

# Del Operador Apertura en la Matemática Morfológica Difusa

*On the Fuzzy Opening Morphological Operator*

**Carlos Orlando Ochoa Castillo<sup>1</sup>, Wilson Javier Forero Baquero<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá - Colombia, <sup>2</sup>Universidad Nacional de Colombia.

Recibido:02/08/2016 Modificado: 17/11/2016. Aceptado: 27/12/2016

## Resumen

**Contexto:** Las propiedades que posee un operador de interior se pueden trasladar a la determinación de características específicas de imágenes, las cuales, desde la matemática morfológica difusa pueden llegar a ser analizadas por medio del operador erosión y apertura, al conjugar estas ideas es pertinente indagar en torno a la naturaleza de estos operadores.

**Método:** Gracias a las propiedades reticulares que posee el análisis matemático de una imagen por medio de matemática morfológica difusa, se busca dotar de restricciones al elemento estructural con el cual se desea filtrar la imagen para así obtener caracterizaciones del operador apertura y erosión.

**Resultados:** Se demuestre que si la relación estructural es reflexiva o \*-antitransitiva el operador apertura es interior; en caso que la relación cumpla ambas, la erosión es un operador interior.

**Conclusiones:** Los operadores morfológicos difusos permiten obtener información relevante sin alterar la estructural global de la imagen; arrojando mayor calidad que los métodos clásicos, en especial si se emplea el operador apertura difuso con una relación estructural adecuada.

**Palabras clave:** Apertura, erosión, interior, matemática morfológica, operador.

**Idioma:** Español

## Abstract

**Context:** Interior operators have interesting properties that can be used in detecting relevant features in digital images. In this respect, it is pertinent to study the behaviour of the opening and erosion operators from the perspective of fuzzy morphological mathematics.

**Method:** Bearing in mind the reticular properties inherent to the mathematical analysis of an image by fuzzy morphological mathematics we seek to find restrictions on the structural element intended to filter the image so as to obtain characterizations of the opening and erosion operators.

**Results:** We prove that if the structural relationship is reflexive or \*-antitransitive the opening operator is interior. On the other hand, we found that if the relationship meets both erosion is a interior operator.

**Conclusions:** The fuzzy morphological operators can give us more information than the classical methods when we filter an image, especially if we implement the opening operator with a right structural element.

**Keywords:** Erosion, interior, mathematical morphological, opening, operator.

### Open access



Citación: W. J. Forero, C. O. Ochoa, "Del operador apertura en la matemática morfológica difusa" INGENIERÍA, vol. 22, no. 1, pp. 125-139, 2017.

© Los autores; titular de derechos de reproducción Universidad Distrital Francisco José de Caldas. En línea DOI: <http://dx.doi.org/10.14483/udistrital.jour.reveng.2017.1.a02>

## 1. Introducción

El estudio de imágenes diagnósticas por medio de contraste consiste en inyectar una tinta en el sistema circulatorio del paciente observando su flujo y posibles obstrucciones que determinan anomalías en el sujeto; de esta forma se buscan diseñar instrumentos y estrategias para la solución de tal problemática. En la matemática morfológica se han encontrado algunas respuestas de los análisis de las imágenes de operadores, filtros, entre otros [8], [1] pero la lógica clásica implementada en estos procesos limita la calidad de los resultados, como lo estudiado en [2], donde los autores describen problemas de ruido, detección de regiones apropiadas para realizar el análisis, debido a que la imagen está en una escala de grises y no solo en blanco o negro. Es por ello que la lógica difusa se convierte en un instrumento que ofrece la mayor información en la escala que se construya y al aplicar ciertos operadores, se obtendrá la información relevante para el diagnóstico perdiendo la menor cantidad de datos pero eliminando los posibles ruidos.

Un posible camino es estudiar los operadores de erosión y apertura para obtener la mayor cantidad de información en la menor cantidad de iteraciones en el proceso como se sugiere en [8].

## 2. Preliminares

Los operadores de erosión y apertura junto con sus propiedades demandan la presentación de algunos conceptos inherentes a la teoría de retículos y la lógica difusa, entre otros.

### 2.1. Retículos residuados

**Definición 1.** Sea  $(L, \leq, \wedge, \vee)$  un retículo y  $*$  una operación binaria definida en  $L$ , se dice que  $(L, \leq, \wedge, \vee, *)$  es un retículo residuado si existe una operación binaria  $\rightsquigarrow$  en  $L$ , que satisfice:

$$\alpha * \beta \leq \gamma \iff \alpha \leq \beta \rightsquigarrow \gamma.$$

En caso de que  $(L, \leq, \wedge, \vee)$  sea un retículo completo, entonces  $(L, \leq, \wedge, \vee, *, \rightsquigarrow, \perp, \top)$  es un retículo residuado completo. La estructura anterior posee las siguientes propiedades

**Lema 1.** [11], [14] Sea  $(L, \leq, \wedge, \vee, *, \rightsquigarrow, \perp, \top)$  un retículo residuado completo, entonces para  $x, y, z$  elementos de  $L$ , se tiene que:

- $x * (x \rightsquigarrow y) \leq y$ ,
- $x \rightsquigarrow (y \rightsquigarrow z) = (x * y) \rightsquigarrow z$ ,
- $x \leq y \iff x \rightsquigarrow y = \top$ ,
- $x * (y \rightsquigarrow z) \leq y \rightsquigarrow (x * z)$ ,
- $x \rightsquigarrow \bigwedge_{i \in I} y_i = \bigwedge_{i \in I} (x \rightsquigarrow y_i)$ ,
- $\bigvee_{i \in I} x_i \rightsquigarrow y = \bigwedge_{i \in I} (x_i \rightsquigarrow y)$ ,
- $x * \bigwedge_{i \in I} y_i = \bigwedge_{i \in I} (x * y_i)$ .

## 2.2. T-normas

Las normas triangulares [15], mejor conocidas como  $t$ -normas permiten una generalización de la intersección entre conjuntos difusos.

