UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Revista Científica

http://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/revcie/index

CIDC

Artículo de investigación

Solución de la ecuación de hamilton-jacobi para el oscilador de Caldirola-Kanai

Solution Hamilton-Jacobi equation for oscillator Caldirola-Kanai

Equação solução Hamilton- Jacobi para oscilador Caldirola-Kanai

Leonardo Pastrana Arteaga[1]
Francis Segovia-Chaves[2]

Fecha de recepción: julio 2016 **Fecha de aceptación:** noviembre 2016

Para citar este artículo: Pastrana-Arteaga, L., y Segovia-Chaves, F. (2016). Solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi para el oscilador de Caldirola-Kanai. *Revista Científica*, 27, 395-401. **Doi:** 10.14483/udistrital.jour.RC.2016.27.a8

Resumen

El método de Hamilton-Jacobi permite determinar explícitamente la función generadora a partir de la cual es posible deducir una transformación que haga soluble las ecuaciones de Hamilton. Haciendo uso del método de separación de variables se soluciona la ecuación diferencial parcial de primer orden, denominada ecuación de Hamilton-Jacobi. Como caso particular consideramos el oscilador de Caldirola-Kanai (CK), el cual se caracteriza porque la masa presenta una evolución temporal de forma exponencial $m(t) = me^{\lambda t}$. Demostramos que la posición del oscilador CK presenta un decaimiento exponencial en el tiempo semejante al que se obtiene en el oscilador con amortiguamiento subcrítico, donde se refleja la disipación de la energía mecánica total. Encontramos que en el límite en que el factor de amortiguamiento λ es pequeño, el comportamiento es igual al de un oscilador con movimiento armónico simple, donde los efectos de disipación de la energía son despreciables.

Palabras clave: ecuación de Hamilton-Jacobi, oscilador de Caldirola-Kanai, sistemas disipativos.

Abstract

The method allows Hamilton-Jacobi explicitly determine the generating function from which is possible to derive a transformation that makes soluble Hamilton's equations. Using the separation of variables the partial differential equation of the first order called Hamilton-Jacobi equation is solved; as a particular case consider the oscillator Caldirola-Kanai (CK), which is characterized in that the mass presents a temporal evolution exponentially $m(t) = me^{\lambda t}$. We demonstrate that the oscillator CK position presents an exponential decay in time similar to that obtained in the damped sub-critical oscillator, which reflects the dissipation of total mechanical energy. We found that in the limit that the damping factor λ is small, the behavior is the same as an oscillator with simple harmonic motion, where the effects of energy dissipation is negligible.

Keywords: Hamilton-Jacobi equations, Caldirola-Kanai oscillator, dissipative systems.

1. Universidad Surcolombiana, Neiva- Huila. Contacto: smathematical.physics@gmail.com
1. Universidad Surcolombiana, Neiva- Huila. Contacto: francis.segoviac@gmail.com

Resumo
O método permite Hamilton- Jacobi determinar explicitamente a função de geração a partir do qual é possível derivar uma transformação que faz equações de Hamilton solúveis. Usando a separação de variáveis da equação diferencial parcial de primeira ordem chamada equação de Hamilton- Jacobi está resolvido; como um caso particular, considerar o oscilador Caldirola - Kanai (CK) , a qual é caracterizada pelo facto de a massa apresenta uma evolução temporal exponencialmente $m(t) = me^{\lambda t}$. Nós demonstramos que a posição do oscilador CK apresenta um decaimento exponencial de tempo semelhante ao obtido no oscilador sub-crítico, em que o tampão de dissipação de energia mecânica é reflectida global. Descobrimos que no limite do que o factor de amortecimento λ é pequena, o comportamento é o mesmo como um oscilador, com um movimento harmónico simples, em que os efeitos de dissipação de energia é negligenciável .
Palavras chave: equação de Hamilton-Jacobi, Caldirola-Kanai oscilador, sistemas dissipativos.

