Dificultades detectadas al pasar del álgebra al cálculo en educación matemática*

Problems encountered in transition from Algebra to Calculus

Gloria Inés Neira Sanabria**

Fecha de recepción: 04/02/2013
Fecha de aceptación 02/04/2013

Resumen

El escenario usual del trabajo inicial del cálculo muestra repitencia, deserción escolar, «incomprensión» de conceptos, inadecuado manejo de *razonamientos,* escasa competencia algebraica en la resolución de los nuevos problemas; cursos desarrollados mecánicamente, trabajo puramente algorítmico y algebraico, sin alcanzar comprensión de los razonamientos y conceptos del cálculo. Desde las investigaciones de Artigue y Sierpinska, planteamos que el lenguaje, los razonamientos, la lógica, la alternancia de cuantificadores, el tratamiento de los signos usados en cálculo, plantean una «ruptura» con lo que se hace en álgebra, y se propone una investigación en la Transición Algebra-Cálculo como una manera de impactar significativamente en el aprendizaje del cálculo. Cada concepto del cálculo que se desea enseñar suele apoyarse en nociones más elementales y se resiste al aprendizaje si no se antecede por un sólido entendimiento y articulación de las nociones y los conceptos previos, lo cual es necesario pero no suficiente.

Palabras claves: Dificultades, cálculo diferencial, algebra escolar, prácticas, conflicto semióticos, transición, ruptura

Abstract

The usual scene of the calculus initial work is repetition, school dropouts, lack of concepts, improper management of the arguments, a not very strong competition algebraic in the resolution of the new problems; the courses are held in mechanical way, and the work rests in the purely algorithmic and in the algebra, without reaching an understanding of the reasoning and concepts of the calculus. From Artigue and Sierpinska's we postulate that the language, reasoning, logic, alternation of quantifiers, treatment of the signs used in calculating, pose a "break" with what is done in algebra and proposes t to start an focused in the Transition Algebra-Calculus as a way to get better impacts about learning calculus. Each calculus concept to be taught often rely on elementary notions and refuses to learning if it is preceded by a solid understanding and articulation of the notions and preconceptions, which is necessary but not sufficient.

Key words: dificulties, diferential calculus, learning, semiotics conflicts, transition, gaps.

* Artículo de reflexión de investigación asociado a la tesis doctoral *Obstáculos en el trabajo inicial del cálculo diferencial en estudiantes de primer semestre de ingeniería de la U.D.*

** Candidata a Doctora en Educación con énfasis en Educación Matemática, Doctorado Interinstitucional en Educación, Universidades del Valle, Distrital y Pedagógica Nacional. Magister Scientiæ en Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia. Maestría en Docencia, Universidad de La Salle. Docente Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Correo electrónico: gneira@udistrital.edu.co

Introducción

Los problemas de comprensión de los conceptos fundamentales del cálculo que encuentran los estudiantes de educación media y de primeros semestres de universidad se ha evidenciado por numerosas investigaciones en diferentes partes del mundo, (Moru [2008] cita algunos trabajos: Sierpinska, 1987, Cornu, 1991, Monaghan, 1991, Williams, 1991, Cottrill, et al., 1996, Tall, 1996, Kannemeyer, 2003). Investigaciones que han identificado, clasificado y analizado los problemas detectados en dicha comprensión. Incluso se han llevado a cabo reformas curriculares, innovaciones didácticas, propuestas con el uso de la tecnología, programas dirigidos a los profesores y a la enseñanza (Tall, 1996), (Ferrini-Mundy y Gaudard, 1992), Pero a pesar de todos los esfuerzos hechos, la comprensión del cálculo todavía al día de hoy es un problema de la educación matemática.

