UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Revista Científica

http://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/revcie/index

CIDC

Artículo de investigación

# Membranas vibrantes en varias dimensiones

## Vibrating Membranes in Higher Dimensions

## Membranas Vibrantes em Várias Dimensões

Arturo Sanjuán[1]

**Fecha de recepción:** abril 2015 **Fecha de aceptación:** diciembre 2015

**Para citar este artículo**: Sanjuán, A. (2015). Membranas vibrantes en varias dimensiones. *Revista Científica*, 23, 77-81. **Doi:** 10.14483/udistrital.jour.RC.2015.23.a6

### Resumen

Encontramos existencia y unicidad de soluciones $2\pi$–periódicas en cada variable a problemas de la forma $\partial_t^2 u - \Delta u + mu + f(u) = 0$. Suponemos que $f: H^s \to H^s$ es de clase $C^1$. Empleamos el *principio de contracciones de Banach* y el *método de continuidad* para encontrar soluciones. Se muestran dos resultados. En uno se asume que la no-linealidad $f$ es pequeña y en el otro que $f$ está acotada y es de derivada pequeña.

**Palabras Clave:** Ecuación de onda semilineal, membranas vibrantes, método de continuidad, principio de contracciones.

### Abstract

We found existence and uniqueness of $2\pi$–periódicas solutions to the problem $\partial_t^2 u - \Delta u + mu + f(u) = 0$. We assume that $f: H^s \to H^s$ is of class $C^1$. We use the Contraction Principle and the Continuity Method. Two results are shown. In one hand we assume that the nonlinearity $f$ is small. In the other hand, we assume that $f$ is bounded and with small derivative.

**Keywords:** Semilineal wave equation, vibrating membranes, continuity method, contraction principle.

### Resumo

Encontramos existência e unicidade de soluções $2\pi$-periódicas para os problemas de forma $\partial_t^2 u - \Delta u + mu + f(u) = 0$. Nós assumimos que $f: H^s \to H^s$ é $C^1$. Nós usamos teorema da contrações e método de Continuidade para encontrar soluções.

**Palavras-chave:** Ecuación Semilineal onda, membranas vibrantes, método de continuidade, teorema da contrações.

1. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá, Colombia. Contacto: aasanjuanc@udistrital.edu.co

## Introducción

Denotemos con $T$ al conjunto de los todos los números complejos $z$ de la forma $z = e^{i\theta}$ con $\theta \in \mathbb{R}$. Sea $N \in \mathbb{N}$ con $N \geqslant 2$ y consideremos las funciones $u \in C^{\infty}(T^N)$ tales que

$$\| u \|_s^2 = 2\pi \sum_{k \in Z^N} (1 + k^2)^s \mid \widehat{u_k} \mid^2 < \infty,$$

donde $s \geqslant 1$, $k^2 = \mid k_1 \mid^2 + \cdots + \mid k_N \mid^2$ y $\widehat{u_k}$ es la transformada de Fourier de $u$ evaulada en el multi-índice $k$. Definimos el espacio de Sobolev $H^s$ como el completado de $C^{\infty}(T^N)$ bajo la norma $\|\cdot\|_s$. Es bien sabido que para $s > N/2$ el espacio $H^s$ es un álgebra de Banach (y un espacio de Hilbert) inmerso de manera compacta en $C(T^N)$ (Iorio y Magalhães 2001, p. 356-361).

Si $u \in H^s$ es una función que depende de $\xi = (t, x_1, \dots x_n)$ con $n := N - 1$ y $x_0 = t$, podemos calcular la derivada parcial débil de $u$ con respecto a cada variable con ayuda de la representación en series de Fourier. De este modo, si

$$u(\xi) = \sum_{k \in Z^N} \widehat{u_k} e^{i\xi \cdot k}$$

entonces

$$\partial_{x_j}^2 u(\xi) = \sum_{k \in Z^N} -k_j^2 \widehat{u_k} e^{i\xi \cdot k}$$

para $j = 0, \dots, n$. El término de la derecha de la última ecuación converge, lo que nos permite definir para $u \in H^s$ el operador $\square : H^{s+2} \to H^s$ del siguiente modo:

$$\square u := \partial_t^2 u - \Delta u = \partial_t^2 u - \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}^2 u.$$

El operador $\square$ se conoce como el operador de onda y su espectro en $T^N$ viene dado por

$$\sigma(\square) = \{k^2 - j^2 \in \mathbb{Z} : (k, j) = (k, j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{Z}^N, j^2 = j_1^2 + \cdots + j_n^2\}.$$

