



Un estudio de la dinámica del péndulo no lineal

A Study of the Dynamics of Nonlinear Pendulum

Um Estudo da Dinâmica Não-Linear Pendulum

Francis Segovia-Chaves¹

Anyery Dussán Penagos²

Fecha de recepción: diciembre 2015

Fecha de aceptación: marzo 2016

Para citar este artículo: Segovia, F. & Dussán A. (2016). Un estudio de la dinámica del péndulo no lineal. *Revista Científica*, 24, 63-72. Doi: [10.14483/udistrital.jour.RC.2016.24.a6](https://doi.org/10.14483/udistrital.jour.RC.2016.24.a6)

Resumen

En este trabajo estudiamos la dinámica del péndulo no lineal, el cual consta de una partícula de masa m unida al extremo de una cuerda inextensible de longitud l . Graficamos tanto la variación de la energía potencial del péndulo en función del ángulo θ como su correspondiente diagrama de fase. Las condiciones que se imponen determinan el comportamiento del péndulo para que exista un movimiento de oscilación y rotación, dependientes con el valor de la energía y el máximo de energía potencial. Como un caso particular, estudiamos el movimiento oscilatorio, para ello resolvemos analíticamente de la ecuación diferencial de segundo orden, tomando como referencia el trabajo de Beléndez *et al.*, generalizamos los resultados cuando el sistema inicialmente presenta una velocidad angular diferente de cero, $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\Big|_{t=0} = \varphi_0$. Las soluciones obtenidas para el desplazamiento angular en función del tiempo se encuentran en términos de las funciones elípticas de Jacobi $sn(u, m)$, graficamos el desplazamiento angular cuando la velocidad angular inicial es igual y diferente de cero. Los resultados obtenidos coinciden con los reportados en Beléndez *et al.* Este problema

puede ser utilizado para introducir conceptos de integrales elípticas y motivar así al estudiante el uso de software computacional para analizar las soluciones obtenidas.

Palabras Clave: Desplazamiento angular, diagramas de fase, ecuaciones de Hamilton, integrales elípticas, periodo.

Abstract

We study the dynamics of nonlinear pendulum, which consists of a particle of mass m attached to the end of a light inextensible string of length l . Therefore we plot the variation of pendulum potential energy function of angle θ , as the corresponding phase diagram. The conditions imposed determine the behavior of the pendulum so that there is an oscillating movement and rotation, dependent on the value the maximum energy and potential energy is determined. As a case study the oscillator movement, analytically solve the differential equation of second order with reference Beléndez *et al.* paper, we get results when the system initially presents a nonzero angular velocity, $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\Big|_{t=0} = \varphi_0$. The solutions obtained for the angular displacement versus time is

¹. Universidad Surcolombiana, Neiva- Huila. Contacto: francis.segoviac@gmail.com

². Universidad Surcolombiana, Neiva- Huila. Contacto: Tati_dussan@hotmail.com

in terms of the Jacobi elliptic functions $sn(u, m)$, we plot the angular displacement when the initial angular velocity is equal and non-zero. The results agree with those reported in Beléndez *et al.* The problem can be used to introduce concepts of elliptic integrals and motivate students to using computer software to analyze the solutions obtained.

Keywords: Angular displacement, phase diagrams, equations of Hamilton, elliptic integrals, period.

Resumo

Neste trabalho estudamos a dinâmica do pêndulo não-linear, que consiste de uma partícula de massa m ligado à extremidade de uma corda não extensível de comprimento l . Portanto, traçar a variação da energia potencial do pêndulo de acordo com o ângulo θ , como seu correspondente diagrama de fases. Com estas condições de ser aplicada sobre o comportamento do pêndulo de modo que há um movimento de oscilação e de rotação na dependência do valor de energia e a energia potencial máxima é determinada. Como estudo de caso especial o movimento oscilatório, pois analiticamente resolver a equação diferencial de segunda ordem com referência Beléndez *et al.* trabalho, generalizar os resultados quando o sistema apresenta inicialmente uma velocidade angular diferente zero, $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{t=0} = \varphi_0$. As soluções obtidas para o deslocamento angular em função do tempo é, em termos de funções elípticas de Jacobi $sn(u, m)$, marcamos o deslocamento angular quando a velocidade angular inicial é igual e diferente de zero. Os resultados concordam com os relatados em Beléndez *et al.* Este problema pode ser utilizada para introduzir conceitos de integrais elípticas e, assim, motivar os alunos usando software de computador para analisar as soluções obtidas.

Palavras chave: Deslocamento angular, diagramas de fase, equações de Hamilton, integrais elípticas, período.