La evidencia de los problemas detectados es tan fuerte que, ha desencadenado en diferentes partes del mundo reformas e innovaciones curriculares, llegando incluso a cuestionar si se debe enseñar cálculo en la educación media, y si la respuesta es afirmativa, ¿De qué manera?, ¿con qué grado de «rigor»? ¿De manera intuitiva o formal? Basta echar una mirada a los Handbooks, a las investigaciones actuales de Educación Matemática reportadas en las memorias de las últimas RELME[1], CIBEM[2], PME[3], ICME o CIAEM[4] por ejemplo, para darse cuenta de lo actual y presente de las investigaciones didácticas en el campo del cálculo.

Las principales dificultades que encuentran los estudiantes para comprender los conceptos fundamentales del cálculo, Artigue las clasifica en tres grupos: las que tienen que ver con la conceptualización de la noción de límite; las que se refieren a la complejidad de los objetos básicos del cálculo -que dan lugar al estudio de los obstáculos epistemológicos, los que en una investigación sistemática se pretenden estudiar finamente para describirlos como obstáculos o conflictos semióticos, culturales, didácticos,- y las vinculadas con las rupturas necesarias en relación a los modos de pensamiento puramente algebraicos.

El tratamiento de igualdades e inecuaciones, los razonamientos, la alternancia de cuantificadores, las aproximaciones, el simbolismo, el lenguaje, las demostraciones, rompen con las formas de trabajo que se presentan en los cursos anteriores a la iniciación del cálculo escolar. Como Artigue (1995) afirma, generalmente se han concentrado los esfuerzos al interior del cálculo mismo, sin estudiar todo ese proceso que le antecede, y propone centrarse allí, para emprender una investigación que se ubique en la Transición Algebra-Cálculo, postulando que no existe un paso natural del álgebra al cálculo, que no existe un desarrollo continuo y regular del conocimiento, sino que se da un desarrollo caótico: «una ruptura» frente a la cual se debe emprender una investigación, que impacte en una comprensión de los conceptos del análisis.

Desarrollo y referentes teóricos

Según Artigue (1995), mientras la ruptura numérico-algebraico no sólo se ha identificado sino que ha desencadenado numerosas investigaciones que aportan respecto a la comprensión del pensamiento numérico, y algebraico, no ha sucedido algo similar con la «ruptura álgebra-cálculo»: no existe una multiplicidad de investigaciones sistemáticas, ni posturas paradigmáticas sobre lo que distingue esos dos pensamientos, ni cómo tender el puente, alistar el camino para pasar del uno al otro; tampoco se tiene conciencia sobre la importancia de estudiar esa transición como una manera, como una forma de entender, los problemas de comprensión del cálculo. Por tanto, la investigación en el paso, transición o ruptura[5] del álgebra escolar al cálculo diferencial, y las dificultades, conflictos u obstáculos epistemológicos, semióticos, didácticos o culturales que se dan en esa transición, constituyen un punto crucial en las investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje del cálculo en la educación media y en la educación superior.

Del fenómeno didáctico de «algebrización del cálculo» diferencial escolar, ya detectado por Artigue (Gascón, 1998, Contreras 2000), que se manifiesta en un enfoque algebraico y reduccionista del cálculo, emerge un interés urgente y fundamental por la actividad matemática que se realiza en las aulas de clase, por las prácticas escolares, por la dimensión de significación y sentido de estas prácticas, que toca también las dimensiones didáctica y matemática. Detectar, comprender y describir las rupturas o continuidades, los obstáculos, conflictos o facilitadores en el paso del pensamiento algebraico al pensamiento analítico, y por tanto, com-

1 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.

2 Congreso Iberoamericano de Educación Matemática.

3 Psychology of Mathematics Education.

4 Comité Interamericano de Educación Matemática.

5 Si es paso, transición, ruptura, al igual que conflictos u obstáculos –epistemológicos, semióticos, didácticos, culturales– constituirá un desarrollo y un resultado de esta investigación.

prender cómo se establecen esas relaciones de ruptura o de continuidad, de obstáculo o de facilitador, de hecho aportará a la problemática que a diario viven maestros y estudiantes con el cálculo.

