

# Sistema de inferencia difusa basado en relaciones Booleanas

## *A fuzzy inference system based on Boolean relations*

**Helbert Eduardo Espitia Cuchango**

Universidad Distrital  
Francisco José de Caldas  
Facultad de Ingeniería  
heespitiac@udistrital.edu.co

**José Jairo Soriano Méndez**

Universidad Distrital  
Francisco José de Caldas  
Facultad de Ingeniería  
jairoSORIANO@udistrital.edu.co

### Resumen

Este documento describe la estructura de un sistema de inferencia difusa basado en relaciones booleanas. La teoría relacionada con lógica y conjuntos booleanos es una buena herramienta para el diseño de automatismos y sistemas digitales. Una variación con la cual se busca mejorar los sistemas basados en automatismos consiste en emplear conjuntos difusos en lugar de booleanos. Lo anterior se realiza con el objetivo de tener una acción continua en el actuador del automatismo. Al realizar esta variación y al aplicar la metodología de diseño de los sistemas de automatismos, aparecen los sistemas de inferencia difusa basados en relaciones booleanas.

Aunque inicialmente esta propuesta se realizó considerando sistemas de automatismos, se observa que es posible extenderla a sistemas de inferencia difusa.

**Palabras clave:** Sistemas de inferencia Lógica difusa, lógica booleana.

### Abstract

This paper describes a fuzzy-inference system that is based on Boolean relations. Boolean logic is recognized as a useful tool for automata and digital systems design. An alternative to improve automata systems consists in smoothing the crisp sets into fuzzy sets. The purpose to perform a continuous action on the actuator; by making this change, a new fuzzy inference system based on Boolean relations arises.

Although the original proposal was formulated so as to consider automata systems, it is clear that this approach can be extended to more general fuzzy inference systems.

**Key words:** Fuzzy logic Inference systems, Boolean logic.





# 1. Introducción

La lógica booleana es una herramienta útil en el diseño de sistemas automáticos [1,2]. Sin embargo este tipo de sistemas de control presentan un desempeño limitado debido a su no linealidad. Una forma de mejorar el desempeño de estos sistemas consiste en reemplazar conjuntos booleanos por difusos.

Un trabajo donde se busca aprovechar las características del diseño de automatismos basados en álgebra booleana se presenta en [3], donde se propone un método de minimización de expresiones en sistemas de inferencia difusa, empleando lógica booleana. En un principio la metodología propuesta se consideró como un posible mecanismo para la implementación del proceso asociado a la defusificación [4,5], sin embargo con el tiempo se apreció que se podía interpretar propiamente como un sistema de inferencia difusa por sí mismo [13].

El Concretor Basado en Relaciones Booleanas (CBR) o como se denominó originalmente en inglés *Defuzification Based on Boolean Relations* (DBR), busca plantear un mecanismo de implementación para los sistemas de lógica difusa tomando como referencia el diseño de automatismos, ya que estos sistemas son muy empleados en control de procesos por su facilidad de implementación. Esta técnica de diseño considera los sensores, actuadores y las relaciones booleanas empleadas en las estrategias de control [6].

Debido a la evolución que ha tenido la metodología desde su propuesta inicial, se observó que el término DBR solo es adecuado para hacer referencia al proceso simplificado asociado a la defusificación, mientras que la caracterización como CBR (*Concretion Based on Boolean Relations*) propuesta para el diseño del sistema de inferencia como tal, se considera más acorde para expresar el fundamento de esta metodología. En aplicaciones anteriores a este documento, se puede encontrar comúnmente empleado el término DBR. De igual manera, como la forma de implementación de este tipo de sistemas difiere de aquel de los sistemas difusos tradicionales, se decidió denominarlo Sistemas de Inferencia Difusa Basados en Relaciones Booleanas FIS-BBR (*Fuzzy Inference System - Based on Boolean Relations*). Dado que la anterior definición no ha sido considerada en trabajos anteriores es muy común encontrar los términos FIS-DBR o FIS-CBR para referirse al sistema de inferencia difusa. Las definiciones anteriormente expuestas y la relación jerárquica o de subordinación existente entre ellas se pueden apreciar en la Figura 1.

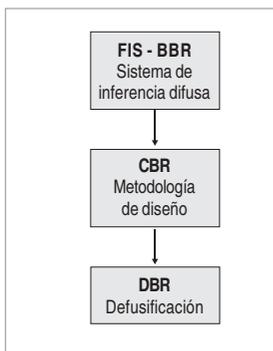


Figura 1. Relación entre FIS-BBR, CBR y DBR.

Las características que se esperan logran con este nuevo enfoque son:

- Facilitar la implementación computacional del sistema de inferencia difusa.
- Debido a la anterior característica se espera tener un mejor desempeño en cuanto al tiempo de procesamiento del sistema de inferencia difusa.
- Proporcionar una metodología de diseño para sistemas de lógica difusa.

## 2. Referentes

Una de las características importantes a considerar en esta propuesta es la relación (isomorfismo [7]) observada entre: teoría de conjuntos, lógica y sistemas matemáticos (retículos y álgebra booleanas [8]); algunas de las equivalencias más importantes de estos isomorfismos se pueden observar en la Tabla I.