Introducción

Algunos de los movimientos en la naturaleza que tienen la propiedad de repetirse a intervalos regulares de tiempo se denominan periódicos. En estos movimientos una partícula se mueve entre

dos posiciones extremas. Por tanto, el movimiento ocurre en ciclos repetitivos, cada uno de los cuales es exactamente igual a cualquier otro. Ejemplos de este tipo de movimientos abarcan desde la vibración de las cuerdas en una guitarra hasta las vibraciones de los átomos en un sólido (Benson, 1991). Los movimientos periódicos constituyen ejemplos de oscilación donde las cantidades físicas presentan una fluctuación periódica entorno a un valor de equilibrio. Entre los movimientos oscilatorios tenemos el de una masa suspendida de un resorte vertical, donde su movimiento puede describirse en función de una sola coordenada de distancia con el movimiento ascendente y descendente (McKelvey, 1981). Debemos distinguir que en las oscilaciones mecánicas el cuerpo realiza desplazamientos lineales o angulares en medios con propiedades elásticas o deformables; y en las oscilaciones no mecánicas pueden propagarse en el vacío y se presentan variaciones de cantidades físicas como lo son los campos electromagnéticos (Alonso y Finn, 1970). En la naturaleza existen muchos tipos de movimientos oscilatorios, algunos de los cuales son sumamente complejos. Sin embargo, hay un movimiento que se encuentra con mucha frecuencia y que también es muy sencillo: el movimiento armónico simple. Este ocurre siempre que la fuerza resultante que actúa en un objeto tiene dirección opuesta y es directamente proporcional a su desplazamiento, al no considerar fuerzas disipativas su energía mecánica total se conserva. Entre estos tipos de movimientos frecuentemente se estudian los sistemas de péndulos: simple, masa resorte, físico, de torsión entre otros (French, 1974). Las primeras observaciones de las oscilaciones probablemente se deben a Galileo. Al unir una piedra en el extremo final de una cuerda encontró que para una longitud dada el periodo de oscilación era el mismo (propiedad de isocronismo) usase una piedra pesada o una piedra ligera en el experimento. Galileo invirtió el procedimiento de su descubrimiento y sugirió el uso de un péndulo de una longitud dada para medir los latidos del pulso de los pacientes. Este

aparato, conocido como el pulsómetro, se hizo muy popular en la medicina de ese entonces (Gamow, 1971).

Los sistemas anteriormente descritos representan sistemas dinámicos, ya que algunos de sus parámetros que caracterizan su movimiento cambian con el tiempo. Para el estudio de este tipo de sistemas se debe identificar el sistema real objeto de interés, luego construir un sistema modelo que represente de manera simplificada el sistema real de interés, su dinámica y sus interacciones e interdependencias con sus alrededores (Saletan, 1998). Conviene anotar que los modelos no se deben confundir con la realidad, ya que ellos representan solo una visión simplificada del sistema físico real. Por último, evaluar el sistema modelo y sus predicciones con relación a las características y propiedades del sistema real, en este punto se debe delimitar la utilidad del sistema modelo y su rango de validez o aplicabilidad (Campos, 2002).

Teniendo en cuenta que en la mayoría de los cursos introductorios de ondas y vibraciones los movimientos armónicos simples son ampliamente estudiados, en el presente trabajo pretendemos estudiar como un caso particular la dinámica del péndulo no lineal en ausencia de fuerzas disipativas a partir de la formulación de Hamilton. Para este tipo de sistemas usamos el modelo descrito en la figura 1, donde el ángulo entre el péndulo y la vertical se modifica como consecuencia de la acción de la gravedad.

Metodología

En el presente trabajo estudiaremos el péndulo simple, ilustrado en la figura 1. En el problema planteado se supone un péndulo formado por una masa puntual m suspendida en el extremo de una cuerda de masa despreciable con longitud constante l , la cual forma un ángulo θ con la vertical; el sistema se encuentra en un campo gravitacional constante y en ausencia de fuerzas disipativas (Crawford, 1974).

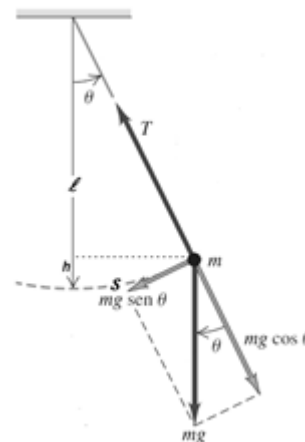


Figura 1. Modelo del péndulo y su respectivo diagrama de fuerzas considerado en el presente trabajo: θ representa desplazamiento angular del péndulo, el peso es $m\vec{g}$ (se descompone en una componente paralela y otra normal a la cuerda) y la tensión de la cuerda se representa por \vec{T} .