**Definición 2.** Una  $t$ -norma es una operación  $*$ :  $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  que satisface:

1. Para todo  $x, y, z \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} x * y &= y * x \\ (x * y) * z &= x * (y * z) \end{aligned}$$

2.  $*$  no es decreciente en ambos argumentos, es decir,

$$\begin{aligned} x_1 \leq x_2 \quad \text{implica que} \quad x_1 * y &\leq x_2 * y \\ y_1 \leq y_2 \quad \text{implica que} \quad x * y_1 &\leq x * y_2 \end{aligned}$$

3.  $1 * x = x$  y  $0 * x = 0$  para todo  $x$  en  $[0, 1]$

El concepto anterior, se relaciona con el de continuidad en  $[0, 1] \times [0, 1]$ , tal como se presenta en el siguiente,

**Lema 2.** [3] Sea  $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  una operación binaria, si  $f$  es no decreciente en  $x$  entonces  $f$  es continua a izquierda en  $x$  si y solo si para cualquier  $\{a_j | j \in J\}$  y  $b \in [0, 1]$  se cumple que:

$$f\left(\bigvee_{j \in J} a_j, b\right) = \bigvee_{j \in J} f(a_j, b)$$

De la misma forma,  $f$  es continua a derecha si:

$$f\left(\bigwedge_{j \in J} a_j, b\right) = \bigwedge_{j \in J} f(a_j, b).$$

Dada la estructura de orden y topológica que el intervalo  $[0, 1]$  posee como subespacio de  $\mathbb{R}$ , es posible considerar la naturaleza de  $*$  con respecto al concepto de continuidad; desde esta perspectiva, siguiendo a [3] se tiene que  $([0, 1], \leq, \wedge, \vee, *, \rightsquigarrow, 0, 1)$  es un retículo residuado completo con  $*$  una  $t$ -norma continua a izquierda.

## 2.3. Relaciones difusas

En el desarrollo de la matemática difusa uno de los conceptos fundamentales es la de membresía o pertenencia de un elemento a un conjunto, el cual no está determinado únicamente con 0, 1 sino que es multivaluado [11] modificando así la concepción de algunos conceptos entre los cuales se encuentran las relaciones internas de un conjunto.

Se define una relación difusa  $R$  mediante una función  $R : X \times X \rightarrow L$ ; al igual que en el caso clásico es posible caracterizar las propiedades que posea, es por ello que se extiende el concepto de preorden al ambiente difuso, con  $(L, \leq, \wedge, \vee, \top, \perp, *)$  un retículo residuado completo (se entenderá por  $\top$  y  $\perp$ , el elemento máximo y mínimo respectivamente de la estructura).

**Definición 3.** Sea  $(L, \leq, \wedge, \vee, \top, \perp, *)$  y  $X$  un conjunto, una relación difusa (binaria)  $R$  en  $X$  es un  $*$ -preorden difuso si satisface:

1.  $R(x, x) = \top$  para todo  $x \in X$  (Reflexiva),
2.  $R(x, y) * R(y, z) \leq R(x, z)$  para todo  $x, y, z \in X$  (Transitiva).

Además del concepto de  $*$ -preorden difuso, aparecen de manera natural los conceptos de relación  $*$ -tolerante cuando  $R$  es reflexiva y simétrica i.e.  $R(x, y) = R(y, x)$  para todo  $x, y \in X$ ;  $R$  es una relación  $*$ -equivalente si es un  $*$ -preorden difuso y es simétrica, junto a ello  $R^{op}$  es la relación opuesta de  $R$ , i.e.  $R^{op}(x, y) = R(y, x)$ , en caso que se satisfaga que  $R(x, y) * R(y, z) \geq R(x, z)$  se dirá que  $R$  es antitransitiva respecto a  $*$ .

### 3. Algunos operadores morfológicos difusos

Por medio de los operadores morfológicos es posible abarcar el reconocimiento de imágenes con el estudio de ciertos detalles específicos sin llegar a alterar la imagen global, sino actuando en elementos estructurales que se definan previamente; esto se logra a partir de los operadores de dilatación y erosión, los cuales son los elementos constitutivos de cualquier otro operador que se pueda definir. En las líneas que siguen, se entiende por *elemento estructural* a un subconjunto del conjunto en estudio.

En [9] se definen los operadores erosión y dilatación en  $X = \mathbb{R}^2$  o  $X = \mathbb{Z}^2$  respectivamente por,

$$\varepsilon_B(A) = \{y \in X \mid \bar{B}_y \subset A\} \quad (1)$$

$$\delta_B(A) = \{x \in X \mid B_x \cap A \neq \emptyset\} \quad (2)$$

donde  $\bar{B}_y = \{y - b \mid b \in B\}$  y  $B_x = \{x + b \mid b \in B\}$ .

Se extienden las ideas anteriores tomando un conjunto arbitrario  $X$  y una relación difusa  $R$  la cual es la proyección del concepto de elemento estructural y en consecuencia se denomina relación estructural, así las ecuaciones (1) y (2) se definen en un contexto difuso por medio de  $*$  y  $\rightsquigarrow$ , se denota a  $L^X$  como el conjunto de todas las funciones de  $X$  en  $L$ , esto es, el conjunto de todos los subconjuntos  $L$ -difusos de  $X$ .

**Definición 4.** Dada una relación difusa  $R \in L^{X \times X}$ , los operadores erosión y dilatación de  $\mu \in L^X$  son,

$$\varepsilon_R(\mu)(x) = (R^{op} \triangleleft \mu)(x) = \bigwedge_{y \in X} \{R(y, x) \rightsquigarrow \mu(y)\}$$

$$\delta_R(\mu)(x) = (R \circ \mu)(x) = \bigvee_{y \in X} \{R(x, y) * \mu(y)\}.$$

Con la composición de los operadores antes definidos es posible crear operadores que nos brinden mayor exactitud en el reconocimiento de detalles específicos de una imagen [9], uno de ellos es el *operador apertura* el cual consta de la composición del operador erosión seguido del operador dilatación, i.e.  $\alpha_R(\mu) = R \circ (R^{op} \triangleleft \mu)$ ; dicho operador es usado especialmente para eliminar regiones

pequeñas y protuberancias.