Conjuntos	Lógica	Elgebra booleana
Pertenencia	Veracidad	Valor
Pertenece ( $\in$ )	Verdad ( $V$ )	1
No pertenece ( $\notin$ )	Falso ( $F$ )	0
Intersección ( $\cap$ )	Conjunción ( $\wedge$ )	Producto ( $\cdot$ )
Unión ( $\cup$ )	Disyunción ( $\vee$ )	Suma ( $+$ )
Complemento ( $\bar{\phantom{x}}$ )	Negación ( $\neg$ )	Complemento ( $'$ )

Otro aspecto de importancia a considerar en la propuesta desarrollada consiste en las operaciones entre conjuntos difusos.

### 2.1. Intersección de conjuntos difusos

En el contexto de lógica difusa se denomina T-norma a la operación de intersección. Una forma general para representar esta operación es:

$$\begin{aligned} T[\mu_A(u_i), \mu_B(u_i)] &= \mu_{A \cap B}(u_i) \\ &= \mu_A(u_i) \otimes \mu_B(u_i) \end{aligned} \tag{1}$$

Una T-norma es una función de la forma  $T: [0,1] \rightarrow [0,1]$ , que cumple con las siguientes propiedades:

- **Conmutativa:**

$$\mu_A \otimes \mu_B = \mu_B \otimes \mu_A, \forall \mu_A, \mu_B \in [0,1]$$

- **Asociativa:**

$$\mu_A \otimes (\mu_B \otimes \mu_C) = (\mu_A \otimes \mu_B) \otimes \mu_C, \forall \mu_A, \mu_B, \mu_C \in [0,1]$$

- Si  $\mu_A \leq \mu_B$  y  $\mu_C \leq \mu_D$  entonces

$$\mu_A \otimes \mu_C \leq \mu_B \otimes \mu_D$$

- **Condiciones de frontera:**

$$\mu_A \otimes 0 = 0, \mu_A \in [0,1].$$

$$\mu_A \otimes 1 = \mu_A, \mu_A \in [0,1].$$

Existen varios métodos para el cálculo de esta operación, siendo el más empleado la función *mínimo*.

#### 2.1.1. Mínimo y T-norma de Lukasiewicz

Sean  $A_i$  y  $B_i$  conjuntos difusos, con funciones de pertenencia  $\mu_A(u_i)$  y  $\mu_B(u_i)$ , definidas en el universo  $U_i$ , se tiene un conjunto intersección  $A_i \cap B_i$ , cuya función de pertenencia se define como el mínimo en el caso de la ecuación (2-1) o la T-norma de Lukasiewicz



$$\mu_{A \cap B}(u_i) = \min \{ \mu_A(u_i), \mu_B(u_i) \} \tag{2-1}$$

$$\mu_{A \cap B}(u_i) = \max \{ 0, \mu_A(u_i) + \mu_B(u_i) - 1 \} \tag{2-2}$$

## 2.2. Unión de conjuntos difusos

La operación de unión en lógica difusa es conocida como S-norma. Una forma general para la representar la operación difusa de unión es:

$$S[\mu_A(u_i), \mu_B(u_i)] = \mu_{A \cup B}(u_i) \tag{3}$$

$$= \mu_A(u_i) \oplus \mu_B(u_i)$$

Una S-norma es una función de la forma:  $S : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$  que cumple con las siguientes propiedades:

- **Conmutativa:**

$$\mu_A \oplus \mu_B = \mu_B \oplus \mu_A, \quad \forall \mu_A, \mu_B \in [0,1]$$

- **Asociativa:**

$$\mu_A \oplus (\mu_B \oplus \mu_C) = (\mu_A \oplus \mu_B) \oplus \mu_C \quad \forall \mu_A, \mu_B, \mu_C \in [0,1]$$

- Si  $\mu_A \leq \mu_B$  y  $\mu_C \leq \mu_D$  entonces  $\mu_A \oplus \mu_C \leq \mu_B \oplus \mu_D$

- **Condiciones de frontera:**

$$\mu_A \oplus 0 = 0, \quad \mu_A \in [0,1].$$

$$\mu_A \oplus 1 = 1, \quad \mu_A \in [0,1].$$

Al igual que el caso anterior la S-norma presenta varios métodos de cálculo, siendo el más empleado el *máximo*.

### 2.2.1. Máximo y s-norma de Lukasiewicz

Sean  $A_i$  y  $B_i$  conjuntos difusos, con funciones de pertenencia  $\mu_A(u_i)$  y  $\mu_B(u_i)$ , definidas en el universo  $U_i$ , se tiene un conjunto unión  $A_i \cup B_i$ , cuya función de pertenencia se define como el máximo en el caso de la ecuación (4-1) o la S-norma de Lukasiewicz en la ecuación (4-2):

$$\mu_{A \cup B}(u_i) = \max \{ \mu_A(u_i), \mu_B(u_i) \} \tag{4-1}$$

$$\mu_{A \cup B}(u_i) = \min \{ 1, \mu_A(u_i) + \mu_B(u_i) \} \tag{4-2}$$

## 2.3. Complemento difuso

En lógica difusa existen diferentes formas para calcular el complemento de un conjunto difuso  $A_i$ , con base en su función de pertenencia  $\mu_A(u_i)$ . Una forma general para representar el complemento de un conjunto difuso es:

$$C \{ \mu_A(u_i) \} = \mu_A^-(u_i) \tag{5}$$

La forma más empleada del complemento difuso, consiste en definir el conjunto difuso complemento con la función de pertenencia (6).

$$C \{ \mu_A(u_i) \} = 1 - \mu_A(u_i) \tag{6}$$

### 3. Concepción de los sistema de inferencia difusa basados en relaciones booleanas

Los sistemas de inferencia difusa basados en relaciones booleanas son concebidos como una alternativa para mejorar el desempeño de los sistemas de control basados en automatismos, por lo tanto, esta propuesta se basa en los principios del diseño de automatismos y circuitos digitales.

