación entre los estratos de generalidad propuestos por Radford (2008) y los niveles de generalidad propuestos por Mason et al. (1989); Pues mientras que el primero se refiere a generalidad factual y contextual, Mason

habla de ver y decir, es posible relacionarlos, ya que ambos hacen referencia al momento en que se percibe la generalidad, solo que para Radford puede ser expresada de diversas maneras, como gestos, movimientos, o palabras y para Mason es percibir la generalidad pero hacerla evidente utilizando algunas formas de expresión, en las que no se incluyen los gestos o movimientos.

Referencias bibliográficas y cibergráficas

- Butto, C. y Rojano, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo. *Educación Matemática*, 22 (3), 55-86.
- Bravin, C. y Pievin, N. (2008). Documento metodológico orientador para la investigación educativa. Organización de estados americanos y para la educación la ciencia y la cultura. <http://www.me.gov.ar/infod/documentos/documentometodologico.pdf>
- Espinosa, M. (2002). *Aplicación de un instrumento de evaluación de álgebra elemental*. Replica del trabajo del Dr. Fernández García. (Tesis doctoral no publicada). Granada. España. Universidad de Granada.
- Fernández, (1997). *Evaluación de competencias de álgebra elemental basada en la resolución de problemas verbales*. (Tesis doctoral no publicada). Granada. España. Universidad de Granada.
- Grupo Azarquiel. (1993). Ideas y actividades para enseñar álgebra. *Síntesis* N ° 33. España.
- Grupo Pretexto (1999) *Transición aritmética álgebra*. 2 Ed., Bogotá. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Kieran, C. (1994). *El aprendizaje y la enseñanza del álgebra escolar*. Traducción de Vilma Mesa. Una empresa Docente. www.ued.uniandes.edu.co
- Lasprilla, A. (2012). Medios semióticos de objetivación que emergen en estudiantes de tercero de básica primaria en torno a una tarea de generalización de patrones figurales. (Trabajo de Especialización, no publicado). Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Mason J, Graham A, Pimm D, Gowar N, (1989). *Rutas hacia/Raíces del álgebra*. Bogotá, Colombia: sección publicaciones UPTC.



- Miranda, I., Radford, L. y Guzmán, J. (2007). Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la objetivación. *Educación Matemática*, 19(3), 5-30. http://www.laurentian.ca/Laurentian/Home/Departments/School+of+Education+French/Faculty+and+Staff/Luis+Radford/luis_radford_index.htm?Laurentian_Lang=en-CA
- Radford, L (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70.
- Radford, L (2006) Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Relime*, Número especial. 103 -129.
- Radford, L. (2008). Iconicity and Contraction: A Semiotic Investigation of Forms of Algebraic Generalizations of Patterns In Different Contexts. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*. DOI 10.1007/s11858-007-0061-0
- Radford, L. (2010). Elementary Forms of Algebraic Thinking in Young Students. In M. F. Pinto. & T. F. Kawasaki (Eds.). *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4 (1), 73-80.
- Vergel, R. (2010) La Perspectiva de Cambio Curricular Early-Algebra como Posibilidad para desarrollar el Pensamiento Algebraico en Escolares de Educación Primaria: Una Mirada al Proceso Matemático de Generalización. *Memoria 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, 69- 81.
- Socas, M. Camacho, M; Palarea y Hernández. (1989). Iniciación al álgebra. Colección matemáticas: cultura y aprendizaje: Madrid, *Síntesis* N ° 23.

THE AUTHORS

Adriana Lasprilla Herrera, licenciada en educación básica con énfasis en matemáticas, de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, con Especialización en Educación Matemática en la misma Universidad, su interés es desarrollar investigaciones dentro de la teoría de la objetivación cultural.

Francisco Javier Camelo Bustos Investigador en educación matemática con proyectos financiados por Colciencias, IDEP y las Universidades Distrital y Pedagógica Nacional. El tema principal de investigación es Educación Matemática Crítica y Trabajo colaborativo como estrategia para la formación continuada de profesores de matemáticas.

