

Internacionalización del currículo. Una experiencia para el aprendizaje de las funciones exponenciales y logarítmicas

Internationalization of the Curriculum. An Experience for Learning Exponential and Logarithmic Functions

Giovanni Martínez López¹ y Ana Mercedes Márquez Estupiñán²

Para citar este artículo: Martínez López, G. y Márquez Estupiñán, A. M. (2019). Internacionalización del currículo. Una experiencia para el aprendizaje de las funciones exponenciales y logarítmicas. *Revista Obies*, 3, 64-75.

Recibido: 18-junio-2018 / **Aceptado:** 24-mayo-2019

Resumen

Se presenta a continuación una experiencia de enseñanza de funciones exponenciales y logarítmicas como parte del contenido curricular en la asignatura Matemáticas Básicas, con una muestra de 34 estudiantes de segundo semestre de la carrera de Economía de la Universidad Católica de Colombia. Se muestran resultados en términos de las actitudes de los estudiantes hacia la matemática, instrumentos de evaluación aplicados y competencias internacionales adoptando como referente al proyecto Tuning para América Latina.

Palabras clave: internacionalización; funciones exponenciales; logaritmos.

Abstract

The following is an experience of teaching exponential and logarithmic functions as part of the curricular content in the subject Basic Mathematics, with a sample of 34 students in the second semester of the Economics degree at the Catholic University of Colombia. Results are shown in terms of students' attitudes towards mathematics, applied assessment instruments and international competences, adopting the Tuning project for Latin America as a reference.

Keywords: internationalization; exponential functions; logarithms.

Introducción

En un mundo globalmente conectado, en el que se brindan oportunidades para superar las barreras de tiempo y distancia, la internacionalización se ha convertido en un proceso prioritario para las instituciones de educación superior. Justamente este desafío representa oportunidades para que los estudiantes colombianos en formación obtengan, desde sus asignaturas, elementos que los

capaciten para trabajar en grupos multinacionales e interdisciplinarios.

Desde la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) se ha recomendado que las instituciones de educación superior adelanten procesos de internacionalización curricular (Henard, Diamond y Roseveare, 2012) como parte de las acciones más relevantes en la estrategia de internacionalización en casa. Para responder a tal demanda, la Universidad Católica de Colombia

¹ Universidad Católica de Colombia. Correo electrónico: gmartinezl@ucatolica.edu.co

² Universidad Católica de Colombia. Correo electrónico: ammarquez@ucatolica.edu.co

(UCC) ha asumido la estrategia “asuntos globales para el campus” (2017, p.11) para lograr la internacionalización de la universidad; siendo una de las acciones que la compone es la internacionalización del currículo. En el marco de sus lineamientos para la internacionalización, la UCC entiende la del currículo como:

La búsqueda de oportunidades para internacionalizar los planes de estudio y fortalecer las competencias interculturales de los estudiantes, profesores y personal administrativo. Esto se hace a través de la permanente revisión y actualización de los currículos con una perspectiva internacional, la innovación permanente en metodologías de enseñanza, la flexibilidad curricular, la interacción con comunidades internacionales y otros servicios de apoyo que permitan generar un ambiente global en las clases. (2017, p. 16)

El Departamento de Ciencias Básicas, como unidad académica que apoya los procesos de docencia, investigación y extensión en la UCC, ha venido trabajando en cabeza de su coordinación curricular y con el apoyo de su coordinación de alineación e internacionalización en la búsqueda de experiencias exitosas de enseñanza en las áreas de matemática, estadística, física y química. Al respecto Garay, Sánchez-Acero, Torrijos y Martínez (2017) presentaron una primera experiencia exitosa en la asignatura Fundamentos de Matemáticas, ofertada en el programa de Psicología, como resultado de un rastreo que se efectuó para conseguir experiencias que se pudiesen adaptar a las necesidades de disminuir la deserción, aportar novedad en las intervenciones de los docentes y desarrollar algunas de siguientes competencias internacionales propuestas en Tuning (2007):

- La abstracción, análisis y síntesis.
- Identificar, plantear y resolver problemas.
- Comunicación oral y escrita.

La experiencia fue efectuada en las sesiones correspondientes a la enseñanza y aprendizaje de

los sistemas numéricos. No obstante, ¿qué resultados se obtendrían si el objeto de estudio y el programa de destino fuesen distintos?

Metodología

La experiencia que se mostrará en este artículo es una continuación de lo hecho en Fundamentos de Matemáticas, pues sigue su misma metodología de trabajo. No obstante, el programa de destino y el objeto de aprendizaje es diferente: se ha elegido al programa de pregrado en Economía y como objeto de aprendizaje las *funciones exponenciales y logarítmicas*, por tratarse de un tema poco abordado en el contexto de la enseñanza de la matemática a nivel de educación superior y porque es importante en asignaturas como cálculo diferencial e integral, que a su vez son la puerta de acceso para la resolución de problemas ubicados en el marco de la Economía.