De ahora en adelante asumiremos que $m \notin \sigma(\square)$. En ese caso, cálculos directos nos muestran que el operador $(\square + m)^{-1} : H^s \to H^s$ está bien definido y es continuo. Además existe el número $\Gamma_m = min\{k^2 - j + m : (k, j) \in Z^N\}$ y satisface la desigualdad $\| (\square + m)^{-1} \|_{L(H^s)} \Gamma_m \leqslant 1$ donde $\|.\|_{L(H^s)}$ representa la norma en las lineales de $H^s \to H^s$. Más aún, si tomamos $k_m = (k_m, j_m) \in \mathbb{Z}^N$ como la $N$ –tupla en donde se adquiere $\Gamma_m$ y evaluando la función $u_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+k_m^2)^{s/2}} e^{ik_m \cdot \xi}$ en $(\square + m)^{-1}$ se ve que de hecho $\| (\square + m)^{-1} \|_{L(H^s)} \Gamma_m = 1$.

Como antecedentes relevantes en ecuación de onda semilineal en varias dimensiones tenemos los siguientes.

El problema $\square u = f(x, t, u)$ con condiciones de frontera en la variable espacial y de periodicidad en el tiempo ha sido estudiado por Schechter (2001). En este trabajo se asume que

$$\theta_1 \zeta^2 \leqslant \zeta(f(\zeta_1) - f(\zeta_2)) \leqslant \theta_2 \zeta^2$$

con $\zeta = \zeta_1 - \zeta_2$ y $[\theta_1, \theta_2] \subseteq \rho(\square) := \mathbb{R} \setminus \sigma(\square)$. Bajo estas hipótesis el autor ha encontrado existencia de una única solución débil usando el método reducción vía Minimax, cáluclo variacional y análisis convexo.

Las soluciones sobre la esfera $S^n$ de la ecuación $\square u = \mid u \mid^{p-2} u + [(n-1)^2/4]u - f(t, x)$ han sido estudiadas por Kim (2009). Los métodos empleados incluyen optimización vía minimax y Teoría de Morse. El autor encuentra en este trabajo infinitas soluciones al problema.

Finalmente Berti y Bolle (2010) encontraron soluciones periódicas en el tiempo y en cada variable espacial al problema $\square u + mu = \epsilon f(\omega t, x, u)$ bajo las hipótesis de que $f \in C^k$ y los números $\omega$ son no-resonantes. En este trabajo se empleó principalmente el Método de Nash-Moser. También encontraron soluciones al problema impar en donde $f(u) = au^p + r(x, u)$ con $p$ impar.

## Resultados

Los resultados obtenidos son los siguientes:

***Teorema 1.*** *Sea* $f: H^s \to H^s$ *continuamente diferenciable y sea* $\epsilon > 0$*tal que*

$$\epsilon < \frac{\Gamma_m}{2(\| f'(0) \|_{L(H^s)} + 1)}.$$

*Entonces el problema* $\square u + mu + \epsilon f(u) = 0$ *tiene una única solución en* $H^s$*. Además la solución depende continuamente de los parámetros* $m$ *y* $\epsilon$*.*

***Teorema 2.*** *Sea* $f: H^s \to H^s$*es una función continuamente diferenciable, acotada y tal que*

$$\| f'(u) \|_{L(H^s)} < \Gamma_m$$

*uniformemente para* $u \in H^s$*. Entonces el problema* $\square u + mu + f(u) = 0$ *tiene una única solución en* $H^s$*. Además la solución depende continuamente del parámetro* $m$*.*

Evidentemente si $f(0) = 0$ la única solución posible es la trivial.

## Métodos

En vista de que $f$ es de clase $C^1$, existe un $\delta > 0$ tal que $f: B_\delta(0) \to H^s$ es de Lipschitz con constante de Lipschitz $2(\| f'(0) \|_{L(H^s)} + 1)$. La aplicación $-\epsilon(\square + m)^{-1} \circ f$ es una contracción de la bola $B_\delta(0)$ en sí misma. En efecto, sean $u, v \in adhB_{\delta/2}(0)$

$$\begin{aligned} \| -\epsilon(\square + m)^{-1} f(u) + \epsilon(\square + m)^{-1} f(v) \|_s &\leqslant \epsilon \| (\square + m)^{-1} \|_{L(H^s)} \| f(u) - f(v) \|_s \\ &\leqslant \epsilon 2(\| f'(0) \|_{L(H^s)} + 1) \| (\square + m)^{-1} \|_{L(H^s)} \| u - v \|_s \\ &\leqslant \lambda \| u - v \|_s \end{aligned}$$

con $\lambda \in (0,1)$. Por el Principio de Contracciones existe un único $u_0 \in B_{\delta/2}(0)$ tal que $-\epsilon(\square + m)^{-1} f(u_0) = u_0$. Esto demuestra la existencia del Teorema 1.