Si se sustituye a  $\mu \in L^X$  por  $S \in L^{X \times X}$  los conceptos previos se extienden como sigue,

**Definición 5.** Sean  $(L, \leq, \wedge, \vee, \top, \perp, *)$ ,  $X$  un conjunto y  $R, S$  relaciones difusas en  $X$ , Las operaciones  $\circ^*$  y  $\triangleleft_{\rightsquigarrow_*}$  entre  $R$  y  $S$  se definen como,

$$(R \circ^* S)(x, y) = \bigvee_{w \in X} \{R(x, w) * S(w, y)\}$$

$$(R \triangleleft_{\rightsquigarrow_*} S)(x, y) = \bigwedge_{w \in X} \{R(x, w) \rightsquigarrow_* S(w, y)\}$$

Por lo demostrado en [9] se tiene que  $\circ^*$  y  $\triangleleft_{\rightsquigarrow_*}$  forman un par adjunto, esto es:

**Teorema 1.** ([9]) Sean  $(L, \leq, \wedge, \vee, \top, \perp, *)$ ,  $X$  un conjunto y  $Q, R, S$  relaciones binarias difusas en  $X$ , entonces

$$Q \circ^* R \leq S \Leftrightarrow R \leq Q^{op} \triangleleft_{\rightsquigarrow_*} S.$$

## 4. Relación estructural en los operadores de interior morfológicos difusos

Al abordar el estudio de las propiedades de los operadores apertura y erosión definidos en la sección anterior, se presentan otros objetos relacionados.

**Definición 6.** ([13], [5]) Un operador  $C : L^X \rightarrow L^X$  es un operador interior difuso en  $X$  si se verifica:

1.  $C(\mu) \leq \mu$  para todo subconjunto difuso  $\mu \in L^X$ ,
2.  $\mu_1 \leq \mu_2 \Rightarrow C(\mu_1) \leq C(\mu_2)$  para todo  $\mu_1, \mu_2 \in L^X$ ,
3.  $C(C(\mu)) = C(\mu)$  para todo  $\mu \in L^X$ .

Se presenta el concepto de operador  $*$ -coherente con  $\hat{a}(x) = 1$  si  $x = a$  y  $\hat{a}(x) = 0$  en otro caso.

**Definición 7.** Sean  $(L, \leq, \wedge, \vee, \top, \perp, *)$ ,  $X$  un conjunto y un operador  $C : L^X \rightarrow L^X$ ; se dice que  $C$  es  $*$ -coherente si

$$\mu(a) * C(\hat{a})(x) \leq C(\mu)(x)$$

para todo  $\mu \in L^X$  y para todo  $(a, x) \in X \times X$ .

Lo anterior conlleva el siguiente enunciado,

**Teorema 2.** Sean  $(L, \leq, \wedge, \vee, \top, \perp, *)$ ,  $X$  un conjunto y  $R \in L^{X \times X}$ , los operadores  $\alpha_R$  apertura y  $\epsilon_R$  erosión son  $*$ -coherentes.

*Demostración.* Sea  $\mu \in L^X$  y  $x, a \in X$ ,

$$\begin{aligned}
 \mu(a) * \alpha(\hat{a})(x) &= \mu(a) * \bigvee_{b \in X} \{R(x, b) * (R^{op} \triangleleft \hat{a})(b)\} \\
 &= \bigvee_{b \in X} \{\mu(a) * R(x, b) * (R^{op} \triangleleft \hat{a})(b)\} \\
 &= \bigvee_{b \in X} \{R(x, b) * \mu(a) * \bigwedge_{c \in X} \{R^{op}(b, c) \rightsquigarrow \hat{a}(c)\}\} \\
 &\leq \bigvee_{b \in X} \{R(x, b) * \bigwedge_{c \in X} \{\mu(a) * (R^{op}(b, c) \rightsquigarrow \hat{a}(c))\}\} \\
 &\leq \bigvee_{b \in X} \{R(x, b) * \bigwedge_{c \in X} \{R^{op}(b, c) \rightsquigarrow (\mu(a) * \hat{a}(c))\}\} \\
 &\leq \bigvee_{b \in X} \{R(x, b) * \bigwedge_{c \in X} \{R^{op}(b, c) \rightsquigarrow \mu(c)\}\} \\
 &= \bigvee_{b \in X} \{R(x, b) * (R^{op} \triangleleft \mu)(b)\} \\
 &= \alpha(\mu)(x)
 \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\mu(a) * \alpha(\hat{a})(x) \leq \alpha(\mu)(x)$$

De manera análoga se tiene para  $\varepsilon_R$ . □

Es oportuno notar que lo afirmado es independiente de la relación estructural  $R$  que se tome, lo cual no ocurre al estudiar el concepto de interior con los operadores morfológicos en general, es necesario restringir a  $R$ , con lo cual se tiene que,

**Teorema 3.** Si  $R$  es reflexiva y  $R^{op}$  es  $*$ -antitransitiva entonces  $\varepsilon_R$  es un operador interior.

*Demostración.* Si  $\mu \in L^X$  y  $x, a \in L$ ,

■

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_R(\mu) &= \bigwedge_{y \in L} \{R^{op}(x, y) \rightsquigarrow \mu(y)\} \\
 &\leq R(x, x) \rightsquigarrow \mu(x) \\
 &= \top \rightsquigarrow \mu(x) \\
 &= \mu(x)
 \end{aligned}$$

es decir  $\varepsilon_R(\mu) \leq \mu$ .