Para el momento de la intervención se contó con un grupo de 34 estudiantes de la jornada diurna, dirigidos por la profesora Ana Mercedes Márquez y tuvo lugar durante tres semanas; la planeación se hizo para 10 horas clase (5 sesiones de clase). Al igual que en Garay *et al.* (2017), la forma de organizar cada una de las sesiones siguió el esquema sugerido desde la propuesta didáctica de Cerda, Hawrylak y Villagrá (2014), la cual contemplaba cuatro fases:

- Exploración: el objetivo era caracterizar las condiciones iniciales de aprendizaje al comienzo de la intervención y de cada sesión. Para lo primero, se indagó por la actitud del estudiante hacia la matemática a través de un cuestionario de percepciones, así como de una prueba diagnóstica elaborada al comienzo de la intervención. Para el comienzo de cada sesión hubo una actividad (video o lectura) orientada a obtener información sobre las condiciones iniciales de aprendizaje del tema de la sesión.
- Presentación: se desarrollaron los contenidos programáticos de la sesión de acuerdo con

el orden de la parcelación. Se hicieron clases magistrales y con apoyo de Geogebra.

- Valoración cognitiva: se desarrollaron diferentes actividades de evaluación; debates en clase, realización de ejercicios con ayuda de Geogebra, pruebas individuales o grupales y trabajos en clase.
- Proyección: actividades para el trabajo independiente haciendo énfasis en la búsqueda y resolución de problemas.

Cada una de las sesiones se muestra a continuación, en la [tabla 1](#).

Para caracterizar las condiciones iniciales de aprendizaje al comienzo de la intervención se aplicaron dos instrumentos: el primero tenía por objetivo describir las percepciones de los estudiantes hacia la matemática y se utilizó el instrumento usado por Cerda *et al.* (2010) para determinarlas, fue aplicado de manera virtual y con un horizonte de tiempo de una semana, la previa a la iniciación de la intervención; el segundo fue una prueba de diagnóstico de elaboración propia para determinar el estado inicial de aprendizaje antes de empezar la intervención en el aula.

Posteriormente, se aplicó la intervención en el aula tratando de seguir con el esquema mostrado

Tabla 1. Planeación de las sesiones

Sesión	Exploración	Presentación	Valoración cognitiva	Proyección
1	Prueba de diagnóstico.	Presentación de lectura y video sobre funciones exponenciales.	Actividad de reflexión en torno a lectura y videos.	Tarea para el estudiante: consultar sobre ejemplos donde las funciones exponenciales tengan alguna aplicabilidad para discusión en la próxima clase.
2	Discusión acerca de las situaciones problema consultadas en la sesión 1.	Presentación de video motivacional. Observaciones sobre disposiciones de los estudiantes para la clase. Diferencias entre funciones exponenciales y función potencia a través de gráficas.	Mecanización del tema. Caracterización de las funciones exponenciales de acuerdo con su base. Evaluación individual sobre la función exponencial $y=3^x$.	Tarea para el estudiante: representaciones gráficas con el uso de software. Taller para la próxima clase: transformaciones de la función exponencial.
3	Revisión de las gráficas elaboradas. Presentación de una situación problemática para ser resuelta en el futuro. Presentación de video sobre aplicaciones de logaritmos.	Relación entre la potencia y el logaritmo de una cantidad. Propiedades de logaritmos. Logaritmos especiales (natural y común).	Taller de ejercicios de simplificación de logaritmos. Revisión del trabajo realizado.	Tarea para el estudiante: presentar una situación problema donde se requiera de un logaritmo para su solución.
4	Presentación de situaciones problema por parte de los estudiantes.	Videos sobre funciones exponenciales y logarítmicas. Presentación de la función logaritmo como la inversa de una función exponencial. Gráficas y características.	Taller: comparación entre el logaritmo común y el natural. Evaluación en grupo: descripción de diferencias entre las funciones exponenciales y las funciones logarítmicas. Transformaciones de la función logaritmo común.	Tarea: consultar sobre el proceso de resolución de ecuaciones con logaritmos y ecuaciones exponenciales.
5	Revisión de la actividad solicitada en la sesión 4.	Presentación de videos ecuaciones logarítmicas. Videos sobre interés simple y compuesto.	Ejercicios de mecanización: solución de ecuaciones logarítmicas y exponenciales. Aplicación a resolución de problemas.	Tarea: plantear y resolver un problema que requiera el uso de ecuaciones logarítmicas o exponenciales.

en la tabla 1. Para la recolección de información se tomaron los resultados del cuestionario de percepciones, fotos de los diarios de los estudiantes (portafolios) en momentos específicos y resultados de las actividades de evaluación tanto grupal como individual, así como de las pruebas de diagnóstico y la evaluación final realizada al final del semestre académico.