A partir del sistema descrito anteriormente, estudiaremos el movimiento oscilatorio cuando el movimiento del péndulo es no lineal. Es decir, usualmente en los textos introductorios de física la dinámica del péndulo viene determinada por la segunda ley de Newton,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sin\theta = 0 \quad (1)$$

Donde ω_0 representa la frecuencia angular natural de oscilación y se realiza la aproximación para ángulo de oscilación pequeños, $\sin\theta \cong \theta$ (Serway, 2009). En este trabajo resolveremos la ecuación (1) en el caso en que el desplazamiento angular es $\gg 1 \text{ rad}$ (o sea, $\gg 57.3^\circ$). Lo anterior implica que generalmente la aproximación que se realiza en la literatura $\sin\theta \cong \theta$ no sea válida.

Formulación de Hamilton

De la figura 1 podemos deducir que

$$x(t) = l \sin \theta, \quad y(t) = l \cos \theta \quad (2)$$

La energía cinética T del sistema, teniendo en cuenta la ecuación (2), es:

$$T = \frac{1}{2}m \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] = \frac{1}{2}ml^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \quad (3)$$

De igual forma, la energía potencia V viene dada por:

$$V = -mgy = -mgl \cos \theta \quad (4)$$

El lagrangiano del sistema es (Calkin, 1999):

$$\mathcal{L} \left(\theta, \frac{d\theta}{dt} \right) = T - V = \frac{1}{2}ml^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + mgl \cos \theta \quad (5)$$

En la formulación hamiltoniana se usa el momento lineal $p_\theta = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\theta}$, en lugar de la velocidad $\frac{d\theta}{dt}$. El hamiltoniano se expresa como (Fowles, 1999):

$$H(\theta, p_\theta) = T + V = \frac{1}{2ml^2} p_\theta^2 - mgl \cos \theta \quad (6)$$

De donde las ecuaciones de Hamilton se encuentran determinadas por:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{1}{ml^2} p_\theta, \quad \frac{dp_\theta}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta \quad (7)$$

Combinamos las ecuaciones (7) de Hamilton y obtenemos la ecuación de movimiento para el sistema de estudio,

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + w_0^2 \sin \theta = 0 \quad (8)$$

donde w_0 representa la frecuencia angular natural de oscilación del péndulo. La frecuencia w_0 y el periodo natural de oscilación en T_0 se interrelacionan en la forma:

$$w_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} = 2\pi f_0, \quad T_0 = \frac{1}{f_0} = \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (9)$$

El hamiltoniano no depende de manera explícita del tiempo y el punto $(\theta(t), p_\theta(t))$ se mueve en el espacio de fase sobre una superficie que conserva la energía E

$$E = \frac{1}{2ml^2} p_\theta^2 - mgl \cos \theta \quad (10)$$

De las ecuaciones (7) y (10) obtenemos:

$$p_\theta = ml^2 \frac{d\theta}{dt} = \pm ml^2 \sqrt{2 \left[\left(\frac{E}{ml^2} \right)^2 + w_0^2 \cos \theta \right]} \quad (11)$$

A partir de la ecuación anterior construimos el diagrama de fase que describe de manera cualitativa la dinámica del péndulo. En el espacio físico, el péndulo puede efectuar un movimiento de rotación o un movimiento de oscilación dependiendo de si tiene la energía necesaria (o no) para alcanzar el punto de máxima energía potencial $E_s = mgl$ (Campos, 2002).

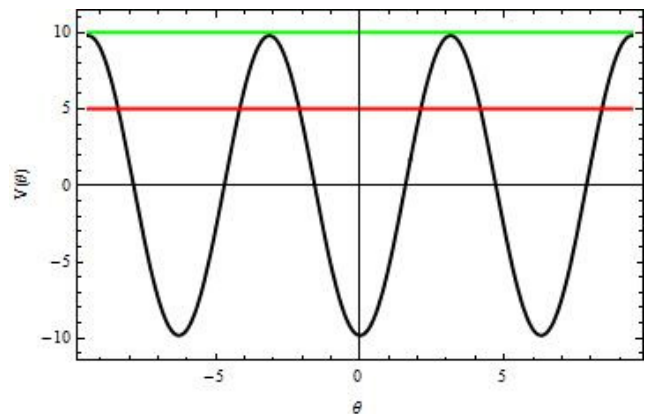


Figura 2. Variación de la energía potencial $V(\theta) = -mgl \cos \theta$ del péndulo no lineal como función del ángulo θ . Las líneas horizontales representan las energías: $E < E_s$ (curva color rojo) que corresponde a un sistema acotado si $E > E_s$ origina un movimiento no acotado. $E_s = mgl$ (curva color verde) coincide con el máximo de la energía potencial y da origen a una separatriz. Los valores de los parámetros que se escogieron son $g = 9.8m/s^2$, $l=1m$ y $m=1kg$.