La palabra dificultad se asocia a una tradición de la psicología del aprendizaje, pero en este trabajo se quiere abrir su campo semántico, se presentará un panorama desde la investigación en Didáctica de la matemática, y citaré referentes iniciales mínimos que serán objeto de un análisis mayor en la investigación.

Inicia esta sección la clasificación en cinco categorías que plantea Sierpinska (1994) respecto a las dificultades con que tropiezan los estudiantes al acceder al cálculo:

- El rechazo al status operacional que permite el paso al límite,
- El referente al Principio de Continuidad,
- Los obstáculos relacionados con la noción de función,
- Los obstáculos geométricos,
- Los obstáculos lógicos, y los obstáculos simbólicos.

Artigue (1995), por otro lado, resalta que el uso común de la palabra límite evoca las ideas de lo no traspasable, lo no alcanzable o de fin de un proceso, situaciones ya detectadas por Cornu en 1983. Una segunda dificultad reseñada por Artigue es la que tiene que ver con la doble naturaleza, estructural y operacional, que tiene el concepto de límite.

Al preguntarnos: ¿Qué elementos conceptuales trae el estudiante para trabajar las nociones intuitivas del cálculo? o ¿Sobre qué predica el cálculo?, o, ¿Qué requiero para acceder al cálculo? las posibles respuestas involucran entidades como: funciones, números reales, infinito, aproximaciones, continuidad, vecindades, entre otras, conceptos que como tales tienen sus propios problemas de conceptualización y de representación.

Artigue reagrupa las dificultades en tres categorías:

- Las dificultades ligadas a la complejidad matemática de los objetos básicos del cálculo: los números reales, las funciones y las sucesiones, objetos que están en construcción cuando se empieza la enseñanza del cálculo
- Las dificultades ligadas a la conceptualización de la noción de límite, que es la noción central del campo, y a su dominio técnico.
- Las dificultades ligadas a la necesaria ruptura con modos característicos de pensamiento del funcionamiento algebraico.

Con respecto a las funciones, vale la pena anotar aquí las dificultades que tienen los estudiantes para pasar de un registro semiótico de representación a otro, y para articular los distintos registros de representaciones semióticas (Duval 1992, 1998) y reconocer en todos el mismo objeto matemático. Por ejemplo, se rechaza la función real constante de valor 4 si se presenta en la forma $y = 4$, porque lo que existe en el estudiante es una asociación de la función con su fórmula dependiente de x; o de función como variación, en cambio si se presenta gráficamente por la asociación recta= función se presentan menos errores.

En cuanto a los números reales, algunas investigaciones (Artigué, 1995), muestran la tendencia de los estudiantes a asociar el número real con la aproximación que de él nos da la calculadora, y también han detectado situaciones arraigadas en los estudiantes de college y de primeros semestres de universidad, como que entre 3,25 y 3,26 no hay ningún número, o que 3,138 es mayor que 3,4, o que $(3{,}4)^2 = 9{,}16$; situaciones que muestran la complejidad de estos referentes.

Respecto a los límites hay algunas justificaciones interesantes de los estudiantes. Por ejemplo la concepción de que el límite de la sucesión *0.9, 0.99, 0.999,...debe* ser menor que *1* ; que 0.9, 0.99, 0.999 no tiende a 1 pero tiene límite 1 (porque tiende a tener la propiedad de 0.9999 que nunca puede pasar del límite 1).

Se desarrollan algunas consideraciones acerca del «paso», «transición», «ruptura»,… del álgebra al cálculo, teniendo en cuenta que cada una de estas categorías está cargada semántica y teóricamente y ha generado diversas tendencias, se trata de hacer una apertura para la lectura del problema y no cerrar definiendo cada término, de construir un marco explicativo inicial que permita hacer interpretaciones y tomar decisiones para caracterizarlas.