Resultados

Se presentarán resultados a nivel del cuestionario de actitud, prueba de diagnóstico, análisis de los momentos de evaluación y resultados de la evaluación final.

Cuestionario de percepciones

El instrumento aplicado en Cerda *et al.* (2014) cuenta con 48 afirmaciones en las cuales los estudiantes expresaban en una escala de 1 a 5 qué tanto se identificaban con cada una de ellas (1=en desacuerdo, 2=parcialmente en desacuerdo,

3= opinión neutral, 4= medianamente de acuerdo, 5= de acuerdo). En su artículo, los autores realizaron, entre otras cosas, un análisis descriptivo bajo tres criterios: autoconcepto del estudiante ante su desempeño en matemática, concepción de los aprendizajes de los contenidos de las asignaturas del área de matemática y concepción del trabajo didáctico del profesor. Para efectos de este trabajo se siguieron estos criterios; las tablas 2 y 3 muestran los ítems más significantes (de acuerdo con su media) por cada uno.

En la [tabla 2](#) se puede ver que los encuestados reconocen como algo significativo el obtener respuestas correctas al solucionar problemas y que es necesario disponer de tiempo y esfuerzo para la actividad en matemáticas, lo cual se ratifica con el ítem 17. Por otra parte, hay tendencia a la impulsividad por culminar actividades o tareas de matemáticas, así como cierto temor tanto a las evaluaciones escritas como a las actividades más complejas.

La [tabla 3](#) muestra que los estudiantes perciben utilidad en los conceptos de matemáticas tanto en su formación como profesionales como en la

Tabla 2. Ítems más relevantes del criterio autoconcepto del estudiante ante su desempeño en matemática

Ítem	Distribución porcentual					Estadísticos descriptivos	
	1	2	3	4	5	Media	Var.
1. Experimento impulsividad por terminar una asignación o tarea relacionada con las matemáticas.	11.8 %	5.9 %	23.5 %	47.1 %	11.8 %	3.41	1.34
5. Ante la presencia de una asignación compleja me cuesta demasiado iniciarla.	23.5 %	11.8 %	35.3 %	23.5 %	5.9 %	2.76	1.52
8. Generalmente siento mucho temor al desarrollar actividades de evaluación como las pruebas escritas de matemáticas.	26.5 %	20.6 %	14.7 %	29.4 %	8.8 %	2.74	1.90
11. Si de verdad quisiera e invirtiera tiempo y esfuerzo suficiente, podría alcanzar éxito en las actividades de matemáticas.	11.8 %	5.9 %	8.8 %	17.6 %	55.9 %	4.00	2.00
13. Frente a la actividad e resolver un problema siento que me proporcionará satisfacción personal el obtener una respuesta correcta.	2.9 %	0.0 %	11.8 %	32.4 %	52.9 %	4.32	0.83
17. Para neutralizar el miedo a una prueba lo mejor es abordarlo con la seguridad de ir bien preparado.	2.9 %	0.0 %	26.5 %	26.5 %	44.1 %	4.09	0.99

Tabla 3. Resultados sobre los dos criterios restantes

Criterio	Ítem	Distribución porcentual					Estadísticos descriptivos	
		1	2	3	4	5	Media	Var.
Concepción de los aprendizajes de los contenidos de las asignaturas del área de Matemática.	24. Las matemáticas son muy importantes porque me enseñan a pensar y razonar correctamente.	0.0 %	0.0 %	17.6 %	35.3 %	47.1 %	4.29	0.58
	25. Los contenidos que se imparten en la asignatura de Matemáticas me resultan útiles para aplicarlos en mis actividades laborales y profesionales futuras.	0.0 %	0.0 %	11.8 %	44.1 %	44.1 %	4.32	0.47
	34. En el aula de clase, generalmente muestro disposición para el trabajo en equipo.	2.9 %	2.9 %	20.6 %	47.1 %	26.5 %	3.91	0.87
Concepción del trabajo didáctico del profesor	41. El profesor de las clases de matemática utiliza recursos de aprendizaje diferentes al pizarrón, tales como, laminas, diapositivas, videos, diagramas, talleres, Aula Virtual, etc.	2.9 %	0.0 %	20.6 %	32.4 %	44.1 %	4.15	0.92
	42. El profesor describe las propiedades matemáticas de los problemas a resolver en el aula.	0.0 %	2.9 %	14.7 %	41.2 %	41.2 %	4.21	0.65
	44. La mayor parte de las evaluaciones que se aplican en matemática son de carácter individual.	0.0 %	2.9 %	20.6 %	38.2 %	38.2 %	4.12	0.71

adquisición de razonamiento y pensamiento; adicionalmente, tienen buena disposición hacia el trabajo en equipo. Acerca del profesor destacan la variedad de recursos que utiliza para mostrar los conceptos matemáticos, así como su rigurosidad, pero destacan que la mayor parte de las evaluaciones se realizan en forma individual.