- Debido a que  $\rightsquigarrow$  es monótona en el segundo argumento entonces si  $\mu_1 \leq \mu_2$  implica que  $\varepsilon_R(\mu_1) \leq \varepsilon_R(\mu_2)$ .
- Debido a que las dos condiciones anteriores se satisfacen, solo resta probar la desigualdad  $\varepsilon_R(\mu) \leq \varepsilon_R(\varepsilon_R(\mu))$ ,

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_R(\varepsilon_R(\mu)) &= \bigwedge_{y \in L} \{R^{op}(x, y) \rightsquigarrow \varepsilon_R(\mu)(y)\} \\
 &= \bigwedge_{y \in L} \{R^{op}(x, y) \rightsquigarrow \bigwedge_{w \in L} \{R^{op}(y, w) \rightsquigarrow \mu(w)\}\} \\
 &= \bigwedge_{y \in L} \bigwedge_{w \in L} \{R^{op}(x, y) \rightsquigarrow (R^{op}(y, w) \rightsquigarrow \mu(w))\} \\
 &= \bigwedge_{y \in L} \bigwedge_{w \in L} \{(R^{op}(x, y) * R^{op}(y, w)) \rightsquigarrow \mu(w)\} \\
 &\geq \bigwedge_{y \in L} \bigwedge_{w \in L} \{R^{op}(x, w) \rightsquigarrow \mu(w)\} \\
 &= \varepsilon_R(\mu)(x).
 \end{aligned}$$

□

La cuestión natural es ver si las mismas condiciones de  $R$  son necesarias para afirmar que el operador apertura es interior, lo cual tiene por respuesta el siguiente enunciado,

**Teorema 4.** Si  $R$  es reflexiva o  $*$ -antitransitiva entonces  $\alpha_R$  es un operador interior.

*Demostración.* Si  $\mu \in L^X$  y  $x, a \in L$ ,

■

$$\begin{aligned}
 \alpha_R(\mu)(x) &= \bigvee_{y \in L} \{R(x, y) * (R^{op} \triangleleft \mu)(y)\} \\
 &\leq \bigvee_{y \in L} \{R(x, y) * (R^{op}(y, x) \rightsquigarrow \mu(x))\} \\
 &\leq \bigvee_{y \in L} \mu(x) \\
 &= \mu(x).
 \end{aligned}$$

por tanto,  $\alpha_R(\mu) \leq \mu$ .

- De la definición de t-norma y la monotonía en el segundo argumento de  $\rightsquigarrow$  se satisface: si  $\mu_1 \leq \mu_2$  entonces  $\alpha_R(\mu_1) \leq \alpha_R(\mu_2)$ .
- Por lo anterior solo resta verificar que  $\alpha_R(\mu) \leq \alpha_R(\alpha_R(\mu))$ , si  $R$  es reflexiva,

$$\begin{aligned}
 \alpha_R(\alpha_R(\mu))(x) &= \bigvee_{y \in L} \{R(x, y) * (R^{op} \triangleleft \mu)(y)\} \\
 &\geq R(x, x) * \alpha_R(\mu(x)) \\
 &= \top * \alpha_R(\mu(x)) \\
 &= \alpha_R(\mu(x))
 \end{aligned}$$

ahora si  $R$  es  $*$ -antitransitiva,

$$\begin{aligned}
 \alpha_R(\alpha_R(\mu))(x) &= \bigvee_{y \in L} \{R(x, y) * (R^{op} \triangleleft \mu)(y)\} \\
 &\geq R(x, x) * \alpha_R(\mu(x)) \\
 &= \bigvee_{y \in L} \{R(x, x) * (R(x, y) * (R^{op} \triangleleft \mu)(y))\} \\
 &\geq \bigvee_{y \in L} \{R(x, y) * (R^{op} \triangleleft \mu)(y)\} \\
 &= \alpha_R(\mu(x))
 \end{aligned}$$

por lo tanto, en caso que  $R$  sea reflexiva o  $*$ -antitransitiva se satisface que:

$$\alpha_R(\mu) = \alpha_R(\alpha_R(\mu)).$$

□

Los anteriores resultados, llevan a formularse la cuestión en torno a la relación entre los operadores erosión y apertura, con facilidad se tiene que

**Corolario 1.** Sea  $R \in L^{X \times X}$  se tiene que para todo  $\mu \in L^X$ ,

$$\varepsilon_R(\mu) \leq \alpha_R(\mu).$$

Al profundizar en las relaciones de  $*$ -equivalencia, se encuentra en [6] que el operador erosión posee las siguientes propiedades,

**Lema 3.** Sea  $R$  una relación de  $*$ -equivalencia, se satisfacen las siguientes propiedades,

1.  $\varepsilon_R$  es un operador interior,
2.  $\varepsilon_R(\bigwedge_{i \in I} \mu_i) = \bigwedge_{i \in I} (\varepsilon_R(\mu_i))$  para cualquier  $\mu_i \in L^X$ ,
3.  $\varepsilon_R(\gamma \rightsquigarrow \mu) = \gamma \rightsquigarrow \varepsilon_R(\mu)$  para cualquier constante  $\gamma \in [0, 1]$  y  $\mu \in [0, 1]^X$ .

Tratando de formular lo correspondiente al operador apertura, se tiene el siguiente lema,

**Lema 4.** Sea  $R$  una relación de  $*$ -equivalencia, se satisfacen las siguientes propiedades,

1.  $\gamma * \alpha_R(\mu) \leq \alpha_R(\gamma * \mu)$  para cualquier constante  $\gamma \in [0, 1]$  y  $\mu \in [0, 1]^X$ .
2.  $\alpha_R(\gamma \rightsquigarrow \mu) \leq \gamma \rightsquigarrow \alpha_R(\mu)$  para cualquier constante  $\gamma \in [0, 1]$  y  $\mu \in [0, 1]^X$ .
3.  $\alpha_R(\bigwedge_{i \in I} \mu_i) \leq \bigwedge_{i \in I} (\alpha_R(\mu_i))$  para cualquier  $\mu_i \in L^X$ ,

*Demostración.* Con base en las propiedades del corolario 1 y el lema 3,

- Sea  $\mu \in L^X$ ,

$$\begin{aligned} \gamma * \alpha_R(\mu)(x) &= \bigvee_{a \in X} \gamma * (R(x, a) * \bigwedge_{b \in X} R^{op}(a, b) \rightsquigarrow \mu(b)) \\ &\leq \bigvee_{a \in X} R(x, a) * \bigwedge_{b \in X} R^{op}(a, b) \rightsquigarrow (\gamma * \mu(b)) \\ &= \alpha_R(\gamma * \mu). \end{aligned}$$

