



## Introducción a las fracciones en textos escolares de educación básica ¿figuras representaciones estáticas o dinámicas?

Introduction to fractions in textbook of Basic Education. Figures Dinamic or static representations?

Introdução às frações em textos escolares da educação básica, figuras estáticas ou dinâmicas?

Gustavo Adolfo Marmolejo Avenia<sup>1</sup>

Lucy Yudy Guzmán<sup>2</sup>

Ana Lucia Insuaty<sup>3</sup>

**Fecha de recepción:** abril 2015

**Fecha de aceptación:** diciembre 2015

**Para citar este artículo:** Marmolejo, G., Yudy, L. y Insuaty, A. (2015). Introducción a las fracciones en textos escolares de educación básica. ¿Figuras representaciones estáticas o dinámicas? *Revista Científica*, 23, 43-56.

**Doi:** [10.14483/udistrital.jour.RC.2015.23.a4](https://doi.org/10.14483/udistrital.jour.RC.2015.23.a4)

### Resumen

La visualización desempeña un papel determinante en la comprensión de los fenómenos que subyacen al aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, sin embargo, no es un asunto de constatación inmediata y simple, por el contrario, es una cuestión de tratamiento de información cuya complejidad debe ser descrita. En este artículo se explora el rol que juega la visualización asociada a las figuras geométricas en la manera en que algunos textos escolares de mayor uso en el sur-occidente colombiano introducen la enseñanza de las fracciones en los primeros ciclos de la educación básica. Se observó en los libros de texto analizados un desequilibrio entre el número de actividades que privilegian roles potentes a nivel visual y aquellas cuya potencia es moderada o inexistente.

**Palabras Clave:** Figuras Geométricas, Fracciones, Textos Escolares, Visualización, Visibilidad.

### Abstract

Visualization plays an important role to understand the phenomena that underlie the learning and teaching of mathematics, however, it is not a matter for immediate and easy verification, on the other hand, it is a matter of information processing that describes complexity. This article explores the role that plays the visualization associated with the geometric shapes on the way in which some textbooks that are most widely used in the South-West of Colombia, are in charge of introducing the teaching of fractions during the first levels of basic education. It was observed in the analyzed textbooks an imbalance between the number of activities that promote visually powerful roles and those which power is controlled or non-existent.

**Keywords:** Display, Fractions, Geometric figures, Textbook, Visibility.

<sup>1</sup>. Universidad de Nariño. Pasto, Colombia. Contacto: [usalgamav@gmail.com](mailto:usalgamav@gmail.com)

<sup>2</sup>. Institución Educativa La Mina. Huila, Colombia. Contacto: [Lucyguzman14@yahoo.es](mailto:Lucyguzman14@yahoo.es)

<sup>3</sup>. Colegio Del Sagrado Corazón de Jesús. Hermanas Bethlemitas. Pasto, Colombia. Contacto: [anavalentina0306@hotmail.com](mailto:anavalentina0306@hotmail.com)

## Resumo

Visualización desempenha um papel fundamental na compreensão dos fenômenos que fundamentam a aprendizagem e ensino de matemática, no entanto, não é uma questão de observação imediata e simples, no entanto, é uma questão de processamento de informações cuja complexidade deve ser descrito. Este artigo descreve o papel desempenhado pela exposição associada às figuras geométricas sobre como alguns livros didáticos mais utilizados no sudoeste da Colômbia introduziu o ensino de frações no primeiro ciclo do ensino básico é explorado. Observou-se em livros de texto analisado um desequilíbrio entre o número de actividades que enfatizam visualmente funções potentes e aqueles cuja energia é moderada ou inexistente.

**Palavras-chave:** Display, Figuras geométricas, Frações, Textbook, Visibilidade.

## Introducción

El uso de los libros de texto es muy generalizado a nivel internacional (Schmidt *et al.*, 1996) pues constituyen una fuente para identificar el contenido cubierto (Pepin, Haggarty y Keynes, 2001; Li, 2000), las formas como este es presentado en el aula (Cobo y Batanero, 2004) y los estilos pedagógicos adoptados por los educadores (Pepin *et al.*, 2001). Además, los libros de texto proveen diferentes lentes para estudiar las relaciones existentes entre el contenido presentado en ellos y sus efectos potenciales sobre los logros matemáticos de los estudiantes (Son, 2005). No es extraño que en la última década la reflexión en torno a los libros de texto sea un asunto de gran interés para el campo de la educación matemática. Sin embargo, es poca la atención que se ha prestado a las actividades y exigencias cognitivas que subyacen a la constitución del contenido matemático. Al contrario, la mayoría de las investigaciones han focalizado su interés en aspectos de naturaleza semiótica, histórica y epistemológica (Marmolejo, 2014).

En relación a las investigaciones cognitivas reportadas resalta el trabajo de Delaney, Charlabous, Hsu, y Mesa (2007), donde se explora las potenciales demandas cognitivas (memorización, procedimientos sin conexiones y procedimientos con conexiones), así como las expectativas de desempeño (respuesta única, explicación, justificación y evaluación) presentes en las tareas y ejemplos propuestos en los manuales escolares. Por su parte, Li (2000) establece diferencias entre los requerimientos cognitivos (práctica procedimental, entendimiento conceptual, resolución de problemas y requerimientos especiales) que aparecen en textos escolares de Estados Unidos con otros países. Igualmente, en esta tendencia se encuentra los trabajos de Cabassut (2006) y Lithner (2004) donde respectivamente analizan el papel de los argumentos de verosimilitud y de necesidad en ejemplos de prueba presentes y los razonamientos presentes en la resolución de ejercicios de cálculo.