Prueba de diagnóstico

Otro instrumento de diagnóstico consistió en una prueba que pretendía establecer el estado inicial de aprendizaje en los estudiantes del grupo, tomando en cuenta que los estudiantes han tenido alguna exposición al tema en secundaria. Esta

evaluó la habilidad de los estudiantes para simplificar expresiones numéricas con exponentes reales y habilidades en el uso de las funciones exponenciales: cálculo de valores, representaciones gráficas y resolución de problemas. La prueba tuvo siete ítems, todos ellos abiertos; los primeros seis evaluaban aspectos conceptuales mientras que el séptimo fue un problema adaptado de Tan (2012), texto de matemáticas básicas para administración y economía. Para la prueba se indicó que era necesario incluir cada uno de los pasos en los ejercicios algorítmicos y un argumento en el caso de preguntas orientadas a procesos más descriptivos. No se permitió el uso de calculadora ni de material de apoyo.

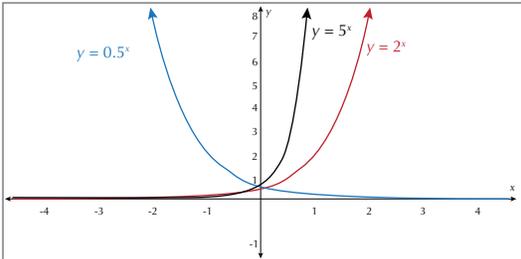
Para el momento de la intervención en el aula algunos no asistieron a la sesión o habían cancelado la asignatura, por tal razón esta prueba contó con 29 estudiantes evaluados y un tiempo de 90 minutos. El análisis de los primeros seis ítems se muestra en la [tabla 4](#).

Además de lo mostrado anteriormente, en el primer ítem se observó una tendencia a confundir la expresión 2^x con $2x$. En el segundo ítem, se evidencia cierto grado de dominio en la simplificación de potencias de una potencia, productos y cocientes de igual base, pero ninguno ha logrado llegar a la simplificación completa, en parte por la presencia de un factor cuya base es un número compuesto. El tercer ítem ratifica una dificultad detectada en el primer ítem: no comprender la notación de función. El manejo de ecuaciones exponenciales es prácticamente nulo si se observan los resultados

del cuarto ítem. El quinto ítem evidencia que los estudiantes tienen problemas para manejar las potencias con base cero.

Mientras que en los primeros cinco ítems se observaron elementos relacionados con habilidades algorítmicas, en el sexto se buscaba identificar habilidades de los estudiantes para la comunicación de sus ideas con respecto a la gráfica de tres funciones exponenciales (todas con base mayor a cero), pues se pedía que fuesen capaces de describir diferencias y similitudes entre ellas. La mayoría identifica similitudes en el punto de corte con el eje vertical, intuyen el comportamiento asintótico de las tres funciones y la concavidad. No obstante, el caso del corte vertical lo expresan como un par ordenado y en las demás no logran expresar sus ideas de forma clara. Solo un grupo muy reducido de estudiantes logró ver diferencias, quizá

Tabla 4. Análisis de los primeros seis ítems de la prueba de diagnóstico

Ítem	Pregunta	Resultados
1	Para la función $f(x) = 2^x$, calcule el valor de f en $x = -1$	29 % no comprendieron la notación de funciones y el 41.3 % reemplazaron sin calcular correctamente.
2	Aplicando las leyes de los exponentes exprese el resultado en forma de potencias y con exponente positivo de $\left(\frac{2^3 3^{-1} 8^2}{3^4 2^{-8} 5^4}\right)^3$	Hay manejo de potencias de una potencia (62.0 %) y algún grado de manejo sobre las propiedades de producto y cociente de potencias de igual base (27 %). No obstante, ninguno logra llegar a respuesta definitiva.
3	Para la función $f(x) = a^x$, calcule $f(0)$	41.3 % del total logró responder correctamente.
4	Sea $f(x) = 2^{2x-1}$. Calcule valor de x para el que $f(x) = 16$.	Se acudió al tanteo para resolver la ecuación y solo un estudiante logró acertar.
5	Aplice propiedades de potencias y complete al frente con los resultados de cada cantidad, si es que existen. En caso de identificar que no existe alguna de las potencias, justifique su respuesta. (a) 1^{20} ; (b) 0^{20} ; (c) 20^0 ; (d) 0^0 ; (e) -2^4 .	El porcentaje de asertividad en las preguntas (a), (c), (e) es del 50 %, pero menos del 20 % en preguntas (b), (d).
6		<p>Describa diferencias y similitudes de las funciones exponenciales que se muestran en la figura.</p> <p>Para los estudiantes fue más fácil identificar similitudes (44.9 %) que diferencias (13.0 %), pero se manifiestan dificultades a la hora de colocar sus observaciones en lenguaje matemático</p>

la más observada es su crecimiento de $y = 0.5^x$ con relación a las otras dos funciones. Un grupo significativo no muestra seguridad por saber si lo que identificaron es una diferencia o una similitud. También, se ratifica la tendencia observada en el ítem 1 de confundir las expresiones exponenciales con las expresiones lineales $0.5x$, $5x$, $2x$.