Introducción

En la investigación de los diversos fenómenos en física debemos hacer uso de modelos con los cuales se facilita la comprensión de manera aproximada de los principios y las leyes que los rigen. En un modelo simplificado no se consideran explícitamente todas las variables del sistema, omitiendo o solo considerando un pequeño número de interacciones. Un ejemplo de ello es la interacción entre partículas que conforman un sistema físico en presencia de un campo de fuerzas conservativas, donde el trabajo total sobre ellas en una trayectoria cerrada es nulo y en cualquier punto de la trayectoria su energía mecánica es constante, es decir, conservativa (Serway, 2009).

En la práctica existe disipación de la energía y las descripciones asociadas a los sistemas conservativos obviamente no reproducen de manera real el comportamiento de multitud de sistemas físicos. En un sistema disipativo el campo de fuerzas efectúa un trabajo total distinto de cero sobre una partícula que realiza un desplazamiento en un camino cerrado. Estas fuerzas disipativas o no conservativas dependen del tiempo o la velocidad y por lo tanto de la trayectoria seguida por la partícula. En este caso, la energía mecánica de la partícula no permanece constante, el trabajo la transforma en otros tipos de energía provocando su disminución (Gantmajer, 1996).

El oscilador de Caldirola y Kanai (CK) se caracteriza por la influencia de fuerzas conservativas y disipativas. Caldirola y Kanai construyeron la función hamiltoniana CK (Caldirola, 1941; Kanai, 1948) a partir del lagrangiano dependiente del tiempo considerado por Bateman (1931). Dicha función hamiltoniana proporciona la ecuación de movimiento que describe el comportamiento de este oscilador con frecuencia constante y una masa variable $m(t)$. La particularidad de este modelo es que la masa del oscilador presenta una evolución temporal de forma exponencial $m(t) = me^{\lambda t}$, mostrando un comportamiento idéntico en las variables de posición y la velocidad con el de un oscilador armónico subcríticamente amortiguado. Un estudio comparativo de este con el modelo de oscilador armónico amortiguado Lane-Emden desde el punto de vista de la mecánica clásica es realizado por Ozeren (2009) y por Aguiar (2013), en ellos el hamiltoniano de CK oscila siempre en torno a un valor medio mientras la energía del sistema va a cero para tiempos asintóticos.

El estudio del hamiltoniano CK se ha extendido hasta el campo de la mecánica cuántica como una descripción alternativa de sistemas disipativos. En el trabajo de Pedrosa (1997) se soluciona la ecuación de Schrödinger usando una función auxiliar de la ecuación de Milney-Pinney, obteniendo la función de onda para un oscilador CK con y sin la presencia de un potencial singular. Roldán presenta el modelo de CK para el oscilador armónico amortiguado haciendo uso de integrales de trayectoria para calcular el propagador, con el cual obtienen la evolución de un estado coherente (2010). Una investigación detallada de dos clases de osciladores armónicos amortiguados dependientes del tiempo incluidos los osciladores CK es realizado en el trabajo de Bessa, donde se analizan las soluciones clásicas para el comportamiento de la posición, velocidad, momentum y diagramas de fase y se obtienen soluciones cuánticas mediante transformaciones unitarias y el método invariante Lewis-Reisenfeld (Bessa, 2012).

Metodología

Haciendo uso del método de Hamilton-Jacobi, calculamos la función principal S del oscilador de Caldirola-Kanai (CK) para así calcular la posición del oscilador en función del tiempo. Emplearemos el método de separación de variables para solucionar la ecuación de movimiento y como caso particular consideramos el límite cuando el parámetro de amortiguamiento del oscilador CK es nulo. A continuación, presentamos los fundamentos físicos del método de Hamilton-Jacobi para luego resolver analíticamente la ecuación de movimiento del oscilador CK.