Curricularmente el modo en que ocurre la instrucción en la escolaridad institucional[6] es dos cursos de algebra en 8º y 9º grado y un curso de cálculo en grado 11, es decir se presenta el álgebra como un dominio, unas prácticas, anteriores al cálculo, y no solo anteriores sino como prerequisito para entrar a él posteriormente. En la universidad, en primer semestre de ingeniería, por ejemplo, y en la mayoría de carreras, el estudiante debe tomar un curso de cálculo diferencial para el cual es necesario, aunque no suficiente, un buen dominio del álgebra. Incluso hay universidades que han incluido un curso de Fundamentos

6 Así es en nuestro país y guardando las proporciones la organización curricular es similar en la mayoría de países del mundo, por lo menos en cuanto al orden en los cursos de álgebra y el cálculo.

de matemática o matemáticas básicas, repaso del algebra y de las funciones, para suplir los vacios que puedan presentarse antes de entrar a un curso formal de cálculo. Históricamente también se desarrolló primero el álgebra y posteriormente el cálculo. Así que en este primer acercamiento, paso o transición significa el camino que ha dado tanto la humanidad como la escuela en la adquisición y ordenamiento de ciertos contenidos aceptados universalmente como básicos en la educación, particularmente en el algebra y el cálculo escolar.

En la práctica pedagógica de organización escolar actual, lo que se da es una separación de un año (trigonometría y geometría analítica). De facto se encuentra un 10º grado que configura un elemento o estadio de transición escolar, que no tiene ninguna razón ni matemática ni pedagógica, sino solo de tradición escolar. Nos interesa la transición del algebra al cálculo en el sentido de lo que cambia, con respecto al álgebra, semántica, sintáctica, semióticamente para el estudiante una vez que entra al mundo del cálculo, tanto en grado 11 como en el primer semestre de universidad. Pero no solo cronológicamente, sino también en qué momentos, en qué temáticas, con cuáles situaciones se está presentando ya una irrupción de elementos constitutivos del cálculo.

Se asume como supuesto inicial que hay un paso o transición, y no por ejemplo una ruptura, que sí es un término que instaura una postura radical de entrada, para que la investigación misma arroje más claridad acerca de ese camino, de ese tránsito. Voy a decir paso, ni curricular, ni cognitivo, sino entendiendo que curricularmente se pone primero algebra y después cálculo, que el algebra se considera pre-requisito para el calculo, que para compartir las prácticas del cálculo se requiere en gran medida manejar las del álgebra. Hay un paso que algunos estudiantes lo dan de una vez, otros se devuelven, otros permanecen un poco ambiguos por un tiempo y otros tal vez nunca pasen, pero cualquiera de las situaciones confirma que esta bien llamado también transición. Esa transición puede ser cognitiva, lingüística, curricular, semiótica, pero no se está trabajando ni desde el punto de vista antropológico, ni desde el punto de vista del análisis del discurso.

Tensiones disciplinares y de aprehensión cognitiva

Hay múltiples tensiones entre el análisis real, el cálculo escolar, la geometría escolar, la geometría analítica escolar, el álgebra abstracta, el álgebra de bachillerato, la aritmética de los reales, la aritmética de los racionales, la aritmética de los enteros, la aritmética de los naturales, entre lo discreto y lo continuo (y en la mitad, lo denso), entre lo finito y el infinito actual (y en la mitad, el infinito potencial).

Hay algunos aspectos en los que la notación del cálculo parece la misma del álgebra escolar, pero no lo es, como se ve ante todo por la ausencia de la composición, por el entendimiento del exponente (-1) como recíproco, no como inverso de la función, por el uso del apóstrofe para la derivada, por la manera de entender las igualdades que empiezan por «$y = \ldots$» como funciones, por la yuxtaposición de letras sin indicar multiplicación en los nombres de las funciones (como «lnx»). La idea es documentar que se trata de un registro semiótico diferente para un sistema conceptual diferente.