El número de estudios que contemplan el rol de la visualización en la forma como los libros promueven el estudio de conceptos matemáticos, cuestión de interés en el artículo, es aún más reducido. En este aspecto, la atención ha recaído sobre cuestiones distintas a las estudiadas en el presente artículo, por ejemplo, Falduto (2007) y Yerushalmy (2005) exploran el papel de la visualización asociada a los gráficos cartesianos y a las tablas; el primero considera las maneras de representar una función y el segundo los fenómenos visuales asociados a los diagramas interactivos de los enunciados de tareas de funciones cuadráticas. Así mismo, estudios como los realizados por Kim (2012) comparan según la precisión, la conectividad, la contextualidad y la concisión las representaciones visuales (gráficas cartesianas, figuras geométricas, fotografías, imágenes, ilustraciones, diagramas y esquemas) de contenidos como pendiente de recta, medida de ángulos y descomposición en factores primos (Kim, 2012). En esta línea de ideas también

destacan los trabajos de Marmolejo y González (2013 a y b) quienes presentan un instrumento metodológico para caracterizar cómo los libros de texto promueven el desarrollo visual a través del estudio del área de superficies planas.

En esta investigación la atención recae en el registro semiótico de las figuras geométricas bi-dimensionales asumidas como soportes intuitivos que generan sentido al aprendizaje de las matemáticas; en palabras de Duval (1999), estas representaciones permiten en la resolución de un problema o en la búsqueda de una demostración la conducta de abducción consistente en delimitar de entrada la clase de hipótesis o alternativas que han de considerarse, hablar del papel heurístico de las figuras alude a que es la conducta de abducción la que guía la deducción. Sin embargo, diferentes investigaciones han puesto en evidencia que hacer de las figuras potentes herramientas heurísticas en la resolución de problemas matemáticos está lejos de ser un asunto obvio y espontáneo (Duval, 1999; Mezquita, 1989; Padilla, 1992; Marmolejo y Vega, 2012). Por el contrario, es necesario discriminar entre las diferentes formas de ver que una figura posibilita aquellas que sean pertinentes y potentes a la resolución de la actividad matemática planteada, es decir, se hace indispensable reconocer, aprovechar o vencer, según sea el caso, la presencia de ciertos factores que hacen posible discriminar sobre una figura las operaciones pertinentes a la resolución del problema planteado.

El objetivo de la investigación es caracterizar el rol que juegan las figuras (en consecuencia la visualización asociada a ellas) en la manera en que los textos escolares introducen las fracciones en la Educación Básica. Entre las razones por las que se decidió esta temática frente a otras presentadas en los textos escolares se encuentran que el estudio de las fracciones constituye un lugar de gran complejidad en el aprendizaje de las matemáticas (Freudenthal, 1983), que juegan un papel determinante en la construcción de otros

objetos matemáticos, como es el caso de los números racionales y los porcentajes, y sobre todo que en su construcción las figuras pueden desempeñar un papel determinante (Marmolejo, 2010).

## Metodología

La investigación se realizó bajo un estudio cualitativo, de carácter exploratorio, descriptivo e interpretativo. Se privilegió un enfoque de análisis vertical de libros de texto (Delaney *et al.*, 2007), el análisis se centró en los capítulos donde explícitamente se introduce el estudio de las fracciones. Fueron analizadas de forma indistinta las actividades propuestas por los textos para ser resueltas de forma autónoma por los estudiantes (ejercicios, trabajos extraescolares, evaluaciones, autoevaluación), las actividades que son desarrolladas por el propio texto (ejemplos) y las definiciones presentes en los capítulos dirigidos a reflexionar sobre las fracciones.

La muestra del estudio estuvo constituida por cuatro textos escolares de educación básica (Tabla 1) de las dos casas editoriales de mayor uso de la ciudad de San Juan de Pasto (Colombia). La selección de los grados se realizó siguiendo las indicaciones de los estándares básicos de competencias colombianos (MEN, 2006) que determinan los grados en que el aprendizaje de las fracciones debe ser promovido (representación de fracciones en escritura aritmética y figural e introducción de propiedades matemáticas básicas: relaciones de equivalencia y orden entre fracciones). Para seleccionar los textos se aplicó una encuesta a 86 profesores de los grados seleccionados en 29 instituciones educativas de la ciudad.

La captación, selección y análisis de la información así como la determinación y manipulación de las variables se realizó de acuerdo con el modelo teórico que propone Duval (2003) en relación con la actividad cognitiva que subyace al aprendizaje de la visualización de las figuras. Fueron cuatro las

**Tabla 1.** Muestra de los textos escolares analizados en la investigación

Autor	Año de Publicación	Código	Texto escolar	Editorial
Padilla, S.	2000	M3	<i>Multiáreas 3. Castellano, Matemáticas, Sociales, Ciencias.</i>	Norma
Padilla, S.	2000	M4	<i>Multiáreas 4. Castellano, Matemáticas, Sociales, Ciencias.</i>	Norma
Palacios, R.	2003	H3	<i>Herramientas Matemáticas 3</i>	Santillana
Joya, O.	2003	H4	<i>Herramientas Matemáticas 4</i>	Santillana

**Fuente:** Elaboración propia.

categorías de análisis que permitieron un registro pormenorizado de los elementos encontrados en los manuales de texto:

- Operaciones visuales: para que una figura cumpla una función heurística en el desarrollo de una actividad, es decir, que guíe la solución a la problemática planteada, es necesario poder discriminar en una configuración de partida las operaciones figurales útiles a la comprensión o desarrollo de una actividad matemática propuesta (Duval, 2003). Las operaciones privilegiadas en los libros de texto analizados fueron fraccionamiento, reconfiguración por ensamblaje de partes —unión de pequeños cuadrados para formar una nueva figura— (Padilla, 1992; p. 89), rotaciones y traslaciones.
- Visibilidad: alude a los elementos que acompañan a la figura o que forman parte de ella y que aumentan o disminuyen la complejidad de reconocer el tipo de operación a aplicar, se les conoce con el nombre de factores de visibilidad y complejidad (Padilla, 1992). Fueron cuatro los factores de visibilidad presentes en los textos escolares estudiados: el fraccionamiento de la figura de partida en partes claves es dado, características del contorno de la figura de partida, ángulo de inclinación y coincidencia entre las líneas a introducir en el fraccionamiento de una figura y sus ejes de simetría.
- Aprehensión: para referirse a las distintas maneras de mirar que permiten las figuras Duval (1995) alude al término aprehensión, señala que para dar cuenta de la manera que una figura juega una función heurística en el desarrollo de una actividad matemática es necesario, en primera instancia, considerar los diferentes tipos de aprehensión que ellas permiten. En los textos analizados las aprehensiones *perceptual* y *perceptual/operatoria* son las promovidas.
- Conversión: refiere a la “transformación de la representación de un objeto, de una situación o de una información dada en un registro, en una representación de este mismo objeto, esta misma situación o de la misma información en otro registro” (Duval, 1999, p. 44). Entre los registros movilizados en las tareas propuestas en los manuales escolares se encuentran las figuras, la escritura aritmética y la lengua natural, el paso de uno a otro establece distintos tipos de conversiones: *figural-escritura aritmética*, *escritura aritmética-figural* y *figural-lengua natural*.

## Referentes teóricos

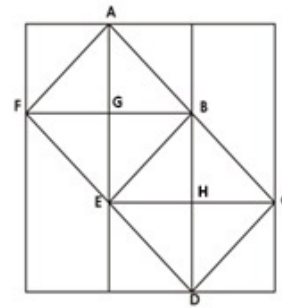
Para describir cuál es el aporte heurístico de una figura en el desarrollo de una actividad matemática se debe distinguir el tipo de aprehensión susceptible de sugerir la solución al problema planteado. Duval (1995) mostró que una figura puede dar lugar a aprehensiones de naturaleza diferente: perceptual (identificación perceptiva espontánea), operatoria (transformación heurística de las figuras), discursiva (reconocimiento de unidades figurales y variabilidad dimensional intrafigurale) y secuencial de formas (relacionada con la construcción de figuras bajo la aplicación de instrumentos geométricos); en algunos casos estas formas de discriminación se subordinan unas a las otras, se relacionan y, en otros, se oponen (Duval, 2003). El interés de la presente investigación recae en las dos primeras aprehensiones, en particular, en las operaciones que les caracterizan y de algunos factores que disminuyen o aumentan, según el caso, la posibilidad de reconocer en una figura el tipo de modificaciones a introducir en el desarrollo de una tarea matemática.

## Aprehensión Perceptiva

En este nivel se reconocen, de manera automática e inmediata, las diferentes unidades figurales que son discernibles en una figura dada. Esta forma de aprehensión está ligada a las leyes gestálticas de organización de la percepción: cuando las unidades figurales de dimensión 2 están separadas, su reconocimiento no tiene ningún tipo de dificultad; pero no sucede lo mismo cuando se encuentran integradas en una configuración. Esto sucede por dos razones diferentes: en primer lugar, algunas unidades figurales de dimensión 2 predominan sobre otras unidades también de dimensión 2, de conformidad con la ley gestáltica de cierre. En segundo lugar, una figura geométrica contiene, con frecuencia, más unidades figurales elementales que las requeridas para construirlas. Este tipo de aprehensión puede

tener un rol facilitador o inhibitor en el desarrollo de una tarea, es el caso del problema presentado abajo (Figura 1).

¿Cuántos y cuáles cuadrados es posible encontrar en la siguiente figura?



**Figura 1.** Aprehensión perceptual de formas. Tomada de Marmolejo (2010), p. 21.

Este problema fue propuesto a un grupo de 30 estudiantes de tres instituciones distintas (para mayores detalles ver en Marmolejo, 2007; pp.144-158), para ellos no representó ninguna dificultad discriminar en la figura los cuadrados pequeños y el que los contiene, caso contrario sucedió con los cuatro restantes. El nivel de complejidad que subyace a la discriminación de los últimos cuadrados en relación a los primeros fue significativamente alto. Más del 70 % de los estudiantes que intentaron resolver la actividad propuesta consideró que en la configuración representada había 6 cuadrados y solo iniciaron la búsqueda de los cuatro restantes en el momento en que el investigador indicó la existencia de un número mayor de cuadrados. El costo temporal que representó la búsqueda y discriminación de los cuatro últimos cuadrados, en relación a los primeros fue bastante alto: se invirtió en ella más del doble del tiempo dedicado a la discriminación de los primeros cuadrados.

La complejidad encontrada por los estudiantes participantes en la investigación se explica de la siguiente manera: la organización perceptual de la figura suscita espontáneamente a ver en ella a

un mosaico de forma cuadrada compuesto por 11 triángulos y dos trapecios independientes entre sí. Quien resuelve el problema planteado debe neutralizar la organización perceptiva que hace predominar los contornos triangulares y trapezoidales sobre los de forma cuadrada, y ver de forma separada unidades figurales de dimensión 1 y dimensión 2 que se recubren parcialmente. En efecto, para desarrollar la situación propuesta se debe discriminar sobre la figura la presencia de 10 configuraciones de forma cuadrada. Al inhibir los segmentos AC, CD, DF, FA y BE en la ilustración 1, se reconoce la presencia de cinco cuadrados pequeños.

Para hallar los cuadrados ABEF y BCDE no basta con inhibir algunos de los segmentos que constituyen la figura de partida, pues uno y otro se encuentra rotado en relación a la posición que habitualmente son presentados en textos y aulas escolares. Discriminar sobre la figura los cuadrados AGCE y FBDH cognitivamente se constituye en un asunto de mayor complejidad, pues parte de las superficies de ambos cuadrados se recubren entre sí, característica que introduce un nivel de complejidad alto en el desarrollo de la tarea propuesta (Padilla, 1992; p. 30); así, es necesario simultáneamente reconocer la superficie del cuadrado BHGE como parte constituyente de los dos cuadrados buscados, posteriormente debe separar un cuadrado del otro y ver en ellos figuras independientes entre sí. Por último, para reconocer el cuadrado de mayor superficie basta con focalizar la atención de forma global en la configuración y reconocer en él la figura que contiene a todas.