- Sea  $\mu \in L^X$ ,

$$\begin{aligned} \alpha(\gamma \rightsquigarrow \mu) &= \bigvee_{a \in X} R(x, a) * [R^{op} \triangleleft (\gamma \rightsquigarrow \mu)](a) \\ &= \bigvee_{a \in X} R(x, a) * \gamma \rightsquigarrow R^{op} \triangleleft \mu \\ &\leq \gamma \rightsquigarrow \bigvee_{a \in X} R(x, a) * (R^{op} \triangleleft \mu)(a) \\ &= \gamma \rightsquigarrow \alpha_R(\mu)(x). \end{aligned}$$

- Sea  $\mu \in L^X$ ,

$$\begin{aligned} \alpha_R(\bigwedge_{i \in I} \mu_i(x)) &= \bigwedge_{a \in X} R(x, a) * (R^{op} \triangleleft \bigwedge_{i \in I} \mu_i) \\ &= \bigwedge_{a \in X} R(x, a) * \bigwedge_{i \in I} (R^{op} \triangleleft \mu_i) \\ &\leq \bigwedge_{i \in I} \bigwedge_{a \in X} R(x, a) * (R^{op} \triangleleft \mu_i) \\ &= \bigwedge_{i \in I} (\alpha_R(\mu_i)(x)). \end{aligned}$$

□

Con el objeto de relacionar los lemas anteriores se componen los operadores apertura y erosión,

**Teorema 5.** Sea  $R$  un  $*$ -equivalencia se tiene que,

$$\alpha_R(\varepsilon_R(\mu)) \leq \varepsilon_R(\alpha_R(\mu))$$

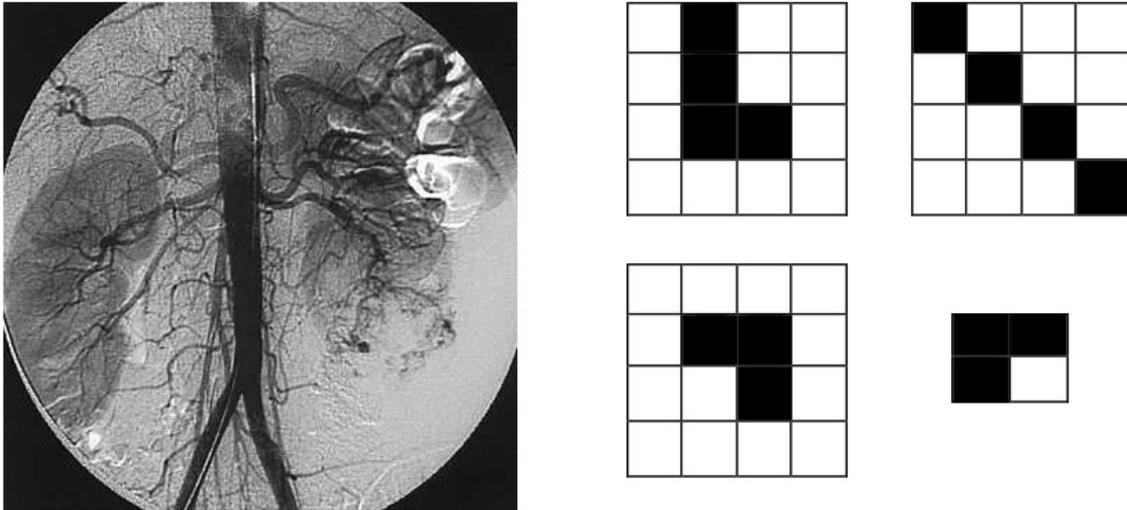
*Demostración.* Es evidente que  $\alpha_R(\varepsilon_R(\mu)) \leq \varepsilon_R(\mu)$  con  $\mu \in L^X$ , además se tiene,

$$\begin{aligned} \varepsilon_R(\mu) &= R^{op} \triangleleft \mu \\ &= R^{op} \triangleleft (R^{op} \triangleleft \mu) \\ &= R^{op} \triangleleft [R^{op} \triangleleft (R^{op} \triangleleft \mu)] \\ &\leq R^{op} \triangleleft [R^{op} \circ (R^{op} \triangleleft \mu)] \\ &= \alpha_R(\varepsilon_R(\mu)) \end{aligned}$$

de lo anterior se tiene que,

$$\alpha_R(\varepsilon_R(\mu)) \leq \varepsilon_R(\alpha_R(\mu)).$$

□



**Figura 1.** Imagen original (arteriografía por sustracción digital con el método de Seldinger) y elementos estructurales.

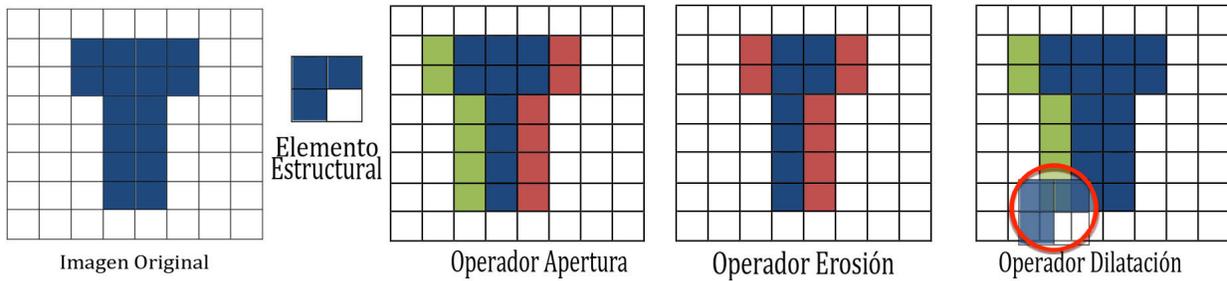
## 5. Aplicación

### 5.1. Materiales y Métodos

Un uso de los resultados presentados en la sección anterior se encuentra en el filtro de imágenes en escala de grises, lo cuál fue explorado por Forero en [10], en este caso se enfocará en imágenes médicas obtenidas por medio de contraste, la imagen que se implementará es una arteriografía por sustracción digital con el método de Seldinger tomada de la Figura 1.7 de [12] en formato JPEG, con dimensiones 1441 x 1441 píxeles, para ello se implementó el lenguaje Python y el paquete pymorph el cual permite aplicar los operadores erosión y apertura en el caso clásico, admitiendo un elemento estructural binario.

Con el propósito de entender la interpretación que realiza el computador de la imagen de estudio es necesario observar la Figura 2, en ella se tiene la implementación de los operadores, erosión, apertura y dilatación en el caso clásico, lo cual consiste en trasladar el elemento estructural a la imagen original, en la Figura 2, el elemento estructural (observe el círculo rojo en la Figura 2) se sitúa en cada píxel; se toma en el caso de la dilatación la intersección del elemento estructural con la imagen y en caso de que alguno de los píxeles este pintando, se colorea el píxel, en caso contrario se deja en blanco, una explicación mas detallada del caso clásico de la implementación de cada uno de los operadores antes mencionados en lenguaje Matlab - Python puede verse en [7].

En algunos casos es complicado determinar la diferencia entre las líneas sanguíneas y los órganos, para ello se debe tener un rango en el cual se pueda filtrar qué elementos de la imagen son vitales para el diagnóstico del médico, esto se logra por medio del paquete OPENCV en Python, específicamente el comando `inRange` el cual permite filtrar la imagen extrayendo los colores que se determinen; en este caso se optó por una escala de grises obtenidas con ayuda de la conversión de la imagen en formato HSV con el comando `COLOR_BGR2HSV` del mismo paquete, lo anterior simula la función de pertenencia del conjunto difuso que se está formando, cuyos elementos son



**Figura 2.** Aplicación de los operadores clásicos, verde ganancia, rojo pérdida, azul valor original.

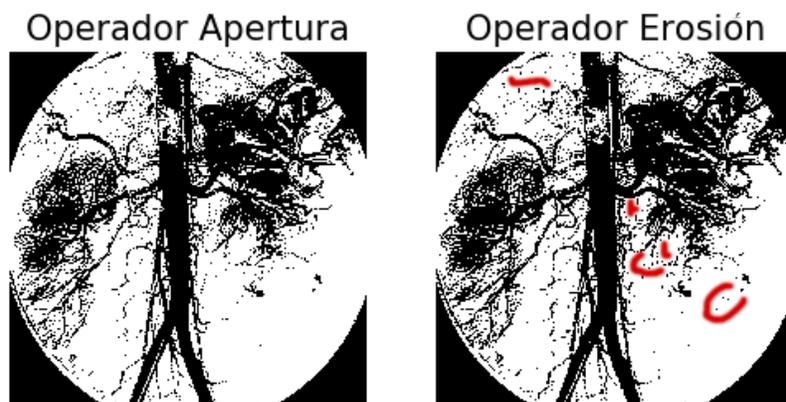
los píxeles de la imagen y su rango de pertenencia es obtenida tras la implementación del comando `inRange`.

Con los datos resultantes se procede a implementar el paquete `pymorph` y los códigos del operador apertura y erosión, con un elemento estructural generado por un arreglo de  $4 \times 4$  píxeles ajustado de forma adecuada para comprobar los resultados teóricos presentados en la sección anterior (se tomo el paquete `pymorph` sin modificar el código fuente debido a que la t-norma que implementa es la del mínimo).

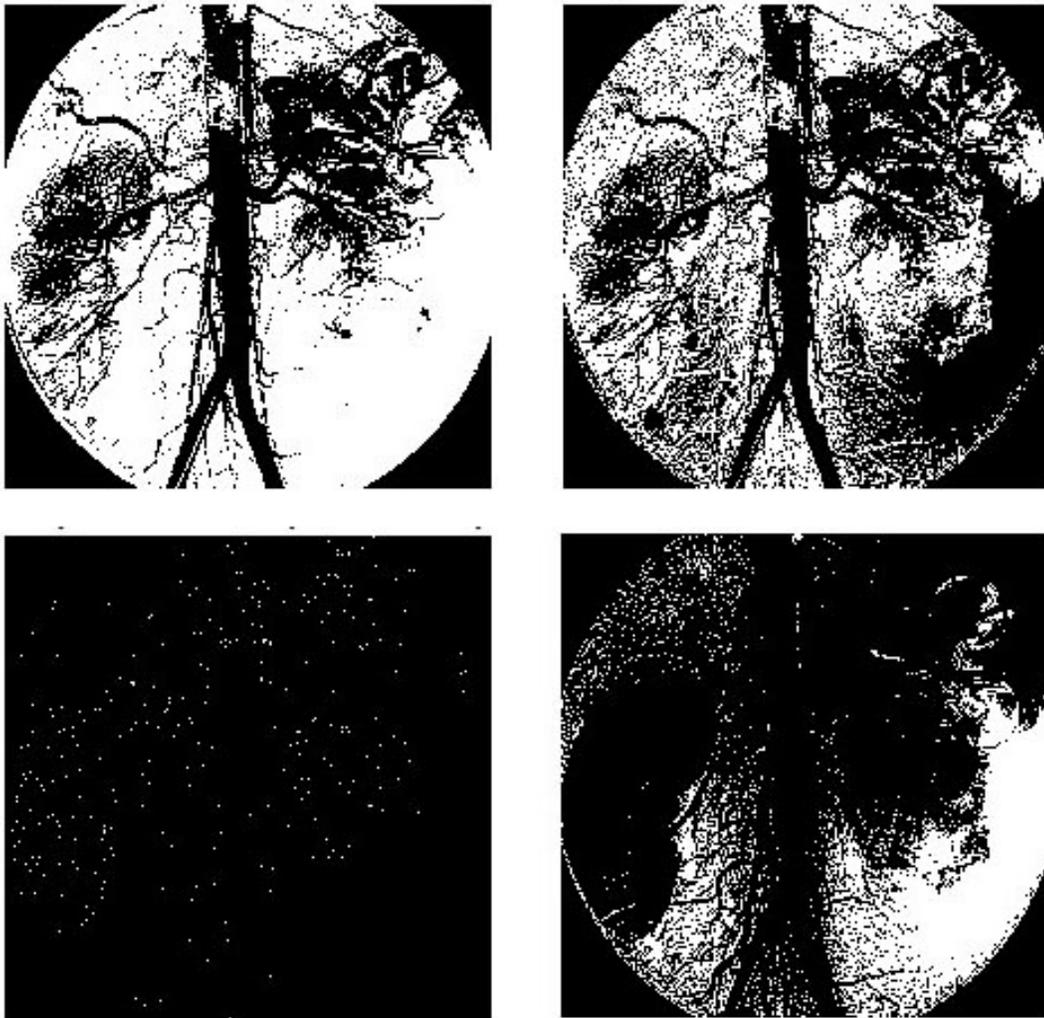
## 5.2. Resultados

Se tiene presente que al filtrar imágenes de resonancia por medio de contraste del tórax con el paquete `pymorph` se debe tomar un elemento estructural adecuado. Si se quiere observar rastros sanguíneos es óptimo utilizar líneas dentro de un arreglo de píxeles.

Es oportuno preguntar qué ocurre si solo se tiene el caso clásico de blanco y negro o una tonalidad de gris y negro. La Figura 4 se construye al tomar un rango de pertenencia dada por una tonalidad clara (inferior izquierda), oscura (inferior derecha) y media (superior derecha) del color gris (en formato RGB son respectivamente, (211,211,211), (120,120,120) y (173,173,173)) y se aplica el operador apertura a cada una de las imágenes generadas al aplicar el rango de pertenencia a la ima-



**Figura 3.** El rojo indica ruido no eliminado y no el daño original en el sistema circulatorio del paciente.



**Figura 4.** Operador apertura clásico aplicado con diferentes rangos de pertenencia.

gen original. Al unir estos intervalos de pertenencia en la escala (superior izquierda) se obtiene que la superposición de una con la otra da un mejor panorama de la imagen a analizar. Es así como se hace necesario una lógica de más de dos valores. Como se mostró en el sección anterior, si se aplica un número par de veces el operador apertura siempre que la relación estructural cumpla las condiciones del Teorema 4 es lo mismo que aplicarlo dos veces (debido a la idempotencia del operador), lo cual deviene en una reducción en las iteraciones que debe realizar el ordenador para arrojar la resonancia aplicando un filtro que genere como resultado tan solo las cavidades sanguíneas del paciente. En este caso se toma una relación estructural clásica, donde el elemento estructural es un cuadrado de  $2 \times 2$  píxeles. En la Figura 5, se exhibe la imagen original y el operador apertura aplicado una y diez veces.

Ahora, la Figura 6 se obtiene al filtrar con una relación (elemento estructural forma de L dentro de un cuadro de  $4 \times 4$  píxeles) que no satisface las condiciones del Teorema 4, para así resaltar la pérdida de información en el resultado que incide negativamente en el juicio del facultativo;

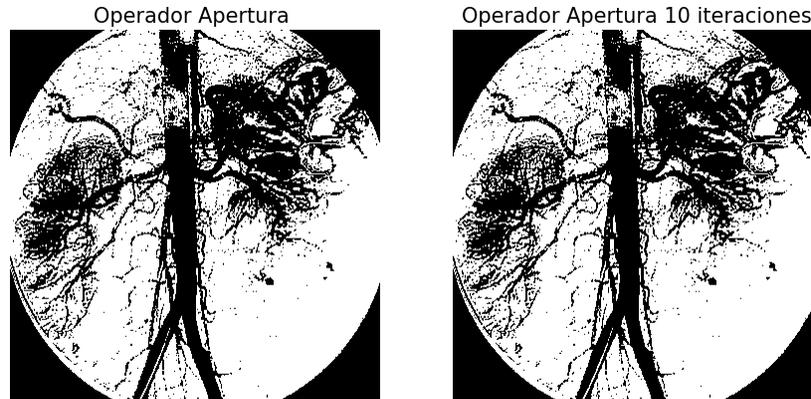


Figura 5. Operador apertura difuso con relación estructural reflexiva.

al evaluar que elementos son taponamientos y cuáles son naturales del sistema circulatorio del paciente; el ruido que aparece está resaltado en rojo.

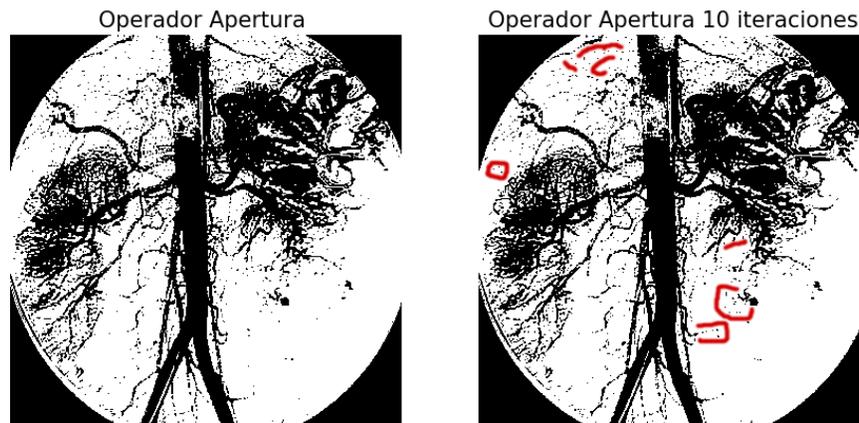


Figura 6. Operador apertura difuso con relación estructural no reflexiva ni \*-antitransitiva.

## 6. Discusión

En el estudio de imágenes diagnósticas es necesario la eliminación de ruidos para determinar anomalías del paciente, sea en la búsqueda de deformidades del feto como lo estudiaron A. P. Ballesteros, L. C. López, R. Herrera en [2] o taponamientos sanguíneos vistos en la sección anterior; esto último no es posible al aplicar los operadores morfológicos clásicos en Python por medio del paquete pymorph, debido a que admite tan solo un elemento estructural bivaluado. Es allí donde la contemplación de una relación estructural y la aplicación del rango de pertenencia de los valores a filtrar es necesario, en dicha búsqueda se encuentran los operadores morfológicos difusos y el intervalo de pertenencia se determina a partir del mínimo y máximo valor en la escala de grises de la imagen de estudio.

Además si se pregunta que operador aplicar a una imagen médica por medio de contraste en es-

cala de grises es pertinente recordar por lo demostrado en el Corolario 1 que el operador apertura poseerá mayor información que la erosión; y, si se tiene en cuenta una relación estructural adecuada, a su vez tendrá toda la información relevante con el menor ruido posible ya que podrá tener mayor información el operador apertura; pero si esta en su gran mayoría es ruido es infructuosa dicha información por lo tanto si se conjuga el Corolario 1 y el Teorema 4 se tendrá que la mejor opción es el operador apertura con una relación estructural bien sea reflexiva o  $*$ -antitransitiva.

## 7. Conclusiones

La importancia de la matemática morfológica radica en el uso práctico que se le dé. Para mencionar solo un par de posibles aplicaciones en campos diferentes, ver por ejemplo su utilización en la detección de nódulos pulmonares en radiografías de tórax [1] o la identificación de lagunas y cuerpos de agua en imágenes geo-satelitales de alta resolución [16]. Un ejemplo mas concreto del uso de los operadores propuestos, se presentó en la sección 5 en imágenes en escala de grises muy usadas en diagnósticos de artereografía. Es por ello que si se tienen presentes los resultados en la elección de una relación estructural adecuada reducirá las iteraciones que deba realizar el computador para arrojar la imagen con la eliminación del ruido y pérdida mínima de información relevante, además si se trabaja con el operador apertura es posible obtener menor ruido en la imagen que lo arrojado por la erosión.

Las implicaciones centrales en este artículo son:

- Si  $R \in L^{X \times X}$  se tiene que para todo  $\mu \in L^X$ , se satisface que  $\varepsilon_R(\mu) \leq \alpha_R(\mu)$ .
- Si  $R$  es reflexiva y  $R^{op}$  es  $*$ -antitransitiva entonces  $\varepsilon_R$  es un operador interior; además, si  $R$  es reflexiva o  $*$ -antitransitiva entonces  $\alpha_R$  es un operador interior.
- Si  $R$  un  $*$ -equivalencia entonces  $\alpha_R(\varepsilon_R(\mu)) \leq \varepsilon_R(\alpha_R(\mu))$ .

## Agradecimientos

Los aportes brindados por los evaluadores permitieron el crecimiento del presente artículo, por ese motivo extendemos nuestros más sinceros agradecimientos, además a los editores de la revista por su paciencia durante el proceso de publicación.

## Referencias

- [1] J. Aguillón, S. Duarte, R. Herrera, “Realce de candidatos a nódulo pulmonar en radiografías de tórax por medio de filtros de convergencia”. *Revista de Ingeniería*, vol. 19, No. 2, pp. 85-104, 2014.
- [2] A. P. Ballesteros, L. C. López, R. Herrera, “Segmentación y conteo de las líneas de la nariz del feto en imágenes ecográficas de las 11-13+6 semanas de gestación”. *Revista de Ingeniería*, vol. 20, No. 1, pp. 65-78, 2015.
- [3] R. Belohlávek, “Fuzzy relational systems, Ingeniería and Principles”. *IFSR International Series on Systems Science and Engineering*, vol.20, Kluwer Academic/ Plenum Publishers, New York, 2002.
- [4] N. Bunce, R. Mohiaddin, “An Atlas of Contrast-Enhanced Angiography”, *The Parthenon Publishing Group*, 2003.

- 
- [5] R. Belohlávek, T. Funiokova, “Fuzzy Interior Operators”, *International Journal of General Systems*, 2004.
- [6] N. Carmona, J. Elorza, J. Recasens, J. Bragard, “Permutable fuzzy consequence and interior operators and their connection with fuzzy relations”. *Information Sciences*, Volumen 310, 20 July 2015.
- [7] R. Chityala, S. Pudipeddi, “Image Processing and Acquisition using Python”. *Chapman Hall CRC Mathematical and Computational Imaging Sciences*, 2014.
- [8] E. Dougherty, R. Lotufo, “Hands on Morphological Image Processing”. *SPIE Publications*, 2003.
- [9] J. Elorza, R. Fuentes-Gonzalez, J. Bragard, P. Burrillo, “One relation between fuzzy closing morphological operators, fuzzy consequence operators induced by fuzzy preorders and fuzzy closure and co-closure systems”. *Fuzzy sets and systems*, pp. 73-89, May 2013.
- [10] W. Forero, “Relaciones difusas inducidas por el operador morfológico clausurativo difuso”. Trabajo de Grado, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2015.
- [11] U. Höhle, “Non-Classical Logics and their Applications to Fuzzy Subsets”. *Springer Science+Business Media*, 1995.
- [12] A. R. Iturralde, “Urgencias urológicas”. *Ciencias Médicas*, 2008.
- [13] J. Luna, C. Ochoa, “Interior Operators and Topological Categories”. *Advances and Applications in Mathematical Sciences*, vol. 10, Issue 2, 2011, pp. 189-206, 2011.
- [14] D. Pei, “Fuzzy logic Algebras on Residuated Lattices”. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 2004.
- [15] O. Salazar, J. Soriano, “Las leyes de tercero excluido y contradicción como valores límite en lógica difusa”. *Revista de Ingeniería*, vol 16, No. 1, pp. 50-59, 2011.
- [16] G. Torrijos, “Extracción de cuerpo de agua utilizando técnicas de análisis de mezcla y morfología matemática”. *Revista de Topografía Azimut*, vol 4, pp. 53-60, 2012.

---

### **Carlos Orlando Ochoa Castillo**

Licenciado en Educación con especialidad en Matemáticas y Física, Especialista en Matemática Aplicada y Magister en Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia, Docente de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas y Director del Semillero de Investigación LOTO.  
e-mail: karlos8ac@gmail.com

---

### **Wilson Javier Forero Baquero**

Estudiante de Maestría en Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional, Matemático de la Universidad Distrital Francisco José Caldas en la cuál fue líder del Semillero de Investigación LOTO.  
e-mail: wilsonforerob@gmail.com