

Generalizando patrones figurales con estudiantes de 8 y 9 años: una interpretación de los medios semióticos de objetivación movilizados *

Generalizing figural patterns with students of 8 and 9 years old: an interpretation of the semiotic means of objectification mobilized

Adriana Lasprilla Herrera

Docente de matemáticas
Colegio Santa Ana Fontibón
Bogotá, Colombia
E-mail: arranala@gmail.com

Francisco Javier Camelo Bustos

Docente de matemáticas
Especialización en Educación Matemática
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Bogotá, Colombia
E-mail: fjcamelob@udistrital.edu.co

Received: 15 - Feb - 12 / Accepted: 15 - Jun - 12

Resumen

Se da cuenta de los medios semióticos de objetivación que emergieron, en niños y niñas de 8 y 9 años de edad de una institución educativa de Bogotá D. C. (Colombia) en una clase de matemáticas, al abordar una tarea de generalización de patrones figurales, como un proceso de producción de significados. El análisis se realizó teniendo en cuenta la teoría cultural de la objetivación (Radford, 2008), particularmente los estratos de generalidad y los medios semióticos de objetivación desarrollados por los estudiantes. Se encontró que los estudiantes emplearon los medios semióticos identificados por Radford (2010) y se ubicaron en un estrato de generalidad factual.

Palabras clave: generalización, teoría de la objetivación, gestos, medios semióticos.

Abstract:

This paper reports the semiotic objectification means that arose among 7 and 8 year-old children from a school in Bogota D.C., Colombia in a math class, when they addressed a generalization task of figural patterns as a process of meaning production. The analysis was conducted according to the cultural theory of objectification (Radford, 2008), particularly the layers of generality and the semiotic means of objectification developed by the student it. Found that students in this study identified the semiotic means employed by Radford (2010) and were located in a layer of factual generality.

Key words: generalization, objectification theory, gestures, semiotic means.

Résumé

Ce travail rend compte des moyens sémiotiques d'objectivation qui ont émergé chez des enfants de 8 et 9 ans, étudiants d'un établissement éducatif de Bogota, D.C. (Colombie) dans un cours de mathématiques, en abordant une tâche de généralisation de patrons figuraux comme



un processus de production de significations. L'analyse a été effectuée tenant compte de la théorie culturelle de l'objectivation (Radford, 2008), notamment les strates de généralité et les moyens sémiotiques d'objectivation développés par les étudiants. On a trouvé que les étudiants ont employé les moyens sémiotiques de Radford (2010) et se sont placés dans une strate de généralité factuelle.

Mots clés: généralisation, théorie de l'objectivation, gestes, moyens sémiotiques.

Resumo

Ter conhecimento dos meios semióticos de objetivação que emergiram, em meninos e meninas de 8 e 9 anos de idade de uma instituição educativa de Bogotá D. C. (Colômbia) em uma classe de matemática, ao abordar uma tarefa de generalização de padrões figurais, como um processo de produção de significados. A análise foi realizada tendo em conta a teoria cultural da objetivação (Radford, 2008), particularmente os estratos de generalidade e os meios semióticos de objetivação desenvolvidos pelos estudantes. Encontrou-se que os estudantes empregaram os meios semióticos identificados por Radford (2010) e situaram-se em um estrato de generalidade factual.

Palavras chave: generalização, teoria da pesquisa, gestos, meios semióticos.

* Este artículo reporta algunos de los resultados de la investigación: Medios semióticos de objetivación que emergen de estudiantes de tercero de básica primaria en torno a una tarea de generalización de patrones figurales. Realizada para la obtención del título de la Especialización de Educación Matemática de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, entre enero de 2010 y enero de 2011.



Introducción

Sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar han desarrollado diversas investigaciones a nivel nacional e internacional (Socas, Camacho, Palarea y Hernández, 1996; Azarquiel, 1993; Mason, Graham, Pimm y Gowar, 1989; Grupo Pretexto, 1999; Fernández, 1997; Segura, 2001; Radford, 2008; Lasprilla, 2012 y Vergel, 2010) en las que la comprensión y construcción de algunos conceptos y procedimientos del álgebra (interpretación de la letra, procesos de generalización y simbolización, planteamiento de sistemas de ecuaciones, y desarrollo de competencias algebraicas), son objeto de estudio y, en donde se ha evidenciado, que el tratamiento escolar de éstos procesos genera dificultades, que pueden estar relacionadas con el profesor y con el estudiante.

De las investigaciones realizadas por Radford (2008) puede inferirse que uno de los intereses actuales en la comunidad de investigadores a nivel internacional, es diseñar y aplicar actividades para la clase de matemáticas sobre generalización de patrones, que puedan ofrecer a los estudiantes la oportunidad de reflejar su pensamiento algebraico. En particular, en la perspectiva semiótica cultural, esto es considerado un problema didáctico, pues posibilita el entender formas de aparición de dicho pensamiento. Por tal razón en este documento se propone identificar los medios semióticos que emergen y utilizan los estudiantes específicamente en torno a una tarea sobre generalización de patrones figurales.

En este sentido, el propósito de este trabajo¹ se enmarca en una perspectiva teórica de orientación semiótica, derivada de corrientes contemporáneas socioculturales de aprendizaje (la teoría cultural de la objetivación). Dicha

¹ Éste documento muestra algunos de los resultados encontrados por Lasprilla (2012) en el trabajo de grado que desarrolló para optar el título de Especialista en Educación Matemática en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

perspectiva teórica centra su atención en el proceso de aprendizaje, bajo el ángulo de la interacción social y la movilización tanto de signos como de artefactos que realizan los estudiantes (Radford, 2006).

Para dar cuenta de ello, se ha estructurado este documento de la siguiente manera: en la primera parte se presenta la problemática sobre la cual se trabajó. En la segunda parte, se presentan algunos elementos, en donde se da una breve descripción de consideraciones teóricas que se tomaron como antecedentes y sustento para el desarrollo del escrito. La tercera parte, presenta los aspectos metodológicos y, a continuación, el análisis de las producciones de los estudiantes. Para finalmente realizar una discusión en torno a las conclusiones.

Planteamiento del problema:

Es ampliamente reconocido que en la labor docente, es de vital importancia cuestionarse sobre las implicaciones que tienen las actuaciones del profesor en el desarrollo del pensamiento de los estudiantes, pues cada vez que se propone el estudio de una determinada temática, entran en juego, entre otras, las percepciones del docente, el tipo de actividades que se propone y la manera como los docentes interpretan la enseñanza y el aprendizaje; lo que determinará la imagen que se hagan los estudiantes de los distintos temas trabajados.