En la figura 2 observamos las condiciones que se imponen sobre la energía con respecto al valor máximo de energía potencial para que el sistema presente un movimiento oscilatorio o de rotación. Podemos por lo tanto distinguir tres escenarios como se observa en la figura 3. Primero, un movimiento de oscilación: cuando $E < E_S$, la partícula se mueve dentro de un pozo de potencial en un movimiento acotado con dos puntos de retorno, lo cual genera curvas cerradas en el diagrama de fase. En el espacio de físico, el péndulo nunca alcanza el punto $(x, y)=(0, l)$ de máxima energía potencial. Segundo, movimiento de rotación: cuando $E > E_S$, la partícula tiene energía suficiente para abandonar el pozo de potencial y desplegar un movimiento no acotado en el cual el ángulo aumenta de manera indefinida. Este tipo de movimientos se representa en el diagrama de fase por las curvas abiertas ubicadas en la parte superior y en la parte inferior. Tercero, movimiento sobre la separatriz: cuando $E = E_S$ el péndulo tiene la energía mínima necesaria para alcanzar en el espacio físico el punto $(x, y)=(0, l)$ de máxima energía potencial, punto de paso obligatorio de todo movimiento de rotación. La dinámica del péndulo se representa en el

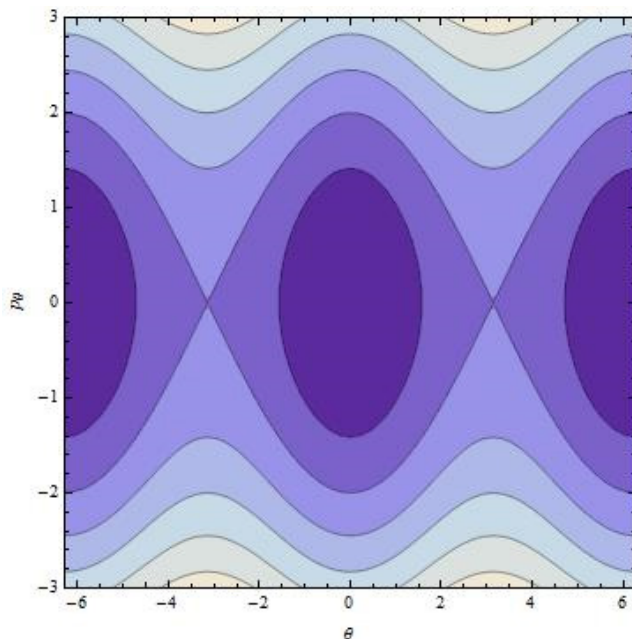


Figura 3. Diagrama de fases descrito por la ecuación (11).

diagrama de fases por una curva abierta que separa la región de movimiento oscilatorio $E < E_S$ de la región de movimiento de rotación $E > E_S$; esta curva se denomina separatriz. La energía potencial $V(\theta)$, dada por la ecuación (4) toma el valor máximo $mg l$ en los ángulos para los cuales $\cos \theta = -1$; estos es:

$$\theta_n = \pm(2n + 1)\pi, n = 0,1,2, \dots \quad (12)$$

En estos ángulos el momento p_θ es 0, indicando que los estados $(\theta_n, 0)$ pertenecen a la separatriz. Para otros ángulos la energía potencial disminuye y la energía cinética aumenta en virtud de la conservación de la energía. El péndulo puede rotar en el sentido a las manecillas del reloj (θ disminuye) o en sentido contrario (θ aumenta); en consecuencia, hay una separatriz para cada una de estas direcciones de movimiento (Campos, 2002).

Solución de la ecuación diferencial de movimiento para el péndulo no lineal cuando $E < E_S$

Para toda condición inicial que conlleve a que la energía E esté por debajo del máximo de $V(\theta)$, la partícula permanece dentro del pozo de potencial efectuando un movimiento oscilatorio entre dos puntos de retorno. Para determinar de manera analítica la dinámica del péndulo, resolvemos la ecuación (8) siguiendo los lineamientos propuestos en el trabajo de Beléndez *et al.* (2007), pero impondremos como condición inicial que la velocidad angular inicial sea diferente de cero. Es decir,

$$\theta(t = 0) = \theta_0, \quad \left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{t=0} = \varphi_0 \quad (13)$$

En la ecuación (13) θ_0 es el desplazamiento angular inicial del sistema el cual oscilará en el intervalo $[-\theta_0, +\theta_0]$ y φ_0 es la velocidad angular inicial. Multiplicamos ahora la ecuación (8) por $\frac{d\theta}{dt}$

$$\frac{d\theta}{dt} \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} w_0^2 \sin\theta = 0 \quad (14)$$