Tenemos la conjetura de que la notación para la geometría analítica de décimo grado no es la misma que la del álgebra escolar ni la del cálculo. En geometría analítica los términos «no significan nada», solo las igualdades, que llamamos «ecuaciones» significan aunque en ellas no se trata de averiguar una raíz. No importa que sean funcionales o no. No se usa la composición ni la derivada. Podría pues haber otra transición del álgebra escolar a la geometría analítica y otra al cálculo, nos interesa la que va del algebra al calculo, entre otras cosas porque en el cálculo de la universidad, la geometría analítica es una unidad más o una herramienta para las llamadas funciones trascendentes.

La principal operación binaria analítica es la composición de funciones, operación que no figura en el álgebra de bachillerato. Los elementos u objetos del análisis no son los números racionales y reales, sino las funciones reales de valor real. En noveno grado cuándo vieron $x^2 \circ x^3$, y el resultado es $x^5, ó, x^6$? Son pues muy diferentes de los objetos de la aritmética generalizada.

Respecto a la relación continuo-discreto (al interior de la aritmética, del álgebra y del cálculo), en la mitad hay una zona gris: lo denso, o la densidad. En lo discreto están los conjuntos finitos, los números naturales y los enteros; luego se llega a los racionales positivos $Q+$, que son densos, y de allí se llega a los racionales Q. Luego se trata de capturar el continuo (línea, región) a través de lo discreto y lo denso.

Generalmente se viene trabajando en el álgebra de bachillerato con ciertas funciones muy limitadas: la función cuadrado, la función cubo, las funciones lineales y las funciones afines o de gráfica lineal (que se confunden frecuentemente con las lineales). No se consideran las funciones constantes como funciones, sino como constantes. La función idéntica no se utiliza como función, tal vez «porque no hace nada». La *x* se considera como incógnita, como variable, o como indeterminada, pero no como función.

No es conveniente confundir la función, tomada como operación o transformación, que es un objeto activo, con su grafo, que es un objeto pasivo propio de la teoría de conjuntos. Se perdería el aspecto activo de la función y no se podría hablar de la diferencia entre el conjunto de salida y el dominio, ni de la diferencia entre el conjunto de llegada y el recorrido, rango o codominio. No habría diferencia entre función parcial *vs.* función totalmente definida, ni entre función en *vs.* función sobre o sobreyectiva. Menos conveniente todavía es confundir la función con su gráfica cartesiana. La una es un elemento u objeto analítico, y la otra es un elemento u objeto geométrico.

Para entrar en el mundo del cálculo es necesario enriquecer la visión de los estudiantes sobre la noción de igualdad y desarrollar nuevos métodos para probar igualdades. En este punto, es interesante notar que una reconstrucción similar de la noción de igualdad fue puesta en evidencia por la investigación didáctica, en la transición del pensamiento numérico al pensamiento algebraico.

En el álgebra, para demostrar que dos expresiones son iguales, se razona por equivalencia: se transforma la escritura $a(x) = b(x)$ en una sucesión de escrituras $ai(x)=bi(x)$ hasta obtener dos expresiones idénticas. Lo mismo se hace en el tratamiento de las ecuaciones y de las inecuaciones. Mientras que en el cálculo, se hace un encaje con la proposición $\forall \; \varepsilon > 0, la\text{-}b\, /< \varepsilon$, Lo cual ha de llevar a comprender que para demostrar que en la vecindad de un punto a, $f(x) < g(x)$, no hay que resolver la inecuación, sino encontrar un intervalo de centro a donde tal desigualdad se pueda garantizar, mediante aproximaciones y estimaciones. *Se pasa de razonamientos por equivalencias sucesivas a razonamientos por condiciones suficientes.*

La entrada en el mundo del cálculo obliga también a los estudiantes a reconstruir objetos matemáticos ya familiares pero en otros mundos: la noción de tangente nos proporciona un caso prototípico de tal reconstrucción. En la enseñanza bachillerato, los alumnos encuentran primero esta noción en el contexto del círculo. La tangente es un objeto geométrico que posee propiedades específicas: no corta al círculo , lo toca en solo un punto y en el punto de contacto es perpendicular al radio.