Por otro lado, debe considerarse que distintas investigaciones realizadas en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra, han identificado que algunas de las dificultades que muestran los estudiantes son originadas por la manera en que el docente desarrolla los temas. Por ejemplo: el Grupo Azarquiel (1993) afirma que en la enseñanza tradicional del álgebra se da prioridad a los procesos algorítmicos más que a desarrollar procesos de pensamiento que



permitan la construcción de un pensamiento algebraico. en relación a esto Mason et al. (1989) comentan que en el álgebra:

“[...] es indiscutible que la construcción del pensamiento algebraico tiene lugar a lo largo de un proceso paralelo y continuo dentro del trabajo aritmético y geométrico que se inicia en los primeros años del ciclo básico” (pág. viii, 1999).

De este modo es importante iniciar el desarrollo del pensamiento algebraico en los primeros cursos de educación, Button y Rojano (2000) afirman que los tiempos didácticos para el aprendizaje del álgebra son prolongados y por ello es conveniente iniciar en edades tempranas, aprovechando las fuentes de significados que están presentes en los contenidos matemáticos de la educación primaria.

En esta misma línea, Fernández (1997) y Espinosa (2001) atribuyen los errores cometidos por los estudiantes en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra a la enseñanza tradicional, dado que ella frecuentemente se enfoca en los resultados de los procesos de cálculo más que en los aspectos relacionales y estructurales, oponiéndose así al desarrollo del pensamiento algebraico.

De este modo, es evidente que el desarrollo de pensamiento algebraico en los estudiantes debe contemplar aspectos relacionados, de manera fundamental con los registros semióticos, dado que, es posible que la comprensión de éstos permita que los estudiantes puedan abordar situaciones o problemas algebraicos. Es así que surge la necesidad de indagar frente a los medios semióticos, en particular, en detectarlos e identificarlos para intentar analizar su evolución en el desarrollo de pensamiento algebraico.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, es de resaltar, que muchas de las dificultades al trabajar aspectos asociados al álgebra escolar, pueden encontrar su causa en

la gestión de aula que se emplea para abordarla, ya que algunos profesores dejan la impresión en los estudiantes, de que el trabajo algebraico es netamente algorítmico, y no advierten suficientemente que hay una construcción semiótica que le da sentido, como el simple hecho de realizar un dibujo o gráfico para abordar una situación. Es por ello, que es importante fijar la mirada en los medios semióticos de objetivación, pues son los que le darán sentido al objeto matemático.

Es así que, con el interés de abordar los procesos seguidos por estudiantes de tercer grado de educación básica² en relación a tareas de desarrollo de pensamiento algebraico, se propuso este trabajo, modificando una actividad de generalización de patrones figurales, propuesta por Radford (2010).

Teoría cultural de la objetivación:

Como ya se ha mencionado, la teoría bajo la cual se realiza este trabajo se enmarca dentro de las investigaciones de tipo sociocultural, planteadas inicialmente por Vygotsky, donde se establece una manera de teorizar los procesos de aprendizaje de las matemáticas, visualizando dos aspectos principales: la naturaleza histórica del saber movilizado por la escuela y la manera en que ese saber es retomado por los estudiantes en el curso de procesos sociales de producción de significados Radford (2006).

Dentro del estudio de la producción de significados mediante un proceso social, se enmarca la teoría cultural de la objetivación, en la cual se definen varios conceptos fundamentales dentro del estudio de los procesos de enseñanza aprendizaje. Uno de estos es el conocimiento de los objetos matemáticos, el cual es interpretado

² En Colombia, el sistema educativo se divide en Educación Preescolar, Educación Básica y Educación Media Vocacional. Se espera que los estudiantes de tercer grado de educación básica tengan entre 8 y 9 años.



como el resultado de una construcción o reconstrucción más o menos viable que resulta de las acciones de adaptación ejercidas por el estudiante frente a un problema o situación (Miranda, Radford y Guzmán, 2010). Para la teoría de la objetivación, el saber no es agotado por la situación que ha podido darle origen, pues la concepción de la misma situación ha sido posible únicamente en cuanto parte de una manera de plantear y buscar soluciones a dicho problema. El aprendizaje es visto como una “adquisición comunitaria de formas de reflexión del mundo guiadas por modos epistémico culturales históricamente formados” (Radford, 2006, p. 105).

La progresiva dotación de sentido en torno al objeto cultural que subyace en el aprendizaje es vista como un proceso social denominado objetivación, el cual se da a través del uso de diversos medios semióticos, que permiten la objetivación del objeto y a la vez los procesos de producción de significados.

Otro concepto importante dentro de la teoría es el pensamiento, el cual está íntimamente relacionado con los signos, como dice Vygotski (citado por Miranda, Radford y Guzmán, 2007), nuestro funcionamiento cognitivo está íntimamente ligado y afectado por el uso de los signos. Pero es fundamental resaltar que los signos son interpretados desde lo escrito, oral, términos lingüísticos, símbolos, gestos y movimientos tal como establece Radford (2008, citando a Azarello, 2006). Es así que dentro de la teoría, el signo no se refiere únicamente al papel de representante y representado como lo establecen algunas teorías semióticas, sino que es un concepto mucho más amplio.

Por otra parte, dentro de esta teoría, la generalización algebraica de patrones puede ser entendida como observar algo que va más allá de lo que realmente se ve (Radford, 2008). Siendo

más específicos, la generalización algebraica de un modelo, se basa en el darse cuenta de una comunalidad³ local, que luego se generaliza a todos los términos de la sucesión y que sirve como una orden para construir expresiones de los elementos de la secuencia que siguen estando fuera del campo perceptivo. En otras palabras, es establecer lo que es particular dentro una construcción y estar en la capacidad de verlo aún cuando perceptivamente no es evidente. En este contexto, la idea de objetivación se entiende como el proceso social de toma de conciencia progresiva de algo frente a nosotros, una figura, una forma, algo cuya generalidad notamos gradualmente (Radford, 2006). En este orden de ideas, el aprendizaje no consiste en construir o reconstruir un conocimiento, se trata de dotar de sentido a los objetos conceptuales que encuentra el alumno en su cultura.

Para Radford (2006), el objeto no es un objeto monolítico u homogéneo, es un objeto compuesto de laderas de generalidad, en consecuencia, el aprendizaje consistiría en aprender a notar o percibir esas laderas de generalidad y estas son notadas de manera progresiva por el alumno (p.116).

En relación al dominio de la sintaxis algebraica, Radford señala que el enfoque teórico de la semiótica cultural centra su atención en el discurso y los signos puestos en juego cuando los alumnos se refieren a objetos matemáticos, ya que desde el marco teórico sociocultural, se presta atención al proceso discursivo y semiótico a través del cual los estudiantes intentan dar sentido a los gráficos.

Los procesos interpretativos de los estudiantes se investigan a través del constructo teórico de la objetivación del conocimiento y la configuración de los signos matemáticos, los gestos y las palabras que recurren a fin de

³ Comunalidad hace referencia a toda la información que puede ser importante para percibir un patrón.



alcanzar mayores niveles de conceptualización Vergel (2010).