Que se reescribe así

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - w_0^2 \cos\theta \right] = 0 \quad (15)$$

La ecuación (15) hace referencia a la conservación de la energía mecánica total, al integrarla y aplicar las condiciones iniciales dadas por la ecuación (13) obtenemos

$$\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = 2w_0^2 [\cos(\theta(t)) - \cos(\theta_0(t))] + \varphi_0^2 \quad (16)$$

Teniendo en cuenta la identidad trigonométrica $\cos x = 1 - 2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right)$ en la ecuación (16) y al considerar los siguientes cambios de variables:

$$\sin^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) = k \quad \text{y} \quad \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) = y(t) \quad (17)$$

La ecuación (16) en términos de las nuevas variables viene dada por:

$$\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = 4w_0^2 [k - y^2] + \varphi_0^2 \quad (18)$$

Fácilmente se demuestra que las condiciones iniciales dadas por la ecuación (13) satisfacen

$$y(t=0) = \sqrt{k} \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \frac{d\theta}{dt} \quad (19)$$

Debe tenerse en cuenta que θ varía entre 0 y π , por lo tanto k se encuentra determinada en el intervalo $0 < k < 1$. De las ecuaciones (18) y (19) se deduce

$$\left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = w_0^2 k (1 - y^2) \left(1 - \frac{y^2}{k} \right) + \frac{\varphi_0^2}{4} (1 - y^2) \quad (20)$$

Efectuando un cambio de variables adimensionales, definidas por:

$$\tau = w_0 t \quad \text{y} \quad z = \frac{y}{\sqrt{k}} \quad (21)$$

La ecuación (20), en términos de las nuevas variables, es:

$$\left(\frac{dz}{d\tau} \right)^2 = (1 - kz^2)(\gamma_0^2 - z^2) \quad (22)$$

Donde hemos definido $\gamma_0^2 = 1 + \frac{\varphi_0^2}{4kw_0^2}$. Las condiciones iniciales para la nueva variable z se obtienen de las ecuaciones (19) y (21),

$$z(\tau=0) = 1 \quad \text{y} \quad \left(\frac{dz}{d\tau} \right) \Big|_{\tau=0} = \frac{\varphi_0}{2w_0} \cot \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \quad (23)$$

Despejando $d\tau$ de la ecuación (22)

$$d\tau = \pm \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2k)(\gamma_0^2 - z^2)}} \quad (24)$$

Integramos a ambos lados de la ecuación (24), se demuestra fácilmente,

$$\pm \tau = \frac{1}{\sqrt{k}} \left[- \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(\gamma_0^2 - z^2)(1/k - z^2)}} + \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(\gamma_0^2 - z^2)(1/k - z^2)}} \right] \quad (25)$$

Las integrales elípticas incompletas de primera clase se definen como (Abramowitz y Stegun, 1972):

$$\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{(a^2 - t^2)(b^2 - t^2)}} = g \operatorname{sn}^{-1}(\sin \varphi, \kappa^2) = gF(\varphi, \kappa^2) \quad (26)$$

Donde $g = 1/a$, $\text{sn}^2 u = t^2/b^2$, $\kappa^2 = b^2/a^2$ y $\varphi = \text{sn}^{-1}(y/b)$. Por lo tanto, según la fórmula dada por la ecuación (26), cada una de las integrales de la ecuación (25) vienen expresadas de la forma,

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(\gamma_0^2 - z^2)(1/k - z^2)}} = \text{sn}^{-1}\left(\frac{z}{\gamma_0}, \gamma_0^2 k\right) \quad (27)$$

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(\gamma_0^2 - z^2)(1/k - z^2)}} = F\left(\text{sn}^{-1}\left[\frac{1}{\gamma_0}\right], \gamma_0^2 k\right) \quad (28)$$

Según los resultados dados por las ecuaciones (27) y (28), la ecuación (25) se expresa como:

$$\pm \tau(z) = \text{sn}^{-1}\left(\frac{z}{\gamma_0}, \gamma_0^2 k\right) - F\left(\text{sn}^{-1}\left[\frac{1}{\gamma_0}\right], \gamma_0^2 k\right) \quad (29)$$

Finalmente, para el obtener el desplazamiento angular, en la ecuación (29) despejamos γ_0 y de la relación $y(t)$ dada por la ecuación (17) junto con la ecuación (21), se demuestra:

$$\theta(t) = 2 \sin^{-1} \left[\gamma_0 k \text{sn} \left[F\left(\text{sn}^{-1}\left[\frac{1}{\gamma_0}\right], \gamma_0^2 k\right) \pm w_0 t, \gamma_0^2 k \right] \right] \quad (30)$$

Resultados

Haciendo uso del resultado obtenido por la ecuación (30), en la figura 4 presentamos la variación del desplazamiento angular en función del tiempo. Para ello consideramos dos casos en el que para un desplazamiento angular inicial de $\theta_0 = 90^\circ$, la velocidad angular inicial es cero y $\pi \text{ rad/s}$. Los resultados obtenidos coinciden con los reportados por Beléndez *et al.* (2007), se observa un movimiento anarmónico a medida que aumenta el tiempo haciéndose más notorio cuando la velocidad angular toma el valor de $\pi \text{ rad/s}$.