Finalmente, la última pregunta fue una situación problema como las que usualmente se encuentran en textos de matemáticas básicas acerca de funciones exponenciales. La estructura tuvo cuatro numerales, puestos intencionalmente para realizar algún tipo de clasificación respecto de sus habilidades para resolver problemas: el numeral a) responde a un nivel de interpretación básica para la variable independiente del problema; el b) exige no solo la interpretación sino la habilidad de comunicar asertivamente el significado de la expresión allí enunciada; el (c) exige la interpretación y un ejercicio de cálculo, en el que se esperaba que los estudiantes dejaran expresada la respuesta debido a la ausencia de calculadora en la prueba; y el (d) implicaba el planteamiento de una ecuación exponencial. La [tabla 5](#) muestra el texto de la pregunta y el análisis de los resultados.

Un análisis de los resultados muestra que la gran mayoría de los estudiantes (65.6 %) no superan el umbral del numeral b) y ratifica una dificultad detectada en el cuarto ítem de la prueba. Los numerales a) y b) fueron contestados por la mayoría de los evaluados (60 % y 70 %, respectivamente), pero con fallas en la interpretación y falta de un argumento sólido. Entre tanto, el numeral c) fue contestado por el 45 %, y a pesar de que el 31 % escribió la respuesta dejando el número indicado,

solo un estudiante evidenció en su proceso algún tipo de razonamiento (por ejemplo, el valor de t al reemplazar). Finalmente, solo la tercera parte de los estudiantes intentó resolver el numeral d) y los pocos que lo intentan acudieron de nuevo al tanteo, tal y como ocurrió con el ítem 4.

En resumen, la prueba de diagnóstico dejó ver que:

- Hay algún grado de manejo sobre ciertas propiedades de potenciación.
- Se complica el manejo de casos especiales, sobre todo, potencias con base cero.
- Hay tendencias a confundir la expresión a^x con ax .
- El manejo de lenguaje matemático para expresar ideas es apenas básico.
- Hay dificultades para resolver problemas en contexto que involucran funciones exponenciales.

Momentos de evaluación

A partir de la tabla 1 se observa que cada sesión tuvo una fase de valoración cognitiva en la que se desarrollaron diferentes mecanismos para la evaluación. A continuación, algunos comentarios sobre los resultados observados.

En la sesión 1 se evaluó la participación que cada estudiante tuvo en el aula a partir de las actividades que se hicieron (prueba de diagnóstico, lectura sugerida por el docente y video); esto es, que los estudiantes lograran percibir relación alguna entre la prueba de diagnóstico y el material mostrado en forma audiovisual. Existió un

Tabla 5. Análisis de resultados ítem 7 prueba de diagnóstico

Ítem	Pregunta	Análisis de resultados
7	<p>Algunas empresas requieren cada vez más del GPS para hacer seguimientos a sus vehículos. El número de rastreadores automáticos instalados en los automóviles de flotilla de Estados Unidos se calcula por $N(t) = 0.6e^{0.1t}$, para $0 \leq t \leq 5$, donde N se mide en millones y t se mide en años, con $t = 0$ correspondiente al año 2015. (a) ¿A qué año corresponde el instante $t = 3$?; (b) ¿Qué significa el término $N(2)$?; (c) ¿Cuál será el número de GPS vendidos en 2020?; (d) ¿En qué momento se habrán instalado 900 000 rastreadores?</p>	<p>Responden numeral (a) el 34.4 %, el (b) 27.6 %, el (c) 3.4 %, el (d) 3.4 %</p>

consenso general sobre la importancia de las funciones exponenciales y logarítmicas, así como de las ecuaciones exponenciales y logarítmicas; pero también que les resultaría interesante profundizar sobre estos temas, dada la preocupación percibida a partir de la prueba de diagnóstico.