Todas estas propiedades son globales y no tienen nada que ver con la idea de dirección común. Además, para ayudar a los alumnos a darse cuenta del carácter abstracto de los objetos geométricos, los profesores subrayan que incluso si perceptivamente el círculo y la tangente parecen coincidir localmente, en realidad tienen solo un punto común. Esta concepción geométrica se puede generalizar aplicándose a otras curvas, por ejemplo parábolas, y conduce a la concepción algebraica de la noción de tangente como recta que tiene una intersección doble con la curva, que resulta operativa con las curvas algebraicas.

Claramente, no hay una filiación directa entre esta tangente y la definida en cálculo, caracterizada por una propiedad local: la recta con que la curva tiende a confundirse localmente (aproximación afín al orden uno) y cuya pendiente está dada por el valor de la derivada de la función asociada.

Dificultades identificadas en el aprendizaje del cálculo

Las investigaciones sobre los errores y dificultades en el campo del pensamiento matemático avanzado no son uniformes en la terminología, ya que muchas veces se utilizan indistintamente las expresiones dificultad y obstáculo. Los estudios que se han consultado están focalizados sobre la detección de obstáculos y dificultades. Se citan algunas dificultades que se reportan bajo distintas nominaciones, según Neira (2012)

A partir de la observación de dos parejas de alumnos tratando de identificar la tangente como límite de una secante variable, Sierpinska (1994) propuso su ya enunciada lista de cinco grupos de obstáculos epistemológicos relativos a la noción de límite, que a continuación desarrollamos un poco más en detalle:

El llamado «horror al infinito», que reagrupa los obstáculos ligados con el rechazo al estatuto de operación matemática para el paso al límite: la transferencia automática de los métodos del álgebra propuestos para manipular magnitudes finitas a las magnitudes infinitas, la transferencia de las propiedades de los términos de una serie convergente a su límite, y finalmente el obstáculo que consiste en asociar el paso al límite con un movimiento físico, con una aproximación.

Los obstáculos ligados al concepto de función: ocultación de la noción de función subyacente, restricción a una sucesión de valores, reducción monótona, no distinción de la noción de límite y de extremo inferior o superior.

Los obstáculos geométricos: la intuición geométrica se convierte en *un obstáculo serio en la formulación de una definición rigurosa, tanto al impedir la determinación de aquello que quiere comprenderse como la diferencia de dos magnitudes, como por un apego de la noción de límite a la noción de extremo de un conjunto*.

- Los obstáculos lógicos: ligados a la eliminación de los cuantificadores o de su orden.
- El obstáculo de símbolo: ligado a la reticencia a introducir un símbolo específico para la operación del paso al límite.

Sierpinska confirma, además, lo que ya había sido señalado por Bachelard: que aquello que está en la base de cualquier clase de obstáculo epistemológico, es su aparición y su resistencia en la historia de los conceptos considerados, así como la observación de concepciones análogas en los alumnos.

Artigue (1995) también resalta que el uso común de la palabra «límite» evoca las ideas de lo no traspasable, lo no alcanzable o de fin de un proceso. Señala también una segunda dificultad que tiene que ver con la doble naturaleza, estructural y operacional, que tiene el concepto de límite, y enfatiza la dificultad proveniente de la necesidad de disociar el objeto límite del proceso que permite construirlo, asociándolo con el obstáculo señalado por Sierpinska en relación con la consideración del infinito. La formalización de la noción de límite es otra dificultad, que consiste en mostrar que en ella se concibe un solo proceso, en tanto los estudiantes parecen ver dos, uno que se efectúa sobre la variable y otro sobre los valores de la función.

Como ya fue reseñado anteriormente, Artigue (1995) reagrupa las dificultades en tres categorías, dando respuesta a la pregunta: ¿Qué elementos conceptuales trae el estudiante para trabajar las nociones intuitivas del cálculo? o ¿qué requiere para acceder al cálculo? Las posibles respuestas (Neira, 2000) involucran entidades como funciones, números reales, infinito, aproximaciones, continuidad, vecindades, entre otras, nociones que como tales tienen sus propios problemas de conceptualización y de representación, los que además están en construcción precisamente en este estadio de desarrollo cognitivo y conceptual, cuando se inicia el trabajo en el cálculo.

Con respecto a las funciones, en el álgebra se manejan muy dependientes de su representación gráfica o tabular, o de los procesos que las engendran, y ahora se deben trabajar como entes conceptuales sobre los cuales se van a aplicar nuevas nociones. El tema de funciones tiene su propio campo de estudio y es él mismo un núcleo de investigación en educación matemática; es, además, el eje central de toda la investigación sobre pensamiento variacional.

Vale la pena recordar aquí las dificultades que tienen los estudiantes para pasar de un registro semiótico de representación a otro, y para articular los distintos registros de representación con sus representaciones semióticas (Duval, 1992, 1998) y reconocer en todas el mismo objeto matemático. Por ejemplo, se rechaza por parte de los estudiantes la función real constante de valor 4 si se presenta en la forma «$y = 4$», porque lo que existe en el estudiante es una asociación de la función con su fórmula dependiente de x o de función como variación; en cambio, si se presenta gráficamente por la asociación «recta = función», se presentan menos errores.

Aquí hay que destacar el doble estatus de los objetos matemáticos: el operacional (dinámico) y el estructural (estático). En la historia de los conceptos, el primer estatus precede al segundo, aunque luego se vuelve un proceso dialéctico, y las investigaciones realizadas muestran que en la comprensión individual sucede lo mismo. A ese salto cualitativo que se refiere al paso de una concepción en un estatus dinámico a un estatus estructural, se le ha denominado «encapsulación» o «reificación». D. Tall ha designado «proceptual» al carácter de las nociones matemáticas que representa a la vez los objetos y los procesos. Aquí se presenta un problema: esa flexibilidad es condición necesaria en la comprensión del cálculo, pero a la vez se evidencia la dificultad que hay para desarrollarla individualmente.

En cuanto a los números reales, ¿será que los estudiantes tienen una clara distinción de los diferentes referentes numéricos? Algunas investigaciones (como la de Artigue, 1995) muestran la tendencia de los estudiantes a asociar el número real con la aproximación que de él nos da la calculadora, por ejemplo las expresiones para π, $\sqrt{2}$... Entonces, en ese estadio, ¿los números decimales son iguales a los números reales? También se han detectado situaciones arraigadas en los estudiantes de «college» o de primeros semestres de universidad en los Estados Unidos, como que entre 3.25 y 3.26 no hay ningún número, o que 3.138 es mayor que 3.4, o que $(3.4)^2$ es igual a 9.16, situaciones que muestran la complejidad de estas simbolizaciones. No es difícil hacer un sondeo entre nuestros estudiantes para confirmar que adolecen de los mismos vacíos conceptuales respecto a estos referentes.

Para abordar el segundo de los problemas enunciados por Artigue, tomaré una idea de David Tall (1996), quien afirma que si bien la noción de función es el núcleo y centro de la matemática moderna, es el concepto de límite el que significa un paso a un plano más avanzado de pensamiento matemático y es el jalonador de procesos de desarrollo del pensamiento: sabemos bien que el concepto de límite no sólo es fundamental en la historia y evolución del cálculo, sino que lo es también en la enseñanza del mismo.

Las dificultades que conlleva el concepto de límite tienen varias connotaciones, entre ellas una de tipo lingüístico, pues en la cotidianidad, dicho término tiene en general significados que no favorecen la idea matemática: es entendido como algo que nunca puede ser alcanzado, el último término de un proceso, etc., nociones que refuerzan concepciones erradas del concepto matemático. El límite aparece en variados contextos matemáticos: de sucesiones, de series, de funciones, en la noción de continuidad, de diferencial, de integral; es pertinente, entonces, diferenciar entre estos tipos de límites, por ejemplo el carácter discreto del límite de una sucesión (a_n) y el carácter continuo del límite de una función $f(x)$, categorías que han de tenerse claras para ganarle a las dificultades inherentes que conlleva el concepto de límite.

Hay algunas justificaciones interesantes de los estudiantes respecto a los límites. Por ejemplo, que el límite de la sucesión 0.9, 0.99, 0.999, debe ser menor que 1; que 0.9, 0.99, 0.999, no tiende a 1 pero tiene límite 1; que 0.999, que es menor que 1, por más nueves que se le agreguen, siempre será estrictamente menor que 1; aceptan que nunca puede pasar de 1 (porque “tiende a tener” la propiedad de los números como 0.9999 que nunca pueden pasar del límite 1). Estas ideas se han catalogado como el *principio de continuidad* (Leibniz) o *generic limit property*, que consiste en creer que cualquier propiedad común a todos los términos de una sucesión también la tiene el límite.

Conclusiones

Los acercamientos descritos anteriormente han de permitir obtener algunos resultados prometedores para una investigación en esta dirección. Consideramos que estos favorecen la discusión y elaboración de propuestas. Hemos encontrado que la detección de dificultades, obstáculos y rupturas, y su clasificación en semióticos, didácticos, epistemológicos, culturales, etc., plantean un gran número de problemas no triviales. Cada concepto del cálculo que se desea enseñar suele apoyarse en nociones más elementales y se resiste al aprendizaje si no se antecede por un sólido entendimiento y articulación de nociones y conceptos previos, lo cual es necesario pero no suficiente: lo evidenciamos todos los días en las aulas de clase, y en los «errores» persistentes en los exámenes y evaluaciones.

Se espera haber señalado varios elementos de análisis en dirección a elaborar reflexiones de orden epistemológico y didáctico en cuanto a comprender, interpretar y quizá aportar en la solución, de una manera más amplia, de las dificultades y obstáculos detectados en la comprensión del cálculo diferencial. El trabajo empírico, la recolección y análisis de datos, confirmarán las bondades y limitaciones de este acercamiento.

Referencias

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., y Gómez, P. (Ed.). (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática.* Bogotá/México: una empresa docente/Grupo Editorial Iberoamérica.

Contreras, A. *et al.* (2000). La enseñanza del análisis matemático en el bachillerato y primer curso de universidad. Una perspectiva desde la teoría de los obstáculos epistemológicos y los actos de comprensión. En N. Climent, L. Contreras y J. Carrillo (Eds.), *Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (p.p. 71-86). Huelva: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM, Actas EMA (Encuentro de Matemáticos Andaluces, Sevilla, p.p. 305-320).

Duval, R. (1992). *Gráficas y ecuaciones. Antología de la Educación Matemática* (Trad. Parra, M., del original en francés: *Graphiques et equations. L’Articulation de deux registres*, 1988. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, pp. 125-139). México: Cinvestav-IPN.

Ferrini-Mundy, J., y Guadard, M. (1992). Secondary school calculus: preparation or pitfall in the study of college calculus. *Journal of Research in Mathematics Education*, *23*(1), 56-71.

Moru, K. (2006). *Epistemological Obstacles in Coming to Understand the Limit Concept at Undergraduate Level: A Case of the National University of Lesotho* (Tesis Doctoral). University of the Western Cape, Bellville, South Africa.

Neira, G. (2012). Del Algebra al Cálculo: ¿Transición o Ruptura? Notas para una reflexión epistemológica y didáctica. En *Pensamiento, Epistemología y Lenguaje Matemático. Libros de los énfasis del Doctorado Interinstitucional en Educación No 2* (pp. 13-42). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Neira, G. (2000). El paso del álgebra al cálculo: punto fundamental para lograr una comprensión significativa en matemáticas. Revista *Ingeniería*, (1), 87-92.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics. Studies in Mathematics Education Series.* London: The Falmer Press.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity and proof. En D. Grouws (Ed.), *Handbook or research on Mathematics teaching and learning* (pp. 495-510). New York: MacMillan.