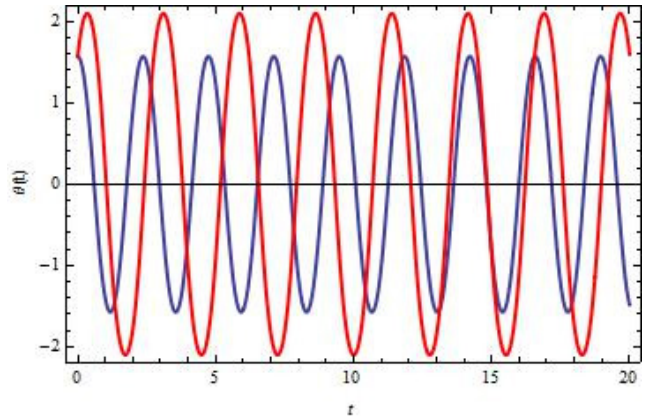


Figura 4. Variación del desplazamiento angular en función del tiempo, se escoge el signo negativo en la ecuación (30). Los valores de los parámetros constantes son $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ y $l=1 \text{ m}$, las dos curvas tienen un desplazamiento angular inicial de $\theta_0 = 90^\circ$ y la curva de color rojo (azul) tiene una velocidad angular inicial $\varphi_0 = \pi \text{ rad/s}$ ($\varphi_0 = 0 \text{ rad/s}$).

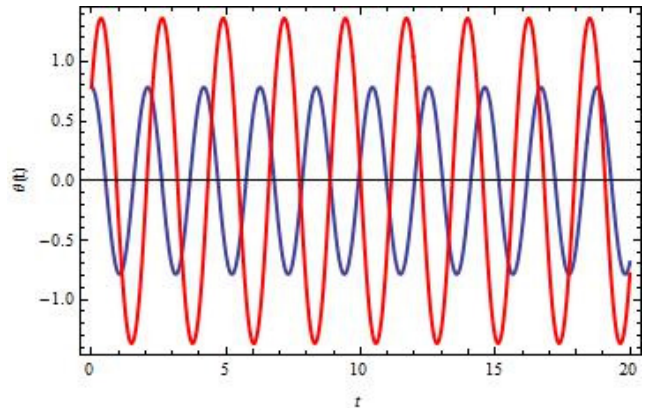


Figura 5. Variación del desplazamiento angular en función del tiempo, se escoge los mismos parámetros de la figura 4. Las dos curvas tienen un desplazamiento angular inicial de $\theta_0 = 45^\circ$ y la curva de color rojo (azul) tiene una velocidad angular inicial $\varphi_0 = \pi \text{ rad/s}$ ($\varphi_0 = 0 \text{ rad/s}$).

En la figura 5 presentamos la variación del desplazamiento angular en función del tiempo cuando el desplazamiento angular inicial es de $\theta_0 = 45^\circ$ y la velocidad angular inicial es cero y $\pi \text{ rad/s}$. Los resultados obtenidos coinciden con los reportados por Beléndez *et al.* (2007), el movimiento

anarmónico del sistema disminuye en comparación con los resultados reportados en la figura 4. Existe una clara dependencia de la dinámica del sistema con las condiciones iniciales que se imponen sobre el sistema (Schmidt, 2009).

En particular, si la velocidad angular es nula, $\varphi_0 = 0$, entonces $\gamma_0^2 = 1$, por lo tanto, de la ecuación (30) se reproduce la fórmula conocida para el péndulo no lineal (Beléndez *et al.*, 2007)

$$\theta(t) = 2 \sin^{-1} \left[\sqrt{k} \operatorname{sn} [F(\sin^{-1} [1], k) \pm w_0 t, k] \right] \quad (31)$$

Sin embargo, $F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = K(k)$, la integral elíptica de primera clase (Arfken, 2001). La ecuación (31) se reescribe:

$$\theta(t) = 2 \sin^{-1} \left[\sqrt{k} \operatorname{sn} [K(k) \pm w_0 t, k] \right] \quad (32)$$

De las ecuaciones (7) de Hamilton, hallamos el momento lineal a partir de la ecuación (32):

$$p_\theta = \pm 2ml^2kw_0 \operatorname{cn} [K(k) \pm w_0 t, k] \quad (33)$$

Las relaciones dadas por las ecuaciones (31) y (32), conducen a la ecuación de la trayectoria en el espacio de fase:

$$\frac{1}{k^2} \left[\sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + \frac{1}{4w_0^2} \left(\frac{p_\theta}{ml^2} \right)^2 \right] = 1 \quad (34)$$

El periodo T es el tiempo necesario para completar un ciclo, en este caso, el periodo de oscilación T es cuatro veces el tiempo tomado desde $\theta = 0$ ($z = 0$) a $\theta = \theta_0$ ($z = 1$):

$$T = 4t = \frac{4}{w_0} K(k) \quad (35)$$

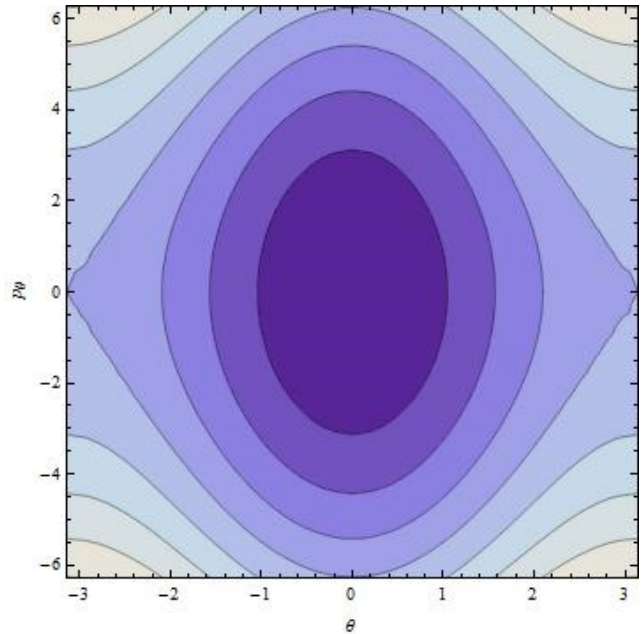


Figura 6. Diagrama de fases dado por la ecuación (34) para el péndulo no lineal con parámetros $m=1\text{kg}$, $l=1\text{m}$ y $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

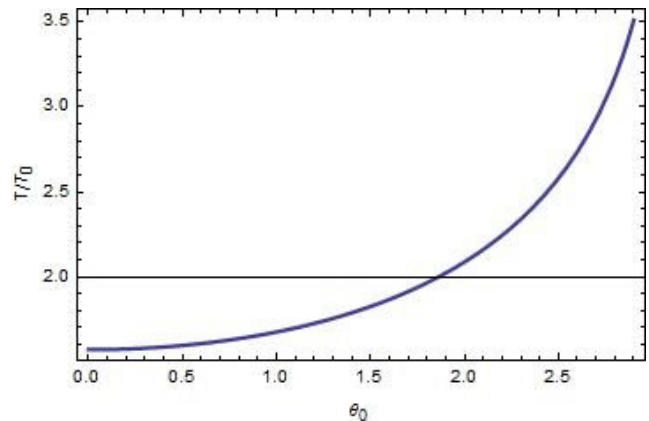


Figura 7. Variación del periodo de un péndulo en función de la amplitud, ecuación (35).

De la figura 7 el periodo T difiere apreciablemente de T_0 solamente para amplitudes muy grandes. Para pequeñas amplitudes es suficiente tomar el primer término correctivo, aproximación suficiente para la mayor parte de las situaciones prácticas como se hace en los cursos introductorios de ondas.

A continuación, determinamos la velocidad angular del péndulo para algún desplazamiento $\theta(t)$ de la ecuación (10),

$$\varphi(t) = \pm\sqrt{2w_0[\cos\theta(t) - \cos\theta_0] + \varphi_0^2} \quad (36)$$

Cuando $\theta(t) = \pi$ tenemos que $\varphi(t) = 0$, el péndulo se detiene en su altura máxima; de la ecuación (36) demostramos que la velocidad angular crítica es:

$$\varphi_c = \pm w_0\sqrt{2[1 + \cos\theta_0]} \quad (37)$$

En la figura 8 graficamos φ_c en función del desplazamiento angular inicial. Si $|\varphi_0| < |\varphi_c|$, el péndulo oscilará siempre alrededor de su punto de equilibrio (punto más bajo); para $|\varphi_0| = |\varphi_c|$ el péndulo se detiene en su máxima altura y si $|\varphi_0| > |\varphi_c|$ el péndulo ejecutará un movimiento circular en relación a su punto fijo.