Para la sesión 2 la docente pidió a su grupo de estudiantes que tuviese lista alguna aplicación diferente a las mostradas en la sesión 1 con la lectura y el video para que fuese expuesta ante sus compañeros. La tarea fue realizada por la mayoría del grupo (22 de 29 estudiantes), la totalidad de quienes la hicieron prefirió la consulta por internet en vez de usar algún texto guía sugerido en la parcelación. Posteriormente, se presentó el tema en forma magistral para luego dar lugar a dos actividades; la primera, un taller en grupo con el objetivo que el estudiante visualizara semejanzas y diferencias si se cambia la base en las funciones exponenciales (gráfica, dominio y rango); la segunda, un quiz individual posterior al taller, acerca de lo trabajado en la sesión de clase. Cada actividad tuvo un valor de un punto de la nota final de la asignatura.

Respecto del taller en grupo se observó concentración, aclaración de dudas y colaboración, dado que todos los estudiantes hicieron un buen trabajo y entregaron a tiempo. Acerca del quiz individual, el docente planteó que: a) se escribiera una ecuación que defina una función exponencial de base $a > 0$; b) se escribieran tres características de esa función exponencial; y (c) con la función: $y = 3^x$, se elabore una tabla de cinco valores, tabulando números enteros en $[-2,3]$. La totalidad de los participantes logró responder el numeral a) y escribir al menos dos características de las funciones exponenciales, pero el numeral c) fue contestado por las dos terceras partes (19 de 29 estudiantes).

Al final de la sesión la docente asignó una actividad con el apoyo de un programa especializado con el ánimo de profundizar lo visto en clase y las transformaciones (traslación, reflexión sobre los ejes, producto por escalar) de funciones exponenciales que generan otras nuevas. La docente

buscó que se pusieran por escrito las diferencias entre las funciones sin transformación y las ya transformadas. No obstante, los estudiantes tuvieron dificultades para realizar la actividad en el tiempo asignado y fue necesaria la intervención del docente para aclarar dudas, sobre todo acerca de las transformaciones. Adicionalmente, se presentaron dificultades para escribir correctamente las coordenadas de los puntos de corte de las funciones transformadas con los ejes coordenados; y si bien los estudiantes hicieron uso de un programa especializado para mostrar varias funciones exponenciales en una sola ventana graficadora, no evidenciaron que fuesen capaces de distinguir las entre sí, aspecto que corrigió la docente durante la clase. Lo anterior ocasionó que el plan inicial cambiara pues la actividad duró toda la sesión 3, por tal razón, el esquema propuesto en la tabla 1 para cinco sesiones se ejecutó en seis.

En la sesión 4 la docente propuso un problema que sería resuelto en el futuro, lo que originalmente se planeaba para hacer en la sesión 3; esto sirvió como motivación para abordar los logaritmos. Hacia el final de la sesión 4, posterior a la presentación del tema (propiedades de logaritmos) y un taller efectuado en grupos de tres estudiantes, se hizo una evaluación individual por valor de tres puntos en la que 15 de 29 estudiantes lo reprobaron. La figura siguiente muestra algunos de las pruebas presentadas por los estudiantes. En general existió la tendencia de contestar usando calculadora cuando se trataba de logaritmos de números reales, y en el caso de sumas o diferencias de logaritmos con se observaba una tendencia a “factorizar” el logaritmo para reescribirlo como el logaritmo de una sola expresión.

Las sesiones 5 y 6 fueron orientadas hacia el abordaje de las funciones exponenciales, las funciones logarítmicas y la resolución de problemas que las involucraran a ambas, haciendo énfasis en problemas de interés compuesto. Durante la sesión 5, uno de los estudiantes pudo responder al problema planteado por el docente en la sesión 4; no obstante, empezaron a manifestarse

dificultades para resolver ecuaciones exponenciales o logarítmicas, tanto en situaciones en las que no había problemas en contexto como en aquellas donde sí. A pesar que 19 estudiantes atendían las indicaciones de la docente e intentaban participar constantemente, la cantidad restante influyó negativamente en la dinámica de la clase, dejando ver poco interés dentro del aula; llegaban tarde a las sesiones (hubo 9 llegadas tarde en las dos sesiones), abandonaban la clase sin haber terminado, no entregaban las actividades propuestas por la docente en los tiempos propuestos para hacerlo (solo 10 de 29 estudiantes hicieron esta parte del portafolio en forma completa) y se hacía un uso indebido del celular durante la clase.

Finalmente, la docente evaluó, con un quiz individual de tres puntos, la habilidad para resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas, pero 20 estudiantes lo reprobaron. Aunque a este punto los estudiantes lograron en mejor grado un dominio de las propiedades de logaritmos, fallaron al momento de aplicar la función inversa necesaria para empezar a despejar la variable de la ecuación planteada.

Resultados del examen final

El examen final de la asignatura fue una construcción conjunta entre los profesores que la dictaron a lo largo del semestre y versó sobre todo el contenido del curso; dos de sus preguntas implicaban los conceptos abordados en las seis sesiones. La primera fue un problema que le implicaba al estudiante comparar la evolución de un capital invertido con interés simple y con interés compuesto; el estudiante tenía que hacer lo siguiente:

Pregunta 1: un hombre desea obtener un crédito por 40 000 dólares. La entidad le ofrece pagarlos al 9 % en un lapso de 0 a 15 años e intervalos de 5 años.