Método de Hamilton-Jacobi

Este método determina explícitamente la función generadora a partir de la cual es posible deducir una transformación que haga solubles las ecuaciones de Hamilton. El tipo de transformación buscado requiere que todas las nuevas coordenadas de posición y de momento sean constantes. Si existe una función de transformación dada por,

$$S = S(q_1, q_2, \cdots, q_s, q'_1, q'_2, \cdots, q'_N; t) \tag{1}$$

donde S, es la función principal de Hamilton. Al postular,

$$q'_i = cte. = \alpha_i \tag{2}$$

la ecuación (1), se expresa

$$S = S(q_1, q_2, \cdots, q_s, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s; t) \tag{3}$$

Como la acción S es una función de las coordenadas y del tiempo, la derivada parcial respecto al tiempo de esta función está relacionada con la hamiltoniana así (Landau, 1967):

$$H\left(q_1, q_{2,\ldots,} q_s; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \cdots, \frac{\partial S}{\partial q_s}; t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{4}$$

donde las derivadas parciales de S con respecto a las coordenadas, es el momentum

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \tag{5}$$

Sí S es una integral completa de la ecuación de Hamilton Jacobi, las ecuaciones de movimiento o de Hamilton estarán dadas por:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_j} = \beta_j \tag{6}$$

siendo β_j algunas constantes.

La ecuación (4) es diferencial parcial de primer orden denominada ecuación de Hamilton-Jacobi, que es la base de un método general para integrar las ecuaciones de movimiento. Si la hamiltoniana H no depende explícitamente del tiempo, como es el caso de un sistema conservativo, expresamos (4) así:

$$H_0\left(q_1, q_{2,\ldots,} q_s; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \cdots, \frac{\partial S}{\partial q_s}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{7}$$

La acción S en forma separable viene dada por (Landau, 1967; Saletán, 1998),

$$S(q, \alpha, t) = W(q, \alpha) + f(t) \tag{8}$$

donde la función independiente del tiempo $W(q,\alpha)$ es llamada función característica de Hamilton. Al derivar la ecuación (8) respecto a t y teniendo en cuenta (7), obtenemos

$$\frac{\partial S}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial t}=-H_0$$

(9)

El lado izquierdo de la ecuación (9) depende de t, mientras que el lado derecho depende de q. Cada lado puede ser igual a una constante independiente de q y t. Por lo tanto, la derivada $\frac{\partial S}{\partial t}$ en la ecuación de Hamilton Jacobi debe ser una constante,$-\alpha$, es decir,

$$\frac{\partial S}{\partial t}=-\alpha.$$

(10)

Según lo anterior, (8) se escribe

$$S(q,\alpha,t)=W(q,\alpha)-\alpha t$$

(11)

La ecuación de Hamilton-Jacobi para un sistema conservativo (7), toma la forma

$$H_0\left(q,\frac{\partial W}{\partial q}\right)=\alpha.$$

(12)

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en esta sección, a continuación, resolvemos la ecuación de Hamilton-Jacobi por el método de separación de variables para un sistema disipativo como lo es el oscilador CK.

Oscilador de Caldirola-Kanai

Consideremos el lagrangiano,

$$L=L_0(q,\dot{q})e^{\lambda t}$$

(13)

donde L_0 es el lagrangiano del sistema conservativo y la disipación es incorporada a través de λ, que es un factor de amortiguamiento $(\lambda>0)$. Para el oscilador CK, el lagrangiano viene dado por

$$L(q,\dot{q},t)=\frac{1}{2}m\dot{q}^2-\frac{1}{2}mw^2q^2$$

(14)

siendo la masa del oscilador una función exponencial del tiempo, $m(t)=m\,e^{\lambda t}$ y w la frecuencia angular de oscilación. Teniendo en cuenta la ecuación (14), el valor del momentum lineal es,

$$p=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=m\dot{q}e^{\lambda t}.$$

(15)

Al despejar $\dot{q}$ obtenemos,

$$\dot{q}=\frac{p}{m}e^{-\lambda t}$$

(16)