Desde el punto de vista de automatismos se tiene una acción sobre uno o varios actuadores, esta acción suele ser todo o nada generando transiciones bruscas en el proceso. La propuesta aquí presentada pretende lograr que estas transiciones no sean bruscas al convertir conjuntos booleanos en difusos y al mismo tiempo poder aprovechar la metodología de diseño de automatismos desde el dominio booleano. En [3] se presenta un concepto similar, pero solo se considera como un proceso de optimización y no como una posible forma para implementar sistemas de lógica difusa.

El concepto de los sistemas de inferencia basados en relaciones booleanas se encuentran fundamentados en las siguientes premisas:

- Segmentación de los universos con conjuntos booleanos.
- Transiciones monótonas entre regiones booleanas.

Al momento de realizar un diseño para un sistema de control teniendo en cuenta las anteriores características, surgen los siguientes aspectos a considerar:

- Mecanismo de inferencia para determinar la salida.
- Metodología para convertir conjuntos booleanos en difusos.
- Restricciones y/o consideraciones presentes al momento de implementar la metodología de diseño basada en conjuntos booleanos.

Aunque las anteriores consideraciones están siendo abordadas en la actualidad, los resultados se esperan reportar en futuras publicaciones. Este trabajo se limita a presentar el esquema de los sistemas de inferencia basados en relaciones booleanas. Los bloques estructurales de un sistema de inferencia difusa basado en relaciones booleanas, son en esencia, la fusificación y la concreción de la información difusa, ya que el proceso de defusificación es una tarea intrínseca a la manera como se realiza la concreción. Un esquema de dicho proceso se observa en la Figura 2.

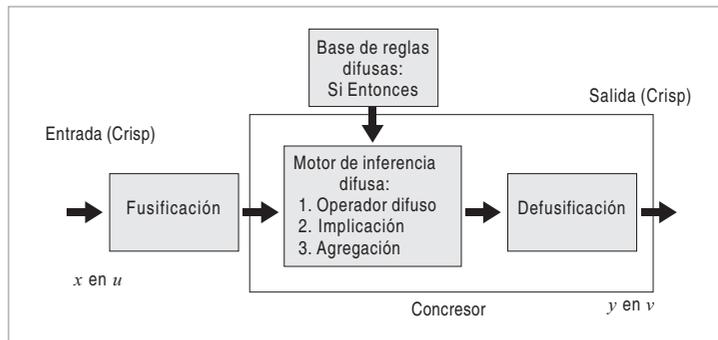


Figura 2. Sistema de inferencia FIS-BBR.



## 4. Diseño de automatismos basado en álgebra booleana

El álgebra de Boole ha sido una poderosa herramienta para el diseño de automatismos [9, 10]. La lógica booleana es básicamente bi-valuada donde las proposiciones verdaderas son valoradas con uno mientras que las falsas con cero; en general una relación booleana es una función que asigna un valor de verdad a una proposición. Las proposiciones son definidas como variables y las combinaciones de ellas determinan si la salida se cumple o no, dichas combinaciones se presentan por lo general en una tabla.

Considerando el operador lógico de conjunción  $\wedge$  y el operador lógico de disyunción  $\vee$ , [10], entonces desde el punto de vista de lógica, el controlador basado en lógica booleana se puede describir como un sistema de inferencia con reglas de la forma:

$$\text{Si } (\hat{A}_1 \wedge \hat{A}_2 \wedge \dots \wedge \hat{A}_p) \text{ Entonces } f \quad (7)$$

Para  $p$  variables, cuando la  $k$ -ésima salida es verdadera, se aplica la definición de minterm [8-10]:

$$f_k = \hat{A}_1^k \wedge \hat{A}_2^k \wedge \dots \wedge \hat{A}_p^k \quad (8)$$

donde

$$\hat{A} = \begin{cases} A & \text{si } A = 1, \\ \bar{A} & \text{si } A = 0. \end{cases}$$

Para  $q$  salidas parciales, la salida global  $Y$  puede expresarse de manera compacta como:

$$Y = \bigvee_{k|f_k=1}^q \bigwedge_{j=1}^p \hat{A}_j^k \quad (9)$$

pueden aplicar las siguientes simplificaciones [1]:

1.  $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \equiv a \vee (b \wedge c)$ .
2.  $(a \vee b) \wedge (a \vee c) \equiv a \wedge (b \vee c)$ .
3.  $a \vee (\bar{a} \wedge b) \equiv a \vee b$ .
4.  $a \wedge (\bar{b} \vee b) \equiv a$ .

En un sistema de  $w$  salidas la  $m$ -ésima salida es:

$$Y_m = \bigvee_{k|f_{k,m}=1}^q \bigwedge_{j=1}^p \hat{A}_j^k \quad (10)$$

### 4.1. Síntesis mediante mapas de Karnaugh

Una metodología utilizada para hacer síntesis de automatismos, es el mapa de Karnaugh [1, 9], (Veitch para otros autores), que se basa en una unidad fundamental de 2 elementos, que representan los valores que puede tomar una variable binaria, para lograr de un determinado efecto. A medida que el número de variables ( $p$ ) aumenta, también se incrementa el número de elementos (cuadros)  $2^p$ ; otra forma de visualizarlo es la asigna-

ción de cada combinación de la tabla de verdad a una posición en los cuadros del mapa de Karnaugh.