El ítem solicitaba: a) una tabla de valores comparativa entre el capital acumulado con interés

simple y con interés compuesto; b) una gráfica para cada caso; y c) una descripción verbal orientada a comparar lo observado.

Hubo 12 estudiantes que cumplieron con éxito la parte a); 9 de los estudiantes lograron llenar con éxito la tabla, esto es, con los resultados correctos y evidencias de los cálculos realizados; 3 lograron llenar la tabla correctamente pero no evidenciaron por escrito los cálculos realizados; y 17 lograron obtener algunos resultados. Los 12 estudiantes que realizaron la tabla pudieron hacer sin problemas la parte b). Por otra parte, entre los 17 estudiantes que no lograron hacer la tabla, 3 representaron correctamente la función de interés simple, 6 realizaron intentos de representación gráfica y 8 no lo intentaron.

En lo concerniente a c), 22 estudiantes lograron obtener al menos una conclusión correcta, en algunos casos se obtuvo más de una. En general, el grupo notó que:

- Las gráficas de ambas funciones son crecientes pero el capital acumulado por interés simple es más bajo que en interés compuesto. Para el interés simple la función es lineal, no incrementa con tanta rapidez la tasa de interés.
- El interés compuesto aumenta en forma exponencial y rápidamente. Más beneficio para el banco. Le generan más ganancias al cliente.

La segunda pregunta estuvo orientada al despeje de una variable en una ecuación exponencial con base dos:

Pregunta 2: La ecuación de demanda para un producto es $q = 80 - 2^p$. Resuelva en términos de p , es decir, despeje p .

La ecuación se podía manejar haciendo despeje de la expresión exponencial, lo que implicaba un proceso como el que se hace en una ecuación lineal (sumar -80 a ambos lados de la ecuación y multiplicar por -1) y a continuación aplicar una función logarítmica conveniente. Solamente un estudiante logró resolver la ecuación de forma

correcta, 9 de ellos realizaron primero el despeje de la expresión exponencial pero no aplicaron la función logarítmica, 6 hicieron el intento de aplicar primero algún tipo de logaritmo antes de despejar la expresión exponencial, mientras que 13 no intentaron resolver el ejercicio. Adicionalmente, se replicó un error presentado en la prueba de diagnóstico, lo cual se vio en 8 estudiantes: identificar la expresión 2^p como $2p$.

Competencias internacionales trabajadas

A partir de todo lo mostrado a lo largo de los instrumentos de evaluación y examen final se pudieron identificar tres de las competencias genéricas que se destacan en el documento Tuning (2007): a) la capacidad para identificar y resolver problemas, b) la capacidad para comunicarse en forma oral y escrita y c) la capacidad de abstracción y análisis.

En la competencia a) se propusieron tres momentos para que los estudiantes pensarán o consultaran una aplicación sobre las funciones exponenciales y logarítmicas en las sesiones 1, 3 y 5 (véase columna Proyección de la tabla 1). Por cuestiones ya explicadas sobre el manejo del tiempo, se realizó sin problema la actividad de la sesión 1, la planeada para la tercera sesión se aplazó una y la de la sesión 5 no se alcanzó a ejecutar. Si bien los estudiantes no construyeron como tal una situación problema diferente a la planteada en el texto guía o referencias en internet, el grupo tuvo la posibilidad de visualizar aplicaciones de las funciones exponenciales que no conocían; no solo aplicaciones en economía, también en química, biología o medicina.

Adicionalmente, la docente planteó una situación denominada por ella como *situación para resolver en el futuro*, en la que hacia el final de la sesión 5 uno de los estudiantes logró resolverla y explicarla a sus compañeros.

Con respecto a las competencias b) y c), la docente asignó la misma importancia a las descripciones verbales de los objetos matemáticos de

estudio que a los procesos algorítmicos desprendidos de estos, inclusive desde el mismo momento de la prueba de diagnóstico (véase el ítem 6 de la prueba de diagnóstico). Las sesiones 2 y 4 (véase las columnas presentación y valoración cognitiva de la tabla 1) se destinaron a situaciones en las que el estudiante se veía obligado a realizar descripciones de los objetos matemáticos luego de hacer observaciones entre gráficas de funciones exponenciales con base distinta. Adicional a esto, la segunda pregunta del examen final ha implicado para ellos un ejercicio de comunicación escrita, el cual fue bueno en términos generales (22 de 29 estudiantes lo lograron en forma asertiva).