El hamiltoniano $H=p_i\dot{q}_i-L$, para el oscilador CK se encuentra al reemplazar en él las ecuaciones (16) y (14),

$$H=\frac{p^2}{2m}e^{-\lambda t}+\frac{1}{2}mw^2q^2e^{\lambda t},$$

(17)

considerando el siguiente cambio de variable (Jarab'ah, 2013),

$$y=qe^{\lambda t/2}$$

(18)

Sustituimos la ecuación (18) en la expresión del momentum lineal (5), obteniendo

$$p=\frac{\partial S}{\partial q}=\frac{\partial S}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q}=\frac{\partial S}{\partial y}e^{\lambda t/2}$$

(19)

Al reemplazar la ecuación (19) en (17), el hamiltoniano del sistema viene dado ahora de la siguiente forma:

$$H = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}mw^2y^2$$
(20)

En la ecuación de Hamilton-Jacobi (7) reemplazamos el hamiltoniano dado por la ecuación (20); obtenemos así la ecuación de un oscilador armónico simple:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}mw^2y^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$
(21)

Reemplazamos en la ecuación (21), la derivada $\frac{\partial S}{\partial y}$ dada por (11),

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{m}\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + mw^2y^2\right] - \alpha = 0$$
(22)

de donde obtenemos:

$$\frac{\partial W}{\partial y} = \sqrt{m(2\alpha - mw^2y^2)} = mw\sqrt{\frac{2\alpha}{mw^2} - y^2}.$$
(23)

Teniendo en cuenta el anterior resultado en la ecuación (11), se demuestra así que la acción está dada por:

$$S(y,\alpha,t) = mw\int\sqrt{\frac{2\alpha}{mw^2} - y^2}\,dy - \alpha t + D(\alpha)$$
(24)

donde $D(\alpha)$ una constante de integración que puede descartarse sin perder generalidad. Efectuamos la derivada en (6) por medio de (24),

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = -t + \frac{1}{w}\int\frac{dy}{\sqrt{\frac{2\alpha}{mw^2} - y^2}}$$
(25)

Después de efectuar la integración en (25), y teniendo en cuenta el cambio de variable dado por (18), obtenemos la solución para el oscilador CK (Jarab'ah, 2013):

$$q(t) = \sqrt{\frac{2\alpha}{mw^2}}\,e^{-\lambda t/2}\sin[(\beta + t)w]$$
(26)

A continuación, presentamos los resultados obtenidos para $q(t)$ y $p(t)$, haciendo uso del software Mathematica 10.0.

Resultados

En la figura 1 se muestra el comportamiento de la solución del oscilador CK (26), para dos valores diferentes del parámetro de amortiguamiento λ. Se escogen como valores $m = 1\,kg$ y $w = 8\,rad/s$, los resultados obtenidos coinciden con los reportados por Aguiar y Guides (2013).

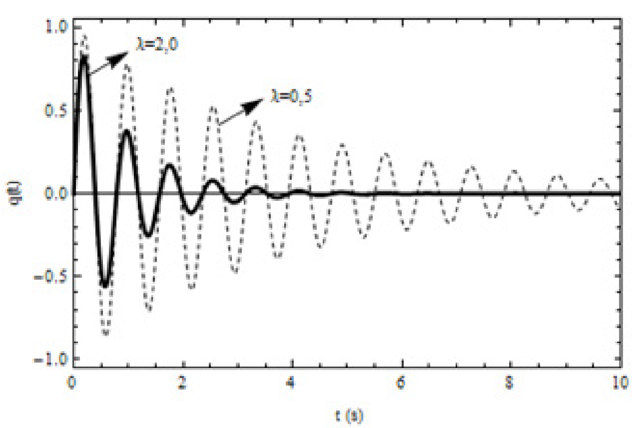

Figura 1. Representación de la solución (26) para $\alpha = 1{,}0$ con parámetro de amortiguamiento λ=2,0 y λ=0,5.
Fuente: Elaboración propia.