El siguiente paso es la agrupación de los cuadros adyacentes que contengan el valor de 1 en grupos de  $2^n$  para  $n=1,2,4\dots$  cuadros adyacentes, donde  $n$  es el número de variables. Para el caso de dos variables las posibilidades de agrupar serán de uno, dos o cuatro cuadros.

Cuando un sistema no tiene todas las posibles combinaciones  $2^p$ , las combinaciones que no se dan se denominan condiciones “no importa”. En este caso el mapa de Karnaugh tiene una aplicación muy importante, ya que tales condiciones se pueden asumir según la conveniencia para efectos de simplificar la expresión.

### 4.2. Acción de salida del automatismo

Para determinar la acción de control total del automatismo se pueden considerar las acciones parciales como el producto de la respectiva salida lógica  $Y_m$  y la correspondiente acción de control  $v_m$ , de tal forma que la salida total es la suma de los anteriores productos.

$$Y = \sum_{m=1}^w Y_m v_m \tag{11}$$

En general un proceso interpretado por reglas del tipo *Si-Entonces*, puede ser representado de diferentes maneras por variables de tipo booleano.

#### 4.2.1. Sistemas de inferencia difusa basados en relaciones booleanas

Debido a los procesos involucrados en este esquema, las operaciones lógicas empleadas son:

- T-norma: Mínimo.
- S-norma: Máximo.

Los anteriores operadores se escogen por su facilidad de implementación [11] y por ciertos requerimientos al momento de realizar la simplificación de términos [3]. A pesar de lo anterior, se puede extender el siguiente planteamiento para otros operadores difusos según las prestaciones que se espera tener del sistema.

Para un sistema de  $w$  funciones de activación,  $p$  conjuntos,  $q$  posibles implicaciones, siendo  $Y_m$  la  $m$ -ésima salida de activación y  $\mu \hat{A}_j^k$  la  $j$ -ésima función de pertenencia de la  $k$ -ésima implicación, el proceso de inferencia de  $Y_m$ , considerando conjuntos difusos, se puede expresar como [13]:

$$Y_m = \bigcup_{k|f_{k,m}}^q \bigcap_{j=1}^p \hat{A}_j^k \tag{12}$$



En el caso de considerar funciones de pertenencia se tiene la siguiente expresión:

$$Y_m = \bigoplus_{k|f_{k,m}=1}^q \bigotimes_{j=1}^p \mu_{A_j^k} \quad (13)$$

la salida concreta del sistema se puede calcular como:

$$y = \sum_{m=1}^w Y_m v_m \quad (14)$$

donde  $v_m$  corresponde al  $m$ -ésimo actuador virtual, entonces la  $m$ -ésima salida virtual es:

$$y_{v_m} = Y_m v_m \quad (15)$$

La ecuación (12) puede ser asociada con la Tabla II. La T-norma se aplica sobre las filas correspondientes a la parte de entradas en la Tabla II, las cuales representan las reglas que aportan a una salida de activación. La S-norma es aplicada sobre las columnas de la parte de salidas de activación de la misma tabla. La S-norma se puede considerar como un operador de agregación, de las reglas que aportan para cada una de las salidas de activación.

En el esquema se distinguen dos partes, una correspondiente a la codificación booleana de las funciones de pertenencia de cada universo de discurso de entrada y otra, correspondiente a las salidas de activación asociadas a las salidas virtuales del sistema. En la parte de las entradas cada fila representa una regla de inferencia, en la sección de las salidas cada columna representa una salida de activación.

Para el cálculo de la salida (sin simplificar), como primer paso se aplica por separado la T-norma (mínimo) entre los conjuntos a lo largo de las filas, cuya salida de activación en la tabla de verdad es activa (reglas de inferencia). El siguiente paso consiste en aplicar la S-norma (máximo) entre todos los resultados obtenidos del paso anterior para cada columna, las cuales corresponden a las salidas de activación (proceso de agregación). La Tabla II muestra un esquema general de la respectiva colección de reglas en la tabla de verdad.

Finalmente, dadas las funciones difusas que determinan las salidas de activación difusas, se procede a realizar la ponderación de cada una de ellas por el respectivo valor del actuador virtual, este producto se llama *salida virtual*. Sumando los anteriores productos se obtiene una sola salida concreta de acción.

### 4.3. Salida virtual

En el diseño de automatismos, la salida se puede considerar como el consecuente de una función booleana de las entradas que corresponden a los antecedentes. El sistema de inferencia difusa basado en relaciones booleanas toma este esquema, el cual es el mismo en lógica difusa, sin embargo la salida desde el punto de vista de automatismos se considera como la acción total que se tiene por parte de los actuadores que están afectando el sistema. En el caso donde solo se dispone de un elemento de acción, este se puede considerar como la suma de varios actuadores los cuales se denominan virtuales y que a su vez tienen asociada una salida virtual.

Dependiendo de los conjuntos empleados y de las acciones a realizar en las regiones de operación, es posible tener un solapamiento de las acciones, por lo cual, la salida total puede ser mayor que las acciones virtuales parciales.