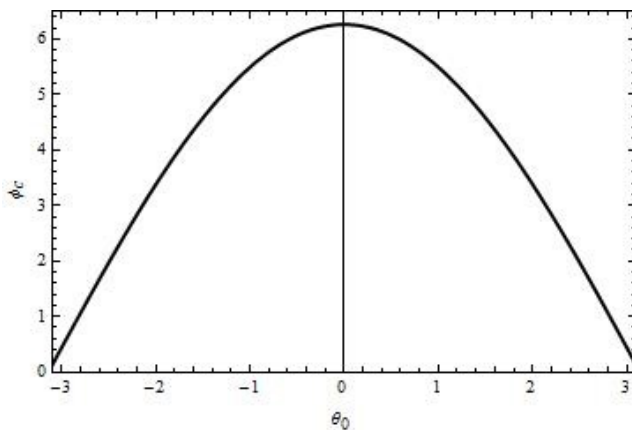


Figura 8. Variación de la velocidad angular en función del tiempo del desplazamiento angular inicial θ_0 . Los valores de los parámetros constantes son $g = 9.8m/s^2$ y $l=1m$.

Conclusiones

En este trabajo se presentó la solución a la ecuación diferencial no lineal que describe las

oscilaciones del péndulo simple, encontramos que tanto el desplazamiento angular, velocidad angular y su periodo son expresadas en términos de integrales elípticas. Estos resultados se resuelven numéricamente y encontramos que, a diferencia de la aproximación frecuentemente utilizada en los textos de física, donde se hace válida la aproximación para ángulos de desplazamiento pequeños $\sin\theta \cong \theta$ cuya ecuación diferencial de movimiento se reduce a $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -w_0^2\theta$. El periodo de oscilación del péndulo es constante e independiente del desplazamiento angular inicial solo para valores pequeños, como se muestra en la figura 7. A medida que el desplazamiento angular inicial aumenta (y su velocidad angular inicial), el periodo de oscilación aumenta considerablemente. Esto es, el movimiento se convierte en inarmónico. Al aumentar la amplitud de un péndulo simple se llega a un punto en que el movimiento angular deja de ser una representación válida del movimiento, y en estas condiciones el movimiento se convierte en inarmónico. Puesto que la magnitud de $\sin\theta$ siempre es menor que la del ángulo θ , la aceleración del péndulo real será notablemente menor que $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -w_0^2\theta$ (válida para ángulos pequeños donde $\sin\theta \cong \theta$) y que corresponde al movimiento armónico angular simple. Por esta razón, una vez que el movimiento se hace apreciablemente inarmónico o anarmónico, el periodo ya no sigue constante, sino que se alarga cada vez más a medida que aumenta la amplitud. Los resultados presentados pretenden, además, acercar al estudiante de física y áreas afín, en la introducción de las integrales elípticas y motivar la búsqueda de nuevas alternativas que ofrece la programación para resolver problemas físicos y matemáticos.

Referencias bibliográficas

Abramowitz, M. & Stegun, A. (1972). *Handbook of Mathematical Functions, with formulas, graphs, and mathematical tables*. Washington, Estados Unidos: Dover.

- Alonso, M. & Finn, E. (1970). *Física Volúmen 1 Mecánica*. México: Fondo Educativo Interamericano.
- Arfken, G. & Weber, H. (2001). *Mathematical methods for physicists*. Estados Unidos: Academic Press.
- Benson, H. (1991). *Física Universitaria Volumen 1*. México: Cecsca.
- Beléndez, A., Pascual, C., Méndez, D., Beléndez, T. & Neipp, C. (2007). Exact solution for the nonlinear pendulum. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 29, 645-648.
- Campos, D. & Isaza J. (2002). *Prolegómenos a los sistemas dinámicos*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.
- Calkin, M. (1999). *Lagrangian and Hamiltonian Mechanics*. Singapore: World Scientific.
- Crawford, J. (1974). *Berkeley Physics Course- Ondas, Vol. 3*. México: Reverté S.A.
- French, A. P. (1974). *Vibraciones y Ondas*. México: Reverte S.A.
- Fowles, G. R. (1999). *Analytical Mechanics*. USA: sixth edition, Saunders College Publishing.
- Gamow, G. (1971). *Biografía de la física*. España: Salvat editores S. A.
- McKelvey, J. & Grotch, H. (1981). *Física para ciencias e ingeniería*. México: Harla.
- Saletan, J. & José J. (1998). *Classical Dynamics: A contemporary approach*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Schmidt, G. (2009). *Non-linear Vibrations*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Serway, A. (2009). *Física para Ciencias e Ingeniería*. México: Cengage Learning.