En la figura 1 se muestra que a medida que el parámetro de amortiguamiento λ aumenta, el decaimiento de $q(t)$ del oscilador CK es más pronunciado y tiende a cero para tiempos asintóticos. Este comportamiento es idéntico al observado para el caso de amortiguamiento subcrítico de un oscilador amortiguado (French, 1974). Sí $\lambda = 0$, el comportamiento es igual al de un oscilador armónico simple, donde se presenta una variación periódica de $q(t)$ y con el hecho de que la energía mecánica total es constante, como se muestra en la figura 2.

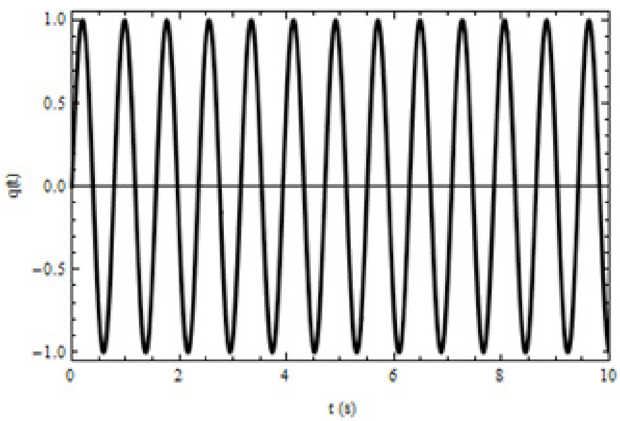

Figura 2. Comportamiento de $q(t)$ dado por (26) cuando λ=0.
Fuente: Elaboración propia.

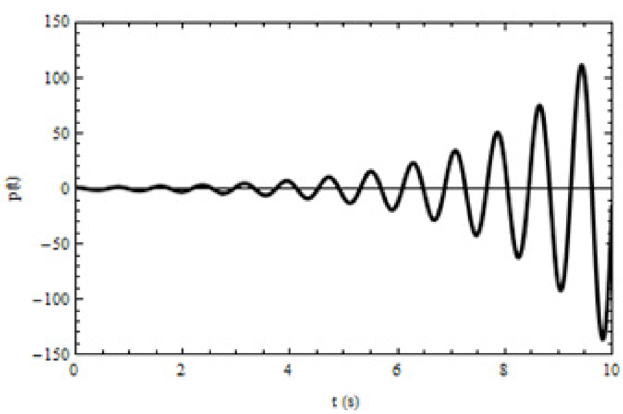

Figura 3. Comportamiento de $p(t)$ dado por (19) cuando λ=1,0.
Fuente: Elaboración propia

En la figura 3 representamos la variación del momentum del oscilador CK en función del tiempo. Se observa que $p(t)$ aumenta al incrementar el tiempo, lo cual está relacionado con el crecimiento exponencial de la masa del oscilador. Igual comportamiento se observa en la figura 4, en ella aumentamos el parámetro de amortiguamiento originando aumento en el momentum del oscilador CK.

Al elegir que el parámetro de amortiguamiento es nulo $\lambda = 0$, el comportamiento periódico es igual al obtenido por un oscilador con movimiento armónico simple, como se observa en la figura 5.

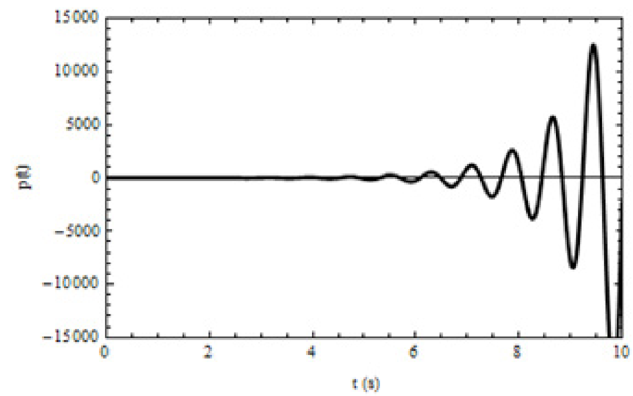

Figura 4. Comportamiento de $p(t)$ dado por (19) cuando λ=2,0.
Fuente: Elaboración propia.