En esta propuesta los actuadores virtuales son constantes y en un esquema tradicional de lógica difusa tipo Mamdani se pueden considerar como conjuntos *singleton* (univaluados) en el universo de discurso de salida. Dependiendo el caso, los actuadores virtuales pueden ser positivos o negativos y sus valores también pueden ser definidos según la aplicación.

Para el sistema de inferencia, la salida corresponde a la suma de las respectivas salidas virtuales:

donde  $Y_{v_m}$  esta dado por (15). El término de salida virtual fue concebido bajo una correspondencia física real en aplicaciones de control, para la salida total del sistema de

$$y = Y_{v_1} + Y_{v_2} + \dots + Y_{v_m} + Y_{v_w} = \sum_{m=1}^w Y_{v_m}$$

inferencia. A manera de ilustración, el concepto de salida virtual se puede observar la acción que tiene una válvula de para el llenado de un tanque; en este caso el flujo permitido por la válvula se puede considerar como el aporte que darían tres válvulas virtuales (que tienen una existencia aparente y no real) de diferente diámetro que dan lugar a los actuadores virtuales:

- La ejecución del proceso de concreción en un sistema difuso, trata de la forma como la información difusa es procesada para proporcionar una salida de acción sobre la planta controlada
- Flujo pequeño:  $v_1 = 0.5$ ”
- Flujo mediano:  $v_2 = 1.0$ ”
- Flujo grande:  $v_3 = 1.5$ ”

## 5. Metodología de diseño para sistemas de inferencia basados en relaciones booleanas

Inicialmente la presente propuesta se trabajó como un proceso de concreción y/o defusificación para simplificar los cálculos en sistemas de inferencia difusa, sin embargo esta también se puede considerar como una metodología de diseño de sistemas de inferencia difusa, tratando el problema a solucionar como un sistema de control basado en automatismos.

La figura 3 permite ilustrar el proceso de diseño para sistemas de inferencia difusa basados en relaciones booleanas. Este inicia definiendo los conjuntos booleanos del universo de entrada, que en sentido práctico pueden estar asociados al funcionamiento de un elemento sensor.

El siguiente paso consiste en definir las respectivas acciones de control a realizar, estas acciones pueden estar asociadas a un elemento que puede ser real o no, la acción de



control considerada en este punto es el máximo valor posible que suministra el respectivo actuador.

La asignación de acciones de salida (salidas de activación), se realiza considerando la información que suministra el experto de la planta a controlar. Cada regla de inferencia es almacenada en la tabla de verdad como una fila. Por otro lado, la salida de activación se encuentra consignada en la tabla como una columna. La Tabla II muestra la forma general como son expresadas las reglas.

Una vez establecidas las reglas de inferencia y almacenado cada antecedente y cada consecuente en la tabla de verdad, se tiene la opción de utilizar una de las diferentes herramientas de la lógica booleana (mapas de Karnaugh, álgebra de Boole o el método de Quine Mccuskey [14]) para la simplificación de cada salida de activación.

El paso siguiente consiste en generalizar las expresiones lógicas booleanas en expresiones difusas (T-norma y S-norma), esto para la implementación del sistema de inferencia. Tal como fue mencionado anteriormente, en esta propuesta la operación lógica de intersección se implementa con la T-norma del mínimo, la operación lógica de unión se implementa con la S-norma del máximo y se usa el complemento estándar.

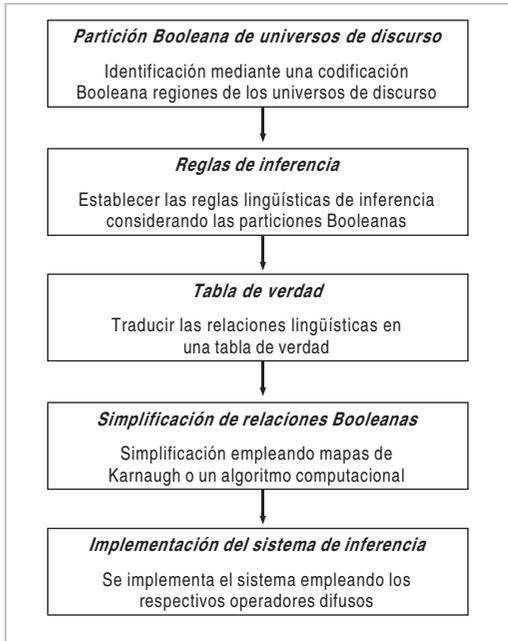


Figura 3. Esquema del proceso de diseño CBR.