## Aprehensión operatoria

Las posibilidades de exploración heurística que permiten las figuras se encuentran íntimamente relacionadas con la gama de modificaciones posibles que se pueden realizar sobre una figura. Son tres las clases de modificaciones a aplicar sobre una figura, las *mereológicas* centradas en las relaciones entre las partes y el todo; las *ópticas*,

cuando la transformación apela a la imagen de la figura; y las modificaciones *posicionales*, cuando la transformación se realiza teniendo en cuenta el cambio de la figura en cuanto a su orientación en el campo en que destaca. Hablar de aprehensión operatoria hace referencia a la transformación de las figuras en otras de forma diferente bajo el objetivo de obtener otras reconfiguraciones posibles. Por cada modificación existen varias operaciones cognitivas que brindan a las figuras su productividad heurística, es el caso de la reconfiguración y la configuración cuando la modificación es mereológicas, la superponibilidad y la anamorfosis cuando es óptica y la rotación y la traslación en el caso de la modificaciones posicionales. La productividad heurística de una figura tiene que ver es a partir de las modificaciones que se producen en una figura por la aplicación de una operación cognitiva determinada que se generan ideas, procesos y posibilidades que permiten reconocer los tratamientos matemáticos que se deben aplicar para resolver la actividad propuesta. Son ellas, las operaciones cognitivas, las que constituyen la productividad heurística de las figuras.

La reconfiguración es la operación de mayor potencia, complejidad e interés en el aprendizaje de la geometría, “es un tratamiento que consiste en la división de una figura en sub-figuras, en su comparación y en su reagrupamiento eventual en una figura de un contorno global diferente” (Duvall, 1999; p.156). Interviene en la productividad heurística de las figuras, aprovechar las potencialidades que brindan las figuras en la resolución de problemas geométricos implica que los alumnos logren realizar la o las operaciones de reconfiguración pertinentes a la resolución del problema, las cuales no logran identificar de manera espontánea.

## Roles de la visualización en los libros de texto

En la manera como los libros de texto analizados en esta investigación introducen la enseñanza de las

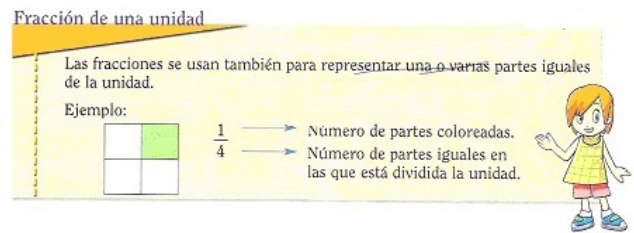
fracciones se observó que las figuras desempeñan dos roles de naturaleza distinta: estático y dinámico intrafigural. El segundo de estos roles se divide a su vez en cuatro sub-roles: simple, operatorio simple, mixto y operatorio compuesto. En la Tabla 2 de forma sintética se representan los roles y sub-roles ya referenciados con los elementos que les caracterizan.

En lo que sigue a través del análisis de algunas actividades extraídas de los libros analizados ilustramos los distintos roles asumidos por las figuras al introducir el estudio de las fracciones y ponemos en evidencia diferencias significativas entre el papel que juegan las figuras, *la complejidad cognitiva* y los tipos de visualización presentes de un rol a otro.

### Estatismo figural

Las primeras actividades a través de las cuales los libros de texto introducen el estudio de las fracciones se caracterizan, por un lado, por la expresa

solicitud de convertir representaciones figurales de fracciones a representaciones en escritura aritmética. Por otro lado, porque las figuras tienden a ser asumidas como representaciones de naturaleza estática, es decir, no se aplica sobre ellas ningún tipo de operación figural y su función es servir de apoyo a procedimientos aritméticos tipo *conteo* (Marmolejo y Vega, 2012).



**Figura 2.** Estatismo figural. Tomada de Herramientas Matemáticas 4. Santillana (Colombia), p. 126.

La actividad mostrada en la Figura 2 es un ejemplo de este tipo de tareas, en ella se encuentra una

**Tabla 2.** Roles figurales y elementos caracterizadores

ROLES DE LA VISUALIZACIÓN EN LA FORMA COMO LOS LIBROS INTRODUCEN EL ESTUDIO DE LAS FRACCIONES					
Categorías	Estático	Dinámico intrafigural			
		Simple	Operatoria simple	Mixto	Operatorio compuesto
Operación visual	Ausente	Fraccionamiento	Reconfiguración por ensamblaje de cuadros ó rotación	Fraccionamiento y reconfiguración por ensamblaje de cuadros	Traslación y reconfiguración por ensamblaje de cuadros
Visibilidad	Fraccionamiento en partes claves dado	Ausente	Fondo cuadrículado y/o Características del contorno	Fondo cuadrículado y/o características del contorno	Fraccionamiento en partes claves dado
Aprehensión	Perceptual	Perceptual-Operatoria			
Coordinación	Figural-escritura aritmética y/o figural-lengua natural	Escritura aritmética-figural y/o figural-lengua natural	Escritura aritmética-figural	Escritura aritmética-figural	Figural-aritmética

**Fuente:** Elaboración propia.

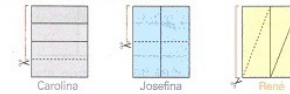
figura acompañada de una serie de consignas escritas en lengua natural y de una representación en escritura aritmética de una fracción. Las consignas guían a quien lee la actividad a asumir en la figura a una unidad, verificar mediante una simple constatación visual que está dividida en cuatro partes iguales (en forma y en cantidad de área) y que una de ellas es designada por el libro mediante la introducción de color. De esta manera, la figura se constituye en un instrumento sobre el cual verificar las indicaciones dadas en lengua natural y/o que permite considerar que las afirmaciones realizadas son coherentes con las representadas en escritura aritmética. La función de la figura en ningún momento es de naturaleza heurística pues no es necesario recurrir a las posibilidades de transformación que ella brinda para seguir o verificar las indicaciones dadas en el texto. Por el contrario, basta con privilegiar una simple aprehensión perceptual en la figura para comprender las indicaciones dadas en consecuencia la exigencia visual que se pone en juego es mínima, la atención recae totalmente en procedimientos aritméticos en ningún caso de naturaleza visual.

### Dinamismo intra-figural

Un segundo tipo de actividades empleadas por los textos escolares se relaciona con la exigencia de reorganizar internamente la figura unidad para representar fracciones dadas en escritura aritmética, esta manera de proceder si bien es un paso inicial y vital para hacer de las figuras representaciones dinámicas no basta para suscitar en ellas dinamismo real pues el contorno global de la figura unidad permanece invariante. En este sentido decimos que el dinamismo alude a transformaciones de naturaleza intra-figural. Para evidenciar los dinamismos intra-figurales promovidos, y la forma en que se suscita su aplicación, presentamos a continuación el análisis de algunas actividades de los libros analizados, en ellas se percibe niveles de complejidad visual de naturaleza distinta:

#### Fracciones

En la clase todos los niños y niñas tenían hojas del mismo tamaño y su profesor les pidió que trazaran líneas de tal manera que la hoja quedara dividida en cuatro partes iguales y que además cortaran una de esas partes. Algunas formas fueron:



- ¿Qué parte de la hoja es cada una de sus partes?
  - ¿Los pedazos tienen diferente forma?
- Recordemos que para representar una o más partes de un todo puede escribirse utilizando fracciones. Así:



En la expresión  $\frac{1}{4}$ , 1 representa la parte tomada y 4 representa la cantidad total de partes iguales en que fue dividida la unidad.

En una fracción el **denominador** indica el número de partes iguales en que fue dividida la unidad, y el **numerador** indica el número de esas

**Figura 3.** Dinamismo Intrafigural simple. Tomada de Multiáreas 4. Castellano, Matemáticas, sociales y ciencias. Norma (Colombia), p. 127

En la consigna de la Figura 3 se hace referencia en lengua natural a la existencia de tres objetos físicos (tres hojas de forma rectangular de igual “tamaño”). Se solicita a tres estudiantes aplicar una descomposición por fraccionamiento en partes “iguales” a cada una de las hojas. No se alude al tipo de forma de las partes a considerar. Figuralmente, son representados tres rectángulos donde la aplicación de colores diferentes sobre la superficie de cada uno resalta que si bien las tres figuras son isométricas entre sí, cada una representa a un objeto distinto (una hoja de papel). Igualmente, se pone en evidencia el tipo de fraccionamiento introducido en cada caso. El papel de la figura en esta actividad apunta a ampliar la información dada en la consigna, pues es a nivel figural que se alude a la forma de las hojas, de las sub-figuras en la cual han sido divididas y a la naturaleza de los trazos introducidos (horizontales, verticales, oblicuos).

El valor visual de actividades de este tipo se relaciona con tres aspectos que constituyen la base para hacer de las figuras representaciones dinámicas. El primero, tiene que ver con la pluralidad de figuras sobre las que ha de centrarse la atención. Quien intenta comprender el desarrollo propuesto

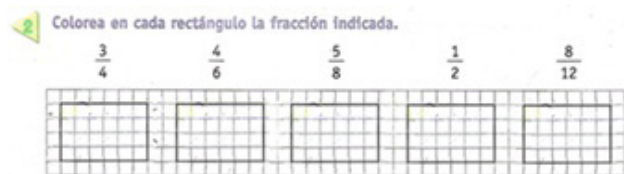


debe considerar dos tipos de representaciones: una figura de partida, es decir, la figura a la que inicialmente se alude en lengua natural y sobre la cual hay que introducir trazos para fraccionarla y figura de llegada, o sea, la figura ya descompuesta. Para que exista dinamismo figural es necesario, en primera instancia, reconocer la presencia de estos dos tipos de figuras, pues es a través de acciones que se aplican sobre la primera que se da lugar a una nueva figura. La segunda diferencia se relaciona con la aplicación de acciones sobre la figura de partida que le transforma en la figura de llegada: introducir trazos sobre una figura en búsqueda de descomponer su superficie. La aplicación de este tipo de acciones es para muchos estudiantes una actividad de gran complejidad, a tal punto que muchos de ellos son incapaces de introducir adecuadamente trazos en la superficie de una figura para descomponerla en sub-figuras de formas previamente asignadas (Marmolejo, 2007).

Un tercer aspecto se relaciona con la manera explícita en que el libro de texto alude a la existencia de la figura de partida y de llegada así como al tipo de operación a aplicar para transformar una en otra. En este sentido es importante señalar que la solicitud expresa y sistemática de las operaciones a aplicar en una figura bajo el objetivo de transformarla se constituye en uno de los primeros y más básicos elementos a considerar en la enseñanza de la visualización (Duval, 1999; p.167). Cuando la organización perceptiva interna de la figura de partida es transformada bajo la introducción de trazos, diremos que la figura es asumida como una representación parcialmente dinámica y que juega un rol dinámico de *naturaleza intra-figural simple*.

En la Figura 4 se evidencia un rol visual que si bien es dinámico intra-figural su naturaleza es distinta al evidenciado en el análisis previamente realizado. Se solicita convertir representaciones de fracciones dadas en escritura aritmética a forma figural. Son cinco las fracciones aludidas ( $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{4}{6}$ ,  $\frac{5}{8}$ ,  $\frac{1}{2}$  y  $\frac{8}{12}$ ), debajo de la representación aritmética de cada una se “coloca” igual número

de figuras de forma rectangular. La presencia de un fondo cuadrículado sobre el cual se encuentran “dadas” las figuras que introduce en ellas un fraccionamiento en partes claves a considerar en el desarrollo de la tarea propuesta y las características del contorno de la figura de partida, se constituyen en factores que guían la manera de proceder de quien resuelve la actividad propuesta. En tal sentido, afirmamos que las figuras en este caso tienen una potencia heurística mayor que la existente en las actividades previas. Por otra parte, si bien en esta actividad se pone en evidencia los dos primeros aspectos de los tres señalados en el análisis de la actividad anterior. En este caso el dinamismo intra-figural no es de naturaleza simple por el contrario su naturaleza es distinta, pues en el proceso de desarrollo se introducen operaciones figurales como lo es la reconfiguración por ensamblaje de partes. A este tipo de rol que juegan las figuras lo designamos como *dinamismo intra-figural operatorio simple*.

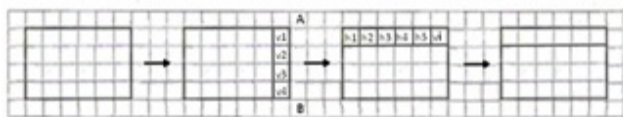


**Figura 4.** Dinamismo Intra-figural operatorio simple. Tomada de Herramientas Matemáticas 3. Norma (Colombia), p. 178.

El análisis que vamos presentar a continuación se centra sobre la primera y la tercera de las partes que componen la actividad ( $\frac{3}{4}$  y  $\frac{5}{8}$ ), ya que el proceso de conversión de escritura aritmética a manera figural a considerar en los otros tres casos se desarrolla de manera similar (Figura 4). A continuación, aludimos a una manera de proceder entre varias posibles a través de la cual la visualización juega un papel protagónico en el desarrollo de la tarea propuesta (Figuras 5 y 6).

La complejidad cognitiva que subyace a representar la fracción  $\frac{3}{4}$  de forma figural recae en la

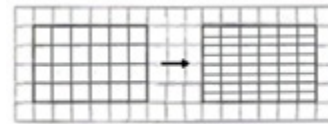
necesidad de cambiar la organización perceptiva interna de la figura unidad: introducir un nuevo tipo de fraccionamiento que divida su superficie en cuatro partes “iguales”. En consecuencia, es necesario centrar la atención, por ejemplo, en los cuatro pequeños cuadrados  $v_1, v_2, v_3, v_4$  (Figura 1) que se encuentran sobrepuestos a lo largo del lado AB, seleccionar uno (digamos  $v_1$ ) e inhibir perceptualmente los restantes. Luego, discriminar la presencia de los cuadrados  $h_1, h_2, h_3, h_4, h_5$  que están representados a la izquierda de  $v_1$  y aplicar sobre ellos y el cuadrado  $v_1$  una reconfiguración por ensamblaje de cuadros (fusionar los seis cuadrados en una única figura de forma rectangular). Posteriormente, centrar la atención sobre los restantes cuadrados  $v_i$  y replicar sobre cada uno de ellos el mismo procedimiento. Así, la organización perceptiva de la figura pasa de privilegiar un fraccionamiento de su superficie en pequeños cuadrados a constituirse en una cuya superficie está descompuesta en cuatro sub-figuras, cada una de forma rectangular (de cantidad de superficie igual a un cuarto de superficie total de la figura).



**Figura 5.** Dinamismo Intra-figural mixto. Procedimiento visual (Primera parte). Proceso visual introducido por los autores.

El proceso a seguir para representar figuralmente la fracción  $5/8$  es similar al expuesto arriba pero en este caso es necesario introducir un procedimiento adicional. Es indispensable introducir en primera instancia un segundo tipo de reorganización por tanto es necesario, primero, introducir cuatro trazos horizontales que descomponga cada uno de las partes cuadradas en que está dividida la figura-unidad en dos rectángulos iguales

(Figura 2). Segundo, centrar la atención en cualquiera de los dos lados verticales que conforman la figura-unidad la presencia de ocho rectángulos y por último, aplicar el mismo procedimiento descrito en el párrafo anterior.

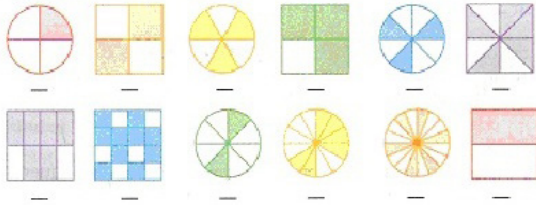


**Figura 6.** Dinamismo Intra-figural mixto. Procedimiento visual (Segunda parte). Proceso visual introducido por los autores.

El dinamismo puesto en evidencia en esta parte de la actividad es al igual que en los casos anteriores de naturaleza intra-figural pero en este caso se produce por la aplicación de una reconfiguración por ensamblaje de cuadros y la introducción de trazos auxiliares en la figura de partida. En estos casos decimos que la figura juega un rol *dinámico intra-figural mixto*. Sin lugar a dudas la exigencia cognitiva que subyace al tipo de visualización aplicado en el desarrollo de esta actividad es de una complejidad mayor que el descrito en los apartados anteriores.

En la siguiente actividad (Figura 7) se pone en juego la relación de equivalencia entre fracciones, se pide representar aritméticamente la fracción representada por cada figura y relacionar las fracciones representadas en la parte de arriba con sus equivalentes en la zona de abajo. Una característica figural del diseño de la actividad tiene que ver con el hecho que la mayoría de las fracciones que son representadas con figuras de forma cuadrada en la parte superior tienen sus equivalentes, en la parte de abajo, representadas con figuras de igual forma, lo mismo sucede con las fracciones representadas en unidades circulares, característica que posibilita que las figuras en el desarrollo de esta tarea se constituyan en un soporte heurístico.

Escribe la fracción que representa el área sombreada en cada caso y une con una línea cada gráfica de la parte superior con su equivalente en la parte inferior.



**Figura 7.** Dinamismo Intra-figural operatorio compuesto. Tomada de Multiáreas 4. Castellano, Matemáticas, sociales y ciencias. Norma (Colombia), p. 131.

Para explicar lo anterior centremos nuestra atención en la figuras de forma cuadrada que representan las fracciones  $2/4$  (parte superior) y su equivalente  $1/2$  (parte inferior). Pasar de una representación figural a una aritmética en este caso no es una exigencia cognitiva de relevancia, es necesario aplicar sobre las dos figuras una aprehensión perceptual que permita discriminar en ellas las partes que le componen y, posteriormente, mediante la aplicación de un conteo uno a uno discriminar el número partes en que se divide la unidad y, entre ellas, el número zonas que se encuentran coloreadas. Hasta el momento la visualización exigida en el desarrollo de la tarea es mínima y la atención recae más en tratamientos aritméticos que de naturaleza figural.

Las figuras juegan como un importante soporte heurístico en el desarrollo de la actividad en el proceso que permite establecer que las fracciones representadas en los dos casos son equivalentes entre sí, es decir, representan la misma parte de la unidad en cada figura. Para ello es necesario, entre diferentes posibilidades, aplicar sobre una de las figuras (por ejemplo, la que representa la fracción  $2/4$ ) una traslación vertical hacia arriba sobre una de las partes coloreadas y posteriormente inhibir el segmentos que atraviesa verticalmente la unidad. Así, la organización perceptiva de la figura que representa la fracción  $2/4$  queda igual a la mostrada en la figura que representa la fracción  $1/2$  (una unidad cuadrada con un segmento horizontal que la divide en dos partes

rectangulares iguales y donde una de ellas se encuentra coloreada).

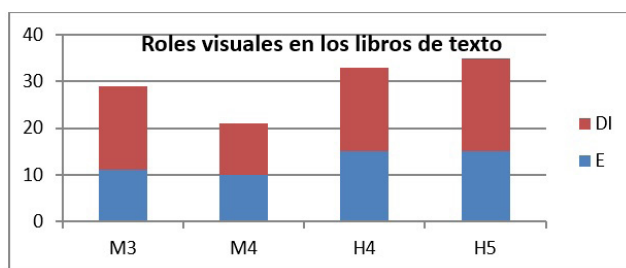
De esta manera aparece a nivel figural una forma de verificar si dos fracciones son equivalentes o no, basta con reorganizar perceptualmente algunas o todas las figuras que representan las fracciones en estudio de tal forma que perceptualmente queden iguales entre sí. Es en un sentido de evidencia que las figuras, en esta actividad, juegan como un soporte heurístico en el desarrollo de la tarea propuesta. El caso de las fracciones representadas con círculos es similar, la diferencia radica en que es a través de rotaciones, no de traslaciones, que se reorganiza el interior de la figura unidad. Cuando el desarrollo de una actividad pone en evidencia un *dinamismo intra-figural* por efecto de la aplicación compuesta de dos o más operaciones decimos que el rol jugado por la figura en cuestión es de naturaleza *operatoria compuesta*.

Pero privilegiar unidades de forma y contorno igual para el desarrollo de tareas de este tipo bien podría suscitar la creencia que es uno de los requisitos para asegurar la equivalencia entre dos o más fracciones. En consecuencia, ocultar el hecho de que es posible representar fracciones equivalentes a partir de representaciones figurales donde las formas de las unidades sean distintas. Lo que a su vez podría llevar a creer que la igualdad a la que se hace referencia en las fracciones alude a cuestiones de forma y contorno, por consiguiente, alejar la atención sobre un aspecto vital al representar fracciones equivalentes por medio de figuras: una fracción en este tipo de tareas expresa la relación existente entre la cantidad de magnitud que posee la figura unidad (sin importar cuál sea su forma o contorno) y la correspondiente a sus partes. Pero, el mismo diseño de la actividad da la posibilidad de reflexionar sobre este aspecto, la fracción  $2/4$  es también equivalente a la fracción  $3/6$  (ambas representadas en la zona superior de la actividad, una con una figura cuadrada, la otra con un círculo), lo mismo sucede con las fracciones  $6/12$  y  $1/2$  representadas abajo.

Entonces, la actividad posibilita reflexionar sobre la opción de establecer relaciones de equivalencia entre fracciones representadas con figuras de forma y contorno distinto. Pero, como lo señalan Marmolejo (2007) es importante resaltar que tanto la intervenciones de los educadores, como las posibilidades de aprendizaje que hayan tenido los estudiantes, juegan un papel decisivo para hacer de esta segunda manera de proceder una realidad, de lo contrario, únicamente se privilegiaría la primera de las formas de proceder antes señaladas, en consecuencia, se asignaría al contorno de las figuras como la más representativa cualidad a tener en cuenta al establecer equivalencias entre fracciones.

## Discusión

Al introducir al estudio de las fracciones los textos analizados promueven actividades que exigen la aplicación de una aprehensión perceptual o su paso a una operatoria donde las transformaciones figurales recaen en las sub-figuras de la figura en estudio (aprehensión operatoria interna). Pero es la segunda de las aprehensiones quien tiende a ser privilegiada. Lo anterior se evidencia en la no existencia de diferencias significativas en relación al rol que la visualización desempeña en las actividades de los textos analizados (Tabla 3), en ellos la mayoría de las actividades suscitan un rol dinámico intrafigural, solo en uno de los libros (M4) la diferencia es relativamente pequeña (Figura 8).



**Figura 8.** Dinamismo Intra-figural (DI) y Estático (E) en las tareas de fracciones de los libros analizados.

Así pues, pareciese ser que la forma como los libros introducen las fracciones es un espacio idóneo para suscitar el desarrollo de habilidades visuales. Sin embargo, es importante considerar que ellos no se consideran actividades donde el contorno global de la figuras sea transformado (aprehensión operatoria global), tampoco donde la aplicación de operaciones como la reconfiguración, la configuración, el re-fraccionamiento, la simetría (entre otras) deben ser contempladas, cuestiones que han de ser consideradas en la reflexión en torno al rol que debe desempeñar la visualización en el estudio de las matemáticas. Son este tipo de actividades quienes representan el mayor nivel de complejidad visual y que generan el mayor grado de productividad heurística en el aprendizaje de la geometría (Padilla, 1992; Mezquita, 1989; Duval, 1999, 2003; Marmolejo y González, 2013).

La ausencia de actividades de dicha naturaleza refuerza e incrementa maneras de ver matemáticamente poco productivas (Marmolejo, 2007, Marmolejo y Vega, 2012) donde las figuras no desempeñan un papel heurístico en la solución de los problemas planteados, y donde los procedimientos aplicados tienden a ser de naturaleza aritmética, en particular relacionados con el conteo uno a uno. En dichos casos, si se recurre a la figura como una herramienta heurística se contempla desde una muy baja racionalidad y se ponen en práctica procedimientos monótonos, extensos y engorrosos. En breve, las posibilidades que brindan los libros de texto para el desarrollo de habilidades visuales acordes a las exigencias propias del estudio de las matemáticas es restringido.

Para finalizar es importante señalar que los resultados de este estudio son de naturaleza parcial, en cuanto que para considerar cuál es el papel que juega la visualización como posible objeto de reflexión en la educación básica, es necesario focalizar la atención no solo en la manera cómo se introducen las fracciones en los libros de texto, sino que igualmente hay que considerar el papel que esta actividad cognitiva juega al ser introducidas las operaciones matemáticas que permite.

## Referencias Bibliográficas

- Cabassut, R. (2006). Argumentation and proof in examples taken from french and german textbooks. *PME*, 30 (1), 230.
- Cobo, B. y Batanero, C. (2004). Significado de la medida en los libros de texto de secundaria. *Enseñanza De las ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, 22 (1), 5-18.
- Delaney, S., Charlambous, Y., Hsu, H. & Mesa, V. (2007). The treatment of addition and subtraction of fractions in cypriot, irish, and taiwanese textbooks, *Proceeding of the 31 Conference of the International Group for the psychology of Mathematics Education*. *PME* 31(2), 193-200.
- Duval, R. (2003). Voir en mathématiques. En E. Filloy. (Ed.), *Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual*. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. México, pp. 41-76.
- Duval, R. (1999). Semiosis y Pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Traducción realizada por Miryam Vega Restrepo. Artes Gráficas Univalle. Santiago de Cali. Colombia.
- Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: kinds of representation and specific processing, en *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education* (Sutherland & Mason Eds), Springer, pp. 142-157.
- Falduto, V. (2008). A content analysis of contemporary college algebra textbooks: applications of visualization strategies. Nova Southeastern University. Florida. United States.
- Fuson, K, Stigler, J. & Bartsch, K. (1988). Grade placement of addition and subtraction topics in Japan, Mainland China, the Soviet Union, Taiwan, and the United States. *Journal for research in mathematics Education*, 19 (5), 449-456.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht. Netherlands: Reidel.
- Kim, R.Y. (2012). The quality of non-textual elements in mathematics textbooks: an exploratory comparison between South Korea and the United States. *ZDM*, 44(2), 175-187.
- Li, Y. (2000). A comparison of problems that follow selected content presentations in American and Chinese mathematics textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education* 31, 234-241.
- Lithner, J. (2004). Mathematical reasoning in calculus textbook exercises. *Journal of Mathematical Behavior* 23 (2004) 405-427.
- Marmolejo, G.A. (2014). *Desarrollo de la visualización a través del área de superficies planas. Análisis de libros de texto colombianos y españoles*. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Salamanca. Salamanca, España.
- Marmolejo, G.A. & González, M.T. (2013a). Función de la visualización en la construcción del área de figuras bidimensionales. Una metodología de análisis y su aplicación a un libro de texto. *Revista Integración*, 31(1), 87-106.
- Marmolejo, G.A. & González, M.T. (2013b). Visualización en el área de regiones poligonales. Una metodología de análisis de textos escolares. *Revista Educación Matemática*, 25(3), 61-102.
- Marmolejo, G. & Vega, M. (2012). La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje. *Educación Matemática*, 24(3), 9-34.
- Marmolejo, G. (2010). La visualización en los primeros ciclos de la educación básica. Posibilidades y complejidad. *Revista Sigma*, 10(2), 10-26.
- Marmolejo, G. (2007). *Algunos tópicos a tener en cuenta en el aprendizaje del registro semiótico de las figuras geométricas: Procesos de visualización y factores de visibilidad*. Tesis de Magister no publicada. Cali: Universidad del valle.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. Guía sobre lo que los estudiantes deben saber*

- y saber hacer con lo que aprenden. Bogotá: Imprenta Nacional de Colombia.
- Mezquita, A. (1989). *L'influence des aspects figuratifs dans l'argumentation des élèves en géométrie: éléments pour une typologie*. These U.L.P: Strasbourg.
- Padilla, V (1992). *L'influence d'une acquisition de traitements purement figuraux pour l'apprentissage des Mathématiques*. Thèse U.L.P. Strasbourg, Francia.
- Pepin, B., Haggarty, L. y Keynes, M. (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: a way to understand teaching and learning culture. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 33(5), 158-175.
- Schmidt, W.H., Jorde, D., Cogan, L.S., Barrier, E., Gonzalo, I., Moser, U., Shimizu, Y., Sawada, T., Valverde, G., Mc Knight, C. Prawat, R., Wiley, D.E., Raizen, S., Britton, E.D. & Wolfe, R.G. (1996). *Characterizing pedagogical flow. An investigation of Mathematics and Science Teaching in Six Countries*. Dordrecht: Kluwers Academic Publishers.
- Son, J.W. (2005). A comparison of how textbooks teach multiplication of fractions and division of fractions in korea and in the u.s. *PME*, 29(4), 200-208.
- Yerushalmy, M. (2005). Functions of interactive visual representations in interactive mathematical textbooks. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 10, 217-249.