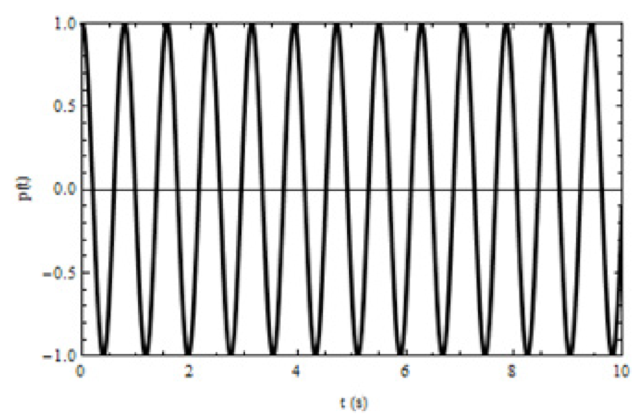

Figura 5. Comportamiento de $p(t)$ dado por (26) cuando λ=0.
Fuente: Elaboración propia.

Conclusiones

Haciendo uso de la teoría de Hamilton-Jacobi mediante el método de separación de variables, solucionamos la ecuación de movimiento para el oscilador CK. Encontramos que el decaimiento exponencial en el tiempo de la posición del oscilador CK aumenta a medida que el parámetro de amortiguamiento se incrementa, lo cual está relacionado con la disipación de la energía mecánica. En el límite cuando $\lambda = 0$, el comportamiento del oscilador CK es igual al de un oscilador en movimiento armónico simple donde la energía es constante. Los resultados obtenidos concuerdan con los reportados por Aguiar y Guides (2013).

Reconocimientos

Los autores agradecen a la Universidad Surcolombiana por la financiación del proyecto del Semillero de Física Matemática titulado Estudio mecanocuántico en sistemas mesoscópicos a partir de la teoría de Schrödinger y de la fenomenología de Ginzburg Landau, 2 de marzo del 2016.

Referencias bibliográficas

Aguiar, V., y Guides, I. (2013). Osciladores harmónicos amortecidos dependentes do tiempo. *Rev. Bras. Ensino Fís.*, 35, 4311-4319.

Bateman, H. (1931). On dissipative systems and related variational principles. *Phys. Rev.*, 38, 815.

Bessa, V. (2012). Osciladores Log-Periódicos e tipo Caldirola-Kanai. Tesis de maestría. Departamento de Física, Universidad Federal do Ceará, Fortaleza, Brasil.

Caldirola, P. (1941). Forze non conservative nella meccanica quantisca. *Nuovo Cimento*, 18, 393.

French, A. P. (1974). *Vibraciones y ondas*. México: Reverte S.A.

Gantmajer, F. (1996). *Mecánica analítica*. Moscú: MIR.

Jarab'ah, O., Nawafleh, K. y Ghassib H. (2013). A Hamilton-Jacobi treatment of dissipative systems. *European scientific journal*, 9, 70-80.

Kanai, E. (1948). On the quantization of the dissipative systems. *Theo. Physics*, 3, 440-442.

Landau, L. y Lifshitz, E. (1967). *Física teórica mecánica*. Barcelona: Reverté.

Ozeren, S. (2009). Investigation of the time evolution of Lane-Emden type Kanai-Caldirola oscillator. *Journal of mathematical physics*, 50, 012902.

Pedrosa, I., Serra, G. y Guedes, I. (1997). Wave functions of a time-dependent harmonic oscillator with and without a singular perturbation. *Phys. Rev. A*, 56, 4300.

Roldan, O. y Vinck-Posada, H. (2010). Discusión sobre la disipación en mecánica cuántica: Modelo de
Caldirola-Kanai. *Revista colombiana de física*, 42, 338-341.

Saletan, J. y José J. (1998). *Classical Dynamics: A contemporary approach*. Cambridge: Cambridge University Press.

Serway, A. (2009). *Física para ciencias e ingeniería*. México D.F.: Cengage Learning.