**Tabla II.** Tabla de verdad donde se establecen las reglas de control.

Entradas						Salidas de activación					
$A_1$	$A_2$	...	$A_j$	...	$A_p$	$Y_1$	$Y_2$	...	$Y_m$	...	$Y_w$
$\hat{A}_1^1$	$\hat{A}_2^1$	...	$\hat{A}_j^1$	...	$\hat{A}_p^1$	$f_{1,1}$	$f_{1,2}$	...	$f_{1,m}$	...	$f_{1,w}$
$\hat{A}_1^2$	$\hat{A}_2^2$	...	$\hat{A}_j^2$	...	$\hat{A}_p^2$	$f_{2,1}$	$f_{2,2}$	...	$f_{2,m}$	...	$f_{2,w}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\hat{A}_1^k$	$\hat{A}_2^k$	...	$\hat{A}_j^k$	...	$\hat{A}_p^k$	$f_{k,1}$	$f_{k,2}$	...	$f_{k,m}$	...	$f_{k,w}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\hat{A}_1^q$	$\hat{A}_2^q$	...	$\hat{A}_j^q$	...	$\hat{A}_p^q$	$f_{q,1}$	$f_{q,2}$	...	$f_{q,m}$	...	$f_{q,w}$

El paso siguiente consiste en generalizar las expresiones lógicas booleanas en expresiones difusas (T-norma y S-norma), esto para la implementación del sistema de inferencia. Tal como fue mencionado anteriormente, en esta propuesta la operación lógica de intersección se implementa con la T-norma del mínimo, la operación lógica de unión se implementa con la S-norma del máximo y se usa el complemento estándar.

## 6. Principios de diseño

Para una adecuada implementación de los sistemas de lógica difusa basados en relaciones booleanas se tiene dos principios:

- Partición booleana de universos de discurso.
- Conmutación monótona y continua entre regiones booleanas.

El primer principio consiste en realizar una partición de los universos de discurso mediante conjuntos booleanos, de tal forma que es posible definir las regiones de operación que se tienen para los diferentes universos de discurso.

El segundo principio consiste en lograr transiciones continuas y monótonas entre las regiones booleanas definidas anteriormente. Este principio es formulado para tener un comportamiento interpolado del caso booleano empleando conjuntos difusos.

## 7. Comparación entre sistemas de inferencia difusa Mamdani, Sugeno y sistemas de inferencia difusa basados en relaciones booleanas

Con la finalidad de ilustrar el funcionamiento de los sistemas de inferencia basados en relaciones booleanas se propone una comparación con los sistemas de inferencia Mamdani y Sugeno.

### 7.1. Sistemas tipo Mamdani

En la Figura 4 se muestra la configuración básica de un sistema tipo Mamdani, [12], en el cual se distinguen tres elementos principales: fusificación, motor de inferencia difusa y defusificación.

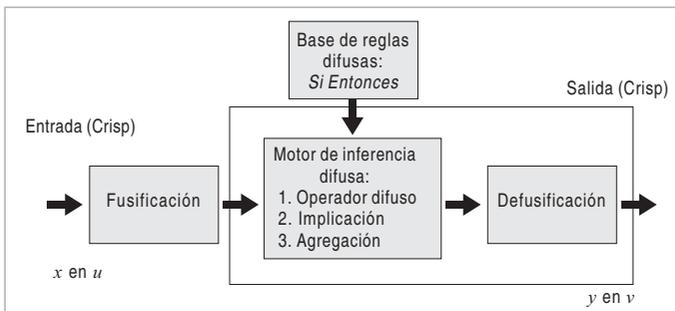


Figura 4. Sistemas tipo Mamdani.

La Figura 5 muestra un ejemplo gráfico del funcionamiento de un sistema de inferencia difusa tipo Mamdani, donde se observan los siguientes pasos:

- Un valor puntual ingresa al sistema difuso y luego es convertido en un nivel de pertenencia para cada regla.



- En cada regla se aplican los respectivos operadores difusos para los valores de pertenencia asociados con las entradas.
- Con el anterior resultado y la respectiva función de pertenencia de la salida asociada a la regla, se aplica el operador difuso correspondiente al método de implicación.
- Luego mediante un operador difuso se agregan todas las implicaciones.
- Finalmente se obtiene el resultado aplicando algún método de defusificación.

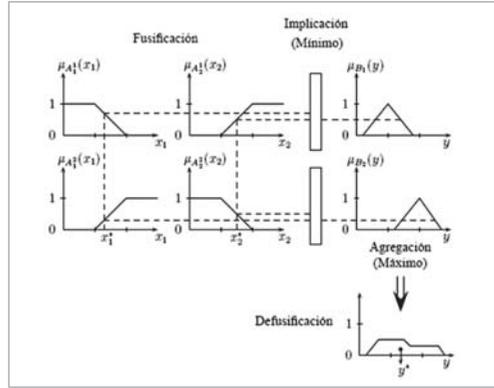


Figura 5. Funcionamiento de un sistema difuso tipo Mamdani.

## 6.2. Sistemas tipo Sugeno

Una alternativa de procesamiento en los sistemas difusos fue la propuesta por Takagi Sugeno en los sistemas difusos que llevan su nombre, [12]. La figura 6 presenta el esquema de un sistema de inferencia difusa tipo Sugeno. En estos sistemas la fusificación e implicación son similares a los empleados en los sistemas tipo Mamdani, mientras que la diferencia se presenta en la forma como se calcula la salida.

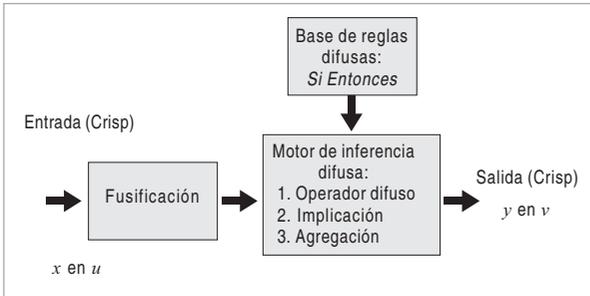


Figura 6. Sistema difuso tipo Sugeno.