Las condiciones del Teorema 1 se pueden debilitar un poco y se puede obtener el mismo resultado si la no linealidad $f$ es localmente Lipschitz en cero.

Queremos demostrar ahora que la solución $u_0$ depende continuamente de los parámetros $(\epsilon, m)$. Para esto vamos a probar que para $u \in H^s$, arbitrario pero fijo, la aplicación $(\epsilon, m) \to -\epsilon(\square + m)^{-1} f(u)$ es continua. Una vez demostrado esto, la dependencia continua es una consecuencia inmediata del Principio de Contracciones con Parámetros (Brooks y Schmitt, 2009, p 20).

Es fácil demostrar que si $| l | \leqslant \frac{1}{2}\Gamma_m$, entonces $\frac{1}{|k^2 - j^2 + m + l|} \leqslant \frac{2}{|k^2 - j^2 + m|}$. Usando esto, tenemos la estimación

$$\begin{aligned} \| (\square + m + l)^{-1} f(u) - (\square + m)^{-1} f(u) \|_s &\leq \| [(\square + m + l)^{-1} - (\square + m)^{-1}] f(u) \|_s \\ &\leq | l | \left[ \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \left( \frac{(1 + k^2)^s}{(k^2 - j^2 + m + l)^2 (k^2 - j^2 + m)^2} | \widehat{f(u)}_k |^2 \right) \right]^{1/2} \\ &\leq | l | \frac{2}{\Gamma_m^2} \| f(u) \|_{s.} \end{aligned}$$

Usando la desigualdad anterior podemos estimar la variación conjunta en $\epsilon$ y $m$ del siguiente modo

$$\begin{gathered} \| -(\epsilon + \eta)(\square + m + l)^{-1} f(u) + \epsilon(\square + m)^{-1} f(u) \|_s \\ \leq \epsilon \| [(\square + m + l)^{-1} f(u) + (\square + m)^{-1} f(u)] \|_s + | \eta | \| (\square + m + k)^{-1} f(u) \|_s \\ \leq (\epsilon | l | + | \eta |) \frac{2}{\Gamma_m^2} \| f(u) \|_s \end{gathered}$$

Esto prueba la dependencia continua y concluye la demostración del Teorema 1.

Para la demostración de existencia del Teorema 2 necesitamos trabajo adicional. Definamos $F: [0,1] \times H^s \to H^s$ mediante la fórmula $F(t, u) = u + t(\square + m)^{-1} f(u)$. Es claro que $F$ y $\partial_u F$ existen y son continuas. Más aún $\partial_u F(t, u) = I_{H^s} + t(\square + m)^{-1} \circ f'(u)$. Definamos también el conjunto

$$S = \{t \in [0,1]: \exists u \in H^s talque F(t, u) = 0\}$$

Evidentemente $F(0, u) = 0$ tiene solución en $H^s$. Lo que implica que $S \neq \emptyset$. Más aún, el Teorema 1 garantiza la existencia de $\epsilon_0 > 0$ de tal modo que $0 \leq t < \epsilon_0$, entonces $t \in S$.

El método de continuidad consiste en demostrar que el conjunto $S$ es abierto y cerrado en $[0,1]$. Al ser no-vacío, entonces $S = [0,1]$ en particular $1 \in S$. En otras palabras el problema tiene solución en $H^s$(Kung-Ching, 2005, p. 23-24).

Demostremos primero que $S$ es un conjunto abierto. Dado que

$$\| -t(\square + m)^{-1} \circ f'(u) \|_{L(H^s)} \leq \| (\square + m)^{-1} \|_{L(H^s)} \| f'(u) \|_{L(H^s)} < 1$$

entonces $I_{H^s} + \partial_u F(t,u)$ es invertible (Rudin, 1981, p. 357). A su vez esto implica por el Teorema de Isomorfía de Banach (Caicedo, 2005, p. 273) que $\partial_u F(t,u)^{-1}$ es continua. Por lo tanto, si $t_0 \in S$, se tiene por el Teorema de la Función Implícita que existe $\delta_0 > 0$ tal que $(t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0) \cap [0,1] \subseteq S$. En otras palabras $S$ es abierto.