En resumen, la estrategia diseñada permitió trabajar la mayoría de las dificultades observadas de la prueba de diagnóstico y observar algún grado de avance, sobre todo el manejo de lenguaje matemático para expresar ideas, la tendencia a confundir expresiones lineales con exponenciales (confundir la expresión a^x con ax) y la resolución de problemas que involucraran funciones exponenciales. Aunque a la luz de ciertos ejercicios los estudiantes pudieron ver potencias base cero, no se trató el asunto con profundidad.

Conclusiones y recomendaciones

La posibilidad de trabajar en competencias internacionales genéricas dio la oportunidad de desarrollar habilidades en los estudiantes para comunicar sus ideas sobre objetos matemáticos en forma escrita. Adicionalmente, pensamos que los ejercicios de descripción verbal se constituyen como una oportunidad para que el estudiante aborde un objeto matemático desde un enfoque diferente a los tradicionales (algorítmico, gráfico). A pesar de que las actividades en el aula y el examen final mostraron mejorías en la habilidad para hacer descripciones verbales de objetos matemáticos, aún se presentan falencias en el manejo

de lenguaje propio de la matemática (símbolos y notación matemática).

Por otra parte, se ratificó la tendencia observada en Garay *et al.* (2017) sobre el modo como los estudiantes abordaron situaciones problema; la tendencia a desempeñarse mejor en talleres grupales que de forma individual cuando se intentaba aplicar la metodología de Polya (1973). Adicionalmente, cuando el docente asignaba búsquedas para conseguir problemas de aplicación hubo en los estudiantes una tendencia generalizada a usar internet en lugar de las fuentes bibliográficas. Fue difícil para el grupo construir situaciones problema diferentes a las que se encuentran en la bibliografía generalizada sobre el tema, lo que lleva a pensar que falta más tiempo e instrucción para guiar a los estudiantes en la construcción de situaciones problema. En ese sentido, el Departamento de Ciencias Básicas ha puesto en marcha la metodología de proyectos al interior de sus asignaturas, la cual se espera que ayude a encontrar situaciones más novedosas.

El cuestionario de percepciones dejó ver que los estudiantes son conscientes del tiempo y esfuerzo que deben invertir para aprender matemáticas. No obstante, las últimas dos sesiones estuvieron caracterizadas por un conjunto de actitudes negativas, las cuales van en contravía de lo manifestado por los estudiantes: falta de puntualidad, uso de elementos distractores (celulares o aparatos electrónicos) durante la clase y falta de preparación previa sobre los temas; lo anterior, unido a la dificultad manifestada en la sesión 3, pudo haber incidido en los resultados negativos del segundo ejercicio del examen final. Adicionalmente, retracta la tendencia a evaluar en forma individual; los resultados sobre este punto representan un antecedente que pueden servir como inicio para hacer estudios más profundos sobre las formas de evaluación de los docentes de matemáticas al interior de la institución y pueden contribuir a una reflexión que lleve a transformarlas a favor de los procesos de aprendizaje de los estudiantes.

Agradecimientos

A la comunidad de la Universidad Católica de Colombia y en especial a los estudiantes de la Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas que hicieron parte de esta experiencia. Al Departamento de Ciencias Básicas y su coordinación de internacionalización.

Declaración del conflicto de intereses

Los integrantes investigadores y en sí misma la investigación desarrollada no presentó ningún conflicto de interés durante la realización. De la misma manera, no se presentan dilemas éticos para su ejecución metodológica ni con participantes de la misma.

Referencias

- Cerda, J., Hawrylak, M. y Villagrà, J. (2014). Propuesta didáctica con enfoque constructivista para mejorar el aprendizaje significativo de las matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 38, 33-48.
- Ceri (2011). *Política de Internacionalización e Interinstitucionalización*. Bogotá: Universidad Francisco José de Caldas.
- Garay, F., Sánchez-Acero, F., Torrijos, M. y Martínez, G. (2017). Internacionalización del Currículo: una experiencia exitosa en la asignatura de fundamentos de matemáticas. *Revista del Observatorio de la Internacionalización de la Educación Superior*, 1, 59-65.
- Henard, F., Diamond, L. y Roseveare, D. (2012). *Approaches to internationalization and their implications for strategic management and institutional practice*. Recuperado de <https://www.oecd.org/education/imhe/Approaches%20to%20internationalisation%20-%20final%20-%20web.pdf>

Polya, G. (1973). *How to solve It*. Princeton: Princeton University Press.

Tan, S. (2012). *Matemáticas aplicadas a los negocios, las ciencias sociales y la vida*. México: Cengage Learning.

Tuning Project (2007). *Reflexiones y perspectivas de la educación superior en América Latina. Informe Final 2004-2007*. Bilbao: Universidad de Deusto.

UCC (2017). *Lineamientos para la internacionalización de la Universidad Católica de Colombia*. Bogotá: Universidad Católica de Colombia.