Para calcular la salida del sistema difuso se ponderan los diferentes consecuentes teniendo en cuenta el valor con el cual se activó el antecedente de cada una de las reglas, para un sistema con dos reglas la salida del sistema difuso sería:

$$y = \frac{w_1 y_1 + w_2 y_2}{w_1 + w_2}$$

Cada regla tiene asociada una función que depende de las variables de entrada, para un caso donde se tengan dos variables de entrada las funciones serían:

$$y_1 = f_1(x_1, x_2)$$

$$y_2 = f_2(x_1, x_2)$$

La Figura 7 presenta de forma gráfica el funcionamiento de un sistema difuso Sugeno, donde se observan los siguientes pasos:

- Un valor puntual ingresa al sistema difuso y luego es convertido en un nivel de pertenencia para cada regla.

- En cada regla se aplican los respectivos operadores difusos obteniendo como resultado  $w_1$  y  $w_2$ .
- La salida se calcula como:

$$y = \frac{w_1 y_1 + w_2 y_2}{w_1 + w_2}$$

Los bloques estructurales de un sistema de inferencia basado en relaciones booleanas, son en esencia, la fusificación y la concreción de la información difusa, ya que el proceso de defusificación es una tarea intrínseca a la manera como se realiza la concreción. Un esquema de dicho proceso se observa en la Figura 8.

En la Figura 9 se presenta un ejemplo de la implementación de un sistema de inferencia difusa basado en relaciones booleanas, donde se tienen dos universos de discurso  $x_1, x_2$  y dos funciones de pertenencia por cada universo de discurso.

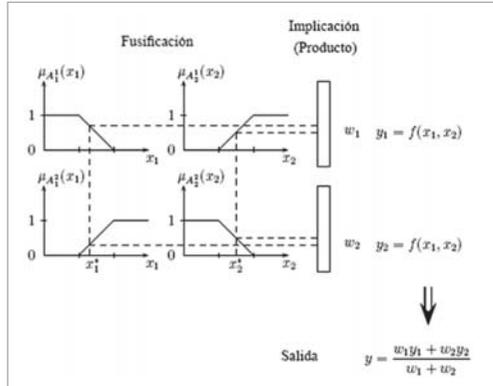


Figura 7. Funcionamiento de un sistema difuso tipo Sugeno

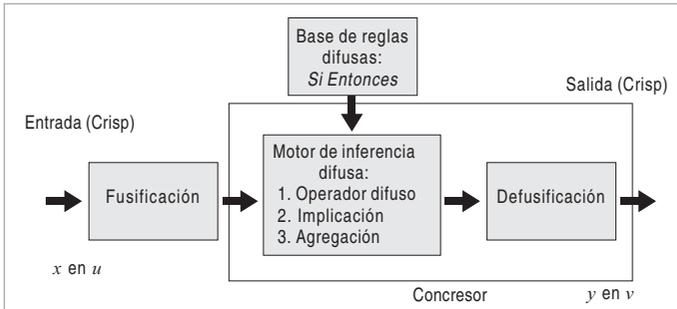


Figura 8. Sistema de inferencia FIS-BBR.

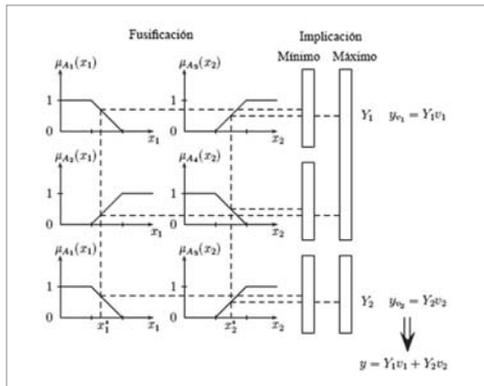


Figura 9. Ejemplo gráfico del funcionamiento FIS-BBR



La Tabla III contiene las relaciones asociadas al proceso de inferencia, en esta tabla se representa con una X los casos donde las variables se pueden considerar como verdaderas o falsas según la conveniencia para lograr una expresión más simplificada.

**Tabla III.** Tabla de verdad asociada a la figura 9.

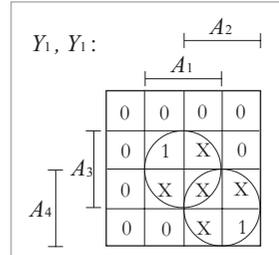
$A_1 (x_1)$	$A_2 (x_2)$	$A_3 (x_3)$	$A_4 (x_4)$	$Y_1$	$Y_2$
1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	X	1	X	X	X
X	1	X	1	X	X

Con el objetivo de lograr una expresión simplificada se puede emplear el mapa de Karnaugh de la Figura 10.

Al realizar la simplificación propuesta en la figura 10, las relaciones para las salidas de activación  $Y_1$  y  $Y_2$  son:

$$Y_1 = [\mu_{A_1}(x_1) \otimes \mu_{A_3}(x_2)] \oplus [\mu_{A_2}(x_1) \otimes \mu_{A_4}(x_2)]$$

$$Y_2 = \mu_{A_1}(x_1) \otimes \mu_{A_3}(x_2)$$



**Figura 10.** Mapa de Karnaugh para la tabla de verdad III

Las salidas de activación tienen asociados los respectivos actuadores virtuales  $v_1$  y  $v_2$ , de tal forma que la salida del sistema de inferencia es:

$$y = Y_1 v_1 + Y_2 v_2$$

La Figura 9 presenta de forma gráfica el funcionamiento de un sistema difuso FIS-BBR, con los siguientes pasos:

- Un valor puntual ingresa al sistema difuso y luego es convertido en un nivel de pertenencia para cada regla.
- Para cada salida de activación se realiza primero la operación difusa de T-norma y luego la S-norma obteniendo así  $Y_1$  y  $Y_2$ .
- La salida se calcula como:  $y = Y_1 v_1 + Y_2 v_2$ .