Veamos ahora que $S$ es cerrado. Para eso probemos primero que para $t \in S$ existe una única solución $u_t \in H^s$ a $F(t,u) = 0$. En efecto, supongamos que para $t \in S$ existen dos soluciones $u_t$ y $v_t$. Entonces

$$\| u_t - v_t \|_s \leq \frac{1}{\Gamma_m} \| f(u_t) - f(v_t) \|_s$$
$$\leq \frac{1}{\Gamma_m} suprem\{\| f'((1-\lambda)u_t + \lambda v_t) \|_{L(H^s)} : \lambda \in [0,1]\} \| u_t - v_t \|_s$$
$$\leq c_0 \| u_t - v_t \|_s$$

Para $c_0 \in (0,1)$. Esto implica la unicidad de $u_t$ dado $t \in S$.

Veamos ahora que $\| \partial_t u_t \|_s \leq C$ para todo $t \in S$ y alguna constante $C > 0$. En efecto

$$\| \partial_t u_t \| = \| (\square + m)^{-1} f(u_t) + t(\square + m)^{-1} f'(u_t)[\partial_t u_t] \|_s$$
$$\leq \Gamma_m^{-1} suprem\{\| f(u) \|_s : u \in H^s\} + c_1 \| \partial_t u_t \|_s$$

donde $c_1 \in (0,1)$. Tomando $C = \Gamma_m^{-1} suprem\{\| f(u) \|_s : u \in H^s\}$ obtenemos la estimación deseada.

Para demostrar que $S$ es cerrado, tomemos una sucesión creciente $t_n \in S$ tal que $t_n \uparrow \tau$. Entonces

$$\| u_{t_n} - u_{t_m} \|_s \leq \int_{t_m}^{t_n} \| \partial_t u_t \|_s \, dt$$
$$\leq C(t_n - t_m) \to 0$$

cuando $n \geq m \to \infty$. Esto prueba que la sucesión $u_{t_n}$ es de Cauchy. Por tanto existe un $w \in H^s$ tal que $u_{t_n} \to w$. Tomando límite, tenemos que $\tau \in S$. Por tanto $S$ es cerrado.

La dependencia continua y la unicidad tienen argumentos similares a los expuestos anteriormente. Esto completa la demostración del Teorema 2.

## Perspectivas

En el caso de una dimensión en la variable espacial se sabe que existe bifurcación en infinito desde todos los valores propios (Sanjuán, 2015). Es posible que cuando $m$ se acerque al espectro del operador de onda, este mismo fenómeno ocurra en varias dimensiones.

El problema en donde el término no-lineal tiene una derivada que atraviesa el espectro sigue siendo un problema abierto. Cuando los periodos son múltiplos irracionales de $\pi$ es un problema completamente abierto en más de una dimensión. Algunos acercamiento en el caso Dirichlet-periódico y con una variable espacial se conocen (McKenna, 1985, Caicedo y Castro, 1997)

## Referencias Bibliográficas

Berti, M. y Bolle, P. (2010). Sobolev Periodic Solutions of Nonlinear Wave Equations in Higher Spatial Dimensions. 195, pp. 609–642.

Brooks, R. M. y Schmitt. K. (2009). *The Contraction Mapping Principle and Some Applications*. Electronic journal of differential equations: Monograph.

Caicedo, J. F. (2005). *Cálculo Avanzado*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Iorio, R. y Magalhaes, V. (2001). *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*. Cambridge Studies in Advanced Mathematicas.

Kim, J. (2009) Infinitely Many Periodic Solutions of Nonlinear Wave Equations on S^n. *Electronic Journal of Differential Equations,* 17, 95-105.

Kung-Ching, C. (2005) *Methods in Nonlinear Analyisis*. Berlin: Springer-Verlag.

Rudin, W. (1981). *Real and Complex Analysis*. Bogotá: McGraw Hill International.

Sanjuán, A. (2015). *Membranas Vibrantes*. (Tesis inédita de Doctorado). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

Shecter, M. (2001). Periodic Solutions of a Semilinear Higher Dimensional Wave Equations. *Chaos*