Metodología aplicada

El trabajo se realizó bajo un paradigma de investigación cualitativa, en donde hubo una preocupación centrada en indagar los hechos o fenómenos educativos en su “realidad natural”. Por lo que se hizo necesario aceptar que la investigación cualitativa plantea una concepción holística, esto es, posibilita comprender en profundidad y desde la totalidad contextual en que se producen las prácticas, el significado de los hechos educativos, tal como lo plantean Bravin y Pievi (2008).

La toma de datos se llevó a cabo con estudiantes de grado tercero (8-9 años), durante el desarrollo de tres sesiones de clase (durante una semana, dos de una hora y una de dos horas). La recolección de la información se realizó en cuatro momentos como se describe a continuación:

Momento 1: Se inició con la ubicación de la problemática, en relación al interés de dar una mirada a los medios semióticos de objetivación, encontrando referentes teóricos que fueron considerados en el marco teórico, posteriormente se realizó la planeación de la intervención, para ello fué necesario revisar algunas de las actividades que ha empleado Radford (2010 y 2008) en sus investigaciones y de ellas determinar la tarea y los ajustes necesarios para el desarrollo del trabajo.

Momento 2: En la implementación de la tarea, se determinó la manera en que se realizarían las grabaciones y se consideró necesario recoger en cada sesión las hojas de trabajo desarrollado por los estudiantes, como también se tuvieron en cuenta las notas teóricas y personales tomadas por la profesora.

Momento 3: Luego de aplicada la tarea se procedió a realizar la transcripción de algunos de los discurso de los estudiantes, teniendo presente que fueran los que permitieran mayor evidencia de medios semióticos, durante la solución de la actividad y revisión de las elaboraciones escritas.

Momento 4: finalmente se realizó el análisis de videos (identificación de medios semióticos de objetivación). El análisis de los datos se realizó bajo una concepción multimodal del pensamiento humano, en la que es importante fijar la atención en los diferentes sistemas semióticos (elementos perceptivos, quinesiológicos, gestuales, simbólicos y verbales) utilizados y emergentes durante la actividad (lenguaje escrito, lenguaje hablado, gestos, acciones, etc.) y los distintos estratos o laderas de generalidad presentes.

Se realizó una búsqueda, en términos de la tarea que fuera pertinente para el trabajo, así que se tomo una actividad empleada por Radford (2008) en sus investigaciones y se adaptó a los intereses. Luego se aplicó, teniendo en cuenta que se realizara la filmación de cada una de las sesiones, con los datos recolectados, se desarrolló el análisis teniendo presente los estratos de generalidad propuestos por Radford, con ellos se pudo determinar además de los medios semióticos empleados, algunos indicios del proceso de objetivación seguido por los niños.

Para el desarrollo de este trabajo se seleccionó la primera actividad empleada por Radford (2008) con niños de octavo grado.

Parte 1:

En la actividad se pidió continuar con la figura número 5 ya que se proporcionaba solo las figuras uno, dos y tres, luego se propuso calcular el número de círculos en las figuras 25 y 100 y, finalmente, establecer una fórmula para hallar la cantidad de círculos en la figura n.

Los estudiantes a los que se aplicó la actividad encontraron que las cantidades de las posiciones



pedidas se podían hallar sumando la cantidad superior y la inferior mas uno, inicialmente lo plantearon de manera oral y posteriormente utilizando letras.




La modificación realizada a la actividad, consistió en agregar las preguntas 2, 3 y 4,

pretendiendo con ellos esbozar los momentos en que se desarrolló la clase, y de permitirle a los estudiantes que fueran aclarando la manera como estaban estableciendo el patrón, en la medida que debían escribir los procedimientos seguidos.

Generalización de patrones
Parte 1

Nombre: _____

1. Dibuja las figuras correspondientes a las posiciones 4 y 5.

				
Fig. 1	Fig. 2	Fig. 3	Fig. 4	Fig. 5

2. Establece la cantidad de bolas que tendrá la sexta y la séptima figura y escribe el procedimiento que seguiste para hallar estas cantidades.

3. En grupos socializa tus respuestas y establece la cantidad de bolas en las figuras ocho, nueve y diez y escriban el procedimiento que utilizaron para encontrar estas cantidades.

4. Socialización de respuestas en todo el curso.

Parte 2:

De acuerdo a las estrategias establecidas en la anterior sesión, responde:

1. Encuentra el número de bolas que tienen las figuras 25, 50 y 100. Escribe el procedimiento que seguiste para hallar estas cantidades.
2. Realiza una carta para enviarla a un compañero que no pudo asistir a las clases pues debe enterarse del trabajo que realizaron. En la carta se debe explicar todas las actividades que se hicieron y la manera como se procedió para encontrar la solución a las preguntas planteadas inicialmente, además de lo más importante que se haya discutido.
3. Socialización de respuestas en todo el curso.

La segunda parte de la actividad surgió por la necesidad de ver la cantidad de círculos en posiciones no cercanas a la que habían encontrado en la parte uno de la actividad y de nuevo se establecían los momentos en que se desarrollaron la sesiones y los procedimientos que siguieron.

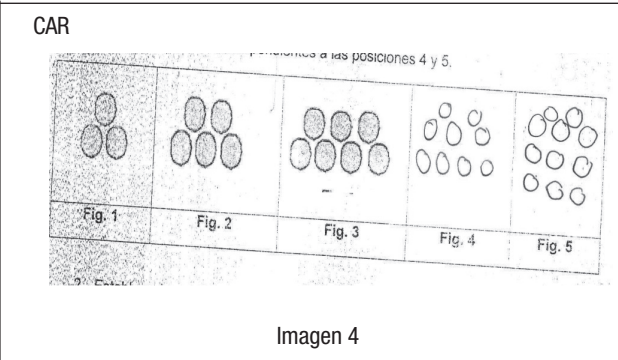
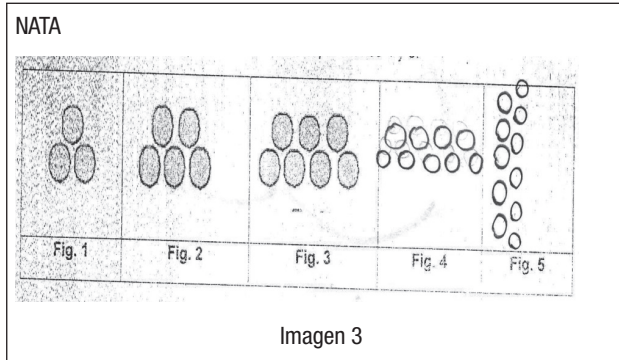
El desarrollar la actividad en dos partes, fue necesario, por la edad de los estudiantes (8 y 9 años), ya que era pertinente darles tiempos para abordar cada una de las preguntas, de manera

que pudieran tener una visión más detallada de la generalidad allí relacionada.

Análisis de la implementación:

El primer medio semiótico emergente fue el realizar los dibujos de las posiciones cuatro y cinco, en este se dieron dos posibilidades, en una los estudiantes conservaron la forma de las anteriores figuras y otros no, como puede en la imagen 3 y 4:





Nata consideró necesario conservar la distribución geométrica de la figura aunque por cuestiones de espacio la figura cinco la hizo en sentido vertical, mientras que el Car, al parecer, no le dio importancia a la distribución de los círculos, para él era necesario considerar las cantidades de cada posición, este aspecto fue importante posteriormente, ya que el grupo que

prestó atención a la distribución pudo establecer una generalización más eficiente en relación a quienes no tuvieron en cuenta este aspecto.

Aunque es importante considerar que en un primer momento los estudiantes realizaron gestos que evidenciaban que no comprendían con claridad la situación⁴. Como muestran las imágenes 5 y 6.



La interacción en los pequeños grupos permitió comprender mucho mejor la situación y llegar a acuerdos, como sucedió con Fel y Nat, al discutir cuántos puntos habían en las posiciones seis y siete, como pude leerse en la siguiente transcripción de un fragmento del video de la primera sesión:

Nat: están mal, en la 6 hay trece [señalando lo que escribió Felipe].

Fel: [borra lo que había realizado].

Nat: ... y en el otro son catorce,... tú tienes que escribir en total hay.... [Dictándole lo que ella escribió] veintiséis,... ahora hay que hacer el ocho el nueve y el diez.

Fel: veinte, diez y ocho... ¿no es?, ¿no es el doble?

Nat: es lo que creamos, [realizando un gesto que muestra no entender lo que el compañero le decía].

⁴ La filmación y las fotos aquí mostradas fueron autorizadas para los fines de éste trabajo por los padres de los niños.





Imagen 7



Imagen 8

Mientras que en el grupo de lui, Feli y Nata, establecieron que para hallar las cantidades pedidas era necesario sumar dos a la cantidad de la posición anterior, y dieron las cantidades como razón, comparando la cantidad de bolas y la posición, por ejemplo para la posición ocho escribieron: 17/8, en la nueve: 19/9 y en la 10 21/10.



Imagen 10

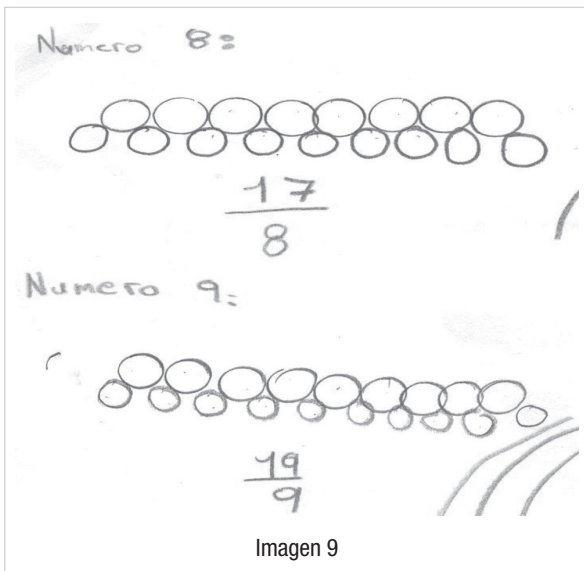


Imagen 9

Para ellos fue necesario el uso de la regla para dibujar las posiciones pedidas conservando la distribución espacial de los círculos de las primeras posiciones.

Los medios semióticos movilizados para abordar la primera parte de la actividad, que en un principio surgieron como signos que les permitieron acercarse a la tarea se convierten en medios semióticos en la medida que en las posteriores sesiones les permitieron objetivar la generalización planteada.

Durante la socialización de la actividad se pudieron observar las elaboraciones que hicieron los niños, en términos de sus construcciones mentales, ya que, explicaban la razón de ser de las acciones que siguieron; como se ve en el siguiente apartado, donde a partir de la argumentación dada por Án se posibilitó que el grupo se pusiera de acuerdo frente a la necesidad de sumar dos bolitas a la cantidad de la anterior posición, para hallar la cantidad de las posiciones pedidas, como se lee a continuación:

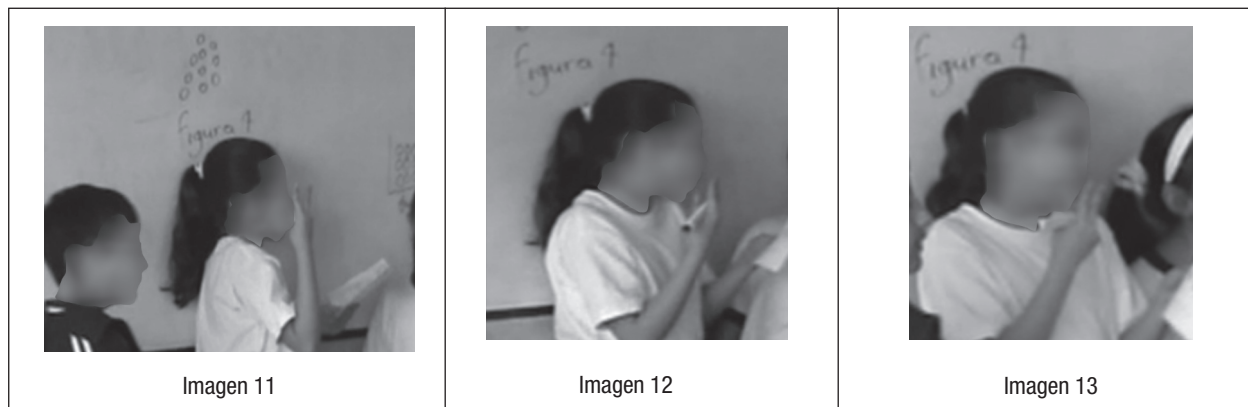
Profe: [dirigiéndose a Ángela] ¿Qué hiciste tú para saber cuál era la figura cuatro?.

Án: ... pues en la figura tres habían [sic] siete bolitas entonces le sumé dos [mostrando con sus dedos esta cantidad].

Profe: ¿Por qué le sumaste dos?

Án: porque...en la primera hay una [mostrando en sus dedos la cantidad] y le sumas dos [mostrando con los dedos] en la siguiente como en la figura una hay tres y le sumas dos me da cinco.

Profe: ok.



Profe: ¿Cuántas bolitas tiene la posición cuatro?.

Lui: [escribe] nueve.

Profe: y en la figura cinco.

Lui: [escribe] 11.

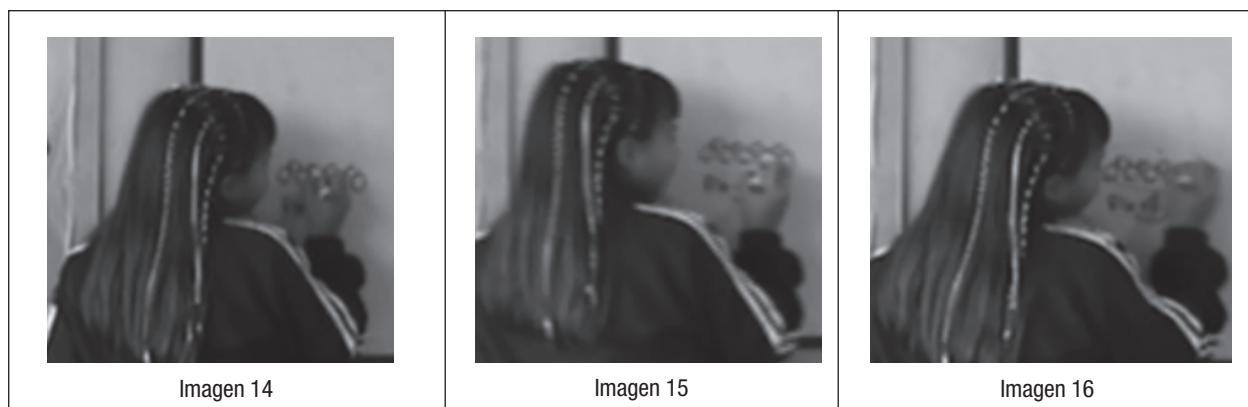
Profe: ¿qué hiciste para saber?

Lui: [señalando con el marcador en el dibujo de la posición cuatro en el

tablero] sumé esto cuatro más [de nuevo señaló las figuras en el tablero] estos cinco y después sumé todo [encerrando en un círculo el total de bolitas].

Profe: y para la posición seis ¿la dibujaron también?

Lui: sí, hicimos lo mismo [señala la fila inferior y la fila superior].



Es importante notar que Án estableció que necesitaba la cantidad de la anterior posición para determinar cualquier posición pedida, es decir, planteó una generalidad que depende de la figura, en este caso del anterior, sino la tiene, le es imposible hallar la cantidad para cualquier

cantidades a las que hacía referencia.

Desarrollo Parte 2

En el grupo 2, el primer medio empleado para hallar la solución fue establecer una tabla que relacionara las posiciones y las cantidades en cada posición, teniendo en cuenta siempre sumados al anterior, como se muestra en la imagen 17:

1-21	25-51	40-81	56-111	74-171	94-231
2-23	26-53	41-83	57-113	75-173	95-233
3-25	27-55	42-85	58-115	76-175	96-235
4-27	28-57	43-87	59-117	77-177	97-237
5-29	29-59	44-89	60-119	78-179	98-239
6-31	30-61	45-91	61-121	79-181	99-241
7-33	31-63	46-93	62-123	80-183	100-243
8-35	32-65	47-95	63-125	81-185	101-245
9-37	33-67	48-97	64-127	82-187	102-247
10-39	34-69	49-99	65-129	83-189	103-249
11-41	35-71	50-101	66-131	84-191	104-251
12-43	36-73	51-103	67-133	85-193	105-253
13-45	37-75	52-105	68-135	86-195	106-255
14-47	38-77	53-107	69-137	87-197	107-257
15-49	39-79	54-109	70-139	88-199	108-259
16-51	40-81	55-111	71-141	89-201	109-261
17-53	41-83	56-113	72-143	90-203	110-263
18-55	42-85	57-115	73-145	91-205	111-265
19-57	43-87	58-117	74-147	92-207	112-267
20-59	44-89	59-119	75-149	93-209	113-269
21-61	45-91	60-121	76-151	94-211	114-271
22-63	46-93	61-123	77-153	95-213	115-273
23-65	47-95	62-125	78-155	96-215	116-275
24-67	48-97	63-127	79-157	97-217	117-277
25-69	49-99	64-129	80-159	98-219	118-279
26-71	50-101	65-131	81-161	99-221	119-281
27-73	51-103	66-133	82-163	100-223	120-283
28-75	52-105	67-135	83-165	101-225	121-285
29-77	53-107	68-137	84-167	102-227	122-287
30-79	54-109	69-139	85-169	103-229	123-289
31-81	55-111	70-141	86-171	104-231	124-291
32-83	56-113	71-143	87-173	105-233	125-293
33-85	57-115	72-145	88-175	106-235	126-295
34-87	58-117	73-147	89-177	107-237	127-297
35-89	59-119	74-149	90-179	108-239	128-299
36-91	60-121	75-151	91-181	109-241	129-301
37-93	61-123	76-153	92-183	110-243	130-303
38-95	62-125	77-155	93-185	111-245	131-305
39-97	63-127	78-157	94-187	112-247	132-307
40-99	64-129	79-159	95-189	113-249	133-309
41-101	65-131	80-161	96-191	114-251	134-311
42-103	66-133	81-163	97-193	115-253	135-313
43-105	67-135	82-165	98-195	116-255	136-315
44-107	68-137	83-167	99-197	117-257	137-317
45-109	69-139	84-169	100-199	118-259	138-319
46-111	70-141	85-171	101-201	119-261	139-321
47-113	71-143	86-173	102-203	120-263	140-323
48-115	72-145	87-175	103-205	121-265	141-325
49-117	73-147	88-177	104-207	122-267	142-327
50-119	74-149	89-179	105-209	123-269	143-329
51-121	75-151	90-181	106-211	124-271	144-331
52-123	76-153	91-183	107-213	125-273	145-333
53-125	77-155	92-185	108-215	126-275	146-335
54-127	78-157	93-187	109-217	127-277	147-337
55-129	79-159	94-189	110-219	128-279	148-339
56-131	80-161	95-191	111-221	129-281	149-341
57-133	81-163	96-193	112-223	130-283	150-343
58-135	82-165	97-195	113-225	131-285	151-345
59-137	83-167	98-197	114-227	132-287	152-347
60-139	84-169	99-199	115-229	133-289	153-349
61-141	85-171	100-201	116-231	134-291	154-351
62-143	86-173	101-203	117-233	135-293	155-353
63-145	87-175	102-205	118-235	136-295	156-355
64-147	88-177	103-207	119-237	137-297	157-357
65-149	89-179	104-209	120-239	138-299	158-359
66-151	90-181	105-211	121-241	139-301	159-361
67-153	91-183	106-213	122-243	140-303	160-363
68-155	92-185	107-215	123-245	141-305	161-365
69-157	93-187	108-217	124-247	142-307	162-367
70-159	94-189	109-219	125-249	143-309	163-369
71-161	95-191	110-221	126-251	144-311	164-371
72-163	96-193	111-223	127-253	145-313	165-373
73-165	97-195	112-225	128-255	146-315	166-375
74-167	98-197	113-227	129-257	147-317	167-377
75-169	99-199	114-229	130-259	148-319	168-379
76-171	100-201	115-231	131-261	149-321	169-381
77-173	101-203	116-233	132-263	150-323	170-383
78-175	102-205	117-235	133-265	151-325	171-385
79-177	103-207	118-237	134-267	152-327	172-387
80-179	104-209	119-239	135-269	153-329	173-389
81-181	105-211	120-241	136-271	154-331	174-391
82-183	106-213	121-243	137-273	155-333	175-393
83-185	107-215	122-245	138-275	156-335	176-395
84-187	108-217	123-247	139-277	157-337	177-397
85-189	109-219	124-249	140-279	158-339	178-399
86-191	110-221	125-251	141-281	159-341	179-401
87-193	111-223	126-253	142-283	160-343	180-403
88-195	112-225	127-255	143-285	161-345	181-405
89-197	113-227	128-257	144-287	162-347	182-407
90-199	114-229	129-259	145-289	163-349	183-409
91-201	115-231	130-261	146-291	164-351	184-411
92-203	116-233	131-263	147-293	165-353	185-413
93-205	117-235	132-265	148-295	166-355	186-415
94-207	118-237	133-267	149-297	167-357	187-417
95-209	119-239	134-269	150-299	168-359	188-419
96-211	120-241	135-271	151-301	169-361	189-421
97-213	121-243	136-273	152-303	170-363	190-423
98-215	122-245	137-275	153-305	171-365	191-425
99-217	123-247	138-277	154-307	172-367	192-427
100-219	124-249	139-279	155-309	173-369	193-429
101-221	125-251	140-281	156-311	174-371	194-431
102-223	126-253	141-283	157-313	175-373	195-433
103-225	127-255	142-285	158-315	176-375	196-435
104-227	128-257	143-287	159-317	177-377	197-437
105-229	129-259	144-289	160-319	178-379	198-439
106-231	130-261	145-291	161-321	179-381	199-441
107-233	131-263	146-293	162-323	180-383	200-443
108-235	132-265	147-295	163-325	181-385	201-445
109-237	133-267	148-297	164-327	182-387	202-447
110-239	134-269	149-299	165-329	183-389	203-449
111-241	135-271	150-301	166-331	184-391	204-451
112-243	136-273	151-303	167-333	185-393	205-453
113-245	137-275	152-305	168-335	186-395	206-455
114-247	138-277	153-307	169-337	187-397	207-457
115-249	139-279	154-309	170-339	188-399	208-459
116-251	140-281	155-311	171-341	189-401	209-461
117-253	141-283	156-313	172-343	190-403	210-463
118-255	142-285	157-315	173-345	191-405	211-465
119-257	143-287	158-317	174-347	192-407	212-467
120-259	144-289	159-319	175-349	193-409	213-469
121-261	145-291	160-321	176-351	194-411	214-471
122-263	146-293	161-323	177-353	195-413	215-473
123-265	147-295	162-325	178-355	196-415	216-475
124-267	148-297	163-327	179-357	197-417	217-477
125-269	149-299	164-329	180-359	198-419	218-479
126-271	150-301	165-331	181-361	199-421	219-481
127-273	151-303	166-333	182-363	200-423	220-483
128-275	152-305	167-335	183-365	201-425	221-485
129-277	153-307	168-337	184-367	202-427	222-487
130-279	154-309	169-339	185-369	203-429	223-489
131-281	155-311	170-341	186-371	204-431	224-491
132-283	156-313	171-343	187-373	205-433	225-493
133-285	157-315	172-345	188-375	206-435	226-495
134-287	158-317	173-347	189-377	207-437	227-497
135-289	159-319	174-349	190-379	208-439	228-499
136-291	160-321	175-351	191-381	209-441	229-501
137-293	161-323	176-353	192-383	210-443	230-503
138-295	162-325	177-355	193-385	211-445	231-505
139-297	163-327	178-357	194-387	212-447	232-507
140-299	164-329	179-359	195-389	213-449	233-509
141-301	165-331	180-361	196-391	214-451	234-511
142-303	166-333	181-363	197-393	215-453	235-513
143-305	167-335	182-365	198-395	216-455	236-515
144-307	168-337	183-367	199-397	217-457	237-517
145-309	169-339	184-369	200-399	218-459	238-519
146-311	170-341	185-371	201-401	219-461	239-521
147-313	171-343	186-373	202-403	220-463	240-523
148-315	172-345	187-375	203-405	221-465	241-525
149-317	173-347	188-377	204-407	222-467	242-527
150-319	174-349	189-379	205-409	223-469	243-529
151-321	175-351	190-381	206-411	224-471	244-531
152-323	176-353	191-383	207-413	225-473	245-533
153-325	177-355	192-385	208-415	226-475	246-535
154-327	178-357	193-387	209-417	227-477	247-537
155-329	179-359	194-389	210-419	228-479	248-539
156-331	180-361	195-391	211-421	229-481	249-541
157-333	181-363	196-393	212-423	230-483	250-543
158-335	182-365	197-395	213-425	231-485	251-545
159-337	183-367	198-397	214-427	232-487	252-547
160-339	184-369	199-399	215-429	233-489	253-549
161-341	185-371	200-401	216-431	234-491	254-551
162-343	186-373				

1 suma 25 + 26 y se dio la 51 y medio 51

$$\begin{array}{r} 51 \\ - 25 \\ \hline \end{array}$$

suma 50 + 51 use y medio 101

$$\begin{array}{r} 101 \\ - 50 \\ \hline \end{array}$$

suma 100 + 101 use y medio 201

$$\begin{array}{r} 201 \\ - 100 \\ \hline \end{array}$$

Siguiendo el procedimiento descrito pudieron hallar la cantidad de bolitas para cualquier posición. Para ellos fue importante ver que la configuración de la secuencia se hacía siempre la cantidad de círculos de la posición, que iba en la fila superior de la construcción y esa misma cantidad más uno que iba en la fila inferior, de este modo pudieron establecer la cantidad para cualquier posición.

Para el grupo 1, Felipe insistía que debían ser el doble la cantidad de bolitas para cada posición, pero en diálogo con la profesora determinó que era el doble más uno, como se muestra en el siguiente fragmento:

Profe: Felipe ¿cuántos hay en la 10?

Fel: 20.

Profe: ¿Por qué veinte?

Fel: [no respondió y empezó a dar golpes sobre la mesa].

Profe: en la cuatro hay nueve, en la cinco hay 11, en la seis 12, en la siete 15, en la ocho 17, cuántas hay entonces en la 20.

Fel: pues 20... [Pensando un rato] a no 21.

Profe: entonces ¿cuántas hay en la veintiuno?

Fel: [no respondió].

Es de notar que la intervención de la profesora le permitió observar el comportamiento en las cantidades, pero que a pesar de hacer esta observación no pudo establecer con claridad una nueva forma que le permitiere hallar el total de bolas para determinada posición.

En la socialización de las respuestas de cada uno de los grupos a la segunda parte de la actividad, la profesora construyó una tabla donde relacionaba cada uno de los grupos con sus respuestas para las posiciones 25, 50 y 100.

Profe: ¿Cuántos hay en la posición 25?

Nat: 26.

Profe: en la 50.

Nat: 101.

Profe: en la 100.

Nat: 201.

Profe: ¿cómo hicieron para saberlo?

Nat: nosotros sumamos dos..... dos veces cincuenta y más uno.

Profe: listo, y en la 100.

Nat: heeee.

Profe: hicieron lo mismo.

Nat: sí [moviendo su cabeza afirmando lo que decía].

De la misma manera se preguntó a cada grupo las cantidades en cada posición, en el grupo dos, establecieron lo siguiente:

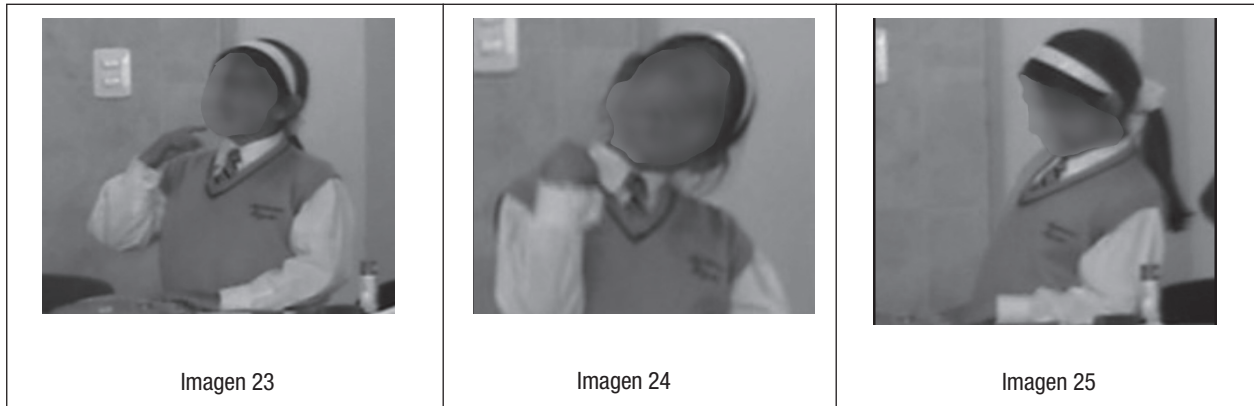
Profe: ¿Cómo hicieron para encontrar estas cantidades?

ÁN: nosotros hicimos esto, mostrando la tabla desde la posición 10.

En el grupo tres:

Profe: ¿Cómo hicieron para encontrar la respuesta?





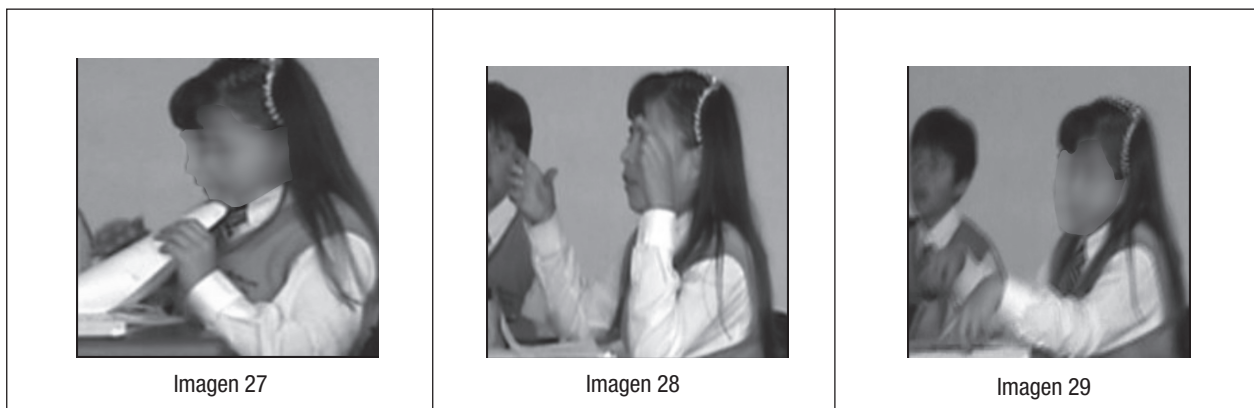
Lui: pues nosotros hicimos 25 más 26 y eso da 51 y nosotros dijimos que es 51 de 25.

Profe: en la 50 ¿Cómo hicieron?

Lui: lo mismo, sumamos 50 más 51 y en la 100 sumamos 100 más 101.

Profe: ¿Cómo sabían que era sumar eso así?

Lui: porque en la primera parte que era ésta [mostrando el dibujo de la parte 1 de la actividad], en la figura tres habían [sic] tres arriba y cuatro abajo, entonces en la 25 son 25 arriba y 26 abajo [mostrando con sus manos arriba y abajo a la medida que hablaba].



Discusión

El desarrollo de este trabajo permitió analizar, entre otros aspectos, que existen diversas formas de evidenciar en un estudiante sus procesos de

objetivación, (como son los movimientos, las miradas, los gestos, las palabras, los escritos, etc.) y que muchas veces los docentes privilegian algunos de ellos (esto en relación a la enseñanza



y aprendizaje del álgebra, en donde varios autores han señalado que se da prioridad al lenguaje simbólico Grupo Azarquiél 1993; Espinosa 2002; Mason et al., 1989; Socas et al., 1989; Kieran 1994) y no se le da la importancia merecida a los que pueden desarrollar los estudiantes, ya que estos pueden brindar información en torno a sus procesos de objetivación.

Fue posible mostrar que el primer medio semiótico empleado por los estudiantes fue el gestual, ya que la primera reacción frente a la tarea propuesta, fue de no entendimiento, en donde mostraban con movimientos corporales, tomándose la cabeza, o mirando hacia los lados, sugiriendo que no tenían claridad frente a lo que se les planteaba. En la medida que se reunieron en grupos surgió el empleo de otros medios semióticos, ya que tuvieron la oportunidad de interactuar con sus compañeros frente a lo que habían comprendido de la tarea y aclarar en conjunto las dudas que tenían.

De esta manera abordaron la tarea, y es de resaltar que cada uno de los grupos generó una forma distinta de establecer el patrón observado, por ejemplo, para el primer grupo, la generalidad se observó en relación a las características de los números, ya que siempre se obtenían cantidades impares, para ellos era necesario establecer una lista de números impares desde la primera posición, para hallar la cantidad en cualquier posición pedida; para el grupo dos, las cantidades en cada posición dependían de la anterior posición, ya que siempre se sumaba dos al anterior, este grupo siempre se esforzó por mostrar a sus compañeros lo que habían observado y lo expresaban de manera gestual utilizando sus dedos y reforzándolo con sus palabras, para ellos era no fue posible, hallar una cantidad de determinada posición si no contaba con la cantidad de alguna de las anteriores posiciones cercanas.

En el grupo tres, se estableció una generalidad más elaborada, en términos del menor uso de medios semióticos perceptivos, ya que a partir de la disposición geométrica de las figuras, que corresponde a una visualización más estructural, fue posible establecer, que siempre era sumar la fila superior en inferior, la fila superior correspondía a la posición y la inferior a uno más que ésta, así hallaron la cantidad para las posiciones pedidas, pero no pudieron desprenderse del superior e inferior, lo que posiblemente, limitó que establecieran una generalidad de tipo simbólico, aunque es de aclarar que este no era el interés del trabajo.

De este modo se evidenció que cada uno de los grupos estableció una manera de generalizar, y que el hecho de ir socializando sus hallazgos y escuchando los de los compañeros les permitió dar claridad a lo que hacían y a la vez de cuestionar si las producciones de sus compañeros eran correctas, constituyendo una interacción, al interior del curso, que les permitió progresar en los procesos de significación que fueron elaborando en relación a la generalización que establecieron.

En trabajos realizados por Radford (2008) con niños de las mismas edades ha sido posible identificar que el pensamiento algebraico no aparece en la ontogenia o por casualidad, ni tampoco aparece como una consecuencia necesaria de la maduración cognitiva, sino que el pensamiento algebraico aparece bajo algunas condiciones pedagógicas que deben ser creadas (Radford, 2010). Como fue el caso de este trabajo, en donde los niños desarrollaron pensamiento algebraico, a pesar de no estar operando con letras o despejando ecuaciones.

En particular Radford (2010) se refiere a introducir actividades que desarrollen pensamiento algebraico desde la básica primaria, ya que se ha evidenciado que formas de



pensamiento algebraico pueden aparecer entre los 7 y 8 años de edad, como lo pudimos evidenciar en este estudio.

Conclusiones

Los medios semióticos de objetivación empleados por los niños, en este trabajo, correspondieron con los identificados por Radford (2010); gestos, palabras y símbolos escritos. La movilización de éstos les permitió abordar la situación propuesta y luego plantear una solución. Es de resaltar que a pesar de que emplearon los mismos medios, para cada niño fue particular la forma de expresarlos, mientras que para una niña siempre fue necesario mostrar con sus manos el arriba y el abajo de la figura, para otra era necesario mostrar con sus dedos que las cantidades en los números aumentaban de a dos de una posición a otra, por citar unos ejemplos.

Los estratos de generalidad considerados por Radford (2010), son tres: factual, contextual y simbólico, como se explicaron anteriormente, en el desarrollo de este trabajo se evidenció que los grupos se encontraron en el estrato factual, ya que las generalizaciones que plantearon dependían directamente de las cantidades obtenidas en las posiciones anteriores y tan solo un grupo estableció un estrato de generalidad contextual, debido a que pudieron establecer una relación entre la cantidad superior e inferior de la figura. Aunque los dos son estratos de generalización, una es más elaborada que la otra en términos de procesos de significación y la consideración de elementos perceptivos y estructurales del patrón.

Durante el desarrollo del trabajo fue posible evidenciar una relación entre los estratos de generalidad propuestos por Radford (2008) y los niveles de generalidad propuestos por Mason et al. (1989); Pues mientras que el primero se refiere a generalidad factual y contextual, Mason

habla de ver y decir, es posible relacionarlos, ya que ambos hacen referencia al momento en que se percibe la generalidad, solo que para Radford puede ser expresada de diversas maneras, como gestos, movimientos, o palabras y para Mason es percibir la generalidad pero hacerla evidente utilizando algunas formas de expresión, en las que no se incluyen los gestos o movimientos.

Referencias bibliográficas y cibergráficas

- Butto, C. y Rojano, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo. *Educación Matemática*, 22 (3), 55-86.
- Bravin, C. y Pievin, N. (2008). Documento metodológico orientador para la investigación educativa. Organización de estados americanos y para la educación la ciencia y la cultura. <http://www.me.gov.ar/infod/documentos/documentometodologico.pdf>
- Espinosa, M. (2002). *Aplicación de un instrumento de evaluación de álgebra elemental*. Replica del trabajo del Dr. Fernández García. (Tesis doctoral no publicada). Granada. España. Universidad de Granada.
- Fernández, (1997). *Evaluación de competencias de álgebra elemental basada en la resolución de problemas verbales*. (Tesis doctoral no publicada). Granada. España. Universidad de Granada.
- Grupo Azarquiel. (1993). Ideas y actividades para enseñar álgebra. *Síntesis* N ° 33. España.
- Grupo Pretexto (1999) *Transición aritmética álgebra*. 2 Ed., Bogotá. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Kieran, C. (1994). *El aprendizaje y la enseñanza del álgebra escolar*. Traducción de Vilma Mesa. Una empresa Docente. www.ued.uniandes.edu.co
- Lasprilla, A. (2012). Medios semióticos de objetivación que emergen en estudiantes de tercero de básica primaria en torno a una tarea de generalización de patrones figurales. (Trabajo de Especialización, no publicado). Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Mason J, Graham A, Pimm D, Gowar N, (1989). *Rutas hacia/Raíces del álgebra*. Bogotá, Colombia: sección publicaciones UPTC.



- Miranda, I., Radford, L. y Guzmán, J. (2007). Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la objetivación. *Educación Matemática*, 19(3), 5-30. http://www.laurentian.ca/Laurentian/Home/Departments/School+of+Education+French/Faculty+and+Staff/Luis+Radford/luis_radford_index.htm?Laurentian_Lang=en-CA
- Radford, L (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70.
- Radford, L (2006) Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Relime*, Número especial. 103 -129.
- Radford, L. (2008). Iconicity and Contraction: A Semiotic Investigation of Forms of Algebraic Generalizations of Patterns In Different Contexts. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*. DOI 10.1007/s11858-007-0061-0
- Radford, L. (2010). Elementary Forms of Algebraic Thinking in Young Students. In M. F. Pinto. & T. F. Kawasaki (Eds.). *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4 (1), 73-80.
- Vergel, R. (2010) La Perspectiva de Cambio Curricular Early-Algebra como Posibilidad para desarrollar el Pensamiento Algebraico en Escolares de Educación Primaria: Una Mirada al Proceso Matemático de Generalización. *Memoria 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, 69- 81.
- Socas, M. Camacho, M; Palarea y Hernández. (1989). Iniciación al álgebra. Colección matemáticas: cultura y aprendizaje: Madrid, *Síntesis* N ° 23.

THE AUTHORS

Adriana Lasprilla Herrera, licenciada en educación básica con énfasis en matemáticas, de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, con Especialización en Educación Matemática en la misma Universidad, su interés es desarrollar investigaciones dentro de la teoría de la objetivación cultural.

Francisco Javier Camelo Bustos Investigador en educación matemática con proyectos financiados por Colciencias, IDEP y las Universidades Distrital y Pedagógica Nacional. El tema principal de investigación es Educación Matemática Crítica y Trabajo colaborativo como estrategia para la formación continuada de profesores de matemáticas.