## 8. Conclusiones y expectativas futuras

Los sistemas de inferencia difusa basados en relaciones booleanas se fundamentan en la relación existente entre los sistemas que emplean álgebra booleana y lógica difusa. Lo anterior permite emplear herramientas de diseño de álgebra booleana para sistemas de lógica difusa.

En la metodología CBR se pueden utilizar menos conjuntos para tener el mismo número de particiones de los universos de discurso. Lo anterior, sumado a la posibilidad de realizar una simplificación de reglas, permite tener una menor cantidad de operaciones disminuyendo tiempos, costos computacionales o de hardware, todo esto sin llegar a perder interpretabilidad.

Una posible desventaja de esta metodología radica en el proceso gráfico asociado a la simplificación de reglas lo cual por lo general se realiza fuera de línea, adicionalmente cuando se tenga un número elevado de conjuntos el método gráfico resulta ser inviable. Para solucionar la anterior situación se pueden emplear métodos computacionales de simplificación que permitan manejar un número elevado de variables y que puedan trabajar en línea para aplicaciones de tiempo real.

En este trabajo se expone el fundamento y concepción de los sistemas de inferencia difusa basados en relaciones booleanas y fueron presentados ejemplos con los cuales se espera mostrar el concepto que involucran los sistemas de inferencia basados en relaciones booleanas. En trabajos futuros se espera presentar los resultados para realizar la simplificación de reglas de inferencia y la formulación para construir conjuntos difusos partiendo de conjuntos booleanos.

## 9. Referencias

- [1] Dougherty, E. y Giardina, C. (1988). Mathematical methods for artificial intelligence and autonomous systems, *Prentice-Hall*. 7-133.
- [2] Ogata, K. (1987). Dinámica de Sistemas, *Prentice-Hall Hisp*. 285-299.
- [3] Rovatti, R., Guerrieri, R. yBaccarani, G. (1995). An Enhanced Two-Level Boolean Synthesis Methodology for Fuzzy Rules Minimization. *IEEE Transactions On Fuzzy Systems*, Vol. 3, No. 3. 288-299.
- [4] Ballén, A. y Rodríguez, C. (2003). Diseño e implementación de un controlador difuso autosintonizado sobre microcontroladores, aplicado al control del péndulo invertido, *Tesis de pregrado, Ingeniería Electrónica, Universidad Distrital Francisco José De Caldas*.
- [5] Soriano, J., Gálvez, C. y Vargas, D. (2005). Identificación de personas por medio de biometría en la planta de la mano usando técnicas digitales de procesamiento de imágenes y congresor difuso basado en relaciones booleanas, *Tesis de pregrado, Ingeniería Electrónica, Universidad Distrital Francisco José de Caldas*.
- [6] Soriano, J., González, O., Munar, F. y Ramos, A. (2001). Propuesta de congresor basado en relaciones booleanas, *Revista Ingeniería, Universidad Distrital Francisco José de Caldas*, Vol. 6, No. 1. 42-50.
- [7] Peña, C. (2004). Coevolutionary Fuzzy Modeling, *Springer Verlag*. 1-18.
- [8] Dubisch, R. (1964). Lattices to Logic, *Blaisdell Publishing Company*. 1-62.
- [9] Soriano, J. (2001). Un enfoque moderno para el diseño de automatismos, *Sorytel*.
- [10] Irazo, P. (2005). Lógica Simbólica para informaticos, *Alfaomega Ra-Ma*. 15-45.
- [11] Wang, L. (1996). A course on Fuzzy Systems and Control, *New Jersey, Prentice Hall*. 19-86.
- [12] Klir, G. y Yuan, B. (1995). Fuzzy Sets and Fuzzy Logic, *Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey*. 1-175.
- [13] Espitia, H. (2009). Aplicación del congresor basado en relaciones booleanas para sistemas de lógica difusa tipo dos, *Tesis de Maestría Universidad Distrital Francisco José de Caldas*.
- [14] Gajski, D. (1997). Principios de Diseño Digital, *Pearson Prentice Hall*. 100-200.

### Helbert Espitia

Ingeniero Electrónico, Universidad Distrital FJC. Ingeniero Mecatrónico, Universidad Nacional de Colombia. Especialista en Telecomunicaciones Móviles, Universidad Distrital FJC. Magister en Ingeniería Industrial, Universidad Distrital FJC. Magister en Ingeniería Mecánica, Universidad Nacional de Colombia. Docente de Planta, Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

### Jairo Soriano

Ingeniero Químico, Universidad Nacional de Colombia. Ingeniero Electrónico, Universidad Distrital FJC. Magister en Ingeniería Industrial, Universidad Distrital FJC. Docente de Planta, Universidad Distrital. Director Grupo LAMIC (Laboratorio de Automática, Microelectrónica e Inteligencia Computacional), Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia.