



UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

REVISTA Ingeniería

Four-monthly Scientific Journal

2023

Volume 28 - Issue 2 ISSN 0121-750X E-ISSN 23448393

REVISTA Ingeniería

Volume 28 · Issue 1 · Year 2023 · ISSN 0121-750X · E-ISSN 2344-8393

Four-monthly Scientific Journal



UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Carrera 7 No. 40-53
Edificio Administrativo
Piso 7 - Facultad de Ingeniería
Bogotá, Colombia
Teléfono: + 57 (1) 323 93 00 ext. 2413
Correo revista:
revista.ing@udistrital.edu.co

<http://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/reving>

Focus and Scope

The *Ingeniería* journal is a scientific publication that deals with the fields of Engineering and Technology, according to the OCDE's classification of scientific areas. It is published every four months by Universidad Distrital Francisco José de Caldas, and its main goal is to disseminate and discuss advances in research and development in the different areas of Engineering and Technology via original and previously unpublished works with local and international scope. The Journal's intended audience is the academic community, researchers, graduates, productive sectors, and the general public interested in all the disciplines of Engineering.

Editors

Editor-in-chief

Oscar Danilo Montoya Giraldo, PhD.
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia

Associate Editor

Nelson Leonardo Díaz, PhD.
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia

Scientific and editorial committee

PhD. Alonso Salvador Sanchez
Universidad de Alcalá
Spain

PhD. Arul Rajagopalan
Vellore Institute of Technology
Chennai, India.

PhD. Carlos Andrés Peña
Institute for Information and
Communication Technologies -
HEIG-VD, Switzerland.

PhD. Federico Martin Serra
Universidad Nacional de San Luis
Argentina

PhD. Iván Santelices Malfanti
Universidad del Bío-Bío
Chile

PhD. Jesús de la Casa Hdez
Universidad de Jaén
Spain

PhD. José Marcio Luna
Perelman School of Medicine
University of Pennsylvania
United States

PhD. Josep M. Guerrero
Aalborg University
Dinamarca

PhD. Nelson L. Díaz
Universidad Distrital Francisco
José de Caldas
Colombia

PhD. Sarah Greenfield
Centre for Computational
Intelligence De Montfort Interdisciplinary
England

Directives

Giovanni Tarazona Bermúdez, PhD.
Rector

Ángela Parrado Rosselli, PhD.
Director CIDC-Centro de Investigación y Desarrollo Científico

Luz Esperanza Bohórquez, PhD.
Dean Faculty of Engineering

Technical Committee

Ingri Gisela Camacho, BSc.
Editorial Manager

Julian Arcila-Forero, MSc.
Layout Artist L^AT_EX

José Daniel Gutiérrez Mendoza
Spanish/English Proofreader

Open Access Policy

The *Ingeniería* journal provides free access to its content. This free access is granted under the principle of making research freely available to the public, which encourages a greater exchange of global knowledge.

Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)

You are free to:

- **Share** — copy and redistribute the material in any medium or format
- **Adapt** — remix, transform, and build upon the material
- The licensor cannot revoke these freedoms as long as you follow the license terms

Article Processing Charge

No publication costs are charged to the author or author's institutions, nor any payment are made to expert peer reviewers or associated or adjunct editors. *Ingeniería* Journal is funded by Universidad Distrital Francisco José de Caldas, its Faculty of Engineering and its Central Research Office.

Indexed



Peer-reviewers in this issue

Aldair Álvarez
Centre Interuniversitaire de Recherche
sur les Réseaux d'Entreprise, Canada

Ana Paula Zaderenko
Universidad Pablo de Olavide, de Sevilla, Spain

Armando Gallegos-Muñoz
Universidad de Guanajuato, Mexico

Denis de Castro Pereira
Universidad Carlos III de Madrid, Madrid

Greenstein Ben
Intel Research Seattle, United States

Jesus Maria Lopez Lezama
Universidad de Antioquia, Colombia

José Ramón Villar
Universidad de Oviedo, Spain

Marcin Kielczewski
Poznan University of Technology, Poland

Pedro J. Zarco-Periñán
Universidad de Sevilla, Spain

Salvador Roselló
Universidad Jaume I, Spain

Sumita Mishra
Rochester Institute of Technology, United States

William Javier Guerrero Rueda
Universidad de La Sabana, Colombia

Alejandro Rodríguez
Universidad de Córdoba, Colombia

Andres Marino Álvarez Meza
Universidad Nacional de Colombia, Colombia

Asep Andang
Universitas Udayana, Indonesia

Emilio Olías
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Mexico

Jairo Rafael Montoya-Torres
Universidad de La Sabana, Colombia

Johanna K Solano
Universidad Santo Tomás, Colombia

Luis Fernando Grisales Noreña
Universidad de Talca, Chile

Pamela Aparicio González
Universidad de Buenos Aires, Argentina

Roberto Tavares Neto
Universidade Federal de São Carlos, Brazil

Seshan Srinivasan
Carnegie Mellon University, United States

Walter Julián Gil González
Universidad Tecnológica de Pereira, Colombia

Table of contents

Editorial

Researching and Innovating from the 13+ Institute for Engineering Research and Innovation
Edwin Rivas-Trujillo

Computational Intelligence

Aleatoric and Epistemic Uncertainty in Soft Metrology: A Perspective Based on Ensuring the Validity of Results
Valentina Agudelo-Cardona, Íngrid Barbosa, Marcela Vallejo, Nelson Bahamón-Cortés, Edilson Delgado-Trejos

Industrial Engineering

Solving the Multi-Vehicle Inventory Routing and Management Integrated Problem Using Mixed-Integer Linear Programming
Frank Alejandro Hincapié-Londoño, Jhonatan Stiven García-Guevara, Eliana Mirledy Toro-Ocampo

Multi-objective Location and Routing Problem: A Review
Paula Andrea Cabrales-Navarro, Javier Eduardo Arias-Osorio, Julio César Camacho-Pinto

Mechanic Characterization of Natural Rubber Mixtures and Cellulose Waste from the Automotive Sector with a Focus on the Footwear Industry
María Isabel Arias-Jaramillo, José Renivaldo Dos Santos, Leonardo Lataro Paim, Giovanni Barrera-Torres

Mechanical Engineering

Numerical Study on the Structural Behavior of the Blade Profile of a Savonius-Type Rotor while Implementing a Multiblade Geometry
Luis A. Gallo, Edwin L. Chica, Elkin G. Flórez

A Model for Documenting Requirements Elicitation
Edgar Serna M., Alexei Serna A.

Electrical, Electronic and Telecommunications Engineering

Comparative Analysis of Boost and Hybrid Boost Converters
Anamaria Romero Carvajal, Nicolás Muñoz-Galeano, Jesús María López-Lezama

MPPT Charge Controller with State of Charge Estimation Method based on Ampere-Hour Counting and Open Circuit Voltage
Luis. F. Bustos-Márquez, Sergio B. Sepúlveda-Mora, Dinael Guevara-Ibarra, Byron Medina-Delgado

Defending State-Feedback Based Controllers Against Sensor Attacks
Luis Francisco Cómbita, Nicanor Quijano, Álvaro A. Cárdenas

Chemical, Food, and Environmental Engineering

Evaluation of Protocols for the Synthesis of Copper or Copper Oxides Nanoparticles
Daniela Acevedo-León, Claudia Patricia Ossa-Orozco, Ana María Torres-López

Editorial

Researching and Innovating from the 13+ Institute for Engineering Research and Innovation

Edwin Rivas-Trujillo¹  

¹Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá, Colombia.

Nowadays, the changes caused by globalization, the digital revolution, and the concept of *environmental sustainability*, among others, have created an imperative need to strengthen society's socioeconomic, political, cultural, and environmental structure. The vehicle for transformation is the so-called *society of knowledge*, by means of research, innovation, and information and communication technologies. The challenge for higher education is to join efforts towards creating said society of knowledge among its different actors (university, industry, and state). Thus, the 13+ Institute for Engineering Research and Innovation [*Instituto de Investigación e Innovación en Ingeniería I3+*] of Universidad Distrital Francisco José de Caldas was created by means of Agreement 013 of August 16th, 2018, issued by the Higher University Council, and is characterized by being an executive academic unit attached to the Center for Research and Scientific Development that is inclusive and participatory regarding the University's research groups and master's and doctoral programs.


The Organization for Economic Cooperation and Development (OECD) indicates that developing countries must promote improvement policies regarding social, economic, and environmental welfare. In order to achieve this transformation, the 13+ Institute has been working in projects aimed at the transformation of research, innovation, and development in different fields of knowledge with local, national, and international companies in the public and private sectors. These projects seek to generate ideas, knowledge transfer, and innovative solutions. Education programs have been developed to foster the students' interest in engineering and other fields, which are aimed at the acquisition of knowledge and skills for the development of their professional careers.

Editorial

© The authors;
reproduction
right holder
Universidad
Distrital
Francisco José de
Caldas.

Open access



*  Correspondence: erivas@udistrital.edu.co

Adopting a new perspective on innovation implies changing the way in which we understand and manage business innovation. From the 13+ Institute, we foster an industry-focused culture of research and innovation, where ideas and creativity are valued and encouraged, thus creating new development paths for the economy and society. With the support of the National Competitiveness Commission (CNC) created by the National Government in 2006, which issued guidelines for establishing a vision of competitiveness in Colombia, which were projected for 2032 within the framework of the CTI 2022-2031 national policy. This policy constitutes a strategy to transform Colombia into one of the three leading Latin American countries regarding science, technology, and innovation (STI), aiming for the country to invest 1 % of its gross domestic product (GDP) in research, development and innovation as of 2031. This initiative is aligned with the document titled *CONPES 4069 Política Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación 2022–2031* [2022-2031 National Science, Technology, and Innovation Policy], which defines the public policy guidelines that seek to stimulate private investment in STI, supporting the country's research and innovation institutes.

Research and innovation have the potential to transform and improve society. For the 13+ Institute, our mission is focused on improving our bonds with society via the creation and provision of solutions to specific issues which improve communities' quality of life, as well as on the education and training of human talent and the strengthening of curricula and high-quality accreditation processes.

At the 13+ Institute, we work on research by means of multiple disciplines and areas of knowledge, which requires an interdisciplinary perspective and integration, with the purpose of addressing complex issues. To achieve integration and the convergence of disciplines, synergy between researchers is important, which allows generating innovative solutions. This, in addition to self-reflection about research practices and new work strategies.

The University and the 13+ Institute contribute to the research and innovation system for the country's development by providing doctoral education to the faculty and improving the quality of research and its teaching within the classroom. The faculty is updated regarding the latest trends in their fields of study, demonstrating capabilities for the development of research projects that are innovative and can be applied to the reality of Colombia.

Edwin Rivas-Trujillo

Full professor, *Compatibilidad e Interferencia Electromagnética* research group (GECM), Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Electrical engineer, Master's degree in Electrical Engineering, Master and PhD in Electrical Engineering, Electronics, and Automation. Director of I3+

Email: erivas@udistrital.edu.co





Research

Aleatoric and Epistemic Uncertainty in Soft Metrology: A Perspective Based on Ensuring the Validity of Results

Incertidumbre epistémica y aleatoria en soft metrología: una perspectiva desde el aseguramiento de la validez de los resultados

Valentina Agudelo-Cardona¹, Ingrid Natalia Barbosa¹, Marcela Vallejo¹*, Nelson Bahamón-Cortés² y Edilson Delgado-Trejos¹

¹Instituto Tecnológico Metropolitano (ITM) (Medellín, Colombia).

²Instituto Nacional de Metrología de Colombia (INM) (Bogotá, Colombia).

Abstract

Context: In engineering, modeling for risk analysis and ensuring the validity of results in systems that include computational routines requires the analysis of the sources and categories of uncertainty, which, in this context, can be classified as *aleatoric* and *epistemic*.

Method: A literature review from databases such as Google Scholar, IEEEExplore, and ScienceDirect is presented herein, analyzing trends and approaches related to the concept of *uncertainty* within the framework of soft metrology, in order to improve our understanding when there are additional restrictions due to the assurance of the validity of the results.

Results: This paper presents concepts and comparisons that aid in the understanding of epistemic and random uncertainty in soft metrology measurement processes and the way in which it is related to the assurance of the validity of results within the framework of learning machines.

Conclusions: Representation quality in soft metrology systems is constantly influenced by random uncertainty, while epistemic uncertainty exhibits descending dynamics when the fit of the model improves with sufficient training data.

Acknowledgments: Project P17202 and Jóvenes Investigadores e Innovadores Program of the ITM of Medellín.

Keywords: soft metrology, epistemic uncertainty, random uncertainty, learning machines.

Article history

Received:
7th/Dec/2021

Modified:
08th/Jul/2022

Accepted:
22nd/Nov/2022

Ing, vol. 28, no. 2,
2023. e18883

©The authors;
reproduction right
holder Universidad
Distrital Francisco
José de Caldas.

Open access



* **Correspondence:** marcelavallejo@itm.edu.co

Resumen

Contexto: En ingeniería, el modelado para el análisis de riesgo y confiabilidad de los procesos de medición que incluyen rutinas de cómputo exige el análisis de las fuentes y categorías de la incertidumbre, la cual, en este contexto, puede ser clasificada como *aleatoria* y *epistémica*.

Método: Se presenta una revisión de la literatura obtenida de bases de datos como Google Scholar, IEEEExplore y ScienceDirect en cuanto a tendencias y enfoques relacionados con el concepto de *incertidumbre*, en el marco de la *soft* metrología, a fin de mejorar la comprensión cuando se tienen restricciones adicionales debido al aseguramiento de la validez de los resultados.

Resultados: Se exponen conceptos y comparaciones que ayudan a mejorar la comprensión de la incertidumbre epistémica y aleatoria en los procesos de medición de *soft* metrología y su relación con el aseguramiento de la validez de los resultados, en el marco de las máquinas de aprendizaje.

Conclusiones: Se concluye que la calidad en la representación de los sistemas de *soft* metrología es influenciada de manera constante por la incertidumbre aleatoria, y la incertidumbre epistémica exhibe una dinámica descendente cuanto mejor sea el ajuste del modelo con suficientes datos de entrenamiento.

Agradecimientos: Proyecto P17202 y Programa Jóvenes Investigadores e Innovadores del ITM de Medellín.

Palabras clave: *soft* metrología, incertidumbre epistémica, incertidumbre aleatoria, máquinas de aprendizaje.

Tabla de contenidos

	Página		
1. Introducción	2	3.4. Análisis conjunto de la incertidumbre epistémica y aleatoria . . .	9
2. Metodología	3	3.5. El rol de la incertidumbre en el aseguramiento de validez de los resultados	10
3. Resultados	5	4. Líneas de trabajo futuro	11
3.1. Análisis de incertidumbre en <i>soft</i> metrología	5	5. Conclusiones	12
3.2. Incertidumbre epistémica	8	6. Agradecimientos	13
3.3. Incertidumbre aleatoria	8	7. Contribución de autores	13
		Referencias	14

1. Introducción

La *soft* metrología se ha definido como un conjunto de modelos y técnicas computacionales que permiten la cuantificación objetiva de magnitudes que son de naturaleza subjetiva, difíciles o costosas de medir, como aquellas de percepción humana o las derivadas de procesos dinámicos (1). La cuantificación puede llevarse a cabo experimentalmente, lo cual posibilita la obtención de uno o más

valores cuantitativos, con los que se puede inferir la variable deseada mediante la correlación con otras variables del proceso cuya medición sea más factible (2).

La *soft* metrología requiere la medición de parámetros físicos y la construcción de un modelo para correlacionarlos con las variables que necesitan ser cuantificadas. En este sentido, existen numerosos desarrollos e implementaciones prácticas. Sin embargo, a pesar de su uso generalizado, solamente unos pocos presentan algún tipo de análisis de la incertidumbre de las variables estimadas (1), lo cual podría representar un problema desde el punto de vista del aseguramiento de la validez de los resultados. Este aseguramiento, por su parte, consiste en recurrir a distintas técnicas que facilitan la obtención de información (datos) para revisar un proceso, que a su vez equivale a una evaluación de los factores que intervienen en la medición y que, por lo general, son registrados para identificar aspectos como la detección de tendencias (3). Convencionalmente, para estimar la incertidumbre existen herramientas no estocásticas, como la *Guía para la expresión de la incertidumbre en medición* (GUM) (4), y estocásticas, como los métodos de Monte Carlo (5) y bayesianos (6, 7), entre otros. Sin embargo, hay situaciones propias de la *soft* metrología en las que no es recomendable hacer uso de estos métodos (8), por ejemplo, no linealidades muy marcadas donde se dificulta la predicción de la evolución dinámica (9), o también cuando la distribución de probabilidad de la magnitud de salida no es de tipo normal o de fácil aproximación a esta (10), o se percibe una fuerte dependencia de la naturaleza estadística de las mediciones en la serie de tiempo (11). Ante estas dificultades, es muy conveniente revisar las discusiones que se suscitan alrededor de la estimación de la incertidumbre en aplicaciones de *soft* metrología, lo cual es un tema abierto en la literatura que fomenta cada vez más el diseño de nuevas investigaciones.

Teniendo en cuenta que es notable la carente formalización de la estimación de la incertidumbre asociada a los espacios de representación de las máquinas de aprendizaje automático usadas en las aplicaciones de *soft* metrología, este artículo presenta una revisión sistemática de la literatura enfocada a la estimación de la incertidumbre en sistemas de *soft* metrología basados en datos, con el fin de comprender los antecedentes e identificar oportunidades de investigación relacionadas con el tamaño de los datos, los modelos de aprendizaje y la comprensión fenomenológica de las variables a medir, en el marco del aseguramiento de la validez de los resultados.

2. Metodología

La primera fase de la revisión de literatura se basó en una búsqueda de artículos científicos en las bases de datos de Science Direct, IEEE y Google Scholar, con el fin de conocer pruebas de laboratorios, estudios y avances científicos asociados al tema de análisis de este artículo. En síntesis, se buscaron y exploraron tendencias de investigación de *soft* metrología y estimación de la incertidumbre para el aprendizaje automático, de lo cual se obtuvieron los resultados que se muestran en la Tabla I. Para esta búsqueda, se emplearon las siguientes palabras claves en inglés: “soft metrology”, “soft sensor”, “uncertainty estimation”, “virtual sensor”, “machine learning”, “virtual metrology”, “epistemic uncertainty”, “aleatoric uncertainty”, “ensuring the validity of results”, solas y en combinaciones, según fuera el caso.

Tabla I. Resultados de la búsqueda bibliográfica en las principales bases de datos

Términos	Base de datos			Fecha de revisión
	ScienceDirect	IEEE	Google Scholar	
Soft metrology	8	0	224	27/07/2021
Soft sensor	2.797	815	19.400	27/07/2021
Soft sensor and uncertainty and estimation	721	13	4.380	27/07/2021
Soft sensor and metrology	51	6	701	27/07/2021
Virtual sensor and uncertainty	800	24	3.960	27/07/2021
Uncertainty estimation	5.789	1.403	69.600	28/07/2020
Machine learning and uncertainty estimation	37.802	2.516	860.000	28/07/2021
Machine learning and metrology	725	141	17.000	28/07/2021
Virtual metrology	139	201	1.910	28/07/2021
Virtual metrology and uncertainty	48	4	603	28/07/2021
Epistemic uncertainty	4.734	193	262.000	1/10/2021
Aleatoric uncertainty	1.920	60	33.100	1/10/2021
Metrological assurance	68	15	2.230	1/10/2021

La búsqueda en las bases de datos comenzó el 27 de julio de 2021 y, durante este periodo, se hizo la revisión de la documentación con enfoque en incertidumbre, máquinas de aprendizaje automático, procesamiento de datos y diseño de *soft* sensores, por lo que se incluyeron diferentes filtros, con el fin de hacer más específica la selección de artículos.

El criterio y justificación de la información seleccionada en este estudio se sustentó en la revisión y análisis que se hizo en el marco de las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Qué discusiones conduce la literatura hacia el análisis de incertidumbre epistémica y aleatoria cuando se involucran los espacios de representación de las máquinas de aprendizaje automático?
- ¿Cómo aporta el tamaño de los datos, el modelo de entrenamiento y la comprensión fenomenológica al análisis general de la incertidumbre en el marco del aseguramiento de la validez de los resultados en aplicaciones de *soft* metrología?
- ¿En qué medida el análisis de la incertidumbre, que incluye como fuente adicional la inducida por los espacios de representación de las máquinas de aprendizaje, interviene en los procesos de medición y se proyecta a futuro para las aplicaciones de *soft* metrología?

Como se muestra en la Fig. 1, con estas preguntas se identificaron tendencias y enfoques en cuanto a la relación de concepto y procedimiento del análisis de incertidumbre, así como el aseguramiento de la validez de los resultados en el marco de las máquinas de aprendizaje automático y, en general, la comprensión de los procesos de *soft* metrología. La selección final de información quedó constituida

por 54 documentos que cubrieron principalmente el periodo entre 2018 y 2022, aunque se incluyeron algunos documentos desde 2005 que resultaron relevantes por ser referentes importantes en la temática tratada.

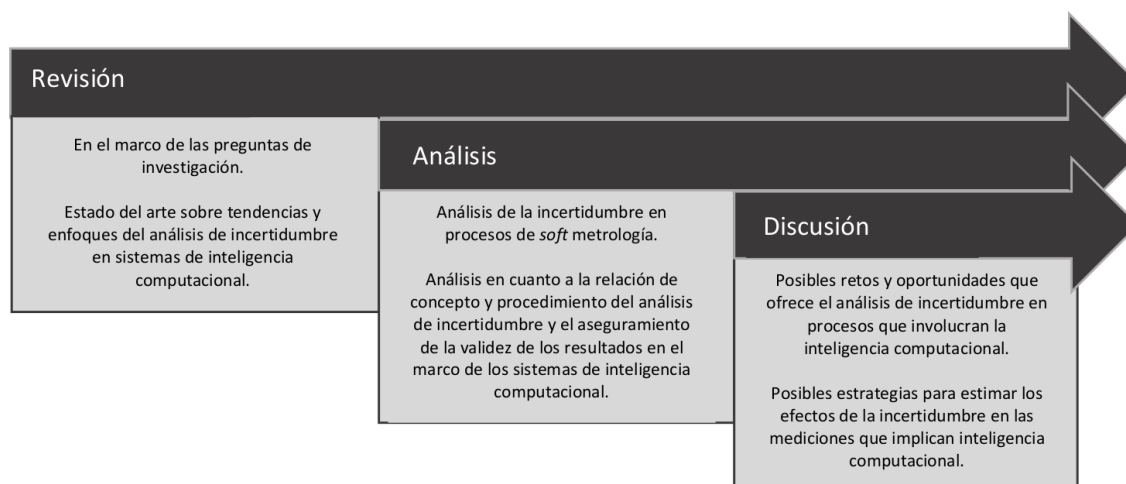


Figura 1. Etapas de la metodología de la revisión

3. Resultados

Al revisar la literatura encontrada, según los criterios explicados en la Sección 2, puede inferirse un esquema para los componentes de incertidumbre en sistemas de *soft metrología*, como el que se presenta en la Fig. 2 y a partir del cual se estructura el resto de la sección.

3.1. Análisis de incertidumbre en *soft metrología*

Hay dos enfoques importantes usados para el desarrollo de un sistema de *soft metrología*: el primero se establece como un enfoque basado en modelos físicos, el cual parte del conocimiento fenomenológico del proceso analizado (12–14); el segundo es un enfoque a partir de datos que recurre a la información observada del proceso analizado (bases de datos estructuradas) para la generación del modelo (15–18). Si bien, con las fortalezas que ofrecen los sistemas de cómputo de última generación, el enfoque derivado de los datos ha sido ampliamente investigado y probado (19,20), el procesamiento de datos históricos mediante inteligencia computacional trae consigo diferentes retos, que actualmente siguen abiertos en la comunidad científica, para lograr cada vez mejores modelos de medición indirecta en cuanto a costo y precisión (1).

En términos del concepto de *soft metrología*, no es frecuente encontrar artículos cuyo foco principal sea la estimación de la incertidumbre. Algunos trabajos presentan métodos para esta, en sistemas de medición mediados por *software* (21,22), pero estos no incluyen un proceso de inferencia. No obstante, lo que se ha podido observar es que el análisis es aplicable a los sistemas de *soft metrología* en

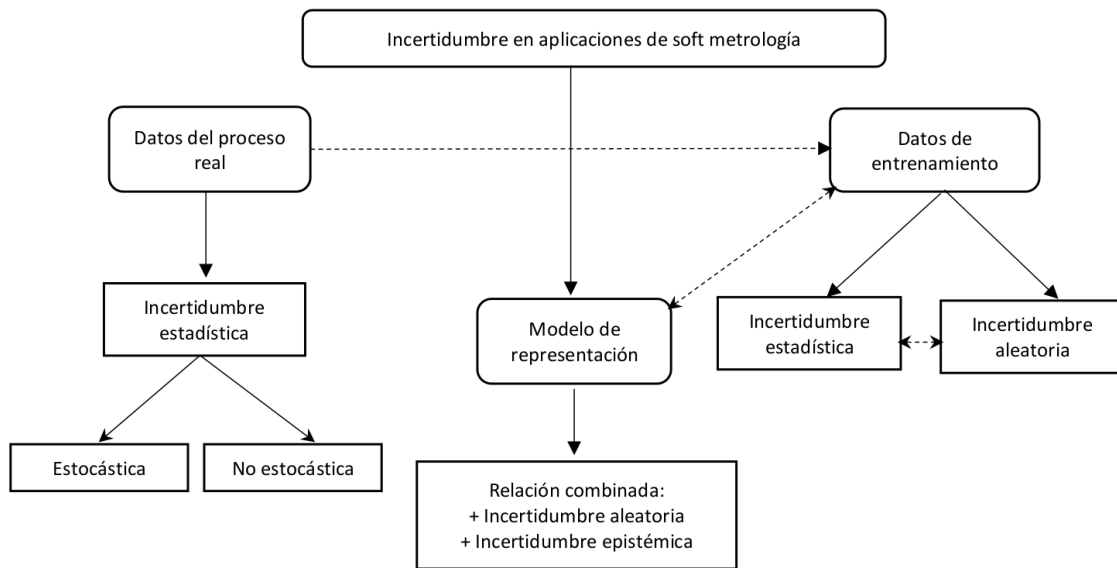


Figura 2. Diagrama de bloques del mapa conceptual

cuanto a la parte comprendida por el sistema de adquisición de datos y los modelos de procesamiento mediante herramientas digitales. Adicionalmente, se reportan una serie de componentes que aportan a la incertidumbre del sistema, como el error de conversión, error del modelo matemático y error de cálculo (como es el redondeo). En cuanto a los sistemas de *soft metrología* en sí –por ejemplo, aquellos que incluyen un proceso de inferencia–, solo algunos trabajos reportan resultados relacionados con incertidumbre: algunos se concentran en la incertidumbre exclusivamente desde el punto de vista de la creación del modelo, sin considerar la propagación de las diferentes fuentes de incertidumbre (23, 24), mientras que aquellos que sí consideran una incertidumbre desde la metrología analizan solamente sistemas con enfoque basado en modelos físicos (25, 26). En (25) se presenta un análisis de incertidumbre aplicado a un caudalímetro virtual, y en (26) se reporta un método para estimar la incertidumbre de sensores virtuales para aire acondicionado. En estos dos trabajos, se encuentra que, en general, las principales fuentes de incertidumbre pueden dividirse en dos: las relacionadas con la medición de las características que serán las entradas en la medición indirecta (uso de sensores físicos) y las que surgen del modelo de inferencia de variables (uso de métodos analíticos). Debe aclararse que los enfoques basados en el modelado físico no consideran la incertidumbre asociada a la base de datos necesaria para el entrenamiento que se exige en los enfoques basados en datos, la cual debería incluirse, puesto que también afecta la incertidumbre combinada del modelo.

La incertidumbre asociada a los sensores físicos corresponde a la que típicamente debe ser estimada en los sistemas de metrología convencional. Sin embargo, los modelos matemáticos en algunos sistemas son complejos y la aplicación de la metodología GUM conlleva muchos inconvenientes. Por esta razón, los métodos estocásticos y no estocásticos a veces se combinan, dando como resultado un modelo de estimación de incertidumbre simplificado (27).

Los procedimientos en este tipo de incertidumbre están bien definidos, aunque debe aclararse que las especificidades dependen de la magnitud a medir. Con esto en mente, en el resto de este documento se enfatizará en las incertidumbres asociadas al modelo de inferencia y, por tanto, a los datos usados para entrenamiento. La literatura encontrada, y que se referenciará en adelante, muestra que dicha incertidumbre ha sido estudiada desde las perspectivas del entrenamiento de las máquinas de aprendizaje, pero no se ha formalizado desde el punto de vista metrológico con sus implicaciones en sistemas de medición indirecta.

Como en cualquier aplicación del aprendizaje de máquina, los sistemas de *soft* metrología buscan crear un modelo que aproxime la relación fenomenológica entre las variables de entrada y la magnitud cuyo valor quiere inferirse y, por tanto, implican las mismas incertidumbres inherentes a un modelo que es una aproximación imperfecta a la dinámica fenomenológica, debido a las múltiples suposiciones que se asumen. Entre estas incertidumbres, se pueden incluir aquellas asociadas con la inferencia inductiva o con el ruido en los datos, las derivadas de suposiciones incorrectas en la generación del modelo, entre otras (28).

Existen muchas fuentes de incertidumbre en el entrenamiento de máquinas de aprendizaje, tradicionalmente modeladas de forma probabilística. Sin embargo, la generalización del uso de sistemas basados en aprendizaje implica requerimientos de calidad y seguridad que obligan a diferenciar entre las componentes de incertidumbre que son susceptibles de ser minimizadas y aquellas que no lo son, lo que conduce a una categorización en incertidumbre epistémica y aleatoria (29).

La *incertidumbre epistémica* es aquella derivada de los parámetros del modelo y se relaciona con la dificultad para inferir correctamente la función generadora de los datos subyacentes (30, 31). Así, la incertidumbre epistémica se entiende como aquella derivada de la falta de conocimiento sobre la dinámica del proceso. Por consiguiente, puede afirmarse que es, por naturaleza, factible de ser reducida, ya sea mediante la consecución de una base de datos más robusta, un cambio en las hipótesis realizadas sobre la forma del modelo o, en general, un mejor ajuste de los parámetros del modelo.

En contraste, la *incertidumbre aleatoria* se deriva de elementos no determinísticos e inherentemente aleatorios en la dinámica del proceso. Por tanto, esta incertidumbre se considera irreducible y se ha relacionado con el ruido en las observaciones y la influencia de variables ocultas o errores de medición (32, 33).

Las incertidumbres se formalizan como distribuciones de probabilidad sobre los parámetros del modelo (para el caso de la epistémica) o las entradas del modelo (para la aleatoria) (32). Esta clasificación en las fuentes de incertidumbre se ha generalizado en la literatura sobre la incertidumbre en inteligencia computacional, y su separación es bastante evidente, aunque algunos trabajos advierten que la noción de “lo que puede ser reducible” en cuanto a la incertidumbre se puede convertir en un concepto difuso y depender fuertemente del contexto al ser analizada en detalle. En este sentido, se recomienda que el análisis se realice en cada contexto, a la luz del modelo planteado (29), en consideración de qué cambios en la estructura del modelo pueden modificar las condiciones de incertidumbre. Por ejemplo, en

ejercicios de clasificación, añadir características al modelo, aumentando la dimensionalidad del espacio de representación, puede disminuir la incertidumbre aleatoria, lo que incrementa al mismo tiempo la epistémica (28).

3.2. Incertidumbre epistémica

La incertidumbre epistémica se relaciona con la densidad de los ejemplos o muestras disponibles para el entrenamiento, la elección de la forma del modelo y la falta de datos adecuados para el entrenamiento en algunas áreas del espacio de entrada (29,34,35).

Este tipo de incertidumbre se modela colocando una distribución previa sobre las ponderaciones W del modelo y capturando cuánto varían estas ponderaciones según la dinámica de los datos (36). Por ejemplo, las redes neuronales bayesianas (BNN) proporcionan un marco de principios matemáticos para este tipo de incertidumbre (30). En efecto, sea $f^W(x)$ la salida de la red neuronal, de manera que la inferencia bayesiana es usada para calcular una distribución posterior sobre los pesos $p(W|X, Y)$, de acuerdo con los datos de entrenamiento (X, Y) , donde X y Y son las muestras y las etiquetas respectivamente. A partir de esta distribución posterior, se obtiene la distribución predictiva de una muestra de prueba x , con notación $p(y|w, x)$, y se utiliza para cuantificar la incertidumbre predictiva. Sin embargo, en general, la inferencia bayesiana exacta no es computacionalmente viable para las redes neuronales. Por tanto, en la literatura se han propuesto varias alternativas, tales como la aproximación de Laplace (37), la implementación Monte Carlo de las cadenas de Markov (38) y los métodos bayesianos variacionales (39).

Otros reportes expresan el modelo de la incertidumbre epistémica, desde el método de abandono del tiempo de prueba de Monte Carlo (40), donde se entrena la red neuronal mediante deserción aleatoria (con una tasa de deserción ajustada por métodos heurísticos) para estimar la incertidumbre del modelo respecto a un ejemplo de entrenamiento x , y se usa una deserción en un tiempo de prueba con la misma probabilidad y predicciones múltiples de desempeño $\{p_t = p(y|x, X, Y, W_t)\}_{t=1\dots T}$, donde cada predicción es un vector de puntaje para el conjunto de etiquetas del sistema. Las técnicas de abandono se pueden configurar dentro de un esquema de regularización para reducir el sobreajuste de las redes neuronales. Particularmente, la inferencia bayesiana usa la entropía predictiva multiclase para analizar la incertidumbre epistémica del sistema (41,42).

Se han propuesto trabajos que recurren a técnicas y métricas de estimación de incertidumbre para redes neuronales profundas basadas en el muestreo de Monte Carlo y se aplican a problemas de clasificación (36,43). Según los resultados, las métricas de incertidumbre pueden ser utilizadas con éxito para detectar muestras fuera de distribución y de difícil integración (30). También, el análisis bayesiano ha reportado buenos resultados al modelar la incertidumbre en redes neuronales convencionales (32).

3.3. Incertidumbre aleatoria

La incertidumbre aleatoria tiene que ver, principalmente, con el ruido en las observaciones y puede categorizarse como *homocedástica* o *heterocedástica*, si se asume que el ruido es idéntico o diferente en cada una de las entradas al proceso (44,45).

La incertidumbre aleatoria no se reduce mediante un conocimiento más profundo del proceso modelado, como sí puede hacerse con la epistémica, y, como se ha mencionado, se modela mediante una distribución de probabilidades en la salida del modelo de inferencia (32).

En (45) se proponen técnicas de aumento de datos y se presenta la hipótesis de que transformaciones aleatorias simples sobre los datos permiten capturar la incertidumbre heteroscedástica en redes neuronales profundas. Para esto, se reenvían las muestras de entrenamiento varias veces a través de la red neuronal con configuraciones aleatorias de aumento de datos durante el tiempo de prueba. Para cada ejemplo de entrenamiento x , se obtiene $\{x_t\}_{t=1\dots}$ versiones por aumento de datos, y se reenvían los ejemplos de entrenamiento para obtener un conjunto de predicciones $\{P_t = p(y|x_t, X, Y, W)\}_{t=1\dots T}$. En (46) también se trabajan técnicas de aumento de datos en una aplicación de imágenes médicas, donde la incertidumbre aleatoria se modela midiendo qué tan diversas son las predicciones para una imagen sometida a diferentes transformaciones geométricas, para lo cual se asumen tanto la variancia como la entropía de la distribución $p(Y|X)$.

Una forma recurrente para estimar la incertidumbre aleatoria consiste en construir un modelo que se ajuste a la pérdida de información. Así, las predicciones con varianzas altas penalizarán las pérdidas a fin de asegurar que el modelo no se adapte a los datos asociados al ruido (47).

Otros trabajos hacen la distinción entre la incertidumbre epistémica y aleatoria, pero enfocados en identificar los errores de un modelo derivados de la incertidumbre aleatoria, para lo cual proponen que estos deben ser ignorados en el proceso de diseño (48), o re-etiquetar las bases de datos a partir de la incertidumbre aleatoria estimada (49).

3.4. Análisis conjunto de la incertidumbre epistémica y aleatoria

Como se ha mencionado, la distinción entre la incertidumbre aleatoria y epistémica puede ser difusa, está determinada por la elección del modelado y es útil para identificar fuentes de incertidumbre que se pueden reducir a corto plazo, a través de la implementación de modelos sólidos de riesgo y confiabilidad, lo cual robustece más los sistemas de toma de decisión (29).

En este sentido, algunos estudios proponen modelos en los que se asume que la incertidumbre aleatoria es conocida (39), pero otros plantean esquemas para analizar ambas incertidumbres de forma simultánea. En (32) se propone un esquema de modelado que permite el análisis, ya sea de las incertidumbres epistémica y aleatoria por separado, o de la combinación en un mismo modelo. Para esto, toman una red neuronal heteroscedástica en la cual el ruido en las observaciones se ha modelado dentro del decrecimiento de los pesos y se pone una distribución de probabilidades sobre los pesos del modelo para modelar la incertidumbre epistémica.

Es interesante encontrar trabajos, como en (50), donde se sugieren aproximaciones bayesianas con realizaciones de abandono con simulación Monte Carlo, con el fin de hacer predicciones y estimar la incertidumbre aleatoria y epistémica, donde la primera permite determinar la localización de datos ruidosos y atípicos, mientras que la segunda ayuda a cuantificar el desempeño del modelo. Además, se

encontró que el conocimiento de estas incertidumbres puede reducir el riesgo en la interpretación de las predicciones.

3.5. El rol de la incertidumbre en el aseguramiento de validez de los resultados

El aseguramiento de la validez de los resultados busca que la calidad del resultado de medición sea conforme a una referencia que cumpla con los requisitos generales establecidos. Para ello, se pueden tener en cuenta los siguientes elementos (3): valores de referencia, trazabilidad de los resultados, funcionalidad de las técnicas de procesamiento, patrón de referencia, comprobaciones intermedias, repetibilidad y reproducibilidad de las pruebas con los mismos métodos u otros similares, correlación de los resultados para diferentes características, pruebas de datos que son nuevos para el sistema y comparación inter- o intralaboratorio de los resultados. Los resultados deben ser analizados bajo los requerimientos establecidos. Si el intervalo de cobertura se encuentra dentro de las especificaciones, se puede afirmar que hay elementos para establecer la conformidad del resultado de medición; en caso contrario, hay que revisar el sistema de medición y ajustarlo dentro de los criterios de aceptación para evitar el reporte de resultados incorrectos. Aquí es muy importante el concepto de regla de decisión, sobre todo para aquellos casos en que el intervalo de cobertura se encuentra parcialmente fuera de la especificación (por lo general un error máximo permitido) (3).

Los procedimientos asociados al aseguramiento de la validez de los resultados están muy bien entendidos en muchos ámbitos y magnitudes, en particular, en aquellos casos de uso convencional en los que hay riqueza normativa y reglamentos técnicos, pero se van haciendo más confusos en aquellos campos en los que la documentación no está muy bien establecida, donde es común apoyarse en artículos científicos como principal fuente de referencia. Un ejemplo es el enfoque propuesto en este artículo en relación con el análisis de incertidumbre para aplicaciones de procesos de medición en las que se vinculan las máquinas de aprendizaje computacional, donde los espacios de representación involucran incertidumbre epistémica y aleatoria.

Por consiguiente, algunos conceptos que son ampliamente discutidos en el estado del arte, y que relacionan los elementos típicos asociados al aseguramiento de la validez de los resultados, se dirigen a la importancia de contar con la trazabilidad metrológica, la cual es una propiedad de las mediciones y no de los instrumentos (51). Dentro de la cadena jerárquica de trazabilidad metrológica, las calibraciones tienen un rol importante, ya que se constituyen en cada eslabón. En este sentido, el error y la incertidumbre (tanto epistémica como aleatoria) son conceptos esenciales también allí vinculados, incluyendo aquellos procesos que contienen etapas de inferencia o clasificación soportadas en máquinas de aprendizaje y basadas en modelos interpretables profundos, inferencia aproximada y variacional, mecanismos de atención, aprendizaje por transferencia, teoría de información y rutinas de cómputo cuántico, entre otras. En particular, es importante discutir sobre el papel del análisis de relevancia para reducir dimensiones y lograr espacios de representación efectiva (52), donde típicamente se usan ortogonalizaciones basadas en componentes principales, costos basados en teoría de información, modelos generativos y variacionales, entre otros (1). También se deben considerar las técnicas de regularización y los distintos tipos de funciones de costo utilizados en la actualidad en máquinas de aprendizaje, así como su influencia en la cuantificación y mitigación de la incertidumbre.

En este sentido, se ha propuesto combinar las fortalezas de las técnicas de regularización L_1 y L_2 con el método delta para el análisis de la incertidumbre epistémica en aplicaciones de aprendizaje profundo (53).

Una vez que se cuenta con trazabilidad metrológica para un conjunto de resultados de medición dentro de un proceso determinado, es importante evidenciar el rol que tienen los conceptos de exactitud, veracidad y precisión, en procura de no confundirlos. Allí es importante la calidad de los espacios de representación en *soft* metrología.

4. Líneas de trabajo futuro

La contribución de la incertidumbre epistémica y aleatoria en la incertidumbre general o global de un proceso de medición debe continuar una línea de trabajo futuro, con enfoque en aquellos esquemas en que los espacios de representación de las máquinas de aprendizaje propagan la incertidumbre debida al ejercicio computacional, donde el valor de la medición se infiere desde estructuras de datos multivariantes. En (1) se presenta una relación entre la calidad en la representación (CR), entendida como la capacidad del modelo para representar la dinámica del sistema estudiado, con dos elementos: el tamaño de los datos de entrenamiento (TDE) y la comprensión del fenómeno (CF), esta última asociada a cómo el modelo puede ajustarse al conocimiento de los expertos sobre el sistema y los factores que afectan la dinámica. La primera relación (CR-TDE) tiene un comportamiento logarítmico directamente proporcional a la calidad en la representación, mientras que la segunda (CR-CF) exhibe un comportamiento intuitivo similar a una curva logística, aunque sigue siendo un tema abierto en la literatura. Al relacionar estos comportamientos, en la Fig. 3 se ilustra de manera conceptual el comportamiento de la incertidumbre aleatoria (IA) y epistémica (IE) en relación con la CR, el TDE y la CF. En esta figura también se hace alusión al concepto AME, que corresponde a una valoración asociada al ajuste del modelo de entrenamiento.

La Fig. 3 indica una región correspondiente a la calidad en la representación de las máquinas de aprendizaje que soportan la *soft* metrología, la cual está influenciada por la incertidumbre aleatoria en un nivel constante, mientras la incertidumbre epistémica tiene una dinámica descendente. Los estudios futuros deben validar que esto se debe a que el ruido de representación intrínseco en los datos, asociado a la incertidumbre aleatoria, proviene de las perturbaciones contenidas en todas las componentes fenomenológicas, al ser parte de las dinámicas interactuantes naturales del mundo real, por lo que se considera independiente al ajuste del modelo de entrenamiento y al tamaño de los datos analizados, y por tanto es asumida como una constante en la ilustración. En cambio, queda planteado el hecho de que la incertidumbre epistémica sí se puede corregir mediante la optimización del ajuste de parámetros del modelo y mediante el aseguramiento de suficientes datos de entrenamiento, ayudado del conocimiento que se tenga del fenómeno de análisis, de manera que la cota superior de la calidad de la representación en *soft* metrología siempre estará dada por el acceso a ese conocimiento. Es de resaltar que, para el aseguramiento de la validez de los resultados (también *aseguramiento metrológico*), se requiere que la calidad de la representación asociada con la medición vincule dos tipos de precisión, a saber, la repetibilidad y la reproducibilidad (R&R) (54). La primera hace referencia a la

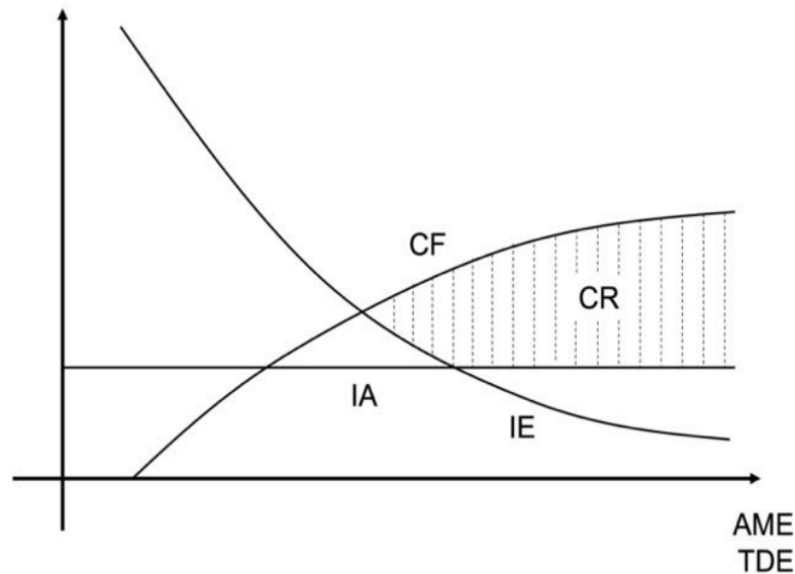


Figura 3. Relación entre calidad en la representación y las incertidumbres epistémica y aleatoria

precisión en periodos cortos de tiempo y con iguales condiciones de medición constantes, mientras la segunda consiste en la precisión cuando las condiciones de medición cambian y no necesariamente se contemplan periodos cortos de tiempo. Con frecuencia, las pruebas R&R se realizan con el propósito de asegurar la calidad de la medición según el análisis de la reproducibilidad cuando hay un cambio en el operador; aunque es un enfoque válido, se requieren nuevos estudios que profundicen y validen que la reproducibilidad se debe establecer con respecto al cambio de cualquier otra condición. Al final, se busca una compatibilidad en las mediciones, según el enfoque del Vocabulario Internacional de Metrología (VIM) (51). En consecuencia, se requiere la realización de comparaciones inter- o intralaboratorio, con el propósito de validar la competencia del laboratorio en el proceso de medición particular, donde la documentación debe formalizar los detalles experimentales, procedimentales y de análisis (3).

5. Conclusiones

En este artículo se discute sobre los hallazgos en la literatura relacionados con el análisis de incertidumbre en procesos de medición vinculados a aplicaciones de *soft* metrología, de manera que se hace la distinción entre incertidumbre epistémica y aleatoria, con el fin de aportar un mejor análisis sobre el papel de la incertidumbre en espacios de representación que están compuestos por conjuntos de variables y diferentes medidas alrededor de un fenómeno. Con esto, es posible obtener otras mediciones que son costosas o no observables en algún proceso particular. En conjunto, se busca favorecer los procesos de medición con máquinas de aprendizaje automático para la toma de decisiones con soporte en inteligencia computacional. Adicionalmente, se relaciona el tamaño de los datos, los modelos de entrenamiento y la comprensión fenomenológica con el análisis de la incertidumbre en el marco del aseguramiento de la validez de los resultados.

Si bien no es frecuente encontrar nuevas propuestas para la estimación de la incertidumbre en aplicaciones de *soft* metrología basadas en datos, sí existe una literatura amplia que aborda por separado cada una de los principales componentes individuales, por ejemplo, la incertidumbre derivada de los sensores físicos y la asociada a los modelos de inferencia basados en datos. Aquí toma lugar la incertidumbre epistémica y aleatoria, donde esta última hace referencia al ruido de representación que tiene su origen en las frecuencias naturales resultantes de la interacción que tienen todos los subsistemas en el proceso fenomenológico; mientras la primera se asocia a los espacios de representación con los que las máquinas de aprendizaje traducen el comportamiento fenomenológico mediante estructuras multivariadas que conforman el modelo de entrenamiento, de manera que estos espacios son sensibles a la cantidad de los datos, el ajuste adecuado de los parámetros y la selección de variables relevantes en función de una representación efectiva. Por consiguiente, los desafíos que se tienen para cuantificar y mitigar la incertidumbre epistémica en procesos en los que se incluye la inteligencia computacional deben considerar preponderantemente el tamaño de los datos, los ajustes del espacio de representación para el modelo de entrenamiento y la comprensión fenomenológica, además de tomar como factor clave el desarrollo de nuevos esquemas de optimización, regularización y análisis de relevancia orientados a una mayor confiabilidad en los procesos de medición, en el marco del aseguramiento de la validez de los resultados en la *soft* metrología.

Debido a la necesidad de optimizar recursos y operaciones en los procesos productivos, los sistemas metroológicos han requerido el desarrollo de nuevos dispositivos de medición para el control de magnitudes asociadas a fluidos, gases, entre otros, por lo que, en los últimos años, una alta variedad de sensores y actuadores contienen microprocesadores que los convierten en herramientas basadas en datos, que a su vez requieren de una infraestructura de medición como la *soft* metrología para garantizar una implementación tecnológica eficiente, orientada a procesos de medición que, de forma confiable y segura, se incluyan en sistemas de tomas de decisiones en el marco de la calidad en la representación de mínimo error y concepción de distintas categorías de incertidumbre. En este sentido, las líneas de trabajo futuro se orientan a nuevas propuestas metodológicas que aseguren resultados confiables frente al tamaño de los datos de entrenamiento, robustez frente al ajuste de parámetros del modelo y el espacio de representación, y la vinculación del conocimiento experto en las rutinas de entrenamiento de las máquinas de aprendizaje.

6. Agradecimientos

Este artículo se presenta en el marco del proyecto P17202 y el programa Jóvenes Investigadores e Innovadores, los cuales han sido financiados por el Instituto Tecnológico Metropolitano de Medellín.

7. Contribución de autores

VAC desarrolló la curaduría de los datos y participó en la escritura del primer borrador del manuscrito. INB participó en la conceptualización y el análisis formal. MV desarrolló la metodología, y participó en la supervisión de la investigación y en la escritura, revisión y edición del manuscrito. NBC participó en la conceptualización y el análisis formal, como también en la revisión del manuscrito.

EDT obtuvo la financiación para la investigación y participó en la supervisión de la investigación y en la escritura, revisión y edición del manuscrito.

Referencias

- [1] M. Vallejo, C. de la Espriella, J. Gómez-Santamaría, A. F. Ramírez-Barrera y E. Delgado-Trejos, "Soft metrology based on machine learning: A review," *Meas. Sci. Tech.*, vol. 31, no. 3, pp. 1-16, 2020. <https://doi.org/10.1088/1361-6501/ab4b39> ↑2, 3, 5, 10, 11
- [2] L. Rossi, "Objectifying the subjective: Fundaments and applications of soft metrology," en *New Trends Developments in Metrology*, L. Cocco, ed., London: IntechOpen, 2016, pp. 255-281. <https://doi.org/10.5772/64123> ↑3
- [3] "ISO/IEC 17025:2017 General requirements for the competence of testing and calibration laboratories," International Organization for Standardization, 2017. ↑3, 10, 12
- [4] "Guide to the expression of measurement uncertainty," Joint Committee for Guides in Metrology (JCGM), 2008, pp. 1-142. ↑3
- [5] "Evaluation of measurement data — Supplement 1 to the 'Guide to the expression of uncertainty in measurement' — Propagation of distributions using a Monte Carlo method," Joint Committee for Guides in Metrology (JCGM), 2008. ↑3
- [6] Y. Wang, S. Wang y C. Decès-Petit, "A Bayesian method for on-line evaluation of uncertainty in measurement of Coriolis flow meters," *Measurement*, vol. 179, p. 109448, 2021. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2021.109448> ↑3
- [7] Y. Cheng, X. H. Chen, H. L. Li, Z. Y. Cheng, R. Jiang, J. Lü y H. D. Fu, "Analysis and comparison of Bayesian methods for measurement uncertainty evaluation," *Math. Prob. Eng.*, vol. 2018, no. 3, pp. 1-10, 2018. <https://doi.org/10.1155/2018/7509046> ↑3
- [8] J. D. Molina-Muñoz, L. F. Giraldo-Jaramillo y E. Delgado-Trejos, "Bayesian evaluation for uncertainty of indirect measurements in comparison with GUM and Monte Carlo," *Ing. Univ.*, vol. 26, pp. 1-26, Jul. 2022. <https://doi.org/10.11144/Javeriana.iued26.beui> ↑3
- [9] T. Dietz et al., "Introducing multiobjective complex systems," *Eur. J. Operat. Res.*, vol. 280, no. 2, pp. 581-596, Jan. 2020. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2019.07.027> ↑3
- [10] C. Cai, J. Wang y Z. Li, "Assessment and modelling of uncertainty in precipitation forecasts from TIGGE using fuzzy probability and Bayesian theory," *J. Hydrology*, vol. 577, p. 123995, Oct. 2019. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2019.123995> ↑3
- [11] S. F. dos Santos y H. S. Brandi, "Application of the GUM approach to estimate uncertainty in measurements of sustainability systems," *Clean Technol. Environ. Policy*, vol. 18, no. 2, pp. 493-505, Feb. 2016. <https://doi.org/10.1007/s10098-015-1029-3> ↑3
- [12] S. Vemulapalli y S. K. Venkata, "Soft sensor for an orifice flowmeter in presence of disturbances," *Flow Meas. Inst.*, vol. 86, p. 102178, 2022. <https://doi.org/10.1016/j.flowmeasinst.2022.102178> ↑5

- [13] J. Xu, D. Fu, L. Shao, X. Zhang y G. Liu, "A soft sensor modeling of cement rotary kiln temperature field based on model-driven and data-driven methods," *IEEE Sensors J.*, vol. 21, no. 24, pp. 27632-27639, 2021. <https://doi.org/10.1109/JSEN.2021.3116937> ↑5
- [14] H. Roh et al., "Development of the virtual metrology for the nitride thickness in multi-layer plasma-enhanced chemical vapor deposition using plasma-information variables," *IEEE Trans. Semicond. Manu.*, vol. 31, no. 2, pp. 232-241, 2018. <https://doi.org/10.1109/TSM.2018.2824314> ↑5
- [15] Z. He, J. Qian, J. Li, M. Hong y Y. Man, "Data-driven soft sensors of papermaking process and its application to cleaner production with multi-objective optimization," *J. Cleaner Prod.*, vol. 372, p. 133803, 2022. <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2022.133803> ↑5
- [16] P. Kadlec, B. Gabrys y S. Strandt, "Data-driven soft sensors in the process industry," *Comp. Chem. Eng.*, vol. 33, no. 4, pp. 795-814, 2009. <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2008.12.012> ↑5
- [17] W. Shao, W. Han, Y. Li, Z. Ge y D. Zhao, "Enhancing the reliability and accuracy of data-driven dynamic soft sensor based on selective dynamic partial least squares models," *Cont. Eng. Pract.*, vol. 127, p. 105292, 2022. <https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2022.105292> ↑5
- [18] L. Ren, T. Wang, Y. Laili y L. Zhang, "A data-driven self-supervised LSTM-DeepFM model for industrial soft sensor," *IEEE Tran. Ind. Inform.*, vol. 18, no. 9, pp. 5859-5869, 2022. <https://doi.org/10.1109/TII.2021.3131471> ↑5
- [19] J.-C. Ren, D. Liu y Y. Wan, "VMD-SEAE-TL-Based Data-Driven soft sensor modeling for a complex industrial batch processes," *Meas.*, vol. 198, art. 111439, 2022. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2022.111439> ↑5
- [20] Y. Liu y M. Xie, "Rebooting data-driven soft-sensors in process industries: A review of kernel methods," *J. Process Cont.*, vol. 89, pp. 58-73, 2020. <https://doi.org/10.1016/j.jprocont.2020.03.012> ↑5
- [21] M. J. Korczynski y A. Hetman, "A calculation of uncertainties in virtual instrument," *2005 IEEE Inst. Meas. Technol. Conf. Proc.*, vol. 3, pp. 1697-1701, 2005. <https://doi.org/10.1109/IMTC.2005.1604459> ↑5
- [22] X. Wenjun, F. Yuguang, Q. Liang y Y. Yunfeng, "Metrological methods for virtual instrument," *2011 IEEE Int. Conf. Comp. Sci. Autom. Eng.*, vol. 3, pp. 558-561, 2011. <https://doi.org/10.1109/CSAE.2011.5952740> ↑5
- [23] M. Mowbray et al., "Probabilistic machine learning based soft-sensors for product quality prediction in batch processes," *Chemometrics Intell. Lab. Syst.*, vol. 228, p. 104616, 2022. <https://doi.org/10.1016/j.chemolab.2022.104616> ↑6
- [24] L. Frau, G. A. Susto, T. Barbariol y E. Feltresi, "Uncertainty estimation for machine learning models in multiphase flow applications," *Informatics*, vol. 8, no. 3, Sep. 2021. <https://doi.org/10.3390/informatics8030058> ↑6
- [25] L. Song, G. Wang y M. R. Brambley, "Uncertainty analysis for a virtual flow meter using an air-handling unit chilled water valve," *HVAC&R Res.*, vol. 19, no. 3, pp. 335-345, 2013. <https://doi.org/10.1080/10789669.2013.774890> ↑6

- [26] H. Cheung y J. E. Braun, "A general method for calculating the uncertainty of virtual sensors for packaged air conditioners," *Int J. Refrig.*, vol. 63, pp. 225-236, 2016. <https://doi.org/10.1016/j.ijrefrig.2015.06.022> ↑6
- [27] S. Sediva y M. Havlikova, "Comparison of GUM and Monte Carlo method for evaluation measurement uncertainty of indirect measurements," en *Proc. 14th Int. Carpathian Control Conf. (ICCC)*, pp. 325-329, 2013. <https://doi.org/10.1109/CarpathianCC.2013.6560563> ↑6
- [28] E. Hüllermeier y W. Waegeman, "Aleatoric and epistemic uncertainty in machine learning: An introduction to concepts and methods," *Machine Learning*, vol. 110, no. 3, pp. 457-506, 2021. <https://doi.org/10.1007/s10994-021-05946-3> ↑7, 8
- [29] A. Der Kiureghian y O. Ditlevsen, "Aleatory or epistemic? Does it matter?," *Struct. Safety*, vol. 31, no. 2, pp. 105-112, 2009. <https://doi.org/10.1016/j.strusafe.2008.06.020> ↑7, 8, 9
- [30] M. Combalia, F. Hueto, S. Puig, J. Malvey y V. Vilaplana, "Uncertainty estimation in deep neural networks for dermoscopic image classification," en *2020 IEEE/CVF Conf. Comp. Vision Pattern Recog. Work. (CVPRW)*, 2020, pp. 3211-3220. <https://doi.org/10.1109/CVPRW50498.2020.00380> ↑7, 8
- [31] V.-L. Nguyen, M. H. Shaker y E. Hüllermeier, "How to measure uncertainty in uncertainty sampling for active learning," *Machine Learning*, vol. 11, pp. 89-122, 2021. <https://doi.org/10.1007/s10994-021-06003-9> ↑7
- [32] A. Kendall y Y. Gal, "Kendall, A., & Gal, Y. (2017). What uncertainties do we need in Bayesian deep learning for computer vision? In 31st Conference on Neural Information Processing Systems (NIPS 2017) (Vol. 2017-Decem, pp. 5575-5585). Long Beach, CA, USA. What uncertainties do," *31st Conf. Neural Info. Proc. Syst. (NIPS 2017)*, vol. 2017, pp. 5575-5585, Mar.-Dec. 2017. ↑7, 8, 9
- [33] N. Tagasovska y D. Lopez-Paz, "Single-model uncertainties for deep learning," en *33rd Conf. Neural Info. Proc. Syst. (NeurIPS 2019)*, 2019, pp. 1-12. ↑7
- [34] H. Al Osman y S. Shirmohammadi, "Machine learning in measurement part 2: Uncertainty quantification," *IEEE Inst. Meas. Mag.*, vol. 24, no. 3, pp. 23-27, 2021. <https://doi.org/10.1109/MIM.2021.9436102> ↑8
- [35] K. Posch y J. Pilz, "Correlated parameters to accurately measure uncertainty in deep neural networks," *IEEE Trans. Neural Net. Learning Syst.*, vol. 32, no. 3, pp. 1037-1051, 2021. <https://doi.org/10.1109/TNNLS.2020.2980004> ↑8
- [36] A. Lakshminarayanan, B. Pritzel y C. Blundell, "Simple and scalable predictive uncertainty estimation using deep ensembles," en *31st Conf. Neural Info. Proc. Syst.*, 2017, pp. 1-12. ↑8
- [37] E. Daxberger, A. Kristiadi, A. Immer, R. Eschenhagen, M. Bauer y P. Hennig, "Laplace redux - effortless Bayesian deep learning," *Adv. Neural Info. Proc. Syst.*, vol. 24, pp. 20089-20103, 2021. <https://scopus.bibliotecaitm.elogim.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85131861907&partnerID=40&md5=675aa0e7c27940e7c1aa25272c0fdb09> ↑8
- [38] R. Neal, *Bayesian Learning for Neural Networks*, New York, NY, USA: Springer-Verlag, 1996. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0745-0> ↑8

- [39] A. Olivier, M. D. Shields y L. Graham-Brady, "Bayesian neural networks for uncertainty quantification in data-driven materials modeling," *Comp. Meth. App. Mech. Eng.*, vol. 386, art. 114079, 2021. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2021.114079> ↑8, 9
- [40] L. V. Jospin, H. Laga, F. Boussaid, W. Buntine y M. Bennamoun, "Hands-on Bayesian neural networks—A tutorial for deep learning users," *IEEE Comp. Intell. Mag.*, vol. 17, no. 2, pp. 29-48, May 2022. <https://doi.org/10.1109/MCI.2022.3155327> ↑8
- [41] R. Feng, "Uncertainty analysis in well log classification by Bayesian long short-term memory networks," *J. Petrol. Sci. Eng.*, vol. 205, p. 108816, 2021. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2021.108816> ↑8
- [42] V. K. Kurmi, B. N. Patro, V. K. Subramanian y V. P. Namboodiri, "Do not forget to attend to uncertainty while mitigating catastrophic forgetting," en *2021 IEEE Winter Conf. App. Comp. Vision (WACV)*, 2021, pp. 736-745. <https://doi.org/10.1109/WACV48630.2021.00078> ↑8
- [43] Y. Gal y Z. Ghahramani, "Dropout as a Bayesian approximation: Representing model uncertainty in deep learning," *Proc. 33rd Int. Conf. Machine Learning*, vol. 48, pp. 1050-1059, 2016. ↑8
- [44] P. D. Wentzell, C. Giglio y M. Kompany-Zareh, "Beyond principal components: A critical comparison of factor analysis methods for subspace modelling in chemistry," *Analyt. Meth.*, vol. 13, no. 37, pp. 4188-4219, 2021. <https://doi.org/10.1039/d1ay01124c> ↑8
- [45] M. S. P. B. Ayhan, "Test-time data augmentation for estimation of heteroscedastic aleatoric uncertainty in deep neural networks no title," en *1st Conf. Med. Imaging Deep Learning*, 2018, pp. 1-9. ↑8, 9
- [46] G. Wang, W. Li, M. Aertsen, J. Deprest, S. Ourselin y T. Vercauteren, "Aleatoric uncertainty estimation with test-time augmentation for medical image segmentation with convolutional neural networks," *Neurocomp.*, vol. 338, pp. 34-45, 2019. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2019.01.103> ↑9
- [47] Z. Liu y Z. Han, "Efficient uncertainty estimation for monocular 3D object detection in autonomous driving," *IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems, Proceedings, ITSC*, vol. 2021-Sep., pp. 2711-2718, 2021. <https://doi.org/10.1109/ITSC48978.2021.9564433> ↑9
- [48] J. Ali, P. Lahoti y K. P. Gummadi, "Accounting for model uncertainty in algorithmic discrimination," in *AIES 2021 - Proc. 2021 AAAI/ACM Conf. AI Ethics Soc.*, 2021 pp. 336-345. <https://doi.org/10.1145/3461702.3462630> ↑9
- [49] E. Redekop and A. Chernyavskiy, "Uncertainty-based method for improving poorly labeled segmentation datasets," in *2021 IEEE 18th Int Symp. Biomed. Imaging (ISBI)*, 2021, pp. 1831-1835. <https://doi.org/10.1109/ISBI48211.2021.9434065> ↑9
- [50] C. Junhwan, O. Seokmin y B. Joongmoo, "Uncertainty estimation in AVO inversion using Bayesian dropout based deep learning," *J. Petrol. Sci. Eng.*, vol. 208, p. 109288, 2022. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2021.109288> ↑9
- [51] "JCGM 200:2012. International vocabulary of metrology – Basic and general concepts and associated terms (VIM)," Joint Committee for Guides in Metrology (JCGM), 2012. ↑10, 12

-
- [52] M. Vallejo, C. J. Gallego, L. Duque-Muñoz y E. Delgado-Trejos, "Neuromuscular disease detection by neural networks and fuzzy entropy on time-frequency analysis of electromyography signals," *Exp. Syst.*, vol. 35, no. 4, p. e12274, Aug. 2018. <https://doi.org/10.1111/exsy.12274> ↑10
- [53] G. K. Nilsen, A. Z. Munthe-Kaas, H. J. Skaug y M. Brun, "Epistemic uncertainty quantification in deep learning classification by the Delta method," *Neural Net.*, vol. 145, pp. 164-176, Jan. 2022. <https://doi.org/10.1016/j.neunet.2021.10.014> ↑11
- [54] Y. P. Paisan y J. P. Moret, "La repetibilidad y reproducibilidad en el aseguramiento de la calidad de los procesos de medición," *Tecnol. Quím.*, vol. 30, no. 2, Mar. 2010. <https://tecnologiaquimica.uo.edu.cu/index.php/tq/article/view/994> ↑11
-

Valentina Agudelo Cardona

Estudiante de Tecnología en Control de la Calidad, Instituto Tecnológico Metropolitano (Medellín, Colombia). Es integrante del semillero de Metrología Científica desde el año 2020. Ha participado en capacitaciones para programación Python, procesos metrológicos y formulación de proyecto de investigación. Pertenece al proyecto joven investigador del Instituto Tecnológico Metropolitano. Participó en ciclos de formación en los cuales impartió módulos de metrología.

Email: valentinaagudelo288721@correo.itm.edu.co

Íngrid Natalia Barbosa Bonilla

Profesional en Ingeniería Mecatrónica, Instituto Técnico Central de la Salle (Bogotá D. C., Colombia). Estudiante de Maestría en Metrología, Instituto Tecnológico Metropolitano (Medellín, Colombia). Desde antes de obtener su título profesional, ya se desempeñaba en el campo laboral de la metrología industrial en empresas multiservicios, cuyas líneas de negocio son certificación de productos, organismos de inspección y laboratorios de calibración y ensayo. Allí participó en modelos eficientes de gestión metrológica y procesos de ampliación de alcances, según las nuevas líneas de negocio que se desearan implementar. Actualmente trabaja en la ciudad de Medellín, en una empresa con características similares en el cargo de analista de laboratorio de metrología, con funciones propias de aplicación e implementación de procesos metrológicos que incluyen confirmaciones de métodos y análisis de metodologías que permitan el desarrollo corporativo y a su vez se migre o se use los avances en procesamientos de datos en la metrología.

Email: ingridbarbosa315815@correo.itm.edu.co

Marcela Vallejo Valencia

Magíster en ingeniería, Universidad de Antioquia (Medellín, Colombia). Ingeniera electrónica, Universidad de Antioquia. De 2009 a 2016, se desempeñó como docente en la Universidad de Antioquia, vinculada al grupo de investigación Gepar. En 2013 inició su trabajo como docente en el Instituto Tecnológico Metropolitano (ITM). Actualmente es docente en el Departamento de Electrónica y Telecomunicaciones del ITM, y pertenece a la línea de investigación en Metrología del grupo de investigación Calidad, Metrología y Producción. Sus intereses académicos y científicos se orientan al

reconocimiento de patrones, entrenamiento de máquinas de aprendizaje, acondicionamiento de señales y *soft metrología*.

Email: marcelavallejo@itm.edu.co

Nelson Bahamón Cortés

Físico y magíster en Matemática Aplicada, Universidad Nacional de Colombia, con mención meritoria en su tesis de maestría. Se desempeña en el Instituto Nacional de Metrología como profesional especializado en el Grupo Interno de Trabajo de I+D+i. Líder del Grupo de Investigación en Metrología Científica e Industrial (GIMCI) de la Subdirección de Metrología Física del Instituto. Tiene publicaciones y participación en diversos eventos de metrología. Imparte varios cursos ofertados por el Instituto, entre ellos el de Incertidumbre en las Mediciones. Tiene experiencia en docencia universitaria en física y matemáticas.

Email: nbahamon@inm.gov.co

Edilson Delgado Trejos

Ingeniero electrónico, Universidad Nacional de Colombia (Manizales, Colombia). Magíster en Automatización Industrial. Doctor en Ingeniería con Línea de Investigación en Automática, Universidad Nacional de Colombia. De 2009 a 2011, se desempeñó como director del Centro de Investigación del Instituto Tecnológico Metropolitano (ITM). Entre 2012 y 2013, realizó una estancia en el Instituto de Ciencias Geológicas y Nucleares de Nueva Zelanda. De 2013 a 2015, estuvo en el cargo de decano de la Facultad de Ingenierías del ITM y de 2017 a 2019 asumió el cargo de vicerrector de Investigación y Extensión Académica de la misma institución. Actualmente, es profesor titular en el Departamento de Calidad y Producción del ITM. Es líder de la línea de investigación en Metrología y tutor del semillero de investigación Metrología Científica. Cuenta con la distinción de investigador sénior de MinCiencias, y sus intereses académicos y científicos se orientan al reconocimiento de patrones, entrenamiento de máquinas de aprendizaje, sistemas de soporte de decisión y *soft metrología*.

Email: edilsondelgado@itm.edu.co



Research

Solving the Multi-Vehicle Inventory Routing and Management Integrated Problem Using Mixed-Integer Linear Programming

Resolución del problema integrado de enrutamiento y gestión de inventarios con múltiples vehículos mediante programación lineal entera mixta

Frank Alejandro Hincapié-Londoño¹  *, Jhonatan Stiven García-Guevara¹  y Eliana Mirledy Toro-Ocampo¹

¹Grupo de Aplicaciones en Optimización y Procesos Estocásticos (GAOPE). Universidad Tecnológica de Pereira (Pereira, Risaralda, Colombia).

Abstract

Context: Inventory control and distribution are key processes in the loss of both efficiency and effectiveness in the field of logistics at the global level. According to the Colombian National Planning Department, for the year 2020, the items of transportation, storage, and inventory account for 73,9% of the total logistics costs. Solving the multi-vehicle Inventory Routing Problem (IRP) is an alternative to making cycle times shorter, more flexible, and less expensive.

Method: This article describes and compares mathematical models in the literature for the basic problem, adapting it to its multi-vehicle variant and solving it by means of mixed-integer programming models, via the solution of instances of low and medium mathematical complexity, proposing two ways to manage the inventory and three ways to eliminate the creation of sub-tours. To obtain the results, the AMPL software is used in a computer with an Intel Core i5-5200U CPU@ 2.2 GHz processor and 4 GB RAM, considering a maximum runtime of one hour.

Results: The flow model shows the best performance in terms of computational times and response quality regarding the maximum level (ML) policy, and the MTZ variant is the second-best model. Finally, the overall variation exhibits longer execution times and higher GAP values. The models perform well for small- and medium-sized instances.

Conclusions: This research presents a general methodology that can be adapted to different applications of the integrated problem of inventory and routing with multiple vehicles. It was verified that the responses generated are of good quality, highlighting the elimination of sub-tours through the flow model and inventory management under the ML policy. Future work should be directed towards finding new alternatives to exact optimization, such as heuristics and metaheuristics, which allow being as close as possible to the optimum in shorter computation times. In addition, stochastic demands could be considered, as well as the handling of perishable products, among others.

Keywords: inventory management, inventory routing problem, logistics, mathematical modeling, vehicle routing

Article history

Received:
25th/Dec/2021

Modified:
08th/Jul/2022

Accepted:
16nd/Mar/2023

Ing., vol. 28, no. 2,
2023. e18961

©The authors;
reproduction right
holder Universidad
Distrital Francisco
José de Caldas.

Open access



*✉ Correspondence: frank.hincapie@utp.edu.co

Resumen

Contexto: El control y distribución de inventarios son procesos claves en la pérdida tanto de eficiencia como de eficacia en el campo de la logística, a nivel global. Según el Departamento Nacional de Planeación de Colombia, en el año 2020, los rubros de transporte, almacenamiento e inventarios correspondieron al 73,9% del costo logístico total. La resolución del problema de enrutamiento inventario con múltiples vehículos (IRP) representa una alternativa para hacer que los tiempos de ciclo sean más cortos, más flexibles y menos costosos.

Método: En este artículo se describen y comparan modelos matemáticos de la literatura para el problema base, adaptándolo a su variante con múltiples vehículos y resolviéndolo a través modelos de programación lineal entera mixta, mediante la solución de instancias de baja y media complejidad matemática, planteando dos maneras de gestionar el inventario y tres formas de eliminar la creación de *sub-tours*. Para obtener los resultados se utiliza el software AMPL en un computador con procesador Intel Core i5-5200U CPU @ 2.2 GHz y 4 GB de RAM, considerando un tiempo máximo de ejecución de una hora.

Resultados: El modelo de flujos muestra el mejor desempeño en cuanto a tiempos computacionales y calidad de la respuesta con respecto a la política de máximo nivel (ML), y la variante MTZ es el segundo mejor modelo. Por último, la variación general reporta mayores tiempos de ejecución y valores GAP más altos. Los modelos presentan buen desempeño para instancias de pequeño y mediano tamaño.

Conclusiones: En esta investigación se presenta una metodología general que puede ser adaptada a diferentes aplicaciones del problema integrado de inventarios y enrutamiento con múltiples vehículos. Se comprobó que las respuestas generadas son de buena calidad, destacando la eliminación de *sub-tours* por medio del modelo de flujos y la gestión de inventarios bajo la política ML. Los trabajos futuros deben encaminarse en busca de nuevas alternativas a la optimización exacta, tales como las heurísticas o metaheurísticas, que permitan estar lo más cerca posible del óptimo en tiempos de computación más cortos. Además, se podrían considerar demandas estocásticas y el manejo de productos perecederos, entre otros.

Palabras clave: gestión de inventarios, problema de enrutamiento de inventario, logística, modelado matemático, enrutamiento de vehículos.

Tabla de contenidos

	Página		
1. Introducción	3		
2. Formulación matemática	5		
2.1. Gestión de inventarios	9	2.2.1. Eliminación de <i>sub-tours</i> por flujos	10
2.1.1. Ordenar hasta el nivel - Order up to level (OU)	9	2.2.2. Eliminación de <i>sub-tours</i> Miller-Tucker-Zemlin (MTZ)	10
2.2. Eliminación de <i>sub-tours</i>	9		
		3. Resultados computacionales	11
		3.1. Cantidad de variables y restriccio- nes	11
		3.2. Tiempos de ejecución y GAP	13
		3.2.1. <i>Multi-vehicle</i> IRP (ML) H=3, K=2	13

3.2.2. <i>Multi-vehicle</i> IRP (ML) H=3, K=3	14	3.3. Interpretación de resultados	15
3.2.3. <i>Multi-vehicle</i> IRP (OU) H=3, K=2	15	4. Conclusiones	17
3.2.4. <i>Multi-vehicle</i> IRP (OU) H=3, K=3	15	5. Agradecimientos	17
		6. Contribución de autores	17
		Referencias	17

1. Introducción

El *vendor-managed inventory* (VMI) es una iniciativa en la gestión de la cadena de suministros que se popularizó en 1980 gracias a Walmart y Procter & Gamble. Esta iniciativa considera un problema de distribución en el que un producto debe ser enviado desde un proveedor (fabricante o distribuidor) a varios minoristas en un horizonte de tiempo determinado (1). Cada minorista define un nivel máximo de inventario, que el proveedor debe gestionar a fin de que no haya desabastecimiento, por lo que debe programar sus visitas utilizando vehículos de capacidad limitada y considerando el manejo de inventarios bajo una de dos políticas: *maximum level* (ML), donde se repone el inventario de acuerdo con la demanda del minorista en cada periodo de tiempo; y *order up to level* (OU), que busca que las cantidades entregadas alcancen el nivel máximo de inventario. El manejo de la información de inventarios de todos los minoristas es el factor determinante para gestionar la satisfacción de la demanda, minimizando los costos de inventarios. Además, si dentro de los objetivos también está la planificación de las rutas, se configura el *inventory routing problem* (IRP).

Actualmente, las compañías están experimentando costos elevados de transporte, un incremento en la inversión de inventarios y tiempos de ciclos más largos e impredecibles (2). Al mismo tiempo, los clientes son más demandantes, exigiendo precios más bajos, alta calidad, cumplimiento de los tiempos prometidos de entrega y mayor capacidad de respuesta por parte del proveedor, por lo que la integración de sistemas logísticos en las empresas ha ido en aumento, evidenciando los beneficios obtenidos al incorporarlos, tanto para la compañía como para los clientes (3). Los avances tecnológicos y los sistemas de información han impactado significativamente el aumento de la competitividad empresarial a nivel global, donde la logística desarrolla un papel fundamental. Esta cubre desde la planificación, el control y el almacenamiento de los productos hasta la verificación de entregas en los puntos de consumo, con el fin de satisfacer los requerimientos del cliente (4).

La correcta gestión de la cadena de suministro ha tomado mayor relevancia, a consecuencia de impactos cada vez más importantes como la necesidad de sostenibilidad ambiental, la congestión urbana, la búsqueda de eficiencia logística y los costos asociados tanto al transporte como al inventario de mercancía (3). Explorar soluciones con el fin de reducir los costos logísticos es un área de interés tanto para la comunidad académica como para la empresarial, en particular el comercio electrónico, pues este ha revolucionado el comportamiento y las necesidades de los clientes y, en consecuencia, la forma en que las empresas hacen negocios. Esto, debido en gran medida al aumento de compras por canales digitales, lo cual ha significado incrementos históricos en ventas y compras por internet, como es el caso del mercado colombiano, con crecimientos hasta del 300 % en el año 2020 (5). De igual manera, el comercio electrónico prevé un promedio de crecimiento del 116 % en Latinoamérica entre

2019 y 2024, destacando países como Argentina con 153% de aumento en estos últimos 5 años, Perú con 121% y Colombia con 92% (6). Por ello, es indispensable que las empresas se adapten y mejoren sus procesos y operaciones logísticas, en aras ofrecer un mejor servicio, no solo en América Latina, sino a nivel mundial (7).

El control de inventarios y su distribución son procesos claves en la pérdida tanto de eficiencia como de eficacia en el campo de la logística. Además, de acuerdo con el Departamento Nacional de Planeación de Colombia, el componente de transporte representa el 30,7% del costo logístico, seguido de inventarios con el 29,3% y almacenamiento con el 13,9%. Según datos de la Encuesta Nacional de Logística 2020, el transporte, almacenamiento e inventarios representan el 73,9% del costo logístico total (8). En consecuencia, para las compañías hay una creciente dificultad para encarar los desafíos logísticos. Esto, en el marco de la búsqueda de alternativas para que sus procesos sean más rápidos, más flexibles y menos costosos (3).

La correcta implementación logística en las organizaciones implica enfocar las acciones en minimizar los costos más representativos, como lo son el transporte, el almacenaje y el manejo de inventarios (9). La implementación de un sistema de enrutamiento es un ejemplo de esto, ya que propende por el ahorro de costos logísticos, el ahorro en tiempo de trabajo y una mejor utilización de vehículos, entre otros (10). De igual manera, la gestión de inventarios permite tener control sobre la compra, reparto y almacenamiento del *stock* de la empresa, transmitiendo valor agregado al cliente, lo cual se ve reflejado en la puntualidad, la consistencia de entrega y la disponibilidad del producto (11).

En (12) y (13) se presenta la solución exacta de varias clases de problemas de enrutamiento e inventario mediante un algoritmo *branch-and-cut*. El trabajo desarrollado en (14) identifica y describe diferentes enfoques en cuanto a estructuras, modelos y métodos de solución para el IRP enfocado al manejo de productos perecederos. De manera similar, en (15) se presenta un modelo matemático multiobjetivo de ruteo e inventarios para la cadena de suministro de perecederos, donde se establece una propuesta de ruteo, distribución y gestión de inventarios de frutas. Tratar este problema con un enfoque de solución exacta es interesante, ya que estos métodos se utilizan menos que los aproximados, y la mayoría de los investigadores utilizan la capacidad predeterminada del software existente para resolver problemas pequeños o medianos, en lugar de codificar nuevos algoritmos exactos (16).

El estudio propuesto por (17) evidencia la alta adaptabilidad del problema según los criterios establecidos por el proveedor lo y minoristas. Se consideran diferentes políticas de abastecimiento. Además, un aspecto importante de este estudio es que considera variantes mejoradas de estos modelos para tratar de encontrar un método de resolución exacto mucho más eficiente.

En (18) se estudia el problema de enrutamiento de inventario de múltiples vehículos y múltiples compartimentos con demandas estocásticas (MCIRPSD) en el contexto de la entrega de combustible, y se desarrollan enfoques heurísticos de dos fases basados en el algoritmo de descomposición de corte único y su versión de corte múltiple para tratar el MCIRPSD en las instancias de mediana y gran escala, donde se demuestra su eficacia.

La variante del IRP clásica ha atraído una atención significativa. Sin embargo, debido a la complejidad del problema, la gran mayoría de artículos introducen métodos de solución heurísticos y metaheurísticos, como la heurística de generación de columnas (19), la metaheurística adaptativa de búsqueda por vecindad (ALNS) (20) y una heurística de dos fases basada en un modelo de programación lineal (18).

La literatura sobre algoritmos exactos para variantes del IRP es relativamente escasa. El primer método exacto para el caso de un vehículo que consideró las políticas de inventario ML y OU fue propuesto por (12). Esta metodología se ha ampliado para manejar múltiples productos y entornos de problemas más complejos, como el transbordo (22) y otras aplicaciones específicas.

La finalidad de este artículo es aplicar modelos de optimización matemática al problema de inventario y enrutamiento de vehículos (*multiple vehicle inventory routing problem*, o *multi-vehicle IRP*) que permitan el manejo óptimo de las redes de valor. Se consideran dos enfoques: la distribución óptima de las rutas y el manejo óptimo de los inventarios. Con la adopción de estos modelos, el proveedor determina un plan de distribución que responde interrogantes como ¿qué cantidad de producto se debe enviar a los clientes?, ¿cuándo se debe visitar a los clientes?, ¿cómo deben ser definidas las secuencias de las rutas de distribución? y ¿cuál vehículo debe ser asignado para las rutas de entrega? Se pretende encontrar beneficios para el proveedor, reflejados en la reducción de costos en producción, transporte y optimización de los tiempos de entrega, entre otros; así como para los clientes, minimizando los costos de almacenamiento y reposición de inventarios. Esta propuesta se enfoca en el desarrollo de herramientas para la toma de decisiones que permitan gestionar de forma eficiente la cadena de suministro de empresas de cualquier tamaño.

El propósito del trabajo es adaptar el modelo matemático IRP clásico a su variante con múltiples vehículos (*multi-vehicle IRP*) para resolverlo mediante modelos de programación lineal entera mixta, planteando dos maneras de gestionar el inventario: *maximum level* (ML) y *order up to level* (OU). Así mismo se formulan tres formas de eliminar la creación de *sub-tours*: una general, una de flujos adaptada de (23) y (17) respectivamente y la Miller-Tucker-Zemlin (MTZ) propuesta por (24). En este artículo se desarrolla un modelo matemático exacto flexible, pues se identificó que este problema ha sido resuelto principalmente mediante técnicas aproximadas como heurísticas y metaheurísticas. Además, se describen y comparan los modelos matemáticos por medio de la solución de instancias de baja y media complejidad matemática, presentando la cantidad de variables y restricciones, así como la función objetivo, el tiempo de ejecución y la brecha inexplorada entre el límite superior e inferior del algoritmo Branch & Bound del CPLEX (*i.e.*, GAP). Esto, con el fin de identificar el modelo matemático más competitivo.

2. Formulación matemática

La definición del *multi-vehicle IRP* puede representarse mediante un conjunto de clientes indexados en $V_1 : \{1 \dots n\}$, donde n es el número total de clientes y $O : \{0\}$ representa al nodo del proveedor. El problema se define sobre un horizonte de planificación de longitud p , en el cual cada periodo

de tiempo es representado por el conjunto $t : \{1 \dots p\}$. La cantidad de producto disponible para el proveedor en cada periodo de tiempo se expresa con r_t , y el cliente es i . El proveedor incurre en un costo unitario de almacenamiento de inventario H_i en cada periodo y tiene una máxima capacidad de almacenamiento de inventario C_i . Además, al inicio del horizonte de planificación, se conocen los datos de los inventarios iniciales tanto del proveedor como de los clientes i , lo cual se denota como I_{t-1} cuando $t = 1$. El proveedor tiene conocimiento de d_{it} , la demanda de cada cliente i para cada periodo de tiempo t . También se tiene un conjunto de vehículos $K : \{1 \dots k\}$, donde k es el número total de vehículos disponibles para trabajar. La capacidad de cada vehículo se denota como Q . Cada vehículo puede realizar una ruta por período de tiempo desde el proveedor hasta un subconjunto de clientes. El costo de enrutamiento Costo_{ij} se expresa como la distancia euclidiana entre cada par de nodos.

El objetivo del *multi-vehicle* IRP es minimizar el costo total de enrutamiento y mantenimiento de inventario mientras se satisface la demanda de los clientes, contando con múltiples vehículos para realizar la distribución de productos en un determinado horizonte de tiempo. El plan de reposición está sujeto a las siguientes condiciones: (i) el proveedor debe tener suficiente inventario para satisfacer toda la demanda durante el horizonte de planificación; (ii) al final del período t , el inventario en la ubicación de un cliente no debe exceder su capacidad máxima, (iii) no se permite que los inventarios sean negativos, (iv) cada uno de los vehículos del proveedor puede realizar como máximo una ruta por período de tiempo, (v) cada ruta comienza y termina en el depósito y (vi) las capacidades del vehículo no se pueden exceder.

El *multi-vehicle* IRP, en contraste con su problema base, considera la inclusión de varios vehículos en la asignación de rutas de distribución. En la Fig. 1 se presenta un escenario de distribución, contando con dos periodos de tiempo, 16 clientes y 3 vehículos que deben regresar al depósito al finalizar el recorrido de las rutas. Además, la secuencia de distribución depende de cada periodo, de acuerdo con la demanda y posición geográfica de los clientes. En el primer periodo, se visita a todos los clientes por medio de los 3 vehículos con el fin de satisfacer la demanda. Sin embargo, en el segundo periodo se utilizan 3 vehículos, pero solo se visita a 13 clientes, debido que los clientes 3, 6 y 11 tienen inventario adecuado para su operación.

El modelo matemático es descrito por las Ecs. (1) y (14), y la Tabla I expone los conjuntos, los parámetros y las variables de decisión del modelo matemático.

$$\text{Min} \sum_{i \in V} \sum_{t \in M} H_i I_{it} + \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} \sum_{k \in K} \sum_{t \in T} \text{Costo}_{ij} X_{ijk t} \quad (1)$$

Sujeto a,

$$I_{0t} = I_{0t-1} + r_{ot} - \sum_{i \in V1} \sum_{k \in K} q_{ikt}, \quad \forall t \in T \quad (2)$$

$$I_{it} = I_{it-1} + \sum_{k \in K} q_{ikt} - d_{it}, \quad \forall i \in V1, t \in T \quad (3)$$

$$I_{it} \leq C_i, \quad \forall i \in V1, t \in T \quad (4)$$

$$\sum_{k \in K} \leq C_i - I_{it-1}, \quad \forall i \in V1, t \in T \tag{5}$$

$$q_{ikt} \leq C_i Y_{ikt}, \quad \forall i \in V1, k \in K, t \in T \tag{6}$$

$$\sum_{i \in V1} q_{ikt} \leq Q Y_{0kt}, \quad \forall t \in T, k \in K \tag{7}$$

$$\sum_{j \in V} X_{ijkt} = Y_{ikt}, \quad \forall i \in V1, k \in K, t \in T \tag{8}$$

$$\sum_{i \in V} X_{ijkt} = Y_{jkt}, \quad \forall j \in V1, k \in K, t \in T \tag{9}$$

$$\sum_{j \in V} X_{ijkt} - \sum_{j \in V} X_{jikt} = 0, \quad \forall i \in V, k \in K, t \in T \tag{10}$$

$$\sum_{j \in V1} X_{0jkt} = Y_{0kt}, \quad \forall k \in K, t \in T \tag{11}$$

$$U_{jkt} \geq U_{ikt} + q_{jkt} + Q X_{ijkt} - Q, \quad \forall i \in V1, j \in V1, k \in K, t \in T \tag{12}$$

$$q_{ikt} \leq U_{ikt}, \quad \forall i \in V1, k \in K, t \in T \tag{13}$$

$$X_{ijkt}, Y_{ikt} \in [0, 1] \tag{14}$$

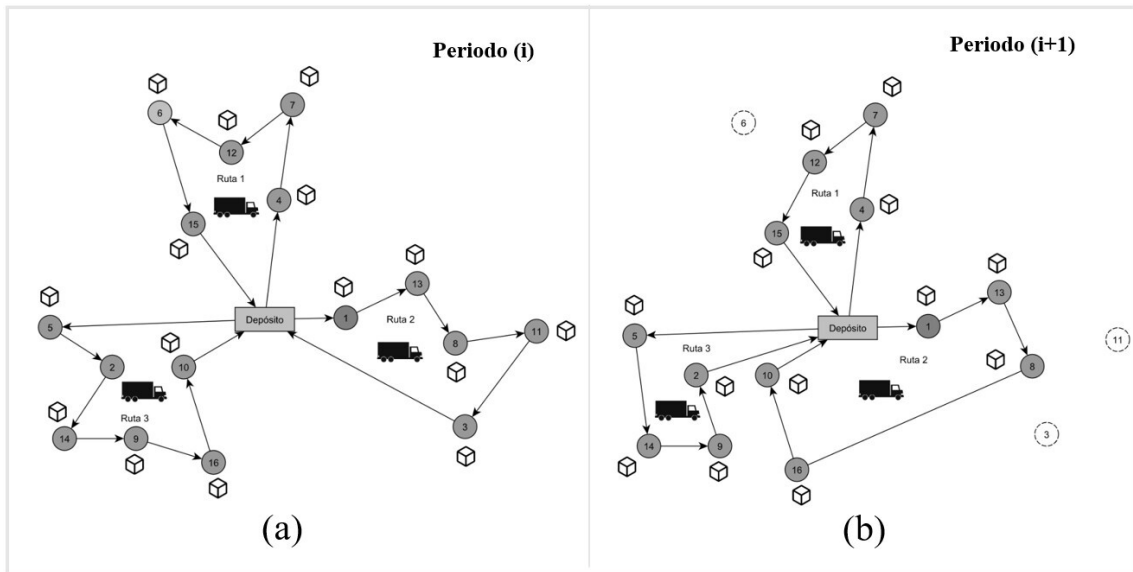


Figura 1. Ejemplo gestión de inventarios y enrutamiento de clientes usando múltiples vehículos en un horizonte de tiempo determinado. (a) Periodo de tiempo i , (b) periodo $i + 1$

Tabla I. Conjuntos, parámetros y variables de decisión del modelo matemático

Conjuntos	
Símbolo	Descripción
O	Conjunto de centros de distribución
V1	Conjunto de clientes
V	Conjunto de nodos $V = O \cup V1$
T	Conjunto de tiempo a partir del periodo 1
M	Conjunto de tiempo a partir del periodo 0
K	Conjunto de vehículos
Parámetros	
Símbolos	Descripción
Costo _{ij}	Costo de recorrer el arco <i>ij</i> en el periodo <i>t</i>
Coordenadas _{ij}	Ubicación del centro de distribución y de los clientes
<i>H_i</i>	Costo unitario de almacenamiento del centro de distribución y de los clientes
<i>r_{ot}</i>	Cantidad de mercancía disponible del centro de distribución en el periodo de tiempo <i>t</i>
<i>d_{it}</i>	Cantidad demandada por el cliente <i>i</i> en el periodo <i>t</i>
<i>C_j</i>	Capacidad del almacén del cliente <i>j</i>
<i>Q</i>	Capacidad del vehículo
Variables decisión	
Símbolos	Descripción
<i>X_{ijkt}</i>	1, si el arco <i>ij</i> es usado por el vehículo <i>k</i> en el periodo <i>t</i> ; 0 en el caso contrario
<i>I_{it}</i>	Nivel de inventario del centro de distribución y de clientes al final del periodo <i>t</i>
<i>q_{ikt}</i>	Cantidad de producto enviado al cliente <i>i</i> por el vehículo <i>k</i> en el periodo <i>t</i>
<i>Y_{ikt}</i>	1, si el cliente <i>i</i> es visitado por el vehículo <i>k</i> en el periodo <i>t</i> ; 0 en el caso contrario
<i>U_{jkt}</i>	Cantidad de producto acumulado enviado entre nodos por el vehículo <i>k</i> en el periodo de tiempo <i>t</i>

$$q_{ikt}, I_{it}, U_{jkt} \geq 0, y \text{ entero.} \quad (15)$$

La Ec. (1) busca minimizar el costo logístico asociado al almacenamiento de inventario tanto del proveedor como de los clientes, expresado en la primera expresión de suma doble. En la segunda parte de la función objetivo se busca minimizar el costo asociado a las rutas asignadas a cada vehículo en un determinado horizonte de planeación. La Ec. (2) calcula el nivel de inventario del proveedor en cada periodo de tiempo *t*. La Ec. (3) permite calcular el inventario inicial de cada cliente en cada periodo del horizonte de planeación. La Ec. (4) asegura que el inventario en cada periodo de tiempo sea menor o igual que la máxima capacidad de almacenamiento de cada cliente. La Ec. (5) asegura que la cantidad a enviar por el centro de distribución sea menor o igual a la disponibilidad del almacén del cliente, de acuerdo con su capacidad y su nivel de inventario en el periodo anterior. La Ec. (6) garantiza que la cantidad de productos que se envíe no supere la capacidad de almacén de los clientes introducidos en la ruta de distribución de cada vehículo *k*.

A su vez, las Ecs. (5) y (6) identifican la política de manejo de inventarios ML, donde se optimiza la cantidad de producto entregado en cada visita a los clientes, asegurando que se respete la capacidad de cada almacén. La Ec. (7) establece que la cantidad de producto a enviar a los clientes introducidos en la ruta debe ser menor o igual que la máxima capacidad de los vehículos. La Ec. (8) establece que, si al cliente i se le envía producto a través del vehículo k en el periodo t , entonces solo se puede activar uno de todos los posibles arcos de entrada. La Ec. (9) establece que, si al cliente j se le envía producto a través del vehículo k en el periodo t , solo se puede activar uno de todos los posibles arcos de salida. La Ec. (10) indica que, si se ingresa al nodo j por medio de un arco, también se debe de salir del nodo j por un arco. Las Ecs. (8, 9, 10) aseguran la conservación del flujo de las rutas, con una única entrada y salida de los nodos para el vehículo k en el periodo t . La Ec. (11) establece que se debe iniciar siempre desde el nodo del centro de distribución. Las Ecs. (12) y (13) garantizan la conexión de los circuitos sin la creación de *sub-tours* en la formulación general por el método MTZ, la cual fue propuesta por (23) y adaptada al modelo. Finalmente, las Ecs. (14) y (15) presentan la naturaleza de las variables.

2.1. Gestión de inventarios

La adaptabilidad del problema según los criterios establecidos por el proveedor y los minoristas para el manejo de inventarios se presenta como variantes en cuanto a las políticas de abastecimiento. Aquí, la política ML garantiza que siempre que se visite al cliente y que la cantidad de inventario a entregar no exceda el límite máximo del almacén. Por otro lado, la política OU garantiza que siempre que se visite al cliente y que la cantidad de inventario a entregar alcance el nivel máximo de almacenamiento del minorista.

2.1.1. Ordenar hasta el nivel - Order up to level (OU)

La política de reposición OU debe cumplir todas las condiciones de la política ML, es decir, no puede haber ruptura en el inventario del proveedor y en el inventario de los respectivos clientes. El inventario para llevar a cada cliente en el período t no puede exceder su nivel máximo de inventario, y la carga del vehículo en cada período t no debe exceder su capacidad. Esta política de inventario garantiza que, al visitar al cliente, se llene por completo su nivel de inventario en el periodo t . Esto, a diferencia de la política ML, donde se surte de acuerdo con la demanda. Para ello, se adaptan las restricciones propuestas por (17) en el modelo *vendor-managed inventory routing with order-up* (VMIR-OU).

$$q_{ikt} \geq C_i Y_{it} - I_{it-1}, \quad \forall i \in V1, k \in K, t \in T \quad (16)$$

La Ec. (16) asegura el manejo de la política OU, donde, cada vez que un cliente es visitado, recibe una cantidad de inventario que llena completamente su capacidad de almacenamiento.

2.2. Eliminación de *sub-tours*

El componente que representa mayor dificultad en la resolución de los modelos matemáticos es la parte de enrutamiento. Por ello, además de considerar la resolución de *sub-tours* por medio del modelo presentado por (23), se estudia dicha eliminación por medio del modelo de flujos y variante MTZ. Esto, con el fin de construir un modelo exacto más eficiente.

2.2.1. Eliminación de *sub-tours* por flujos

Otra alternativa para la eliminación de *sub-tours* es la propuesta de (17), la cual utiliza el modelo de flujos, donde se debe considerar una variable de decisión f_{ijt} que representa la cantidad de flujo que pasa por el arco ij en la ruta del período t , es decir, que representa al número de clientes que serán visitados después del cliente j .

Para obtener el modelo de eliminación de *sub-tours* por flujos, se deben eliminar las restricciones (12) y (13) del modelo general y agregar las siguientes:

$$\sum_{j \in V1} f_{0jkt} = \sum_{j \in V1} Y_{jkt}, \quad \forall k \in K, t \in T \quad (17)$$

$$\sum_{j \in V} f_{ijkt} = \sum_{j \in V} f_{jikt} - Y_{ikt}, \quad \forall i \in V, k \in K, t \in T \quad (18)$$

$$f_{ijkt} \leq nX_{ijkt}, \quad \forall i \in V, k \in K, t \in T \quad (19)$$

$$f_{ijkt} \geq 0, \quad \forall i \in V, j \in V, k \in K, t \in T \quad (20)$$

Las nuevas restricciones están asociadas al flujo de cada ruta, asegurando un solo circuito conectado. El primer conjunto de restricciones (17) asegura que el flujo inicial de cada ruta es igual al número total de clientes a visitar (excluyendo el nodo del proveedor). El segundo conjunto de restricciones (18) garantiza una disminución de una unidad de flujo cada vez que se pasa por el cliente a visitar en la ruta (excluyendo el arco de retorno para el proveedor). El conjunto de restricciones (19) garantiza el flujo de un arco si pertenece a la ruta de solución. Finalmente, el conjunto de restricciones (20) define el dominio de las variables.

2.2.2. Eliminación de *sub-tours* Miller-Tucker-Zemlin (MTZ)

Otra alternativa para solucionar los *sub-tours* es mediante una variante del modelo MTZ propuesta por (24) para el problema base. Para ello, se deben eliminar las restricciones (12) y (13) del modelo general y agregar las siguientes:

$$W_{0kt} = 0, \quad \forall k \in K, t \in T \quad (21)$$

$$W_{jkt} \geq W_{ikt} + 1 - (n) \cdot (1 - X_{ijkt}), \quad \forall k \in K, t \in T \quad (22)$$

$$W_{ikt} \geq 0, \quad \forall i \in V, k \in K, t \in T \quad (23)$$

Las variables de decisión W_{ikt} indican el orden en que se visitan los clientes en la ruta de cada período, definiendo, para cada vértice j en el período t , el número total de clientes ya visitados por la ruta desde el período t después de visitar a un cliente. En este sentido, se deben reemplazar las restricciones (12) y (13) y añadir (21), (22) y (23). Las restricciones (21) garantizan, para cada instante t , que el flujo inicie en el vértice del proveedor. El conjunto de restricciones (22) se refiere al aumento

de una unidad de flujo cada vez que se pasa por el vértice del cliente a visitar, es decir, si el vértice j ocurre inmediatamente después del vértice i , se incrementa una unidad en la variable W_{ikt} para contar los clientes visitados en esa ruta, evitando la aparición de *sub-tours*, además de cancelar a los clientes que no pertenecen a la ruta. Finalmente, la naturaleza de la variable se define en la Ec. (23).

3. Resultados computacionales

La implementación del algoritmo se llevó a cabo en un computador con procesador Intel Core i5-5200U CPU @ 2.2 GHz con 4 GB de RAM y un tiempo de ejecución máximo de una hora.

Para replicar los modelos *multi-vehicle* IRP y sus distintas maneras de abordarlo, se utilizó el *software* de programación algebraica A Mathematical Programming Language (AMPL), con el fin de validar su funcionamiento con las instancias presentadas en la literatura (25).

Para probar los modelos propuestos, se utilizaron las instancias propuestas por (26), las cuales fueron generadas para el problema de gestión integrada de rutas e inventario para un producto. Como base, se consideraron los siguientes datos: horizonte temporal $H = 6$; número de clientes o minoristas de $n = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45$ y 50 ; una cantidad de inventario r_{st} utilizado por el cliente s en el periodo t , generada aleatoriamente como un número entero en un intervalo $[10, 100]$; el costo de almacenamiento H_i , generado aleatoriamente en un intervalo $[0,01, 0,05]$; el costo de transporte Costo_{ij} , calculado mediante la distancia euclidiana, donde (X_i, X_j) y (y_i, y_j) corresponden a las coordenadas del centro de distribución y los clientes, las cuales fueron generadas aleatoriamente en un intervalo de valores $[0, 500]$, obteniendo una matriz de costos simétrica, *i.e.*, $\text{Costo}_{ij} = \text{Costo}_{ji}$.

Se compararon los modelos *multi-vehicle* IRP con el fin de identificar la modelación que requiere el menor tiempo y ofrece una respuesta de buena calidad.

3.1. Cantidad de variables y restricciones

La Tabla II presenta la cantidad de variables y restricciones para los tres modelos (general, MTZ y flujos) para $n = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45$ y 50 clientes con la política de abastecimiento ML, y para $n = 5, 10, 15$ y 20 con la política OU, considerando un horizonte de tiempo $H = 3$ y dos vehículos $K = 2$.

Se observa que el *multi-vehicle* IRP es un problema NP-hard, debido a su crecimiento exponencial tanto en el número de variables como en el número de restricciones a medida que aumenta el número de clientes. Además, en el *multi-vehicle* IRP (ML) ($H = 3, K = 2$), el modelo por flujos presenta mayor cantidad de variables que los modelos general y MTZ, los cuales tienen cantidades de variables muy similares. Los tres modelos presentan cantidades similares de restricciones.

De manera similar para el *multi-vehicle* IRP (OU) ($H = 3, K = 2$), el modelo de flujos es el que más número de variables y restricciones presenta en comparación con los modelos MTZ y general. Tanto el número de variables como el de restricciones mantienen una tendencia creciente a medida que el

Tabla II. Conteo de variables y restricciones, *multi-vehicle* IRP ($H = 3, K = 2$)

<i>Multi-vehicle</i> IRP ($H=3, K=2$)						
n	General		MTZ		Flujos	
	Variables	Restricciones	Variables	Restricciones	Variables	Restricciones
Política de abastecimiento ML						
5	324	321	294	321	516	423
10	939	921	879	921	1.611	1.113
15	1.854	1.821	1.764	1.821	3.306	2.103
20	3.069	3.021	2.949	3.021	5.601	3.393
25	4.584	4.521	4.434	4.521	8.496	4.983
30	6.399	6.321	6.219	6.321	11.991	6.873
35	8.514	8.421	8.304	8.421	16.086	9.063
40	10.929	10.821	10.689	10.821	20.781	11.553
45	13.644	13.521	13.374	13.521	26.076	14.343
50	16.559	16.521	16.359	16.521	31.971	17.433
Política de abastecimiento OU						
5	324	351	294	351	504	447
10	939	981	879	981	1.611	1.173
15	1.854	1.911	1.764	1.911	3.294	2.187
20	3.069	3.141	2.949	3.141	5.601	3.513

número de clientes aumenta. El modelo *multi-vehicle* IRP bajo la política OU presenta mayor número de restricciones en todos sus modelos (MTZ, general y flujos) en comparación con el modelo *multi-vehicle* IRP bajo la política ML. El número de variables tiende a ser igual en ambas políticas de gestión de inventarios.

En la Tabla III se presentan los resultados para el modelo *multi-vehicle* IRP con horizonte temporal $H = 3$, pero ya no solo con 2 vehículos sino con tres vehículos para $n = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45$ y 50 con la política ML, y con $n = 5, 10, 15$ y 20 para la política OU. Esto, para los tres modelos (general, MTZ y flujos).

Se evidencia que, en el modelo *multi-vehicle* IRP ($H = 3, K = 3$), las variantes general y MTZ comparten la misma cantidad de variables. Sin embargo, en la variante de flujos se observa una mayor cantidad de variables, la cual se hace evidente a medida que la cantidad de clientes aumenta. En cuanto a la cantidad de restricciones, se observa que los tres modelos presentan un comportamiento similar. Sin embargo, el modelo de flujos presenta una cantidad de restricciones levemente mayor.

El modelo *multi-vehicle* IRP (OU) ($H = 3, K = 3$), comparado con su contraparte ML ($H = 3, K = 3$), presenta igual número de variables en los modelos MTZ y general, pero su variante de flujos muestra leves diferencias en el número de variables. A su vez, la cantidad de restricciones es mayor en OU que en ML.

Tabla III. Conteo de variables y restricciones, *multi-vehicle* IRP ($H = 3, K = 3$)

<i>Multi-vehicle</i> IRP (ML) (H=3, K=3)						
n	General		MTZ		Flujos	
	Variables	Restricciones	Variables	Restricciones	Variables	Restricciones
Política de abastecimiento ML						
5	477	465	432	465	765	618
10	1.392	1.350	1.302	1.350	2.400	1.638
15	2.757	2.685	2.622	2.685	4.935	3.108
20	4.572	4.470	4.392	4.470	8.370	5.028
25	6.837	6.705	6.612	6.705	12.705	7.398
30	9.552	9.390	9.282	9.390	17.940	10.218
35	12.717	12.525	12.402	12.525	24.075	13.488
40	16.332	16.110	15.972	16.110	31.110	17.208
45	20.397	20.145	19.992	20.145	39.045	21.378
50	24.912	24.630	24.462	24.630	47.880	25.998
Política de abastecimiento OU						
5	477	510	432	510	747	654
10	1.392	1.440	1.302	1.440	2.400	1.728
15	2.757	2.820	2.622	2.820	4.917	3.234
20	4.572	4.650	4.392	4.650	8.730	5.208

3.2. Tiempos de ejecución y GAP

3.2.1. *Multi-vehicle* IRP (ML) H=3, K=2

A continuación, se presentan los resultados de la función objetivo (\$), tiempos (s) y GAP (%) obtenidos para el modelo *multiple-vehicle* IRP bajo las políticas de inventario ML y OU, con un horizonte de planeación de tres periodos ($H = 3$) y considerando 2 vehículos ($K = 2$) bajo distintos modelos de eliminación de *sub-tours* (general, MTZ y flujos). Se presentan las mejores soluciones (*best known solutions*, BKS) reportadas por (27) para la política ML, con el fin de comparar la función objetivo de las instancias implementadas.

En la Tabla IV se puede evidenciar que la tendencia creciente de los tiempos computacionales se mantiene a medida que el número de clientes aumenta, dado que esto implica dar respuesta a un mayor número de variables y restricciones. Por ejemplo, para el modelo de flujos, mientras que, para una instancia de 5 clientes, la respuesta óptima (GAP = 0%) se logra en 2 segundos, para 50 clientes, una respuesta muy cercana al óptimo (GAP = 3,88%) se logra en 1.476 segundos. Para este modelo, debido a su alta complejidad computacional, se obtuvieron GAP entre el 0 y el 15% para el modelo general, entre el 0 y el 10% para el modelo MTZ y entre el 0 y el 7,5% para el modelo de flujos.

Tabla IV. Resultados del *multi-vehicle* IRP (ML) ($H = 3, K = 2$)

<i>Multi-vehicle</i> IRP (ML) (H=3, K=2)										
n	General				MTZ			Flujos		
	BKS	F.O.	Tiempo (s)	GAP (%)	F.O.	Tiempo (s)	GAP (%)	F.O.	Tiempo (s)	GAP (%)
5	2.265,21	2.265,21	4	0,00	2.265,21	2	0,00	2.265,21	2	0,00
10	5.032,05	5.043,57	77	6,06	5.032,05	188	0,00	5.032,05	13	0,00
15	5.755,54	5.755,54	121	0,00	5.755,54	58	0,00	5.755,54	189	0,00
20	7.508,76	7.989,86	96	12,32	7.540	318	6,01	7.443,36	674	0,26
25	8.521,52	9.141,52	1018	9,87	8.915,52	1.032	6,59	8.521,52	664	0,00
30	12.449,90	13.294,9	823	8,95	12.684,9	657	4,95	12.449,9	1.627	0,00
35	11.922,30	12.924,9	3994	10,12	13.051,8	618	9,58	12.146,9	1.065	2,31
40	13.660,40	15.540,8	3994	13,60	14.726,1	818	8,28	13.676,1	3.600	0,85
45	14.037,30	15.653,4	3852	12,23	15.656,1	2.752	10,21	15.576,1	2.345	7,55
50	15.097,10	17.613,6	923	15,18	16.417,6	1.430	9,95	15.247,6	1476	3,88

3.2.2. *Multi-vehicle* IRP (ML) H=3, K=3

En la Tabla V se presentan los resultados para tres periodos de tiempo ($H = 3$) y tres vehículos ($K = 3$). Aquí se observa cómo el problema aumenta su complejidad al comparar los tiempos de ejecución con respecto al modelo con $K = 2$. Por ejemplo, mientras que, para resolver una instancia de 20 clientes con $K = 2$, el modelo de flujos se demoraba 674 segundos y se obtenía un GAP del 0,26 %, ahora, con $K = 3$, para resolver la misma instancia de 20 clientes con el modelo de flujos, se obtiene un GAP del 3,08 % en 3.600 segundos.

Tabla V. Resultados del *multi-vehicle* IRP (ML) ($H = 3, K = 3$)

<i>Multi-vehicle</i> IRP (ML) (H=3, K=3)										
n	General				MTZ			Flujos		
	BKS	F.O.	Tiempo (s)	GAP (%)	F.O.	Tiempo (s)	GAP (%)	F.O.	Tiempo (s)	GAP (%)
5	2.298,73	2.298,73	5	0,00	2.298,73	1	0,00	2.298,73	3	0,00
10	5.506,09	5.646,02	322	14,94	5.540,09	321	9,42	5.506,09	369	0,00
15	6.242,90	6.242,9	213	0,00	6.242,9	162	0,00	6.242,9	95	0,00
20	8.165,42	8.439	3.600	15,42	8.239,42	870	11,69	8.074,02	3.600	3,08
25	8.893,82	9.025,3	2.143	13,60	9.142,2	313	9,69	9.100,4	1.544	4,87
30	12.908,90	13.592,1	3.600	11,16	13.497,5	1.324	9,37	13.379,9	3.600	6,85
35	12.396	13.864,3	3.652	14,2	13.807,3	1.507	13,90	12.560	1.895	3,87
40	14.224,10	15.579,7	1.823	14,78	15.718,6	1.313	13,16	14.932	635	9,63
45	14.771	16.230,3	3.604	15,6	15.943,1	3.685	9,84	15.858,2	2.386	7,64
50	16.115,80	18.319	4.113	19,53	17.716,5	3.947	15,24	16.943,3	919	12,78

3.2.3. Multi-vehicle IRP (OU) H=3, K=2

En la Tabla VI se muestra cómo, para las políticas OU y ML, la tendencia creciente de los tiempos computacionales se mantiene a medida que el número de clientes aumenta.

Tabla VI. Resultados del *multi-vehicle IRP (OU)* ($H = 3, K = 2$)

<i>Multi-vehicle IRP (OU) (H=3, K=2)</i>									
	General			MTZ			Flujos		
n	F.O.	Tiempo (s)	GAP (%)	F.O.	Tiempo (s)	GAP (%)	F.O.	Tiempo (s)	GAP (%)
5	2.266,61	0	2,16	2.266,61	0	3,49	2.266,61	1	0,00
10	5.236,03	200	0,22	5.236,03	302	0,22	5.236,03	37	1,84
15	6.092,08	443	0,06	6.092,08	659	0,03	6.092,08	251	0,51
20	8.043,22	3.663	14,65	8.043,22	3.568	10,35	7.766,34	2.083	0,30

3.2.4. Multi-vehicle IRP (OU) H=3, K=3

En la Tabla VII se presentan los resultados del modelo *multi-vehicle IRP* ($H = 3, K = 3$) bajo la política de gestión de inventarios OU.

Tabla VII. Resultados del *multi-vehicle IRP (OU)* ($H = 3, K = 3$)

<i>Multi-vehicle IRP (OU) (H=3, K=3)</i>									
	General			MTZ			Flujos		
n	F.O.	Tiempo (s)	GAP (%)	F.O.	Tiempo (s)	GAP (%)	F.O.	Tiempo (s)	GAP (%)
5	2.409,15	0	2,63	2.409,15	1	0	2.409,15	1	0,40
10	5.675,36	3.574	3,08	5.675,36	3.080	0,06	5.675,36	428	0,34
15	6.365,63	3.091	0,11	6.365,63	1.551	0,13	6.365,63	394	0,27
50	8.738,26	3.680	15,44	8.589,13	3.603	9,12	8.589,13	3.582	7,32

3.3. Interpretación de resultados

Para interpretar los resultados, se propone la siguiente instancia, donde se tienen tanto la latitud como la longitud del proveedor y los clientes, inventarios iniciales, costos unitarios de almacenamiento, demanda de los clientes y máximas capacidades de almacenamiento. Además, n representa el número de clientes (5 para este caso), p es el horizonte de planificación (3 meses), k es el número de vehículos disponibles (3 en este caso), r es la cantidad de producto disponible en el proveedor en cada instante de tiempo del horizonte de planificación (193) y Q es la capacidad de transporte constante de cada vehículo, que corresponde a 96.

En la Fig. 2 se presentan los resultados obtenidos mediante el programa Power BI, con la visualización de las rutas generadas a partir de los 3 vehículos en el plan de distribución para el mes 1. Además, se presentan las cantidades a entregar y el inventario al final del mes de cada uno de los

clientes. En este caso, se muestra que el cliente 5 es visitado con el vehículo 3, se le entregan 11 unidades de producto, y su inventario al final del mes será de 11 unidades.

Tabla VIII. Parámetros de la instancia propuesta

Parámetros						
Cliente	Latitud	Longitud	Inventario inicial	Costo almacenamiento	Demanda	Capacidad máxima
0	4,794	-75,72	510	0,30		
1	4,801	-75,74	130	0,23	65	195
2	4,892	-75,75	70	0,32	35	105
3	4,818	-75,71	58	0,33	58	116
4	4,807	-75,78	48	0,23	24	72
5	4,845	-75,79	11	0,18	11	22

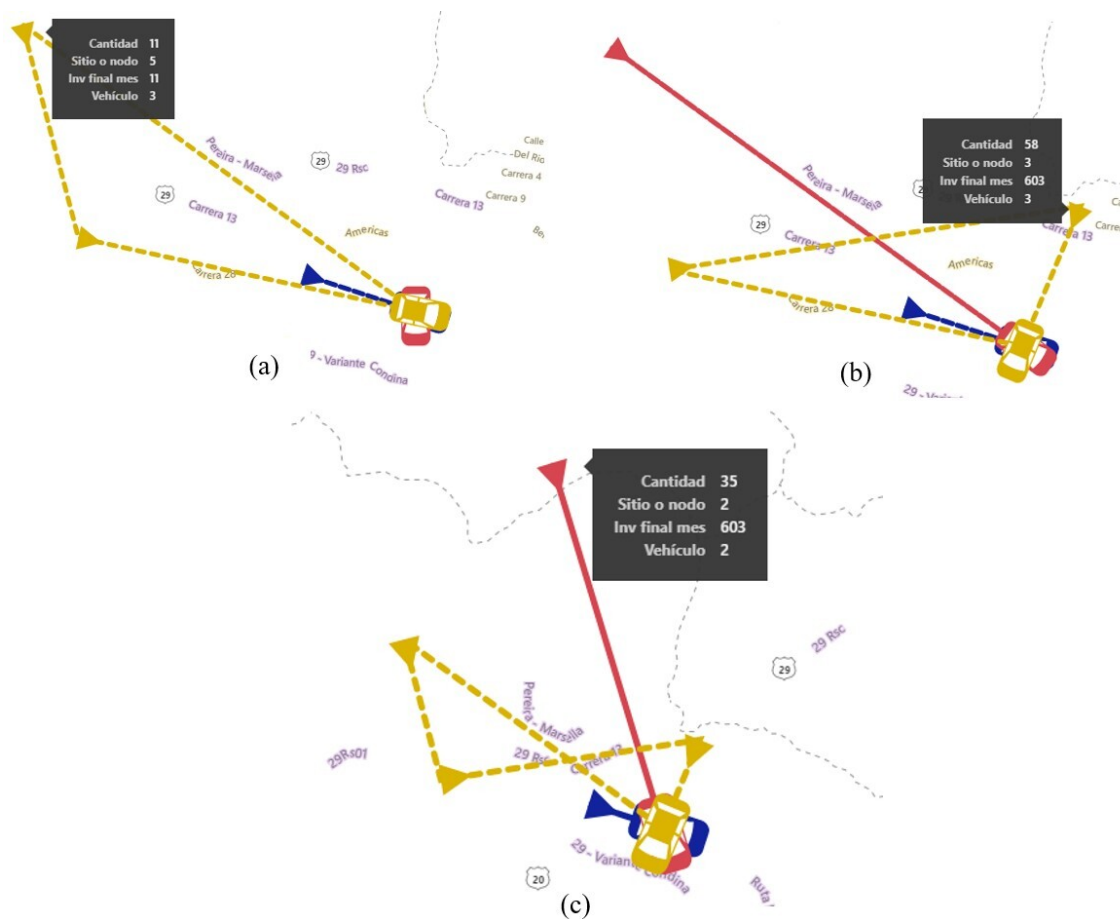


Figura 2. Plan de distribución. (a) Periodo 1, (b) periodo 2, (c) periodo 3

4. Conclusiones

En esta investigación se presenta una metodología general de solución mediante programación exacta que puede ser adaptada para diferentes campos de aplicación del problema integrado de inventarios y enrutamiento con múltiples vehículos. Esto, con el fin de identificar el más eficiente.

Los modelos matemáticos implementados en AMPL son capaces de resolver el IRP con múltiples vehículos bajo diferentes políticas de inventario, permitiendo obtener los planes de distribución y gestión de inventarios. El modelo más eficiente para eliminación de *sub-tours* es el de flujos para las dos políticas de abastecimiento estudiadas (ML como OU). Esto se hace evidente a medida que el número de clientes o el número de periodos evaluados aumenta. Cabe añadir que la política ML muestra mejores valores de GAP en comparación con la política OU.

Debido a la alta complejidad computacional del problema, los trabajos futuros deben encaminarse en busca de nuevas alternativas diferentes a la optimización exacta, tales como heurísticas o metaheurísticas, que permitan estar lo más cerca posible del óptimo en tiempos de computación menores, validando la implementación por medio de instancias pequeñas y comparando estas técnicas aproximadas con las exactas. De igual manera, se recomienda el desarrollo de un modelo dinámico que pueda incluir variables estocásticas y análisis probabilístico. Esto permitiría una representación más completa del sistema, así como la consideración de demandas estocásticas. De igual manera, podrían incluirse funciones multiobjetivo en distintos frentes además de la reducción de costos, como las emisiones contaminantes, restricciones en los horarios de los vehículos, entre otros. También podría incursionarse en el problema con flotas propias y subcontratadas, así como con transbordo.

5. Agradecimientos

Los autores quieren expresar su agradecimiento a la Vicerrectoría de Investigaciones, Innovación y Extensión de la Universidad Tecnológica de Pereira por su apoyo al proyecto *Solución del problema de localización, ruteo e inventarios en ambientes multiobjetivo 7-21-1*.

6. Contribución de autores

Todos los autores contribuyeron por igual a la investigación

Referencias

- [1] R. M. Azuma, G. P. Coelho y F. J. Von Zuben, "Evolutionary multi-objective optimization for the vendor-managed inventory routing problem," in *2011 IEEE Cong. Evol. Comp.*, 2011, pp. 1457-1464. <https://doi.org/10.1109/CEC.2011.5949787> ↑3
- [2] M. de la Arada Juárez, *Optimización de la cadena logística*, Madrid, España: Paraninfo, 2019. ↑3

- [3] D. P. Ballesteros Riveros y P. P. Ballesteros Silva, "Importancia de la administración logística," *Scientia et Technica*, vol. 1, art. 3745, 2008. <https://revistas.utp.edu.co/index.php/revistaciencia/article/view/3745> ↑3, 4
- [4] T. O. Boyano-Fram, "Retos logísticos de puertos de cuarta generación diagnóstico y modernización en países emergentes," *Rev. Cient. Anfibios*, vol. 2, no. 1, pp. 72-82., 2019. <https://doi.org/10.37979/afb.2019v2n1.41> ↑3
- [5] X. Casas, "Comercio electrónico en la cuarentena: la venta online creció un 84% pero los envíos demoran hasta 10 días," *Infobae*, 2020. [En línea]. Disponible en: <https://www.infobae.com/economia/2020/05/26/comercio-electronico-en-la-cuarentena-la-venta-online-crecio-un-84-pero-los-envios-demoran-hasta-10-dias/> ↑3
- [6] S. Chevalier, "El pedido de comida en línea en América Latina en 2021," *Statista*, 2021. [En línea]. Disponible en: <https://es.statista.com/grafico/19027/ingresos-generados-en-pedidos-en-linea-de-comida-a-domicilio/> ↑4
- [7] P. A. Vargas Rubio, "En la primera semana de aislamiento, la penetración del comercio digital registró un alza de 100%.", *La República*, 2020. [En línea]. Disponible en: <https://www.larepublica.co/globoeconomia/e-commerce-ha-crecido-mas-de-300-en-latinoamerica-en-medio-de-la-pandemia-3000424> ↑4
- [8] Departamento Nacional de Planeación, "Encuesta Nacional Logística 2020," 2020. [En línea]. Disponible en: <https://planeacionnacional.sharepoint.com/sites/PlataformaDIES2/Shared%20Documents/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2FPlataformaDIES2%2FShared%20Documents%2FEncuesta%20Nacional%20Log%C3%ADstica%2FENL%202020%2FENL%5F2020%5FDocumento%5FResultados%5F10%2D08%2D2021%283%29%2Epdf&parent=%2Fsites%2FPlataformaDIES2%2FShared%20Documents%2FEncuesta%20Nacional%20Log%C3%ADstica%2FENL%202020&p=true&ga=1> ↑4
- [9] M. M. Torres, *Logística y costos*, Bogotá, Colombia: Ediciones Díaz de Santos, 2012. ↑4
- [10] E. M. Toro Ocampo, J. F. Castañeda Londoño, and R. A. Gallego Rendón, *Introducción al problema de enrutamiento de vehículos en la logística de distribución*, Pereira, Colombia: Universidad Tecnológica de Pereira, 2020. <https://doi.org/10.22517/9789587224818> ↑4
- [11] V. I. Vivanco Navarro, "Aplicación de heurísticas para el inventory routing problems," tesis de pregrado, Fac. Ing., Pon. Univ. Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile, 2013. http://opac.pucv.cl/pucv_txt/txt-4500/UCH4887_01.pdf ↑4
- [12] C. Archetti, L. Bertazzi, G. Laporte y M. G. Speranza, "A branch-and-cut algorithm for a vendor-managed inventory-routing problem," *Transp. Sci.*, vol. 41, no. 3, pp. 382-391, 2007. ↑4, 5
- [13] L. C. Coelho y G. Laporte, "A branch-and-cut algorithm for the multi-product multi-vehicle inventory-routing problem," *Int. J. Prod. Res.*, vol. 51, no. 23-24, pp. 7156-7169, 2013. <https://doi.org/10.1080/00207543.2012.757668> ↑4

- [14] D. F. Batero Manso y J. A. Orjuela-Castro, "El problema de ruteo e inventarios en cadenas de suministro de perecederos: revisión de literatura," *Ingeniería*, vol. 23, no. 2, pp. 117-143, 2018. <https://doi.org/10.14483/23448393.12691> ↑4
- [15] D. F. Batero, "Modelo matemático multi-objetivo de ruteo e inventarios para la cadena de suministro de perecederos: caso sector frutícola," tesis de maestría, Fac. Ing., Univ. Dist. Francisco José de Caldas, 2017. <http://hdl.handle.net/11349/7419> ↑4
- [16] H. Shaabani, "A literature review of the perishable inventory routing problem," *Asian J. Ship. Log.*, vol. 38, no. 3, pp. 143-161, sep. 2022. <https://doi.org/10.1016/J.AJSL.2022.05.002> ↑4
- [17] M. A. S. Florindo, "Gestão integrada das rotas de entrega e inventário para um produto," tesis de maestría, Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, 2019. <http://hdl.handle.net/10451/41635> ↑4,5,9,10
- [18] P. Jiao y Z. Li, "Two-stage stochastic programming for the inventory routing problem with stochastic demands in fuel delivery," *Int. J. Ind. Eng. Comp.*, vol. 13, no. 4, pp. 507-522, Apr. 2022. <http://dx.doi.org/10.5267/j.ijiec.2022.7.004> ↑4,5
- [19] B. Raa y E.-H. Aghezzaf, "A practical solution approach for the cyclic inventory routing problem," *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 192, no. 2, pp. 429-441, 2009. ↑5
- [20] L. C. Coelho, J.-F. Cordeau y G. Laporte, "Heuristics for dynamic and stochastic inventory-routing," *Comp. Oper. Res.*, vol. 52, parte A, pp. 55-67, 2014. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2014.07.001> ↑5
- [21] S. Mirzaei y A. Seifi, "Considering lost sale in inventory routing problems for perishable goods," *Comp. Ind. Eng.*, vol. 87, pp. 213-227, 2015. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2015.05.010> ↑
- [22] L. C. Coelho, J. F. Cordeau y G. Laporte, "The inventory-routing problem with transshipment," *Comp. Oper. Res.*, vol. 39, no. 11, pp. 2537-2548, 2012. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2011.12.020> ↑5
- [23] D. Aksen, O. Kaya, F. S. Salman y Y. Akça, "Selective and periodic inventory routing problem for waste vegetable oil collection," *Optim. Lett.*, vol. 6, no. 6, pp. 1063-1080, 2012. <https://doi.org/10.1007/s11590-012-0444-1> ↑5,9
- [24] C. E. Miller, R. A. Zemlin y A. W. Tucker, "Integer programming formulation of traveling salesman problems," *JACM*, vol. 7, no. 4, pp. 326-329, 1960. <https://doi.org/10.1145/321043.321046> ↑5,10
- [25] R. Fourer, D. M. Gay y B. W. Kernighan, *AMPL. A modeling language for mathematical programming*, USA: Duxury Thomson 2003. [En línea]. Disponible en: <https://vanderbei.princeton.edu/307/textbook/AMPLbook.pdf> ↑11
- [26] C. Archetti, L. Bertazzi, G. Laporte y M. G. Speranza, "A branch-and-cut algorithm for a vendor-managed inventory-routing problem," *Transp. Sci.*, vol. 41, no. 3, pp. 382-391, 2007. <https://doi.org/10.1287/trsc.1060.0188> ↑11
- [27] L. C. Coelho, "leandro-coelho.". [En línea]. Disponible en: <https://www.leandro-coelho.com/instances/inventory-routing/> ↑13

Frank Alejandro Hincapié Londoño

Graduado en Ingeniería Industrial de la Universidad Tecnológica de Pereira en 2021. Actualmente es estudiante de la Maestría en Ingeniería Eléctrica de la misma Universidad. Es investigador del grupo GAOPE, y sus intereses de investigación incluyen la optimización exacta y aproximada, así como, la analítica de datos e inteligencia artificial.

Email: frank.hincapie@utp.edu.co

Jhonatan Stiven García Guevara

Graduado en Ingeniería Industrial de la Universidad Tecnológica de Pereira en 2022. Actualmente es estudiante de la Maestría en Ingeniería Eléctrica de la misma Universidad. Es investigador del grupo GAOPE, y sus intereses de investigación incluyen la optimización exacta, el enrutamiento de vehículos, la analítica de datos, los algoritmos de aprendizaje automático y el uso de metaheurísticas.

Email: jhonatan.garcia1@utp.edu.co

Eliana Mirledy Toro Ocampo

MSc en Ingeniería Eléctrica y en Investigación Operativa y Estadística (2005 y 2008 respectivamente) y PhD en Ingeniería (2016) de la misma Universidad. Actualmente es profesora en la Universidad Tecnológica de Pereira. Sus intereses de investigación incluyen la optimización exacta, el enrutamiento de vehículos y el uso de metaheurísticas. Es investigadora senior del Ministerio de Ciencia y Tecnológica de Colombia y directora del Grupo de Aplicaciones en Optimización y Procesos Estocásticos (GAOPE).

Email: elianam@utp.edu.co





Research

Multi-objective Location and Routing Problem: A Review

El problema de localización y ruteo con múltiples objetivos: una revisión de literatura

Paula Andrea Cabrales-Navarro¹✉*,
Javier Eduardo Arias-Osorio¹ y Julio César Camacho-Pinto¹

¹Universidad Industrial de Santander (Bucaramanga, Colombia).

Abstract

Context: The location and routing problem is one of the main issues in logistics and operations research oriented to minimize the system's total costs. However, in the supply chain management trend towards sustainability, most decisions introduce the optimization of several objectives simultaneously, including economic, social, and environmental perspectives, from which the multi-objective location and routing problem arises.

Method: This study reviews 99 scientific articles about the multi-objective location and routing problem published between 1989 and 2022 in Scopus and Web of Science databases. The papers are selected according to specific criteria and classified based on their application.

Results: This paper describes the most important characteristics of each application of the multi-objective location and routing problem in the literature. It reviews the articles according to their study objectives and solution methods to identify future research opportunities.

Conclusions: First, most papers on the multi-objective location and routing problem have studied waste management, relief distribution, perishable products, green location and routing problems, cold chain, and beverage distribution. Cost minimization is the most implemented optimization objective, in combination with other goals: risk minimization, environmental impact, time minimization, customer satisfaction maximization, workload balance, and route reliability. Additionally, the problem is solved using exact and approximate multi-objective methods, with evolutionary algorithms being the most suitable for complex models. Finally, current research is oriented toward developing models under uncertainty and stochastic problems, multiple periods, time windows, multiple echelons, and heterogeneous vehicle fleets.

Keywords: logistics, multi-objective optimization, location and routing problem, metaheuristics

Article history

Received:
27th/Oct/2021

Modified:
29th/Sep/2022

Accepted:
11th/Nov/2022

Ing, vol. 28, no. 2,
2023. e18734

©The authors;
reproduction right
holder Universidad
Distrital Francisco
José de Caldas.

Open access



*✉ Correspondence: paula2208423@correo.uis.edu.co

Resumen

Contexto: El problema de localización y ruteo constituye una de las principales temáticas en el área de logística e investigación de operaciones con un enfoque hacia la minimización de los costos totales del sistema. Sin embargo, en la gestión de la cadena de suministro, que actualmente presenta una tendencia hacia la sostenibilidad, la mayoría de las decisiones involucra la optimización simultánea de diversos objetivos, incluyendo perspectivas económicas, sociales y ambientales, de lo cual surge el problema de localización y ruteo con múltiples objetivos.

Método: Se realiza una revisión sistemática de la literatura sobre el problema de localización y ruteo con múltiples objetivos, consultando las bases de datos Scopus y Web of Science. De acuerdo con unos criterios de selección específicos, se identifican 99 artículos científicos asociados a la temática durante el periodo comprendido entre 1989 y 2022, los cuales se clasifican según el tipo de aplicación.

Resultados: Se describen las características más importantes para cada una de las aplicaciones del problema de localización y ruteo con múltiples objetivos en la literatura y se realiza una revisión de las investigaciones según sus objetivos de estudio y métodos de solución, para finalmente identificar las oportunidades de investigación principales.

Conclusiones: En primer lugar, la mayoría de los estudios sobre el problema de localización y ruteo multiobjetivo han estudiado la gestión de residuos, la distribución de elementos de socorro, los productos perecederos, el problema de localización y ruteo verde, la cadena de frío y la distribución de bebidas. El objetivo de optimización de mayor implementación es la minimización de costos, combinado con otros objetivos: minimización de riesgos, impactos ambientales, minimización de tiempo, maximización de la satisfacción del cliente, balance de carga de trabajo y confiabilidad rutas. Por otra parte, se aplican métodos exactos y aproximados multiobjetivo para dar solución al problema, siendo los algoritmos evolutivos los más usados para modelos de mayor complejidad. Finalmente, las investigaciones actuales están orientadas al desarrollo de modelos bajo condiciones de incertidumbre y estocásticos, múltiples periodos, ventanas de tiempo, múltiples escalones y flota heterogénea.

Palabras clave: logística, optimización multiobjetivo, problema de localización y ruteo, metaheurísticas.

Tabla de contenidos

	Página		
1. Introducción	3	4.2.2. Distribución de elementos de socorro	11
2. Metodología	4	4.2.3. GLRP	11
3. Problema de localización y ruteo	5	4.2.4. Productos perecederos	11
4. Problema de localización y ruteo con múltiples objetivos	6	4.2.5. Cadena de frío	12
4.1. Aplicaciones	7	4.2.6. Distribución de bebidas	12
4.2. Objetivos de estudio	8	4.2.7. Distribución de neumáticos y ventas en línea	13
4.2.1. Recolección de residuos	8	4.2.8. Otras aplicaciones	13
		4.3. Métodos de solución	13
		5. Discusión de resultados	16

6. Oportunidades de investigación	20	8. Contribución de autores	23
7. Conclusiones	22	Referencias	23

1. Introducción

El problema de localización y ruteo, o LRP (*location routing problem*), como su nombre lo indica, considera simultáneamente las decisiones sobre la ubicación de instalaciones y el diseño de las rutas que serán asignadas a una determinada flota de vehículos. El objetivo de estudio principal de este problema corresponde a la minimización de los costos totales del sistema (1). Sin embargo, en la actualidad, el interés por el desarrollo de cadenas de suministro sostenibles ha planteado la combinación de componentes económicos, sociales y ambientales para dar solución al LRP (2). Lo anterior convierte el problema en un modelo de optimización multiobjetivo. Teniendo en cuenta la necesidad de determinar la localización óptima de las instalaciones, la distribución de las rutas de entrega o recolección y, a su vez, optimizar diversos objetivos, se requiere la formulación de modelos matemáticos complejos resueltos con técnicas de solución robustas.

Diversos autores han estudiado los avances en la literatura del LRP para analizar sus características y variantes. (3) plantean un estado del arte que define los principales conceptos del problema con un enfoque hacia los métodos utilizados para su solución desde los inicios hasta el año 2006. Más adelante, (4) proponen una taxonomía por niveles en donde la primera fase se centra en las características del LRP y la segunda en las estrategias de solución y el número de objetivos de optimización. Este trabajo identifica por primera vez la necesidad de investigar el LRP multiobjetivo con mayor detalle. Por otro lado, (5) extienden el estudio presentado por (3) hasta el año 2014, evaluando las nuevas extensiones de esta línea de investigación. De igual manera, (6) realizan una revisión que detalla las características de cada una de las variantes del problema. Estos dos últimos estudios, de manera similar, analizan los avances en formulaciones multiperiodo, multiescalón, multiobjetivo, problemas estocásticos, inventarios, metodologías y algoritmos novedosos. Recientemente, (7) actualizaron la literatura sobre el LRP, cuya conclusión se enfoca en el crecimiento exponencial en la publicación de artículos que formulan modelos con múltiples objetivos como un esfuerzo para involucrar el concepto de sostenibilidad en la logística.

A pesar de que estos estudios analizan el LRP multiobjetivo, la investigación en esta área debe abordarse detalladamente. Por esta razón, este artículo presenta una revisión sistemática de la literatura que permite analizar la intensidad de la investigación sobre LRP con múltiples objetivos a lo largo de los años. Los propósitos del estudio incluyen: (a) determinar las principales aplicaciones del problema, (b) definir los objetivos de optimización utilizados de acuerdo con su aplicación, (c) identificar los métodos implementados para dar solución al LRP multiobjetivo y, por último, (d) evaluar las oportunidades de investigación que se presentan en esta temática.

El contenido de este artículo se organiza de la siguiente manera: la segunda sección describe la metodología de investigación; la tercera sección presenta la definición del LRP; el cuarto apartado expone hallazgos bibliográficos, aplicaciones, objetivos de estudio y métodos de solución para el

problema multiobjetivo; la quinta sección plantea la discusión de resultados; y, finalmente, la secciones sexta y séptima detallan oportunidades de investigación y conclusiones.

2. Metodología

Para la realización de este artículo, se llevó a cabo una revisión sistemática de literatura enfocada en el problema de localización y ruteo con múltiples objetivos. La metodología de investigación inicia con la definición de los términos de búsqueda que incluyen las palabras clave “location” y “routing”. Por otra parte, considerando que la investigación aborda el problema multiobjetivo, se limita la exploración a artículos que incorporan las expresiones “multi-objective”, “multiobjective” o “bi-objective”. Los términos anteriores permiten obtener la ecuación de búsqueda que es aplicada en las bases de datos Scopus y Web of Science. Posteriormente, se aplican, como criterio de filtración para la selección de documentos, artículos de carácter científico únicamente en idioma inglés, sin considerar una ventana de tiempo, con el fin de identificar las investigaciones iniciales asociadas a esta temática hasta la fecha actual, obteniendo 334 artículos. Estos documentos son revisados de acuerdo con su título y resumen, con el propósito de seleccionar únicamente aquellos artículos que se encuentren dentro de los parámetros definidos para el estudio, considerando los siguientes criterios de exclusión:

- Artículos en los cuales la formulación del problema se lleve a cabo por etapas, es decir, primero se resuelva el problema de localización de instalaciones y posteriormente el problema de ruteo de vehículos.
- Estudios en los que se implemente el problema de localización, ruteo e inventarios o ILRP (*inventory location-routing problem*), debido a que el enfoque del estudio se relaciona solo con las decisiones de localización y enrutamiento.
- Documentos en los cuales se desarrollen modelos para sistemas de transporte diferentes al terrestre, por ejemplo, marítimo, férreo y aéreo.
- Artículos con modelos matemáticos mono-objetivo y aquellos que impliquen solo decisiones de localización o solo de ruteo de vehículos.
- Artículos que incluyen los términos clave, pero no están asociados a la temática.

De acuerdo con los criterios de exclusión, se consolida un total de 99 documentos sobre el problema de localización y ruteo multiobjetivo para ser analizados. La Tabla I detalla la metodología descrita en esta sección. Adicionalmente, con el objetivo de evaluar la actividad literaria de la temática de investigación, se realiza un análisis bibliométrico para los artículos encontrados, el cual permite estimar el impacto científico y proporciona información respecto a la evolución y la visibilidad de la línea de conocimiento de interés (8). Finalmente, se efectúa un análisis de contenido de los documentos seleccionados, planteando la estructura de la revisión según los siguientes enfoques: aplicaciones, objetivos de estudio, métodos de solución y tendencias de investigación para la formulación de modelos matemáticos asociados al problema de localización y ruteo multiobjetivo.

Tabla I. Proceso de selección de artículos

Ecuación de búsqueda	((multi-objective) OR (multiobjective) OR (bi-objective)) AND (location) AND (routing)
Número de artículos	499
Filtro tipo de artículo e idioma	334
Criterios de exclusión	
1. Modelos por etapas	9
2. ILRP	41
3. Transporte diferente al terrestre	26
4. Únicamente localización	6
5. Únicamente ruteo	35
6. Mono-objetivo	4
7. No relacionado a la temática	114
Artículos seleccionados	99

3. Problema de localización y ruteo

El problema de localización y ruteo constituye una de las temáticas de mayor interés en el área de logística e investigación de operaciones (9). En el LRP, las decisiones de localización y el diseño de las rutas de distribución son consideradas simultáneamente. De este modo, el LRP corresponde a una combinación del problema de localización de instalaciones o FLP (*facility location problem*) y el problema de ruteo de vehículos o VRP (*vehicle routing problem*), integrando las decisiones estratégicas, tácticas y operativas asociadas a estos problemas (10). El FLP pertenece al nivel estratégico, en el cual las decisiones se tienen en cuenta por un periodo de largo plazo, mientras que el VRP implica un nivel de decisión táctico u operativo, asociado a periodos cortos de tiempo (11).

Los primeros investigadores que cuestionaron la independencia de estos dos tipos de decisiones fueron (12) y (13). Este último asegura en su estudio que la ubicación de fábricas y puntos de suministro que atienden a clientes distribuidos en una red ejerce un impacto en los costos de transporte. Sin embargo, fue hasta 1989 cuando (10) publicaron un estudio en el cual evalúan el efecto de ignorar las decisiones de enrutamiento al ubicar depósitos, demostrando así que la mejor solución luego de la etapa de localización de instalaciones no genera necesariamente la solución de menor costo cuando se lleva a cabo el proceso de ruteo. El problema de localización y ruteo clásico consiste en abrir una serie de instalaciones, tales como plantas de producción, almacenes o centros de distribución, dentro de un conjunto de localizaciones potenciales, asignando clientes a estas instalaciones y seleccionando las rutas para una flota de vehículos determinada (14). Lo anterior se realiza con el objetivo de garantizar la minimización de los costos de abrir instalaciones y el costo total de las rutas establecidas. De este modo, el LRP busca responder dos preguntas específicas:

- ¿Qué instalaciones deben abrirse dentro de un conjunto finito o infinito de posibles opciones establecidas?

- ¿Qué rutas de vehículos deben construirse para atender un conjunto de clientes y en qué secuencia un vehículo de una flota determinada debe visitar cada uno de ellos? (6).

Con el fin de acercar el problema a condiciones de la vida real, la mayoría de los estudios abordan el LRP con restricciones de capacidad para los depósitos y vehículos, lo cual se denomina problema de localización y ruteo capacitado o CLRP (*capacitated location-routing problem*) (5,7) definen el CLRP como una red de nodos $V = I \cup J$, donde $I = \{1, 2, \dots, m\}$ hace referencia al conjunto potencial de depósitos con capacidad W_i , y $J = \{1, 2, \dots, n\}$ está relacionado con el grupo de clientes que deben ser atendidos, los cuales requieren una demanda d_j . Existe una flota de vehículos homogénea K con una capacidad Q y un costo fijo F que se asigna por cada vehículo usado. La apertura de cada depósito representa un costo O_i y la asignación de una determinada ruta equivale a un costo de viaje c_{ij} . La solución del problema consiste en determinar qué depósitos I deben abrirse, asignando a cada cliente J un depósito abierto y construyendo rutas de vehículos para cada depósito y sus clientes, de acuerdo con las siguientes restricciones:

- La capacidad de un depósito abierto no puede ser excedida.
- Todas las rutas deben iniciar y finalizar su recorrido en el mismo depósito.
- Cada vehículo realiza, como máximo, un viaje.
- No se permiten entregas divididas, es decir, cada cliente es atendido por un solo vehículo.
- La capacidad de un vehículo no puede ser excedida.

Adicionalmente, diferentes variantes del problema se pueden encontrar en la literatura, tales como LRP con recogida y entrega simultánea, LRP con ventanas de tiempo, LRP con flota de vehículos heterogénea, LRP multi-escalón y LRP con demandas estocásticas (15).

4. Problema de localización y ruteo con múltiples objetivos

Los problemas de optimización con múltiples objetivos involucran un proceso computacional de mayor complejidad que aquel en el cual se implementa un solo objetivo de estudio. Esto, debido a que no es posible generar una solución que optimice todos los objetivos del problema simultáneamente, los cuales, por lo general, están en conflicto entre sí. Para ayudar a la toma de decisiones en este tipo de casos, se genera un conjunto de soluciones que, al intentar mejorar un objetivo, afectan a los demás. Estas se denominan *soluciones óptimas de Pareto* (16).

Tal como se mencionó en la sección anterior, el objetivo económico es usualmente considerado en el LRP. Sin embargo, en la gestión de la cadena de suministro y los procesos de distribución, la mayoría de decisiones involucra la optimización de diversos objetivos conjuntamente (17). Por consiguiente, las investigaciones recientes han planteado otros objetivos adicionales a la minimización de costos, tales como la minimización de riesgos, la minimización de impactos ambientales, el balance de carga de trabajo y la maximización de la satisfacción del cliente. Lo anterior se traduce en un elevado crecimiento en el número de publicaciones asociadas al problema de localización y ruteo multiobjetivo a lo largo de los años, tal como se observa en la Fig. 1 (resultado del análisis bibliométrico).

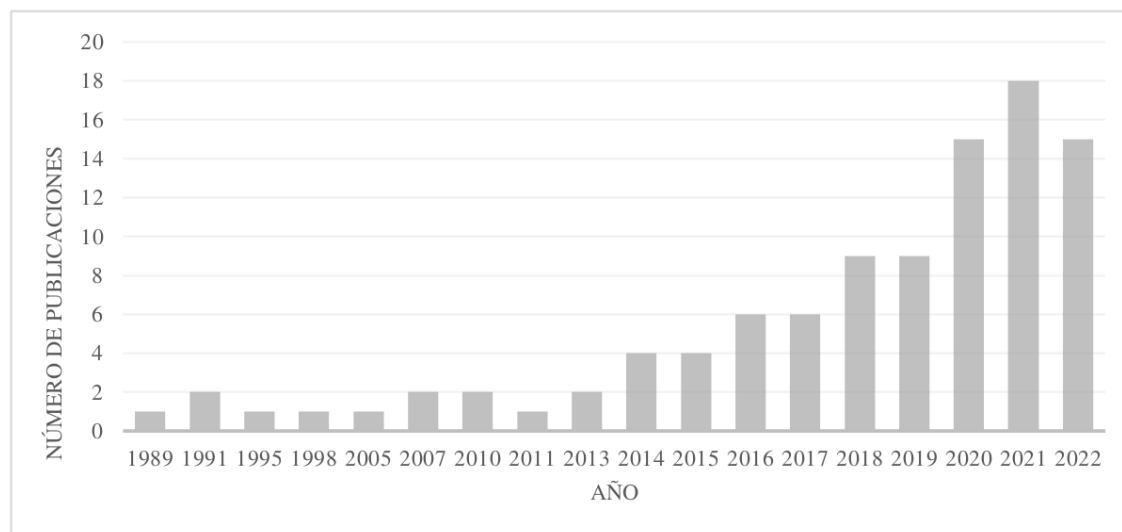


Figura 1. Proceso de obtención de los residuos para mezcla

Los primeros estudios fueron publicados en el año 1989 por (18) y en 1991 por (19) y (20). Sin embargo, la mayoría de las publicaciones en la temática empieza a realizarse a partir del año 2014, cuando se evidencia un crecimiento continuo de la literatura hasta la actualidad, representado en el 86,9% de los documentos analizados. Por el contrario, en el intervalo de tiempo entre 1991 y 2014 se presenta poco desarrollo científico. No obstante, durante este periodo se destacan las investigaciones con mayor impacto, considerando el número de citas. La investigación realizada por (21) ocupa el primer lugar con 334 citas, seguido de (20) con 196 citas y de (22), cuyo trabajo cuenta con 191 citas. Con respecto a la contribución literaria por país, la nación con la productividad científica más alta es Irán, cuya línea de investigación principal se enfoca en problemas de optimización para la gestión de residuos peligrosos; en segundo lugar, está China, seguida de Estados Unidos, el Reino Unido y Turquía.

A continuación, se expone una recopilación de los resultados obtenidos de la revisión sistemática realizada sobre el problema de localización y ruteo multiobjetivo en referencia a sus principales aplicaciones, objetivos de estudio y métodos de solución.

4.1. Aplicaciones

El enfoque de la presente revisión implica en primera instancia la categorización de los documentos seleccionados según su aplicación. La Tabla ?? permite observar la distribución porcentual de los 99 documentos analizados de acuerdo con la red de distribución o cadena de suministro para la cual se desarrolla el modelo matemático. El problema de localización y ruteo multiobjetivo es abordado en la literatura principalmente para las siguientes aplicaciones: recolección de residuos (*waste collection*), distribución de elementos de socorro (*relief distribution*), productos perecederos (*perishable products*), el problema de localización y ruteo verde (GLRP, *green location routing problem*), cadena de frío (*cold chain*)

y distribución de bebidas (*beverage distribution*). En menor medida, se desarrollan trabajos asociados a la distribución de neumáticos (*tire supply chain*) y ventas en línea (*online shopping*). Adicionalmente, se identifican algunas investigaciones que no se atribuyen a ninguna área de aplicación específica, pero que constituyen problemas relacionados con la temática, cuyas formulaciones matemáticas pueden ajustarse a cadenas de suministro reales.

Tabla II. Porcentaje de artículos científicos por aplicación

Aplicación	Número de publicaciones	Porcentaje
Recolección de residuos	44	44,4 %
Distribución de elementos de socorro	17	17,2 %
GLRP	8	8,1 %
Productos perecederos	6	6,1 %
Cadena de frío	5	5,1 %
Distribución de bebidas	3	3,0 %
Distribución de neumáticos	1	1,0 %
Ventas en línea	1	1,0 %
Otras aplicaciones	14	14,1 %
Total	99	100 %

Tal como se observa, existe una alta incidencia en la implementación del GLRP multiobjetivo a las características de los procesos relacionados con la recolección de residuos, teniendo en cuenta que el 44 % de los artículos están enfocados en este sector. A su vez, del porcentaje de publicaciones sobre recolección de residuos, el 84 % de las mismas hacen referencia a estudios vinculados a la gestión de residuos peligrosos (*hazardous waste management*).

4.2. Objetivos de estudio

A continuación, se describen los principales hallazgos respecto a las aplicaciones relacionadas con la temática de investigación, con énfasis en los objetivos de estudio del problema y resaltando algunas características del sistema.

4.2.1. Recolección de residuos

El proceso de transporte de residuos inicia con la etapa de recolección, que consiste en retirar los residuos del lugar de almacenamiento para luego trasladarlos a su destino final. Sin embargo, además de construir las rutas de recolección, para el diseño de un adecuado sistema de distribución, es necesario especificar la ubicación de instalaciones, tales como depósitos, almacenes, puntos de eliminación y centros de tratamiento de residuos (14). Con el propósito de garantizar la viabilidad técnica y económica, así como la seguridad para las personas y el medio ambiente durante los procesos de recolección de los residuos, diversos autores han implementado modelos de optimización para

realizar una selección cuidadosa de las instalaciones de procesamiento o eliminación de estos desechos y, del mismo modo, determinar las rutas de transporte que generen el menor riesgo (23). Como se mencionó anteriormente, la gestión de residuos peligrosos constituye la línea de investigación más importante en el área.

Se conoce como *residuos peligrosos* a aquellos desechos que poseen propiedades como toxicidad, corrosividad, inflamabilidad y reactividad química, los cuales presentan una amenaza tanto para el ser humano como para el medio ambiente (22). Debido al peligro asociado a estos desechos, se requiere un control adecuado para su recolección, transporte, tratamiento, reciclaje y eliminación. El problema de localización y ruteo con múltiples objetivos para los residuos peligrosos ha tenido dos enfoques de optimización principales: minimización de costos y minimización de riesgo. Este último objetivo se caracteriza por ser abordado por los investigadores desde diferentes puntos de vista, tales como riesgo de localización, riesgo de transporte y equidad de riesgo. El concepto de riesgo asociado a las localizaciones o instalaciones está relacionado con la cantidad de residuos depositados en cada sitio y el número de personas dentro de una distancia cercana al punto, mientras que el riesgo de transporte vincula linealmente la cantidad de residuos transportados con el número de personas expuestas a lo largo de la ruta (24). Por su parte, la equidad de riesgo constituye una medida que se calcula como el riesgo máximo de la zona por unidad de población (25) y busca garantizar que el riesgo se distribuya uniformemente (26).

El primer trabajo publicado en esta temática fue desarrollado en el año 1989. En lugar de considerar el objetivo económico, plantea la elaboración de un sistema para la minimización de tres objetivos: riesgo de localización, riesgo de transporte y tiempo de viaje, con el propósito de establecer la ubicación de los sitios de disposición y las diferentes rutas para la recolección de los residuos (18). La mayoría de los estudios posteriores ha considerado el factor de los costos como objetivo principal en la formulación matemática. Los conceptos mencionados previamente en relación con el riesgo fueron implementados en los trabajos realizados por (20, 25) y (26). No obstante, estas investigaciones se caracterizan por el hecho de que sus modelos utilizan un solo tipo de residuos peligrosos, lo cual no es usual para la recolección de estos desechos.

(19) desarrollan el primer modelo multiproducto, el cual considera diferentes clases de residuos peligrosos y múltiples tipos de tecnologías para el tratamiento de estos, con los siguientes objetivos de estudio: minimización del riesgo total (riesgo de transporte y riesgo de localización), minimización de los costos y maximización de la equidad del riesgo. Este último objetivo fue aplicado también por (27), pero dejó de implementarse debido a que, con el fin de distribuir uniformemente el riesgo, se aumentaba el número de instalaciones seleccionadas con una tasa de utilización más baja (22). Un aporte importante sobre esta temática fue desarrollado por (22), quienes consideran por primera vez condiciones que habían sido ignoradas en los estudios anteriores, como es el caso del tipo de tecnología utilizada en cada sitio de tratamiento y la compatibilidad que debe existir entre los residuos y dicha tecnología. Durante la época se publicaron investigaciones con énfasis en residuos sólidos de animales (28), riesgos para instalaciones fijas (29) y contribuciones bajo condiciones de incertidumbre (30).

En el año 2013, (31) plantea un diseño para la red de distribución considerado como uno de los más completos de la literatura, el cual incluye generación, tratamiento, reciclaje, nodos de disposición y rutas entre ellos, con el propósito de minimizar el costo total, el riesgo de transporte y el riesgo al que se expone la población cercana a los sitios de disposición de residuos. A partir de entonces aumentan las investigaciones relacionadas con esta temática, con el desarrollo de los estudios propuestos por (32–35) y (23). Posteriormente, (24) desarrollan una formulación matemática que asocia por primera vez una flota de vehículos heterogénea e imponen restricciones vinculadas al concepto de compatibilidad entre residuos, los cuales, por sus características, no deben recolectarse conjuntamente. Adicional a esto, una brecha no abordada en la literatura fue contemplada por (36), quienes evaluaron horizontes de planificación de periodos múltiples en sus modelos.

Algunos otros trabajos han sido publicados en los últimos tiempos para modelar problemas orientados a la minimización de costos y riesgo con características como la consideración del consumo de combustible y la depreciación del vehículo en la función de costos (37), la presencia de incertidumbres (38,39), modelos matemáticos de dos escalones (40) y aplicaciones a sectores específicos que generan residuos peligrosos, como lo es la industria automotriz (9). En 2019 se desarrolla un modelo matemático que, adicional al aspecto económico y de riesgo, introduce la maximización de la satisfacción del cliente como tercera función objetivo a optimizar (41). Desde otro punto de vista, algunas investigaciones recientes han contemplado temáticas medioambientales dentro sus objetivos. (42) inician esta práctica evaluando, dentro del campo económico, los costos asociados al uso del combustible de los vehículos y las emisiones de CO₂. Sin embargo, son (43) quienes introducen el concepto de problema de localización y ruteo verde o GLRP para los residuos peligrosos, en el cual proponen un estudio que minimiza simultáneamente costos, riesgo de transporte y localización y emisiones de CO₂ dentro de sus objetivos. Este enfoque hacia la minimización de emisiones ha sido evaluado en estudios posteriores: (44–47).

Por otra parte, (48) proponen el único trabajo para residuos peligrosos que plantea, dentro de su modelo, la función objetivo de balance de carga de trabajo. En este problema, los autores discuten la importancia de aumentar la productividad en los empleados, la cual se encuentra directamente relacionada con el equilibrio de la carga laboral de los mismos. Como una problemática que se ha incrementado debido a la pandemia del Covid-19, (49) proponen un modelo de localización y ruteo para la gestión de residuos médicos, que se categorizan como residuos peligrosos. Diversos autores han publicado estudios similares para minimizar los costos y el riesgo asociado a la recolección de esa clase de residuos, cuya generación aumenta en épocas de crisis sanitaria (50–54).

Para el caso de los estudios en los cuales no se consideran residuos peligrosos, sino desechos como plástico, vidrio, botellas, comida o papel, algunos autores han implementado el objetivo de riesgo como un concepto de carácter social, desarrollando formulaciones matemáticas en las que se busca maximizar la distancia entre los clientes y los puntos de disposición de los desechos, considerando que la exposición a estos sitios es peligrosa (14,55).

4.2.2. Distribución de elementos de socorro

La logística de emergencia es definida como el proceso de planificación, gestión y control eficiente del flujo de recursos desde un lugar de emergencia hasta el punto donde se encuentran las personas afectadas a las cuales se les debe brindar atención (56). Las víctimas de un desastre natural deben recibir elementos de socorro, lo cual puede incluir alimentos, medicinas y productos de higiene, garantizando su entrega oportuna a la mayor cantidad de personas afectadas. Es por esto que maximizar la demanda atendida es uno de los objetivos de los modelos de optimización de carácter humanitario (57, 58). Algunos autores interpretan la satisfacción de la demanda como la optimización del tiempo de entrega, por lo cual formulan modelos matemáticos para asegurar la minimización del tiempo de viaje (59–62).

Garantizar la seguridad durante el proceso de transporte en un entorno post-desastres, como es el caso de los eventos sísmicos, es de vital importancia. Para esto se han desarrollado estudios con el objetivo de maximizar la confiabilidad de las rutas como una alternativa para reducir el riesgo al que se puede ver enfrentado el personal de transporte. Aplicando este objetivo, se han propuesto modelos con entregas divididas (63), múltiples periodos (64), multiescalón (65) y escenarios bajo incertidumbre (66–68).

Las condiciones inciertas de la logística de emergencia hacen que la optimización estocástica sea uno de los enfoques de interés en este tipo de redes de distribución. Diversos autores modelan el problema de localización y ruteo con múltiples objetivos para la distribución de elementos de socorro mediante el uso de parámetros de entrada de carácter estocástico, tales como niveles de demanda y costos o tiempos de viaje (69), mientras que, recientemente, algunas investigaciones exponen la incertidumbre asociada a un nuevo objetivo de estudio en esta temática: la minimización de las emisiones de CO₂ (70–72).

4.2.3. GLRP

El problema de localización y ruteo asociado a la logística verde se ha planteado bajo la necesidad de disminuir la contaminación y las consecuencias de efecto invernadero ocasionadas por consumo de combustible utilizado para la industria del transporte (16). La logística se centra en los costos económicos. Sin embargo, tener en cuenta los impactos negativos sobre el medio ambiente ha sido una línea de investigación que ha incrementado su atención en los últimos años. Por esta razón, los modelos matemáticos para la localización y ruteo verde se caracterizan por minimizar costos y, a su vez, las emisiones de CO₂, convirtiéndose así en problemas multiobjetivo. Algunas variantes estudiadas para estos modelos GLRP bi-objetivo incluyen: enrutamiento abierto (73), ventanas de tiempo (74), multiescalón (75) y multiproducto (76). Asimismo, otros estudios han evaluado la inclusión de nuevos objetivos tales como el balance de carga de trabajo para incorporar el impacto social al sistema (77), la minimización del tiempo (78) y la minimización del *makespan* o tiempo de espera en la secuencia de transporte de los vehículos (79).

4.2.4. Productos perecederos

Las cadenas de suministro para alimentos perecederos buscan garantizar la calidad de los productos, la cual disminuye a medida que se incrementa el tiempo del proceso de distribución.

Las investigaciones asociadas a la localización y ruteo con múltiples objetivos para estos productos describen modelos matemáticos principalmente con restricciones de ventanas de tiempo, generalmente establecidas por el cliente para recibir sus productos en las mejores condiciones posibles (80).

En relación con los objetivos de estudio, la minimización de costos constituye la meta principal para los problemas planteados. Este enfoque económico ha sido acompañado en diversas investigaciones por objetivos como la minimización del impacto medioambiental causado por las emisiones de CO₂ (21,81), el balance de la carga de trabajo de los centros de distribución (82), la minimización del tiempo de recorrido (83) y la maximización de la satisfacción del cliente (84). Por otra parte, un estudio similar al presentado en (21) propone la maximización de la utilidad del personal y los clientes, además del impacto económico de la apertura de un centro de distribución, en la creación de empleo para una cadena de distribución de alimentos perecederos (85).

4.2.5. Cadena de frío

La cadena de frío corresponde al transporte de productos para los cuales es fundamental conservar una temperatura baja con el fin de mantener su calidad (86). Por tal razón, los modelos matemáticos formulados generalmente buscan, además de minimizar costos, garantizar la satisfacción del cliente. No obstante, la interpretación asociada a este concepto ha sido estudiada desde diferentes puntos de vista, como por ejemplo la minimización del tiempo de distribución (87), la minimización del daño asociado a los tipos de carga (cargas generales, cargas refrigeradas y cargas congeladas) (86, 88), la minimización del tiempo de espera del cliente y los vehículos para asegurar la eficiencia de la cadena de frío (89).

La logística de la cadena de frío se caracteriza por tener un alto consumo energético y elevadas emisiones de carbono. En consecuencia, (15) introducen una nueva función objetivo al sistema: la minimización de las emisiones totales de CO₂, CH₄ y N₂O, como una estrategia para enfrentar esta problemática. Las restricciones asociadas a ventanas de tiempo, flota heterogénea, recogida y entrega simultánea y transporte mixto se evalúan en este estudio para integrar las condiciones reales de distribución de los productos de la cadena de frío.

4.2.6. Distribución de bebidas

La distribución de productos embotellados ha sido modelada en la literatura como un problema de transporte, localización y ruteo o TLRP (*transporting location routing problem*), considerado como una extensión del problema de localización y ruteo de dos escalones (90). Para este tipo de productos, la red de transporte está conformada por varias plantas de producción y un conjunto de clientes dentro de una ciudad, los cuales pueden ser hoteles, restaurantes o supermercados. Cada planta de producción cuenta con una flota de vehículos encargada de distribuir los productos. Sin embargo, no puede haber una conexión directa entre dichas plantas y los clientes debido a las regulaciones de tráfico pesado de la ciudad. Lo anterior implica la necesidad de incluir centros de distribución en la red, de donde son enviados los productos que serán entregados al cliente.

Este problema es presentado como un modelo LRP multiobjetivo por primera vez en el año 2014, con la finalidad de minimizar costos y asegurar el balance de la carga de trabajo de los conductores en la etapa de enrutamiento (90). Las investigaciones posteriores enfrentan el problema multiproducto teniendo en cuenta las condiciones normales de una planta de producción en donde se producen diferentes tipos de bebidas embotelladas. Las restricciones asociadas a ventanas de tiempo impuestas por los clientes con objetivos de optimización, como la minimización de las emisiones de CO₂ (91) y la maximización de la satisfacción del cliente (92), han sido estudiadas en este tipo de distribución.

4.2.7. Distribución de neumáticos y ventas en línea

Estas aplicaciones han sido estudiadas en menor medida para el problema de localización y ruteo multiobjetivo. (2) plantea un modelo estocástico para una red cerrada asociada a la cadena de suministro de la industria de los neumáticos, el cual considera aspectos de sostenibilidad y busca minimizar costos y emisiones de CO₂, así como maximizar la capacidad de respuesta de la red integrada. Mientras tanto, (93) diseñan un modelo matemático de dos escalones con el propósito de reducir los costos de operación y las emisiones de carbono junto con la maximización de la satisfacción del cliente como estrategia de competitividad para las empresas de ventas en línea.

4.2.8. Otras aplicaciones

Adicionalmente, el estudio del problema de localización y ruteo con múltiples objetivos también ha sido discutido en la literatura mediante el planteamiento de modelos matemáticos que no tienen ningún tipo de producto o cadena de distribución establecido para su aplicación. No obstante, estos trabajos involucran diversos objetivos de optimización, características y restricciones al problema, los cuales contribuyen a la evolución de esta temática de investigación, presentándose como puntos de referencia para su implementación en las diferentes redes de distribución asociadas a la logística de localización y transporte. El planteamiento de las formulaciones matemáticas es variado, puesto que depende de las necesidades del sistema que se pretende modelar. Junto con la minimización de los costos totales, en estos estudios se destacan otros objetivos, tales como la maximización de la demanda total atendida (94,95), el balance en la carga de trabajo del sistema de distribución (96), la minimización del tiempo máximo de entrega de los productos al cliente (97), la minimización del tiempo de espera del cliente (98), la maximización de la confiabilidad de las rutas (17), la minimización de la diferencia entre la distancia recorrida por los vehículos (99), la maximización del nivel de servicio (100, 101) y la minimización de las emisiones de CO₂ (102–104).

4.3. Métodos de solución

Para resolver el problema de localización y ruteo con múltiples objetivos, se han aplicado diversas técnicas de solución en la literatura que incluyen tanto métodos exactos como aproximados. Las soluciones exactas han encontrado mayor aceptación para optimizar problemas pequeños (24). Por lo tanto, considerando la naturaleza NP-Hard de este problema y la existencia de varios objetivos contradictorios en las formulaciones multiobjetivo, se han desarrollado numerosos algoritmos evolutivos para resolver los problemas a gran escala en un tiempo computacional aceptable.

Para el caso de los métodos exactos multiobjetivo propuestos, (20) utilizan el método de las ponderaciones como una de las primeras propuestas de solución al problema. Más adelante, se llevan a cabo estudios que resuelven los modelos planteados por medio de otras técnicas, tal como se describe en la Tabla III, la cual presenta un resumen de los métodos utilizados y la literatura relacionada para cada uno de ellos. El método de las ε -restricciones corresponde la estrategia de mayor frecuencia para dar solución al LRP multiobjetivo. Cabe resaltar que esta técnica ha sido mejorada, dando como resultado el método de las ε -restricciones aumentado, metodología que, de igual manera, ha despertado interés en los autores por esta temática. En menor medida, se han utilizado métodos como la programación por metas, las sumas ponderadas y la programación por compromiso.

Tabla III. Métodos exactos multiobjetivo implementados

Técnica	Literatura relacionada	
Método de las ε -restricciones (<i>ε-constraint method</i>)	Toro <i>et al.</i> (16)	Fathollahi-Fard <i>et al.</i> (72)
	Yilmaz <i>et al.</i> (23)	Toro <i>et al.</i> (73)
	Jamali (37)	Alamatsaz <i>et al.</i> (74)
	Saeidi <i>et al.</i> (45)	Abadi (76)
	Rabbani <i>et al.</i> (48)	Meidute-Kavaliauskiene <i>et al.</i> (79)
	Adrang <i>et al.</i> (59)	Khalili-Damghani <i>et al.</i> (82)
	Saatchi <i>et al.</i> (65)	Navazi <i>et al.</i> (85)
	Ghasemi <i>et al.</i> (68)	Ghezavati y Beigi (105)
Método de las ε -restricciones aumentado (<i>augmented ε-constraint method</i>)	Bozorgi-Amiri y Khorsi (69)	
	Ebrahimi (2)	Zhao y Huang (36)
	Rabbani <i>et al.</i> (9)	Govindan <i>et al.</i> (54)
	Zhao y Huang (32)	Khanchezharrin <i>et al.</i> (62)
	Zhao <i>et al.</i> (33)	Beiki <i>et al.</i> (66)
Programación por metas (<i>goal programming method</i>)	Yú y Solvang (35)	Eskandari <i>et al.</i> (106)
	Rabbani <i>et al.</i> (14)	Zhao y Verter (34)
	Giannikos (26)	Tirkolae <i>et al.</i> (49)
Método de las sumas ponderadas (<i>weighted sum method</i>)	Zhao y Zhao (29)	Zhao <i>et al.</i> (50)
	Rabbani <i>et al.</i> (14)	Zhao <i>et al.</i> (33)
	List y Mirchandani (19)	Rabbani <i>et al.</i> (48)
Método de la programación por compromiso (<i>Weighted compromise method</i>)	Current y Ratick (25)	
	Hu <i>et al.</i> (41)	

Si bien los procedimientos exactos han sido ampliamente implementados, la complejidad computacional de estos problemas constituye un esfuerzo elevado para brindar soluciones eficientemente. Por esta razón, se han desarrollado los algoritmos evolutivos multiobjetivo, o MOEA (*multiobjective evolutionary algorithms*), los cuales, basados en técnicas metaheurísticas, permiten obtener resultados favorables en un menor tiempo. El primer estudio en implementar estas técnicas es desarrollado por (28) en el año 2007 y utiliza una metaheurística multiobjetivo con procedimiento de memoria adaptativa, o MOAMP (*multiobjective metaheuristic with adaptative memory procedure*) para dar solución a un problema de localización y ruteo para la eliminación de desechos sólidos animales.

Años más tarde, (94) desarrollan un algoritmo multiobjetivo de búsqueda dispersa MOSS (*multiobjective scatter search*) para resolver un modelo matemático bi-objetivo de localización de múltiples depósitos y enrutamiento.

Tabla IV. Algoritmos evolutivos multiobjetivo implementados

Técnica	Literatura relacionada	
Algoritmo genético no dominado II (NSGA-II)	Rabbani <i>et al.</i> (14)	Abadi (76)
	Safari <i>et al.</i> (17)	Meidute-Kavaliauskiene <i>et al.</i> (79)
	Rabbani <i>et al.</i> (24)	Khalili-Damghani <i>et al.</i> (82)
	Jamali (37)	Navazi <i>et al.</i> (85)
	Yu <i>et al.</i> (40)	Leng <i>et al.</i> (86)
	Farrokhi-Asl <i>et al.</i> (42)	Leng <i>et al.</i> (88)
	Raeisi y Jafarzadeh Ghouschi (47)	Leng <i>et al.</i> (89)
	Rabbani <i>et al.</i> (48)	Martínez-Salazar <i>et al.</i> (90)
	Farrokhi-Asl <i>et al.</i> (55)	Wang <i>et al.</i> (92)
	Rath y Gutjahr (57)	Mara <i>et al.</i> (96)
	Nedjati <i>et al.</i> (58)	Mamaghani y Davari (100)
	Long <i>et al.</i> (61)	Validi <i>et al.</i> (102)
	Wang <i>et al.</i> (63)	Chen <i>et al.</i> (104)
	Vahdani <i>et al.</i> (64)	Ghezavati y Beigi (105)
Ghasemi <i>et al.</i> (68)	Rabbani <i>et al.</i> (107)	
Alamatsaz <i>et al.</i> (74)	Wang <i>et al.</i> (108)	
Heidari <i>et al.</i> (75)	Wang <i>et al.</i> (109)	
Optimización por enjambres de partículas multiobjetivo (MOPSO)	Safari <i>et al.</i> (17)	Vahdani <i>et al.</i> (64)
	Rabbani <i>et al.</i> (24)	Meidute-Kavaliauskiene <i>et al.</i> (79)
	Farrokhi-Asl <i>et al.</i> (42)	Navazi <i>et al.</i> (85)
	Yu <i>et al.</i> (40)	Liu y Kachitvichyanukul (95)
	Raeisi y Jafarzadeh Ghouschi (47)	Validi <i>et al.</i> (102)
Algoritmo evolutivo de fuerza de Pareto (SPEA-II)	Farrokhi-Asl <i>et al.</i> (42)	Wang <i>et al.</i> (109)
	Rabbani <i>et al.</i> (48)	Leng <i>et al.</i> (88)
	Ghasemi <i>et al.</i> (68)	Leng <i>et al.</i> (89)
Recocido simulado multiobjetivo (MOSA)	Farrokhi-Asl <i>et al.</i> (42)	Abadi (76)
	Nikzamid y Baradaran (44)	
Algoritmo competitivo imperialista multiobjetivo (MOICA)	Nikzamid y Baradaran (44)	Eskandari <i>et al.</i> (106)
	Golmohammadi <i>et al.</i> (99)	
Algoritmo genético no dominado III (NSGA-III)	Saeidi <i>et al.</i> (45)	Leng <i>et al.</i> (89)
	Leng <i>et al.</i> (88)	
Optimizadores de lobo gris multiobjetivo (MOGWO)	Safari <i>et al.</i> (17)	Heidari <i>et al.</i> (75)
	Raeisi y Jafarzadeh Ghouschi (47)	

Debido al incremento continuo de estudios asociados al LRP multiobjetivo, y dada la complejidad asociada a las nuevas características que se le incluyen al problema, la mayoría de los investigadores se ha inclinado por el desarrollo de diversos algoritmos, con el fin de obtener resultados factibles. La

Tabla IV expone un resumen de los métodos más utilizados en la literatura. En el año 2014 se introduce el algoritmo genético no dominado II, o NSGA-II (*non-dominated sorting genetic algorithm II*) (90). El NSGA-II constituye el método más utilizado en este tipo de investigaciones, y es uno de los más populares en la optimización multiobjetivo, tal como se puede observar en la tabla. A su vez, se ha implementado recientemente el algoritmo genético no dominado III o NSGA-III (*non-dominated sorting genetic algorithm III*) como una extensión del NSGA-II (45). El algoritmo de optimización por enjambres de partículas multiobjetivo, o MOPSO (*multiobjective particle swarm optimization*), también ha tenido una importante aceptación, así como el algoritmo evolutivo de fuerza de Pareto o SPEA-II (*strength Pareto evolutionary algorithm II*), la técnica de recocido simulado multiobjetivo, o MOSA (*multiobjective simulated annealing*), el algoritmo competitivo imperialista multiobjetivo, o MOICA (*multiobjective imperialist competitive algorithm*), y la optimización de lobo gris multiobjetivo o MOGWO (*multiobjective grey wolf optimizer*).

Otros autores han optado por técnicas utilizadas en menor frecuencia, como por ejemplo el algoritmo genético y cultural híbrido multiobjetivo, o MOHCGA (*multiobjective hybrid cultural and genetic algorithm*) (42), el algoritmo evolutivo multiobjetivo basado en descomposición, o MOEA/D (*multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition*) (47, 62), el algoritmo de selección por envolvente de Pareto II, o PESA-II (*Pareto envelope-based selection algorithm II*) (48, 68), el algoritmo de optimización de maleza invasiva multiobjetivo, o MOIWO (*multiobjective invasive weeds optimization algorithm*) (47), el algoritmo de flujo de agua multiobjetivo, o MOWFA (*multiobjective water flow-like algorithm*) (44), y el algoritmo del ciclo del agua multiobjetivo, o MOWCA (*multiobjective water cycle algorithm*) (17).

Adicional a ello, se han desarrollado estrategias mejoradas para los algoritmos evolutivos existentes, con la finalidad de establecer comparaciones entre los resultados obtenidos y evaluar, a partir de diversas métricas el comportamiento de los algoritmos, como es el caso de (40), quienes desarrollan un algoritmo genético de clasificación no dominado (NSGA-II) mejorado con búsqueda local, que se designa INSGA-dLS (*non-dominated sorting genetic algorithm with directed local search*). El algoritmo propuesto puede lograr un mejor rendimiento que el obtenido por NSGA-II y MOPSO para resolver un problema de localización y ruteo de dos escalones aplicado a la recolección de residuos peligrosos.

5. Discusión de resultados

Considerando la importancia de vincular los aspectos económicos con temáticas sociales y ambientales en los procesos logísticos, el problema de localización y ruteo clásico ha evolucionado hacia la implementación de múltiples objetivos en los modelos matemáticos, que permiten a los tomadores de decisiones establecer estrategias que favorecen diferentes factores de manera equilibrada. La Fig. 2 representa el número de artículos de acuerdo con la cantidad de objetivos utilizados para formular el LRP multiobjetivo a lo largo de los años. Según el análisis, el número de artículos bi-objetivo alcanza un 56,6% de la muestra (56 documentos), mientras que, con tres objetivos se vincula el 37,4% (37 documentos). Por otro lado, los estudios con cuatro y cinco objetivos han sido formulados en menor medida con porcentajes del 5,1 (5 documentos) y 1% respectivamente.

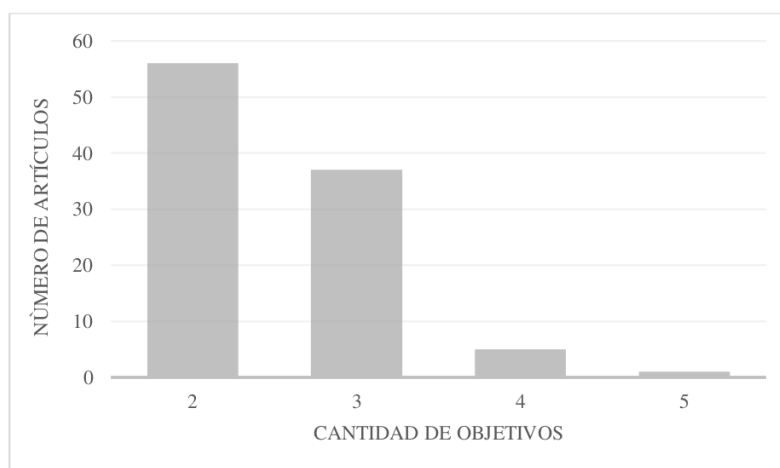


Figura 2. Número de artículos por cantidad de objetivos

La información contenida en la Tabla V expone una recopilación de la literatura del LRP multiobjetivo de acuerdo con las principales aplicaciones del problema. Los estudios se describen según año de publicación, objetivos de optimización, tipo de estudio y clase de método de solución. En cuanto a los objetivos implementados, se incluyen principalmente la minimización de los costos, la minimización de los riesgos, la minimización del impacto ambiental, el balance de carga de trabajo, la maximización de la satisfacción del cliente, la minimización del tiempo y la maximización de la confiabilidad de las rutas. Tal como se observa, la mayoría de las investigaciones relacionadas con el LRP multiobjetivo, independientemente de su tipo de aplicación, incluyen el aspecto económico dentro de los modelos matemáticos formulados. Sin embargo, existen algunos objetivos que se emplean en mayor medida para ciertas aplicaciones específicas, debido a las características que impone el sistema.

La recolección de residuos se relaciona con la minimización del riesgo, objetivo que se ha interpretado generalmente como el riesgo de localización de las instalaciones de tratamiento, reciclaje o disposición final, el riesgo de transporte asociado a las rutas de recolección y el riesgo total del sistema que vincula los dos mencionados anteriormente (24). Por el contrario, la distribución de elementos de socorro se concentra en la minimización del tiempo como una actividad vital en situaciones de emergencia, debido a que el tiempo de llegada de los productos de socorro a las áreas afectadas impacta negativamente la tasa de supervivencia de las personas (110), de modo que garantizar el menor tiempo de entrega es necesario. Adicionalmente, la maximización de la confiabilidad de las rutas es un objetivo adoptado para estos sistemas, en especial en aquellos en casos en que ocurren desastres naturales que alteran la estabilidad de las carreteras. En lo referente al GLRP, como su nombre lo indica, su propósito es minimizar el impacto ambiental, por lo cual reducir las emisiones de CO₂ y consumo de combustible de los vehículos constituyen los temas de mayor alcance. Este objetivo también ha tenido aceptación en los estudios relacionados con la distribución de productos perecederos, mientras que en la cadena de frío ha sido aplicada la minimización del tiempo y los costos totales.

Tabla V. Resumen de la literatura del LRP multiobjetivo

Autor(es)	Año	Ref.	Objetivo							Tipo de estudio			Método de solución	
			C	R	A	B	S	T	RB	AC	CE	E	A	
<i>Recolección de residuos</i>														
Govindan <i>et al.</i>	2022	(54)	✓	✓							✓	✓		
Kordi <i>et al.</i>	2022	(53)	✓	✓	✓		✓			✓	✓	✓		
Raeisi y Jafarzadeh	2022	(47)	✓	✓	✓					✓		✓	✓	
Yang <i>et al.</i>	2022	(111)	✓	✓						✓		✓		
Govindan <i>et al.</i>	2021	(52)	✓	✓							✓	✓		
Ma <i>et al.</i>	2021	(112)	✓							✓				✓
Nikzamir <i>et al.</i>	2021	(51)	✓	✓						✓	✓	✓	✓	
Zhao <i>et al.</i>	2021	(50)	✓	✓						✓	✓	✓		
Saedi <i>et al.</i>	2021	(45)			✓						✓	✓	✓	
Ziaei y Jabbarzadeh	2021	(46)	✓	✓	✓						✓			✓
Rabbani <i>et al.</i>	2021	(48)	✓	✓		✓				✓		✓	✓	
Delfani <i>et al.</i>	2021	(38)	✓	✓						✓				✓
Tirkolaee <i>et al.</i>	2021	(49)		✓			✓	✓			✓	✓		
Yu <i>et al.</i>	2020	(39)	✓	✓							✓	✓		
Delfani <i>et al.</i>	2020	(43)	✓	✓	✓					✓		✓		
Nikzamir y Baradaran	2020	(44)	✓		✓					✓				✓
Yu <i>et al.</i>	2020	(40)	✓	✓						✓				✓
Farrokhi-Asl <i>et al.</i>	2020	(42)	✓	✓						✓				✓
Rabbani <i>et al.</i>	2020	(9)	✓	✓							✓	✓		
Zhao y Huang	2019	(36)	✓	✓							✓	✓		
Jamali	2019	(37)	✓	✓						✓		✓	✓	
Hu <i>et al.</i>	2019	(41)	✓	✓			✓				✓	✓		
Rabbani <i>et al.</i>	2018	(24)	✓	✓						✓				✓
Rabbani <i>et al.</i>	2018	(107)	✓		✓					✓				✓
Yilmaz <i>et al.</i>	2017	(23)	✓	✓							✓	✓		
Farrokhi-Asl <i>et al.</i>	2017	(55)	✓							✓				✓
Rabbani <i>et al.</i>	2017	(14)	✓							✓		✓	✓	
Eskandari <i>et al.</i>	2017	(106)	✓				✓			✓		✓	✓	
Yu y Solvang	2016	(35)	✓	✓						✓		✓		
Ghezavati y Beigi	2016	(105)	✓					✓		✓		✓	✓	
Zhao <i>et al.</i>	2016	(33)	✓	✓							✓	✓		
Zhao y Verter	2015	(34)	✓	✓							✓	✓		
Zhao y Huang	2015	(32)	✓	✓						✓	✓	✓		
Samanlioglu	2013	(31)	✓	✓							✓	✓		
Zhang y Zhao	2011	(30)	✓	✓						✓		✓		
Zhao y Zhao	2010	(29)	✓	✓						✓		✓		

Tabla V continuación de la página anterior

Autor(es)	Año	Ref.	Objetivo							Tipo de estudio			Método de solución	
			C	R	A	B	S	T	RB	AC	CE	E	A	
Caballero	2007	(28)	✓	✓							✓		✓	
Alumur y Kara	2007	(22)	✓	✓							✓		✓	
Zhang <i>et al.</i>	2005	(27)	✓	✓							✓		✓	
Giannikos	1998	(26)	✓	✓						✓			✓	
Current y Ratick	1995	(25)	✓	✓						✓			✓	
List y Mirchandani	1991	(19)	✓	✓							✓		✓	
ReVelle <i>et al.</i>	1991	(20)	✓	✓						✓			✓	
Zografos y Samara	1989	(18)		✓				✓		✓			✓	
<i>Distribución de elementos de socorro</i>														
Khanchehzarrin <i>et al.</i>	2022	(62)	✓					✓			✓		✓	
Kian <i>et al.</i>	2022	(110)	✓				✓				✓		✓	
Ghasemi <i>et al.</i>	2022	(68)	✓				✓			✓	✓		✓	
Saatchi <i>et al.</i>	2021	(65)	✓						✓	✓			✓	
Khorsi <i>et al.</i>	2021	(67)					✓	✓	✓	✓			✓	
Long <i>et al.</i>	2021	(61)	✓				✓			✓	✓		✓	
Beiki <i>et al.</i>	2021	(66)	✓				✓	✓	✓				✓	
Mohammadi <i>et al.</i>	2020	(60)	✓				✓				✓		✓	
Adrang <i>et al.</i>	2020	(59)					✓			✓			✓	
Shen <i>et al.</i>	2019	(71)	✓		✓		✓			✓			✓	
Fathollahi-Fard <i>et al.</i>	2019	(72)	✓		✓					✓			✓	
Zhang <i>et al.</i>	2018	(70)	✓		✓		✓			✓			✓	
Vahdani <i>et al.</i>	2018	(64)	✓				✓	✓	✓				✓	
Nedjati <i>et al.</i>	2017	(58)					✓			✓			✓	
Bozorgi y Khorsi	2016	(69)	✓				✓				✓		✓	
Wang <i>et al.</i>	2014	(63)	✓				✓	✓			✓		✓	
Rath y Gutjahr	2014	(57)	✓				✓				✓		✓	
<i>GLRP</i>														
Meidute-Kavalia <i>et al.</i>	2022	(79)	✓		✓					✓			✓	
Zhang y Zhang	2022	(78)	✓		✓		✓			✓			✓	
Abadi <i>et al.</i>	2022	(76)	✓		✓					✓			✓	
Heidari <i>et al.</i>	2022	(75)	✓		✓					✓			✓	
Alamatsaz <i>et al.</i>	2022	(74)	✓		✓					✓	✓		✓	
Galindres <i>et al.</i>	2021	(77)	✓		✓	✓				✓			✓	
Toro <i>et al.</i>	2017	(16)	✓		✓					✓			✓	
Toro <i>et al.</i>	2016	(73)	✓		✓					✓			✓	
<i>Productos perecederos</i>														
Aghaei Fishani <i>et al.</i>	2022	(81)	✓		✓					✓	✓		✓	
Meidute-Kavalia <i>et al.</i>	2022	(84)	✓		✓		✓	✓			✓		✓	

Tabla V continuación de la página anterior

Autor(es)	Año	Ref.	Objetivo							Tipo de estudio			Método de solución	
			C	R	A	B	S	T	RB	AC	CE	E	A	
Navazi <i>et al.</i>	2019	(85)	✓		✓							✓	✓	✓
Li <i>et al.</i>	2019	(83)	✓						✓			✓	✓	
Khalili-Damghani <i>et al.</i>	2015	(82)				✓				✓			✓	✓
Govindan <i>et al.</i>	2014	(21)	✓		✓					✓				✓
<i>Cadena de frío</i>														
Leng <i>et al.</i>	2020	(86)	✓							✓				✓
Qiu <i>et al.</i>	2020	(15)	✓		✓		✓			✓				✓
Leng <i>et al.</i>	2020	(88)	✓							✓				✓
Leng <i>et al.</i>	2020	(89)	✓						✓	✓				✓
Wang <i>et al.</i>	2020	(87)	✓						✓	✓				✓

Nota. La tabla presenta las siguientes abreviaciones: referencia bibliográfica (Ref.), costo (C), riesgo (R), ambiental (A), balance de carga de trabajo (B), satisfacción del cliente (S), tiempo (T), confiabilidad de las rutas (RB), académico (AC), caso de estudio (CE), exactos (E) y aproximados (A).

Por otra parte, en relación con el tipo de estudio implementado, un 55,6% de los documentos analizados proporciona soluciones a sus modelos matemáticos mediante el uso de datos sintéticos o instancias de prueba, en comparación con un 32,3% que lleva a cabo el desarrollo de casos de estudio. Un 12,2% de los artículos emplea ambos tipos de datos, generalmente desarrollando instancias de pequeña escala para la validación del modelo mediante métodos exactos, mientras que los casos de estudio tienen mayor aplicabilidad para los algoritmos evolutivos, teniendo en cuenta que se incrementa la complejidad del problema si se usan datos reales en la implementación.

Finalmente, respecto a las técnicas de solución, la Tabla V indica el tipo de método empleado por los autores: exacto o aproximado. El uso de técnicas aproximadas para enfrentar el problema constituye la mayor participación, con un 46,5% de los documentos, mientras que los métodos exactos equivalen al 33,3%; el 20,2% de las investigaciones adopta ambas técnicas. Aunque gran parte de los estudios emplea métodos exactos, en los trabajos recientes ha tenido más relevancia el uso de algoritmos evolutivos multiobjetivo.

6. Oportunidades de investigación

El problema de localización y ruteo con múltiples objetivos ha sido ampliamente estudiado teniendo en cuenta diferentes características y variantes, con el propósito de simular las verdaderas condiciones del proceso. Desde la revisión realizada por (3) en 2007, el LRP multiobjetivo se considera una línea de investigación de gran alcance. Este estudio demuestra la considerable evolución que ha tenido esta temática a lo largo de los años y la importante atención que se le ha atribuido en la literatura.

Con respecto a las sugerencias propuestas por (5) y (6), la comunidad académica relacionada con la optimización multiobjetivo para el problema de localización y ruteo de vehículos ha abordado algunos temas importantes poco estudiados anteriormente:

- *El desarrollo de versiones más realistas del problema*, involucrando aspectos como fluctuaciones de la demanda y condiciones de incertidumbre en los parámetros. Para esto, varios estudios recientes han mostrado interés por la formulación de modelos estocásticos (2, 39, 44, 68) y enfoques de optimización robusta (38, 46, 50, 61).
- *La extensión de variantes al problema como ventanas de tiempo (48, 74, 92) y múltiples escalones (92, 105).*
- *La integración del problema en otros contextos de la logística.* En la metodología para la selección de documentos de la presente revisión se hallaron 41 artículos que asocian el problema de inventarios con el LRP multiobjetivo, evidenciando la incorporación de otros procesos logísticos a esta área de investigación. Lo anterior se propone como una dirección de investigación para posteriores revisiones.
- *El acercamiento del problema a contextos reales.* Es posible observar el interés de la comunidad científica por vincular los problemas de localización y ruteo a aplicaciones como recolección de residuos, distribución de elementos de socorro, productos perecederos o cadenas de frío. Existe un enfoque hacia la implementación de casos de estudio que proporcionan los datos de sistemas reales para resolver el problema.

De igual manera, otras vertientes han sido recomendadas por estos autores. Sin embargo, se han llevado a cabo pocos estudios relacionados. Aspectos como la implementación de horizontes de planeación con múltiples periodos, considerando condiciones de incertidumbre (61, 84), y el desarrollo de metaheurísticas unificadas para evitar la proliferación de variantes muy similares constituyen líneas de investigación que deben ser estudiadas en mayor medida en el futuro. Algunos trabajos han implementado el desarrollo del algoritmo NSGA-II (93, 112) o el MOPSO (109) mejorado con características de otros algoritmos. Cabe resaltar que el uso de metaheurísticas cooperativas también se establece como una estrategia importante para dar solución a los modelos formulados, los cuales cada vez representan mayor complejidad debido al incremento de las variantes del LRP. Adicional a esto, se han desarrollado múltiples técnicas metaheurísticas multiobjetivo, pero el estudio de métodos exactos continúa siendo limitado. Si bien esto tiene su justificación en la complejidad de los problemas, corresponde a un tema con amplias oportunidades de investigación.

Respecto a los objetivos de optimización, la minimización de costos continúa siendo la meta principal para el LRP desde sus inicios. Por consiguiente, mantener la iniciativa de combinar otros objetivos de carácter ambiental y social se considera como una alternativa eficiente para satisfacer las condiciones de las cadenas de suministro actuales. Adicionalmente, (5) propone el estudio de problemas en donde es imposible atender a todos los clientes como es el caso de la industria de servicios, por ejemplo, en actividades de mantenimiento y reparación, y en logística de desastres. Algunos autores han intentado abordar este aspecto mediante el desarrollo de modelos matemáticos, con el objetivo de maximizar la demanda atendida (110) y minimizar la cantidad total de demanda perdida (58). Sin embargo, son pocos los estudios relacionados. Finalmente, el análisis de variantes importantes como el LRP de recogida y entrega simultánea o LRPSPD (*LRP with pickup and delivery*) y el LRP con entregas divididas o SDLRP

(LRP with split delivery) aplicado a la optimización multiobjetivo representa líneas de investigación que pueden ser ampliadas. Asimismo, se puede continuar con el desarrollo de modelos con flota de vehículos heterogénea que acerquen el proceso a condiciones de la realidad.

7. Conclusiones

La optimización multiobjetivo permite la integración de diferentes objetivos de estudio que incluyen perspectivas económicas, sociales y ambientales, de manera que su combinación con el problema de localización y ruteo se considera un punto de partida hacia el desarrollo de cadenas de suministro sostenibles. El análisis de los estudios relacionados con esta temática permite determinar sus principales tendencias de investigación. Considerando lo anterior, este artículo propone una revisión de literatura sobre el problema de localización y ruteo con múltiples objetivos, en la cual se evalúan 99 publicaciones que involucran formulaciones matemáticas referentes a este tipo de modelos dentro de una ventana de tiempo que comienza en 1989 y termina en 2022.

A partir de la revisión, se evidencia que estos modelos han sido aplicados a diferentes cadenas de suministro, teniendo en cuenta la naturaleza de los productos y las necesidades del diseño de la red de distribución, dentro de las cuales se identifican las siguientes: recolección de residuos, distribución de elementos de socorro, localización y ruteo verde, productos perecederos, cadena de frío y distribución de bebidas. Sin embargo, la mayoría de las investigaciones sobre este problema está enfocada en la gestión de residuos, más precisamente desechos peligrosos, por el riesgo que su incorrecta recolección y disposición final implican tanto para el ser humano como para el medio ambiente.

El LRP con múltiples objetivos ha tenido como propósito general la minimización de los costos. Según el tipo de cadena de suministro, se han evaluado diferentes funciones objetivo, dentro de las que se destacan las siguientes: minimización de riesgos, aspectos ambientales, minimización de tiempo, satisfacción del cliente y balance de carga de trabajo. De igual manera, los estudios actuales han presentado mayor interés por acercar el problema a las condiciones reales, por lo cual se han incorporado distintas características como flota heterogénea, vehículos con múltiples compartimentos, ventanas de tiempo, problemas multiperiodo y desarrollo de modelos bajo incertidumbre.

Con respecto a la solución del problema, se han utilizado diversas técnicas multiobjetivo exactas y aproximadas. Con referencia a los métodos exactos, han tenido una amplia aceptación la programación por metas y el método de las ε -restricciones clásico y su versión mejorada. Sin embargo, la mayoría de los estudios se ha orientado hacia la construcción de algoritmos evolutivos multiobjetivo que permitan dar solución a modelos de gran escala. El algoritmo genético no dominado II, o NSGA-II, la optimización por enjambres de partículas multiobjetivo, o MOPSO, y el algoritmo evolutivo de fuerza de Pareto, o SPEA-II, han sido las técnicas de mayor frecuencia.

El problema de localización y ruteo multiobjetivo constituye una línea de investigación activa, con un alcance amplio en número de investigaciones enfocadas en las diferentes aplicaciones, variantes de los modelos matemáticos y diversas técnicas de solución que determinan numerosas alternativas de estudio y grandes desafíos para la comunidad científica asociada a esta temática.

8. Contribución de autores

Todos los autores contribuyeron por igual a la investigación

Referencias

- [1] D. Liu, Z. Deng, W. Zhang, Y. Wang y E. I. Kaiser, "Design of sustainable urban electronic grocery distribution network", *Alexandria Eng. J.*, vol. 60, no. 1, pp. 145-157, 2021. <https://doi.org/10.1016/j.aej.2020.06.051> ↑3
- [2] S. B. Ebrahimi, "A stochastic multi-objective location-allocation-routing problem for tire supply chain considering sustainability aspects and quantity discounts", *J. Clean. Prod.*, vol. 198, pp. 704-720, 2018. <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2018.07.059> ↑3, 13, 21
- [3] G. Nagy y S. Salhi, "Location-routing: Issues, models and methods", *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 177, no. 2, pp. 649-672, 2007. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2006.04.004> ↑3, 20
- [4] R. B. Lopes, C. Ferreira, B. S. Santos y S. Barreto, "A taxonomical analysis, current methods and objectives on location-routing problems", *Int. Trans. Oper. Res.*, vol. 20, no. 6, pp. 795-822, 2013. <https://doi.org/10.1111/itor.12032> ↑3
- [5] C. Prodhon y C. Prins, "A survey of recent research on location-routing problems", *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 238, no. 1, pp. 1-17, 2014. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2014.01.005> ↑3, 6, 21
- [6] M. Drexl y M. Schneider, "A survey of variants and extensions of the location-routing problem", *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 241, no. 2, pp. 283-308, 2015. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2014.08.030> ↑3, 6, 21
- [7] S. T. W. Mara, R. J. Kuo y A. M. S. Asih, "Location-routing problem: A classification of recent research", *Int. Trans. Oper. Res.*, vol. 28, no. 6, pp. 2941-2983, 2021. <https://doi.org/10.1111/itor.12950> ↑3, 6
- [8] C. Rueda-Clausen, C. Villa-Roel y C. Rueda-Clausen, "Indicadores bibliométricos: origen, aplicación, contradicción y nuevas propuestas", *MedUNAB*, vol. 8, no. 1, pp. 29-36, 2005. <https://revistas.unab.edu.co/index.php/medunab/article/view/208> ↑4
- [9] M. Rabbani, S. A. Sadati y H. Farrokhi-Asl, "Incorporating location routing model and decision making techniques in industrial waste management: Application in the automotive industry", *Comput. Ind. Eng.*, vol. 148, 2020. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2020.106692> ↑5, 10, 18
- [10] S. Salhi y G. K. Rand, "The effect of ignoring routes when locating depots", *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 39, no. 2, pp. 150-156, 1989. [https://doi.org/10.1016/0377-2217\(89\)90188-4](https://doi.org/10.1016/0377-2217(89)90188-4) ↑5
- [11] S. Salhi y G. Nagy, "Consistency and robustness in location-routing", *Stud. Locat. Anal.*, no. 13, pp. 3-19, 1999. <https://kar.kent.ac.uk/5249/> ↑5
- [12] E. von Boventer, "The relationship between transportation costs and location rent in transportation problems", *J. Reg. Sci.*, vol. 3, no. 2, pp. 27-40, 1961. <https://doi.org/10.1111/j.1467-9787.1961.tb01276.x> ↑5

- [13] F. E. Maranzana, "On the location of supply points to minimize transport costs", *OR*, vol. 15, no. 3, pp. 261-270, 1964. <https://doi.org/10.2307/3007214> ↑5
- [14] M. Rabbani, H. Farrokhi-Asl y B. Asgarian, "Solving a bi-objective location routing problem by a NSGA-II combined with clustering approach: application in waste collection problem", *J. Ind. Eng. Int.*, vol. 13, pp. 13-27, 2017. <https://doi.org/10.1007/s40092-016-0172-8> ↑5, 8, 10, 15, 18
- [15] F. Qiu et al., "A novel multi-objective model for the cold chain logistics considering multiple effects", *Sustain.*, vol. 12, no. 19, 2020. <https://doi.org/10.3390/su12198068> ↑6, 12, 20
- [16] E. M. Toro, J. F. Franco, M. G. Echeverri y F. G. Guimarães, "A multi-objective model for the green capacitated location-routing problem considering environmental impact", *Comput. Ind. Eng.*, vol. 110, pp. 114-125, 2017. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2017.05.013> ↑6, 11, 19
- [17] F. M. Safari, F. Etebari y A. P. Chobar, "Modeling and optimization of a tri-objective transportation-location-routing problem considering route reliability: Using MOGWO, MOPSO, MOWCA, and NSGA-II", *J. Optim. Ind. Eng.*, vol. 14, no. 2, pp. 83-98, 2021. <https://doi.org/10.22094/JOIE.2020.1893849.1730> ↑6, 13, 15, 16
- [18] K. Zografos y S. Samara, "A combined location-routing model for hazardous waste transportation and disposal", *Transp. Res. Rec.*, vol. 1245, pp. 52-59, 1989. <https://eprints.lancs.ac.uk/id/eprint/86566> ↑7, 9, 19
- [19] G. List y P. Mirchandani, "An integrated network/planar multiobjective model for routing and siting for hazardous materials and wastes", *Transp. Sci.*, vol. 25, no. 2, pp. 99-174, 1991. <https://doi.org/10.1287/trsc.25.2.146> ↑7, 9, 19
- [20] C. ReVelle, J. Cohon y D. Shobrys, "Simultaneous Siting and Routing in the Disposal of Hazardous Wastes" *Transp. Sci.*, vol. 25, no. 2, pp. 99-174, 1991. <https://doi.org/10.1287/trsc.25.2.138> ↑7, 9, 14, 19
- [21] K. Govindan, A. Jafarian, R. Khodaverdi y K. Devika, "Two-echelon multiple-vehicle location-routing problem with time windows for optimization of sustainable supply chain network of perishable food", *Int. J. Prod. Econ.*, vol. 152, pp. 9-28, 2014. <https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2013.12.028> ↑7, 12, 20
- [22] S. Alumur y B. Y. Kara, "A new model for the hazardous waste location-routing problem", *Comput. Oper. Res.*, vol. 34, no. 5, pp. 1406-1423, 2007. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2005.06.012> ↑7, 9, 19
- [23] O. Yilmaz, B. Y. Kara y U. Yetis, "Hazardous waste management system design under population and environmental impact considerations", *J. Environ. Manage.*, vol. 203, pp. 720-731, 2017. <https://doi.org/10.1016/j.jenvman.2016.06.015> ↑9, 10, 18
- [24] M. Rabbani, R. Heidari, H. Farrokhi-Asl y N. Rahimi, "Using metaheuristic algorithms to solve a multi-objective industrial hazardous waste location-routing problem considering incompatible waste types", *J. Clean. Prod.*, vol. 170, pp. 227-241, 2018. <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2017.09.029> ↑9, 10, 13, 15, 17, 18
- [25] J. Current y S. Ratick, "A model to assess risk, equity and efficiency in facility location and transportation of hazardous materials", *Locat. Sci.*, vol. 3, no. 3, pp. 187-201, 1995. [https://doi.org/10.1016/0966-8349\(95\)00013-5](https://doi.org/10.1016/0966-8349(95)00013-5) ↑9, 19

- [26] I. Giannikos, "A multiobjective programming model for locating treatment sites and routing hazardous wastes", *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 104, no. 2, pp. 333-342, 1998. [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(97\)00188-4](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(97)00188-4) ↑9, 19
- [27] M. Zhang, Y. Ma y K. Weng, "Location-routing model of hazardous materials distribution system based on risk bottleneck", *Proceedings of ICSSSM '05. 2005 International Conference on Services Systems and Services Management*, pp. 362-368. <https://doi.org/10.1109/ICSSSM.2005.1499496> ↑9, 19
- [28] R. Caballero, M. González, F. M. Guerrero, J. Molina y C. Paralera, "Solving a multiobjective location routing problem with a metaheuristic based on tabu search. Application to a real case in Andalusia", *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 177, no. 3, pp. 1751-1763, 2007. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2005.10.017> ↑9, 14, 19
- [29] J. Zhao y J. Zhao, "Model and algorithm for hazardous waste location-routing problem", *ICLEM 2010: International Conference of Logistics Engineering and Management*, vol. 387, pp. 2846-2852, 2010. [https://doi.org/10.1061/41139\(387\)398](https://doi.org/10.1061/41139(387)398) ↑9, 18
- [30] Y. Zhang y J. Zhao, "Modeling and solution of the hazardous waste location-routing problem under uncertain conditions", *ICTE 2011 - Third International Conference on Transportation Engineering*, pp. 2922-2927, 2011. [https://doi.org/10.1061/41184\(419\)483](https://doi.org/10.1061/41184(419)483) ↑9, 18
- [31] F. Samanlioglu, "A multi-objective mathematical model for the industrial hazardous waste location-routing problem", *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 226, no. 2, pp. 332-340, 2013. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2012.11.019> ↑10, 18
- [32] J. Zhao y L. Huang, "An augmented ϵ -constraint algorithm to the hazardous waste locationrouting problem", *ICTE 2015 - Fifth International Conference on Transportation Engineering*, pp. 2847-2857, 2015. <https://doi.org/10.1061/9780784479384.362> ↑10, 18
- [33] J. Zhao, L. Huang, D.-H. Lee y Q. Peng, "Improved approaches to the network design problem in regional hazardous waste management systems", *Transp. Res. Part E Logist. Transp. Rev.*, vol. 88, pp. 52-75, 2016. <https://doi.org/10.1016/j.tre.2016.02.002> ↑10, 18
- [34] J. Zhao y V. Verter, "A bi-objective model for the used oil location-routing problem", *Comput. Oper. Res.*, vol. 62, pp. 157-168, 2015. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2014.10.016> ↑10, 18
- [35] H. Yu y W. D. Solvang, "An improved multi-objective programming with augmented ϵ -constraint method for hazardous waste location-routing problems", *Int. J. Environ. Res. Public Health*, vol. 13, no. 6, 2016. <https://doi.org/10.3390/ijerph13060548> ↑10, 18
- [36] J. Zhao y L. Huang, "Multi-period network design problem in regional hazardous waste management systems", *Int. J. Environ. Res. Public Health*, vol. 16, no. 11, 2019. <https://doi.org/10.3390/ijerph16112042> ↑10, 18
- [37] M. Jamali, "Presenting a location-routing problem for multi-vehicle hazardous materials transport, considering the cost dependent to the amount of materials loaded", *Int. J. Supply Chain Manag.*, vol. 8, no. 3, pp. 1079-1100, 2019. ↑10, 15, 18
- [38] F. Delfani, A. Kazemi, S. M. SeyedHosseini y S. T. A. Niaki, "A novel robust possibilistic programming approach for the hazardous waste location-routing problem considering the risks of transportation and population", *Int. J. Syst. Sci. Oper. Logist.*, vol. 8, no. 4, pp. 383-395, 2021. <https://doi.org/10.1080/23302674.2020.1781954> ↑10, 18, 21

- [39] H. Yu, X. Sun, W. D. Solvang, G. Laporte y C. K. M. Lee, "A stochastic network design problem for hazardous waste management", *J. Clean. Prod.*, vol. 277, 2020. <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2020.123566> ↑10, 18, 21
- [40] X. Yu, Y. Zhou y X. F. Liu, "The two-echelon multi-objective location routing problem inspired by realistic waste collection applications: The composable model and a metaheuristic algorithm", *Appl. Soft Comput. J.*, vol. 94, 2020. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2020.106477> ↑10, 15, 16, 18
- [41] H. Hu, X. Li, Y. Zhang, C. Shang y S. Zhang, "Multi-objective location-routing model for hazardous material logistics with traffic restriction constraint in inter-city roads", *Comput. Ind. Eng.*, vol. 128, pp. 861-876, 2019. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2018.10.044> ↑10, 18
- [42] H. Farrokhi-Asl, A. Makui, A. Jabbarzadeh y F. Barzinpour, "Solving a multi-objective sustainable waste collection problem considering a new collection network" *Int. J. Oper. Res.*, vol. 20, pp. 1977-2015, 2020. <https://doi.org/10.1007/s12351-018-0415-0> ↑10, 15, 16, 18
- [43] F. Delfani, A. Kazemi, S. M. Seyedhosseini y S. T. A. Niaki, "A green hazardous waste location-routing problem considering the risks associated with transportation and population", *Int. J. Eng. Trans. B Appl.*, vol. 33, no. 11, pp. 2272-2284, 2020. <https://doi.org/10.5829/IJE.2020.33.11B.18> ↑10, 18
- [44] M. Nikzamir y V. Baradaran, "A healthcare logistic network considering stochastic emission of contamination: Bi-objective model and solution algorithm", *Transp. Res. Part E Logist. Transp. Rev.*, vol. 142, 2020. <https://doi.org/10.1016/j.tre.2020.102060> ↑10, 15, 16, 18, 21
- [45] A. Saeidi, S. Aghamohamadi-Bosjin y M. Rabbani, "An integrated model for management of hazardous waste in a smart city with a sustainable approach", *Environ. Dev. Sustain.*, vol. 23, pp. 10093-10118, 2020. <https://doi.org/10.1007/s10668-020-01048-7> ↑10, 15, 16, 18
- [46] Z. Ziaei y A. Jabbarzadeh, "A multi-objective robust optimization approach for green location-routing planning of multi-modal transportation systems under uncertainty", *J. Clean. Prod.*, vol. 291, 2021. <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2020.125293> ↑10, 18, 21
- [47] D. Raeisi y S. Jafarzadeh Ghouschi, "A robust fuzzy multi-objective location-routing problem for hazardous waste under uncertain conditions", *Appl. Intell.*, vol. 52, pp. 13435-13455, 2022. <https://doi.org/10.1007/s10489-022-03334-5> ↑10, 15, 16, 18
- [48] M. Rabbani, A. Nikoubin y H. Farrokhi-Asl, "Using modified metaheuristic algorithms to solve a hazardous waste collection problem considering workload balancing and service time windows", *Soft Comput.*, vol. 25, pp. 1885-1912, 2021. <https://doi.org/10.1007/s00500-020-05261-4> ↑10, 15, 16, 18, 21
- [49] E. B. Tirkolaee, P. Abbasian y G.-W. Weber, "Sustainable fuzzy multi-trip location-routing problem for medical waste management during the COVID-19 outbreak", *Sci. Total Environ.*, vol. 756, 2021. <https://doi.org/10.1016/j.scitotenv.2020.143607> ↑10, 18
- [50] J. Zhao, B. Wu y G. Y. Ke, "A bi-objective robust optimization approach for the management of infectious wastes with demand uncertainty during a pandemic", *J. Clean. Prod.*, vol. 314, 2021. <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2021.127922> ↑10, 18, 21

- [51] M. Nikzamid, V. Baradaran y Y. Panahi, "Designing a logistic network for hospital waste management: A benders decomposition algorithm", *Environ. Eng. Manag. J.*, vol. 19, no. 11, pp. 1937-1956, 2021, [Online]. http://www.eemj.icpm.tuiasi.ro/pdfs/vol19/no11/2_603_Baradaran_19.pdf ↑10, 18
- [52] K. Govindan, A. K. Nasr, P. Mostafazadeh y H. Mina, "Medical waste management during coronavirus disease 2019 (COVID-19) outbreak: A mathematical programming model", *Comput. Ind. Eng.*, vol. 162, 2021. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2021.107668> ↑10, 18
- [53] G. Kordi, P. Hasanzadeh-Moghimi, M. M. Paydar y E. Asadi-Gangraj, "A multi-objective location-routing model for dental waste considering environmental factors", *Ann. Oper. Res.*, 2022. <https://doi.org/10.1007/s10479-022-04794-1> ↑10, 18
- [54] K. Govindan, S. Nosrati-Abarghoee, M. M. Nasiri y F. Jolai, "Green reverse logistics network design for medical waste management: A circular economy transition through case approach", *J. Environ. Manage.*, vol. 322, 2022. <https://doi.org/10.1016/j.jenvman.2022.115888> ↑ 10, 18
- [55] H. Farrokhi-Asl, R. Tavakkoli-Moghaddam, B. Asgarian y E. Sangari, "Metaheuristics for a bi-objective location-routing-problem in waste collection management", *J. Ind. Prod. Eng.*, vol. 34, no. 4, pp. 239-252, 2017. <https://doi.org/10.1080/21681015.2016.1253619> ↑10, 15, 18
- [56] J.-B. Sheu, "Challenges of emergency logistics management", *Transp. Res. Part E Logist. Transp. Rev.*, vol. 43, no. 6, pp. 655-659, 2007. <https://doi.org/10.1016/j.tre.2007.01.001> ↑11
- [57] S. Rath y W. J. Gutjahr, "A math-heuristic for the warehouse location-routing problem in disaster relief", *Comput. Oper. Res.*, vol. 42, pp. 25-39, 2014. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2011.07.016> ↑11, 15, 19
- [58] A. Nedjati, G. Izbirak y J. Arkat, "Bi-objective covering tour location routing problem with replenishment at intermediate depots: Formulation and meta-heuristics", *Comput. Ind. Eng.*, vol. 110, pp. 191-206, 2017. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2017.06.004> ↑11, 15, 19, 21
- [59] H. Adrang, A. Bozorgi-Amiri, K. Khalili-Damghani y R. Tavakkoli-Moghaddam, "Planning for medical emergency transportation vehicles during natural disasters", *J. Optim. Ind. Eng.*, vol. 13, no. 2, pp. 185-197, 2020. <https://doi.org/10.22094/JOIE.2020.688.1455> ↑11, 19
- [60] S. Mohammadi, S. Avakh Darestani, B. Vahdani y A. Alinezhad, "A robust neutrosophic fuzzy-based approach to integrate reliable facility location and routing decisions for disaster relief under fairness and aftershocks concerns", *Comput. Ind. Eng.*, vol. 148, 2020. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2020.106734> ↑11, 19
- [61] S. Long, D. Zhang, Y. Liang, S. Li y W. Chen, "Robust optimization of the multi-objective multi-period location-routing problem for epidemic logistics system with uncertain demand", *IEEE Access*, vol. 9, pp. 151912-151930, 2021. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2021.3125746> ↑ 11, 15, 19, 21
- [62] S. Khancheh-zarrin, M. Ghaebi Panah, N. Mahdavi-Amiri y S. Shiripour, "A bi-level multi-objective location-routing optimization model for disaster relief operations considering public donations", *Socioecon. Plann. Sci.*, vol. 80, 2022. <https://doi.org/10.1016/j.seps.2021.101165> ↑11, 16, 19

- [63] H. Wang, L. Du y S. Ma, "Multi-objective open location-routing model with split delivery for optimized relief distribution in post-earthquake", *Transp. Res. Part E Logist. Transp. Rev.*, vol. 69, pp. 160-179, 2014. <https://doi.org/10.1016/j.tre.2014.06.006> ↑11, 15, 19
- [64] B. Vahdani, D. Veysmoradi, N. Shekari y S. M. Mousavi, "Multi-objective, multi-period location-routing model to distribute relief after earthquake by considering emergency roadway repair", *Neural Comput. Appl.*, vol. 30, no. 3, pp. 835-854, 2018. <https://doi.org/10.1007/s00521-016-2696-7> ↑11, 15, 19
- [65] H. M. Saatchi, A. A. Khamseh y R. Tavakkoli-Moghaddam, "Solving a new bi-objective model for relief logistics in a humanitarian supply chain using bi-objective meta-heuristic algorithms", *Sci. Iran.*, vol. 28, no. 5, pp. 2948-2971, 2021. <https://doi.org/10.24200/sci.2020.53823.3438> ↑11, 19
- [66] H. Beiki, S. M. Seyedhosseini, L. W. W. Mihardjo y S. M. Seyedaliakbar, "Multiobjective location-routing problem of relief commodities with reliability", *Environ. Sci. Pollut. Res.*, 2021. <https://doi.org/10.1007/s11356-020-11891-w> ↑11, 19
- [67] M. Khorsi, S. K. Chaharsooghi, A. H. Kashan y A. Bozorgi-Amiri, "Pareto-based grouping meta-heuristic algorithm for humanitarian relief logistics with multistate network reliability", *OR Spectrum*, vol. 43, pp. 327-365, 2021. <https://doi.org/10.1007/s00291-021-00630-3> ↑11, 19
- [68] P. Ghasemi, F. Goodarzian y A. Abraham, "A new humanitarian relief logistic network for multi-objective optimization under stochastic programming", *Appl. Intell.*, vol. 52, pp. 13729-13762, 2022. <https://doi.org/10.1007/s10489-022-03776-x> ↑11, 15, 16, 19, 21
- [69] A. Bozorgi-Amiri y M. Khorsi, "A dynamic multi-objective location-routing model for relief logistic planning under uncertainty on demand, travel time, and cost parameters", *Int. J. Adv. Manuf. Technol.*, vol. 85, pp. 1633-1648, 2016. <https://doi.org/10.1007/s00170-015-7923-3> ↑11, 19
- [70] B. Zhang, H. Li, S. Li y J. Peng, "Sustainable multi-depot emergency facilities location-routing problem with uncertain information", *Appl. Math. Comput.*, vol. 333, pp. 506-520, 2018. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.03.071> ↑11, 19
- [71] L. Shen, F. Tao, Y. Shi y R. Qin, "Optimization of location-routing problem in emergency logistics considering carbon emissions", *Int. J. Environ. Res. Public Health*, vol. 16, no. 16, 2019. <https://doi.org/10.3390/ijerph16162982> ↑11, 19
- [72] A. M. Fathollahi-Fard, K. Govindan, M. Hajiaghaei-Keshteli y A. Ahmadi, "A green home health care supply chain: New modified simulated annealing algorithms", *J. Clean. Prod.*, vol. 240, 2019. <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2019.118200> ↑11, 19
- [73] E. M. Toro, J. F. Franco, M. G. Echeverri, F. G. Guimarães y R. A. Gallego Rendón, "Green open location-routing problem considering economic and environmental costs", *Int. J. Ind. Eng. Comput.*, vol. 8, pp. 203-216, 2016. <https://doi.org/10.5267/j.ijiec.2016.10.001> ↑11, 19
- [74] K. Alamatsaz, A. Ahmadi y S. M. J. Mirzapour Al-e-hashem, "A multiobjective model for the green capacitated location-routing problem considering drivers' satisfaction and time window with uncertain demand", *Environ. Sci. Pollut. Res.*, vol. 29, pp. 5052-5071, 2022. <https://doi.org/10.1007/s11356-021-15907-x> ↑11, 15, 19, 21

- [75] A. Heidari, D. M. Imani, M. Khalilzadeh y M. Sarbazvatan, "Green two-echelon closed and open location-routing problem: application of NSGA-II and MOGWO metaheuristic approaches", *Environ. Dev. Sustain.*, 2022. <https://doi.org/10.1007/s10668-022-02429-w> ↑11, 15, 19
- [76] J. Zarean Dowlat Abadi, M. Iraj, E. Bagheri, Z. Rabieipakdeh y M. R. Dehghani Tafti, "A multiobjective multiproduct mathematical modeling for green supply chain considering location-routing decisions", *Math. Probl. Eng.*, 2022. <https://doi.org/10.1155/2022/7009338> ↑11, 15, 19
- [77] L. F. Galindres, F. G. Guimarães y R. A. Gallego-Rendón, "Multi-objective sustainable capacitated location routing problem formulation in sustainable supply-chain management", *Eng. Optim.*, 2021. <https://doi.org/10.1080/0305215X.2021.2014476> ↑11, 19
- [78] H. X. Zhang y C. M. Zhang, "Multiobjective green time-dependent location-routing problem and algorithms", *Adv. Oper. Res.*, 2022. <https://doi.org/10.1155/2022/1811689> ↑11, 19
- [79] I. Meidute-Kavaliauskiene, N. Sütütemiz, F. Yıldırım, S. Ghorbani y R. Činčikaitė, "Optimizing multi cross-docking systems with a multi-objective green location routing problem considering carbon emission and energy consumption", *Energies*, vol. 15, no. 4, 2022. ↑11, 15, 19
- [80] H.-K. Chen, C.-F. Hsueh y M.-S. Chang, "Production scheduling and vehicle routing with time windows for perishable food products", *Comput. Oper. Res.*, vol. 36, no. 7, pp. 2311-2319, 2009. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2008.09.010> ↑12
- [81] B. Aghaei Fishani, A. Mahmoodirad, S. Niroomand y M. Fallah, "Multi-objective location-allocation-routing problem of perishable multi-product supply chain with direct shipment and open routing possibilities under sustainability", *Concurr. Comput. Pract. Exp.*, vol. 34, no. 11, 2022. <https://doi.org/10.1002/cpe.6860> ↑12, 19
- [82] K. Khalili-Damghani, A.-R. Abtahi y A. Ghasemi, "A new bi-objective location-routing problem for distribution of perishable products: evolutionary computation approach", *J. Math. Model. Algorithms Oper. Res.*, vol. 14, pp. 287-312, 2015. <https://doi.org/10.1007/s10852-015-9274-3> ↑12, 15, 20
- [83] P. Li, H. Lan y F. Saldanha-Da-Gama, "A Bi-objective capacitated location-routing problem for multiple perishable commodities", *IEEE Access*, vol. 7, pp. 136729-136742, 2019. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2941363> ↑12, 20
- [84] I. Meidute-Kavaliauskiene, F. Yıldırım, S. Ghorbani y R. Činčikaitė, "The design of a multi-period and multi-echelon perishable goods supply network under uncertainty", *Sustain.*, vol. 14, no. 4, 2022. <https://doi.org/10.3390/su14042472> ↑12, 19, 21
- [85] F. Navazi, A. Sedaghat y R. Tavakkoli-Moghaddam, "A new sustainable location-routing problem with simultaneous pickup and delivery by two-compartment vehicles for a perishable product considering circular economy", *IFAC-PapersOnLine*, vol. 52, no. 13, pp. 790-795, 2019. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2019.11.212> ↑12, 15, 20
- [86] L. Leng, J. Zhang, C. Zhang, Y. Zhao, W. Wang y G. Li, "Decomposition-based hyperheuristic approaches for the bi-objective cold chain considering environmental effects", *Comput. Oper. Res.*, vol. 123, 2020. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2020.105043> ↑12, 15, 20

- [87] Z. Wang, L. Leng, S. Wang, G. Li y Y. Zhao, "A hyperheuristic approach for location-routing problem of cold chain logistics considering fuel consumption", *Comput. Intell. Neurosci.*, 2020. <https://doi.org/10.1155/2020/8395754> ↑12, 20
- [88] L. Leng, J. Zhang, C. Zhang, Y. Zhao, W. Wang y G. Li, "A novel bi-objective model of cold chain logistics considering location-routing decision and environmental effects", *PLoS One*, vol. 15, no. 4, 2020. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0230867> ↑12, 15, 20
- [89] L. Leng, C. Zhang, Y. Zhao, W. Wang, J. Zhang y G. Li, "Biobjective low-carbon location-routing problem for cold chain logistics: Formulation and heuristic approaches", *J. Clean. Prod.*, vol. 273, 2020. <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2020.122801> ↑12, 15, 20
- [90] I. A. Martínez-Salazar, J. Molina, F. Ángel-Bello, T. Gómez y R. Caballero, "Solving a bi-objective transportation location routing problem by metaheuristic algorithms", *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 234, no. 1, pp. 25-36, 2014. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.09.008> ↑12, 13, 15, 16
- [91] M. Rabbani, F. Navazi, H. Farrokhi-Asl y M. H. Balali, "A sustainable transportation-location-routing problem with soft time windows for distribution systems", *Uncertain Supply Chain Manag.*, vol. 6, pp. 229-254, 2018. <https://doi.org/10.5267/j.uscm.2017.12.002> ↑13
- [92] Y. Wang, K. Assogba, Y. Liu, X. Ma, M. Xu y Y. Wang, "Two-echelon location-routing optimization with time windows based on customer clustering", *Expert Syst. Appl.*, vol. 104, pp. 244-260, 2018. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2018.03.018> ↑13, 15, 21
- [93] J. Du, X. Wang, X. Wu, F. Zhou y L. Zhou, "Multi-objective optimization for two-echelon joint delivery location routing problem considering carbon emission under online shopping", *Transp. Lett.*, vol. 00, no. 00, pp. 1-19, 2022. <https://doi.org/10.1080/19427867.2022.2112857> ↑13, 21
- [94] R. Tavakkoli-Moghaddam, A. Makui y Z. Mazloomi, "A new integrated mathematical model for a bi-objective multi-depot location-routing problem solved by a multi-objective scatter search algorithm", *J. Manuf. Syst.*, vol. 29, no. 2-3, pp. 111-119, 2010. <https://doi.org/10.1016/j.jmsy.2010.11.005> ↑13, 15
- [95] J. Liu y V. Kachitvichyanukul, "A Pareto-based particle swarm optimization algorithm for multi-objective location routing problem", *Int. J. Ind. Eng. Theory Appl. Pract.*, vol. 22, no. 3, pp. 314-329, 2015. <https://doi.org/10.23055/ijietap.2015.22.3.1553> ↑13, 15
- [96] S. T. W. Mara, A. M. Sri Asih y R. J. Kuo, "Solving a multi-objective location-routing problem with minimum cost and total time balance", *Int. J. Inf. Manag. Sci.*, vol. 30, no. 3, pp. 249-269, 2019. [https://doi.org/10.6186/IJIMS.201909_30\(3\).0004](https://doi.org/10.6186/IJIMS.201909_30(3).0004) ↑13, 15
- [97] N. Ghaffari-Nasab, M. S. Jabalameli, M. B. Aryanezhad y A. Makui, "Modeling and solving the bi-objective capacitated location-routing problem with probabilistic travel times", *Int. J. Adv. Manuf. Technol.*, vol. 67, pp. 2007-2019, 2013. <https://doi.org/10.1007/s00170-012-4627-9> ↑13
- [98] L. Leng, Y. Zhao, J. Zhang y C. Zhang, "An effective approach for the multiobjective regional low-carbon location-routing problem", *Int. J. Environ. Res. Public Health*, vol. 16, no. 11, 2019. <https://doi.org/10.3390/ijerph16112064> ↑13
- [99] A. M. Golmohammadi, S. A. Bonab y A. Parishani, "A multi-objective location routing problem using imperialist competitive algorithm", *Int. J. Ind. Eng. Comput.*, vol. 7, pp. 481-488, 2016. <https://doi.org/10.5267/j.ijiec.2015.12.002> ↑13, 15

- [100] E. J. Mamaghani y S. Davari, "The bi-objective periodic closed loop network design problem", *Expert Syst. Appl.*, vol. 144, art. 113068, 2020. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2019.113068> ↑13, 15
- [101] X. Wang, F. Yang y D. Lu, "Multi-objective location-routing problem with simultaneous pickup and delivery for urban distribution", *J. Intell. Fuzzy Syst.*, vol. 35, no. 4, pp. 3987-4000, 2018. <https://doi.org/10.3233/JIFS-169721> ↑13
- [102] S. Validi, A. Bhattacharya y P. J. Byrne "An evaluation of three DoE-guided meta-heuristic-based solution methods for a three-echelon sustainable distribution network", *Ann. Oper. Res.*, vol. 296, no. 1, pp. 421-469, 2021. <https://doi.org/10.1007/s10479-020-03746-x> ↑13, 15
- [103] S. Validi, A. Bhattacharya y P. J. Byrne, "Sustainable distribution system design: a two-phase DoE-guided meta-heuristic solution approach for a three-echelon bi-objective AHP-integrated location-routing model", *Ann. Oper. Res.*, vol. 290, pp. 191-222, 2020. <https://doi.org/10.1007/s10479-018-2887-y> ↑13
- [104] C. Chen, R. Qiu y X. Hu, "The location-routing problem with full truckloads in low-carbon supply chain network designing", *Math. Probl. Eng.*, 2018. <https://doi.org/10.1155/2018/6315631> ↑13, 15
- [105] V. R. Ghezavati y M. Beigi, "Solving a bi-objective mathematical model for location-routing problem with time windows in multi-echelon reverse logistics using metaheuristic procedure", *J. Ind. Eng. Int.*, vol. 12, pp. 469-483, 2016. <https://doi.org/10.1007/s40092-016-0154-x> ↑15, 18, 21
- [106] N. Eskandari, R. Tavakkoli-Moghaddam, P. Memari y F. Jolai, "A new mathematical model of a waste collection problem with social issues", *47th International Conference on Computers & Industrial Engineering (CIE 47)*, 2017 ↑15, 18
- [107] M. Rabbani, M. Mokhtarzadeh y H. Farrokhi-Asl, "A new mathematical model for designing a municipal solid waste system considering environmentally issues", *Int. J. Supply Oper. Manag.*, vol. 5, no. 3, pp. 234-255, 2018. <https://doi.org/10.22034/2018.3.4> ↑15, 18
- [108] Y. Wang, Y. Sun, X. Guan y Y. Guo, "Two-echelon location-routing problem with time windows and transportation resource sharing", *J. Adv. Transp.*, 2021. <https://doi.org/10.1155/2021/8280686> ↑15
- [109] Y. Wang, Y. Sun, X. Guan, J. Fan, M. Xu y H. Wang, "Two-echelon multi-period location routing problem with shared transportation resource", *Knowledge-Based Syst.*, vol. 226, 2021. <https://doi.org/10.1016/j.knosys.2021.107168> ↑15, 21
- [110] R. Kian et al., "Logistics planning of cash transfer to Syrian refugees in Turkey", *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 296, no. 3, pp. 1007-1024, 2022. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2021.04.054> ↑17, 19, 21
- [111] L. Yang, J. Guo, C. Zhang, P. Wan y H. Li, "Optimization of location-routing for the waste household appliances recycling logistics under the uncertain condition", *Teh. Vjesn.*, vol. 29, no. 1, pp. 127-138, 2022. <https://doi.org/10.17559/TV-20210623085943> ↑18

-
- [112] Y. Ma, W. Zhang, C. Feng, B. Lev y Z. Li, "A bi-level multi-objective location-routing model for municipal waste management with obnoxious effects", *Waste Manag.*, vol. 135, pp. 109-121, 2021. <https://doi.org/10.1016/j.wasman.2021.08.034> ↑18, 21
-

Paula Andrea Cabrales Navarro

Ingeniera Industrial, Universidad Industrial de Santander; candidata a Magíster en Ingeniería Industrial, Universidad Industrial de Santander. Integrante del Grupo de investigación en Optimización de sistemas Productivos, Administrativos y Logísticos (OPALO).

Email: paula2208423@correo.uis.edu.co

Javier Eduardo Arias Osorio

Ingeniero de Sistemas, Universidad Industrial de Santander; Magíster en Administración, UNAB en convenio con ITESM; profesor de tiempo completo de la Escuela de Estudios Industriales y Empresariales de la Universidad Industrial de Santander UIS. Integrante del Grupo de investigación en Optimización de sistemas Productivos, Administrativos y Logísticos (OPALO).

Email: jearias@uis.edu.co

Julio César Camacho Pinto

Ingeniero Industrial, Universidad Industrial de Santander; Magíster en Ingeniería Industrial, Universidad Industrial de Santander. Integrante del Grupo de investigación en Optimización de sistemas Productivos, Administrativos y Logísticos (OPALO).

Email: jccampin@correo.uis.edu.co





Research

Mechanic Characterization of Natural Rubber Mixtures and Cellulose Waste from the Automotive Sector with a Focus on the Footwear Industry

Caracterización mecánica de mezclas de caucho natural y residuos de celulosa originados en la industria automotriz con enfoque en el sector del calzado

María Isabel Arias-Jaramillo¹, José Renivaldo Dos Santos², Leonardo Lataro Paim² y Giovanni Barrera-Torres¹  

¹Instituto Tecnológico Metropolitano, (Medellín, Colombia).

²Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP) São Paulo, Brasil.

Abstract

Context: This publication shows a potential use for waste from the automotive industry, namely waste originating in the manufacturing process of gaskets and seals for motorcycles, which currently do not have a final use. In addition, due to their high-performance rubber surface layer, they imply an extensive degradation process, which constitutes a harmful factor for the environment and contributes to global warming.

Method: First, the crushing of the residues was carried out, then their sieving and selection via granulometry, and finally a mixture with the natural rubber through chewing in open cylinders in order to obtain the master, which was vulcanized in a shoe sole mold. The final product was mechanically characterized via the techniques, tension-elongation, wear, hardness, bending, and tearing.

Results: The obtained mixture opens a window to the design of products using residues from seals and gaskets for motors. It will be possible to design other proposals for functionalized rubbers, oriented towards the development of ecological footwear applications.

Conclusions: The mixture of cellulose waste from the motor seal sector and natural rubber shows promise for the reduction of the negative impact caused by these wastes and proposes a circular economy – in this case, with the development of raw material in the footwear sector.

Keywords: natural rubber, residual cellulose, industrial waste, circular economy.

Article history

Received:
07th/Dec/2021

Modified:
08th/Jul/2022


Accepted:
22nd/Nov/2022

Ing., vol. 28, no. 2,
2023. e17229

©The authors;
reproduction right
holder Universidad
Distrital Francisco
José de Caldas.

Open access



*  **Correspondence:** giovannibarrera@itm.edu.co

Resumen

Contexto: Esta publicación muestra un potencial uso para los residuos provenientes de la industria automotriz, en este caso residuos originados en el proceso de fabricación de empaques y sellos para motocicletas, que en la actualidad no tienen un uso final. Además, debido a la capa superficial de caucho de altas prestaciones, presentan un proceso de degradación extenso, lo cual constituye un factor perjudicial para el medio ambiente y contribuye al calentamiento global.

Método: Primero se realizó la trituración de los residuos, posteriormente su tamizado y selección por granulometría, y por último se realizó una mezcla con el caucho natural a través del masticado en cilindros abiertos para obtener el máster, que fue vulcanizado en un molde de suela para zapatos. El producto final fue caracterizado mecánicamente con las técnicas tensión-elongación, desgaste, dureza, flexión y rasgadura.

Resultados: La mezcla obtenida abre una ventana hacia el diseño de productos utilizando residuos de sellos y empaques para motor. Será posible diseñar otras propuestas para cauchos funcionalizados, orientados al desarrollo de aplicaciones de calzado ecológico.

Conclusiones: La mezcla de residuos de celulosa provenientes del sector de sellos para motor con caucho natural proyecta la reducción del impacto negativo generado por estos residuos y propone una economía circular, en este caso con el desarrollo de materia prima para el sector del calzado.

Palabras clave: caucho natural, celulosa residual, residuos industriales, economía circular.

Tabla de contenidos

	Página		
1. Introducción	2	3.3. Ensayo de flexión de suelas	8
2. Materiales y métodos	4	3.4. Análisis de tensión y deformación	9
3. Resultados	5	3.5. Resistencia al desgarro	10
3.1. Densidad relativa	6	3.6. Dureza shore A	11
3.2. Resistencia a la abrasión	7	4. Conclusiones	12
		5. Agradecimientos	13
		6. Contribución de autores	13
		Referencias	13

1. Introducción

A lo largo de la historia de humanidad, los materiales han desempeñado un papel crucial en la evolución y la creación de nuevos productos que satisfagan las necesidades del ser humano, pero, al mismo tiempo, el aumento en el consumo de estos productos ha generado un aumento acelerado de residuos a nivel mundial. En el caso de Colombia, se estima que se producen aproximadamente 30.000 toneladas de residuos sólidos al día, de los cuales 92 % son llevados a rellenos sanitarios y únicamente un 5 % es reutilizado. Esto se traduce en un deterioro ambiental, debido a que el mal manejo de estos residuos contamina el agua, el aire y el suelo, produciendo enfermedades e infecciones que atentan directamente contra el ser humano. Esta problemática también ha evidenciado la necesidad de explotar

racionalmente los recursos y crear nuevos objetos a partir de los desechos producidos (1). En este mismo orden, la celulosa residual obtenida de la producción de empaquetaduras para la industria automotriz es desechada, contribuyendo de este modo a la generación de más residuos. Esta investigación tiene como objetivo principal alargar el ciclo de vida del material, utilizándolo para el mejoramiento de materiales basados en caucho natural. Se realizaron diferentes mezclas de caucho y celulosa, con diferentes granulometrías, y estas fueron analizadas mediante ensayos de flexión, abrasión, tensión y desgarre, con el fin de conocer las propiedades del material.

Los polímeros (2) presentan ventajas como la resistencia, la dureza y la habilidad para absorber energía. Además, son ligeros e implican bajos costos en su fabricación. Por el lado de las desventajas, cabe mencionar la baja resistencia a altas temperaturas, la fragilidad a baja temperatura, la baja resistencia al desgaste, abrasión y la baja resistencia a radiaciones ultravioleta, gama y nuclear (3). Entre los polímeros se encuentran los elastómeros (4), cuya principal característica es que pueden ser estirados muchas veces su propia longitud para luego recuperar su forma original sin una deformación permanente. En esta familia se encuentra el poliisopreno, o caucho natural, proveniente del árbol de *Hevea Brasiliensis* (5). El caucho natural contiene carbono (C) e hidrogeno (H) en su composición química, en la relación atómica de 5 a 8 respectivamente (C^5H_8)_n (6).

Por otro lado, se encuentran los cauchos originados por la industria del petróleo, tales como el polibutadieno, el poliisobutileno y los poliuretanos (7). El caucho natural o poliisopreno, debido a sus excelentes propiedades, puede ser usado en aplicaciones en la industria naval y la aeronáutica, entre muchas otras más (8). Sin embargo, las propiedades físicas y químicas del caucho dependen no solo de su formulación, sino también de diferentes factores como las condiciones de reticulación. En el caso del caucho natural, también son de importancia los factores geográficos, el clima y la humedad del lugar donde se encuentre el árbol de donde se extrae el látex (9).

Por otro lado, mediante la adición de azufre (generalmente) como componente activo de la reticulación (proceso también conocido como entrecruzamiento), los sistemas de vulcanización se clasifican en mono-, di- o polisulfídicos, que representan los tipos de puentes generados en el sistema y aportan propiedades diferentes al caucho vulcanizado. Así mismo, se requiere el uso de cargas o aditivos para el proceso de vulcanización, tales como el negro de humo, la sílice y el carbonato de calcio, en diferente granulometría para originar propiedades fisicomecánicas propias en cada sistema de mezcla. La calidad y las propiedades de los elastómeros dependerán del volumen utilizado de caucho, los vulcanizantes, los plastificantes, los antioxidantes, los acelerantes, los activadores, los retardadores, los rellenos y los ingredientes de la mezcla y sus cantidades de n partes del material por 100 partes en peso del caucho, conocido usualmente como phr (*parts per hundred rubber*) (10).

Por otro lado, la celulosa residual, en adelante CR (C₆ H₁₀ O₅), es obtenida a partir de los residuos que genera la industria de los empaques de motos en Medellín. Generalmente, estas fibras naturales de celulósicas pueden ser extraídas de diferentes tipos de plantas, las cuales han sido utilizadas en la industria automotriz, papelería y de construcción, entre otras (11).

2. Materiales y métodos

El caucho natural utilizado en esta investigación fue el caucho TSR-10 producido en Colombia. La celulosa residual fue suministrada por la empresa Empaques Gasko, dedicada a fabricar empaquetaduras para motos. El caucho natural TSR-10 y el sistema de vulcanización fueron suministrados y preparados en las instalaciones de la empresa Montesuelas, ubicada en Medellín. En primera instancia, la celulosa fue procesada en una máquina trituradora, con el fin de disminuir su tamaño a malla ASTM 325 (45 micrones). Los materiales utilizados en el sistema de mezcla están citados en la Tabla I. Se utilizó caucho natural TSR-10, viscosidad Money 70-90. Para la realización de las muestras, se prepararon cuatro mezclas diferentes, variando el porcentaje de residuo de celulosa. El proceso de masticación se llevó a cabo por 15 minutos, y el proceso de vulcanización a 160 °C por 5 minutos. Las cantidades del sistema de vulcanizado se encuentran en phr.

Tabla I. Sistema de vulcanización utilizado

Material	phr
Óxido de zinc	5
Acido esteárico	2,5
Mercaptobenzotiazol (MBT)	3
Azufre	2,34
Disulfuro de Dibenzotiazol (MBTS)	1,7
Aceite parafínico	4
Caucho natural TSR 10	100
Sílice	6
Residuo de celulosa	10, 20, 30

Para la producción de los compuestos, se mezclaron caucho natural, el sistema de vulcanización y los residuos de celulosa en un mezclador de rodillos de cámara abierta durante 20 minutos a 60° C y fricción 1, 0:1, 25. Posteriormente, se adicionaron los agentes vulcanizantes a la mezcla. Las proporciones de materiales (reactivos) utilizados para la preparación compuesta están citados en la Tabla I, donde la cantidad de 225 phr de sílice funge como sistema de refuerzo. Posteriormente, los compuestos se prensaron térmicamente a 5 toneladas y 160° C durante su respectivo tiempo óptimo de vulcanización (t90) de 5 minutos, obtenido mediante la técnica de reometría, la cual es propia del sistema de mezcla de Montesuelas. Luego de triturar la celulosa proveniente del sistema de descarte de la empresa, se procedió a realizar el picado y el posterior tamizado para obtener las diferentes granulometrías, tal y como se observa en la Tabla II.

El material en análisis está enfocado en la industria del calzado, razón por la cual las pruebas preliminares para continuar con la investigación se centraron en los siguientes cinco métodos de caracterización:

Resistencia a la tensión: se utilizó la máquina universal de ensayos, en la cual se realizaron análisis en triplicado, siguiendo los parámetros de la norma ASTM D-412 (12).

Tabla II. Denominación de las muestras analizadas

Origen de la muestra	granulometría
A colector	($\leq 600 \mu\text{m}$)
B malla 30	($\geq 600 \mu\text{m}$)
C malla 20	($\geq 850 \mu\text{m}$)
D malla 16	($\geq 1.18 \text{ mm}$)

Resistencia a la abrasión: se evaluó utilizando un dispositivo de tambor cilíndrico y una máquina de abrasión (Maqtest). El cilindro debe tener un diámetro de $150 \pm 0,2$ mm y una longitud de unos 500 mm, así como girar a una frecuencia de 40 ± 1 min⁻¹. Las muestras fueron preparadas según ASTM D 5963-97 (método A), en tres repeticiones para cada compuesto, implementando muestras cilíndricas con diámetros de $16 \pm 0,2$ mm y un espesor de 6 mm. Las pruebas se llevaron a cabo a lo largo de 40 m (ruta de fricción) bajo fuerza aplicada de 5 N, según la norma UNE-ISO 4649:2013 (método A). Los resultados se expresan por la pérdida por abrasión en mm³, es decir, la pérdida en peso dividida por la densidad del material; entre menor sea el resultado, mayor resistencia a la abrasión tiene el elastómero.

Ensayo de flexión para suelas: se realizó en un flexómetro de suelas (marca Maqtest, modelo C115), siguiendo la norma UNE-EN ISO 20344:2012, numeral 8.4.2. En esta técnica se evalúa el rendimiento de la suela del calzado en una cantidad determinada de ciclos durante 72 horas continuas, sin romperse o marcar una línea de rotura.

Resistencia al desgarro: esta prueba se llevó a cabo en una máquina universal de ensayos (marca Lloyd Instruments, modelo EZ 20). Con esta técnica se mide la resistencia a que se propague una grieta bajo los esfuerzos que ha de soportar un elemento en servicio o en el propio proceso de fabricación. La fuerza se aplica perpendicularmente a la dirección de propagación del desgarro, y los resultados se expresan por el valor mediano de la tensión del desgarro, el cociente de la fuerza, medida en N y el espesor de la probeta medido en mm. La unidad SI correspondiente es N/mm.

Densidad relativa de cada mezcla en g/cm³, el ensayo se realizó siguiendo los parámetros de la Norma UNE-ISO 2781:2015 (método A), con agua destilada a 23 2° C.

3. Resultados

En primer lugar, se llevó a cabo la trituración de los residuos provenientes del sistema de descarte, para lo cual se utilizó un molino triturador de plásticos industrial. Posteriormente, el material fue tamizado en un equipo electromecánico. El proceso se realizó en varias sesiones de 15 minutos y se utilizaron 100 g de material en cada sesión de tamizado. En la Fig. 1 se evidencia la presentación inicial de los residuos hasta el proceso de tamizado. Las mallas utilizadas y la granulometría se mencionan en la Tabla II. Con estas se realizaron cuatro diferentes mezclas (A, B, C y D). La mezcla de la celulosa y el sistema de vulcanización fue llevada a cabo en un molino industrial de cilindros abierto.



Figura 1. Proceso de obtención de los residuos para mezcla

Luego de realizadas las mezclas en el molino de cilindros, se tomaron las muestras de suela de calzado, utilizando molde cerrado y termo-conformado a una temperatura de 160 °C por 5 minutos, tiempo determinado por el sistema de mezcla en la empresa de calzado (elementos ilustrados en la Fig. 2). De esta manera se generaron las probetas para análisis de flexión.



Figura 2. Molde y modelo diseñados para el proceso de conformado

3.1. Densidad relativa

La Tabla III muestra las densidades de la masa de las tres probetas con las cuales fueron calculadas, entre otras, la densidad relativa de la muestra A, producto del promedio del peso de la muestra al aire y sumergida en agua. Se hace evidente la poca variabilidad en los datos de las diferentes muestras (Tabla IV), teniendo en cuenta que los cuerpos de prueba fueron elaborados con el mismo sistema de vulcanización. La poca variabilidad observada en los datos puede deberse a la diferencia de material durante la elaboración de las probetas.

Tabla III. Resultados de análisis de densidad a las muestras

Muestra	Peso muestra en el aire Ma (g)	Peso muestra en el agua Wfl (g)	Cálculos densidad pt (mg/m ³)	Densidad promedio pt (mg/m ³)
1	20,5070	0,3560	1,015	1,01
2	19,8000	0,3357	1,015	1,16
3	19,3020	0,3133	1,014	1,19
4	19,3031	0,3136	1,015	1,18

Tabla IV. Resultados de la densidad relativa de las muestras

Muestra	Densidad relativa (%)
A	1,01
B	1,16
C	1,19
D	1,18

3.2. Resistencia a la abrasión

La determinación de la resistencia a la abrasión se realizó utilizando un dispositivo de tambor giratorio UNE-ISO 4649:2013 (método A), donde una pieza de la mezcla se desliza sobre una lámina abrasiva (de grado abrasivo específico) a una presión definida. Luego de esto, se calculan la pérdida de masa y volumen de la pieza y se comparan con la de un compuesto de referencia sometido a un ensayo en las mismas condiciones.

En la Fig. 3 se ilustran el molde y el material al momento de realizar el proceso.

**Figura 3.** Probetas para el ensayo de abrasión

Con base en los resultados mencionados en la Tabla V, se observa que la mezcla con el mejor índice de resistencia a la abrasión fue la muestra C, dato que corresponde al bajo porcentaje de estiramiento registrado en el análisis de tensión, el cual está relacionado con la baja movilidad de las cadenas poliméricas y un alto valor de rigidez de la muestra, posiblemente producto de la interacción entre las partículas de celulosa y la matriz de caucho natural. Dado que los datos de resistencia a la abrasión son positivos dentro de este análisis, un número menor de 100 IAR indica una baja resistencia a la abrasión, en comparación con el caucho patrón. De igual manera, es de resaltar que, dentro del sistema de vulcanización, no existen sistemas de refuerzo como lo son habitualmente el negro de humo o la sílice, con los cuales aumenta la resistencia a la abrasión (13,14).

Tabla V. Resultados de análisis a la abrasión

Muestra	Índice de resistencia a la abrasión IAR (%)
A	34,0
B	39,1
C	54,4
D	46,4

3.3. Ensayo de flexión de suelas

El ensayo de flexión para suelas se realizó en un flexómetro de suelas marca Masqtest modelo C115 serial 44. La prueba consistió en realizar una incisión normalizada a las suelas, a través de todo el espesor rectangular y luego someterla a un número determinado de flexiones repetidas (30.000) de 90° y luego medir el incremento de la incisión, en la Fig. 4 se ilustra el montaje de los cuerpos de prueba en el equipo de ensayo.



Figura 4. Ensayo de flexión para suelas

En el caso del ensayo de flexión, para cada muestra se analizaron tres probetas como análisis preliminar de la investigación. Los resultados obtenidos luego de los 30.000 ciclos de flexión se presentan en la Tabla VI. Estos valores son promisorios, pues se obtuvieron valores similares a los de las mezclas internas de la empresa. Aun así, no hay valores publicados con los cuales comparar estas pruebas, lo cual demuestra que este campo aún se encuentra poco explorado y difundido con respecto a la ciencia de los elastómeros y su caracterización en el sector del calzado.

Tabla VI. Comparativa de resultados del análisis de flexión en suelas fabricadas con residuos de celulosa

Muestra A	Observación general. Se analiza en el punto de flexión metatarsiana, finalizados los 30.000 ciclos.
1	Se evidencian grietas en el lado externo de 2,86 mm.
2	No se evidencias grietas.
3	
Muestra B	
1	Se evidencian grietas en el lado externo de 8,08 mm y en parte interna punta de 6,65 mm y 6,82 mm parte interna enfranje.
2	No se evidencias grietas.
3	
Muestra C	Se evidencian fisuras superficiales que se forman en el punto de flexión a ambos extremos, interno y externo, debido a burbujas de aire en el material.
Muestra D	Se evidencian fisuras superficiales que se forman en el punto de flexión a ambos extremos, interno y externo, debido a burbujas de aire en el material.
Muestra E (suela tomada como referencia de la empresa Montesuelas)	No se evidencian grietas.

De acuerdo con los resultados presentados, se identificó que las muestras que mejor se comportaron finalizados los 30.000 ciclos fueron la muestra A, realizada con partículas inferiores a 600 μm , y la muestra B, con partículas inferiores a 850 μm , puesto que hubo un mayor porcentaje positivo en el que no se evidenciaron grietas. En las mezclas C y D, a pesar de las burbujas de aire que se presentaron en el material, solo se evidenciaron fisuras superficiales en la muestra. Con base en lo anterior, y tomando como la muestra principal la suela E (suela promedio), fabricada por la empresa Montesuelas, se corrobora que las muestras que mejor se comportaron en comparación con esta fueron la A y la B, puesto que hubo un mayor porcentaje en el que no se evidenciaron grietas, igualando de este modo su comportamiento al de la muestra E.

3.4. Análisis de tensión y deformación

Las propiedades de resistencia a la tracción para las mezclas se determinaron según la prueba estándar para propiedades de tracción de plásticos de la marca universal de ensayos Lloyd Instruments (modelo EZ 20), a una velocidad de deformación de 500 50 mm/min. Se inició el ensayo observando la distancia entre las marcas de referencia. Se registró la fuerza de elongación especificada para la prueba y el momento de ruptura.



Figura 5. Probetas para el ensayo de tensión

Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla VII. Se observó que la resistencia a la tensión incrementa de acuerdo con la reducción en la granulometría utilizada: entre más finos los residuos de la celulosa, mejor el comportamiento, tanto en la tensión como en el porcentaje de elongación hasta la ruptura. Al mismo tiempo, se observó que, a medida que aumentaba la cantidad de celulosa agregada, aumentaba la resistencia a la tensión, efecto reportado por otros autores hasta cantidades de 30 phr (15,16), teniendo en cuenta que esto se aplicó en torno al 20% de residuos sin agentes de refuerzo. Los datos obtenidos fueron positivos para las granulometrías *i.e.*, cercanas a los 600 μm , con un tamaño promedio de 15 micras.

Tabla VII. Resultados del análisis de resistencia a la tensión

Referencia	Fuerza de rotura (N)	Resistencia a la tensión MPa	Elongación en la rotura %
A	64	4,7	4,137
B	73,7	5,3	3,723
C	58,9	4,1	3,239
D	46,3	3,2	2,390

3.5. Resistencia al desgarro

El ensayo para determinar la resistencia al desgarro se llevó a cabo en una máquina universal de ensayos marca Lloyd Instruments (modelo EZ 20) y se basó en someter a tracción una probeta rectangular que presenta un corte parcial central desde uno de sus lados, para luego registrar la fuerza media ejercida durante la separación de la probeta.

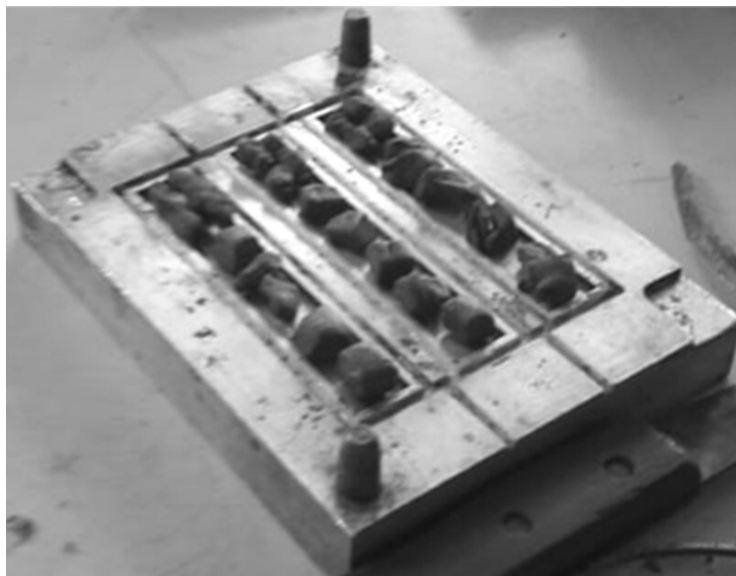


Figura 6. Material en el molde para muestras del ensayo de desgarre

Se evidencia que no solo la granulometría, sino también la cantidad de celulosa influyen en el resultado. En la investigación sobre caucho natural reforzado con biomasas renovables (17), la resistencia al desgarre va disminuyendo a medida que aumenta el porcentaje de bagazo. En nuestro caso, se presenta una pequeña variación: la resistencia al desgarre se ve afectada en principal medida por la granulometría de la celulosa. En la muestra C, elaborada con la granulometría menor, se presenta un menor comportamiento en comparación con las muestras B y C (mayores de 600 μm pero menores de 850 μm), según se observó en los análisis de resistencia a la rasgadura, la dureza, la abrasión y la tensión.

Tabla VIII. Resultados del análisis de resistencia al desgarro

Muestra	Resistencia al desgarro (N/mm)
A	10,1
B	10,9
C	11,8
D	8,7

3.6. Dureza shore A

Este ensayo se realizó en las condiciones sugeridas por la norma ISO 23529 para materiales elastoméricos a 10 N de fuerza aplicada. Uno de los objetivos fue obtener información relevante entre la densidad relativa y sus posibles alteraciones con las partículas de refuerzo y el sistema de vulcanizado. De esta forma fue posible focalizar las posibles aplicaciones a nivel industrial.

Tabla IX. Resultados del análisis de dureza

Muestra	Dureza	Abrasión nominal	Abrasión promedio	Densidad nominal
		referencia (mg) Δm constante	comparado con referencia (mg) Δm_r	caucho referencia (g/cm^3) ρ_r
A	63	210	214,6	1,35
B	70	210	214,6	1,35
C	67	210	214,6	1,35
D	66	210	214,6	1,18

Se identificó que la mezcla B, que contiene un 14% de CR, obtuvo el mayor valor de dureza, presentando una media de 70 *shore A*, lo que indica, que entre más alto sea el porcentaje de CR añadido a la mezcla, mayor será su dureza. Además, tomando como referencia otras investigaciones similares, se notó que, en el caso de un material compuesto a partir de celulosa y poliestireno expandido residual, la mezcla con 11% de CR presentó una media de 60, *i.e.*, resultados similares que corroboran que, a mayor cantidad de celulosa, mayor dureza (18).

4. Conclusiones

A través de los resultados, es posible concluir que la granulometría más adecuada para las mezclas es la de menor tamaño, *i.e.*, las partículas entre 600 y 850 μm presentaron la mejor relación con el sistema de vulcanización utilizado que las que contaban con una granulometría superior.

La resistencia al desgarre permitió observar una reducción lineal correlacionada con el incremento en la granulometría del residuo.

La mayor resistencia a la abrasión fue reportada por la muestra con el tamaño de partícula intermedio, posiblemente debido a la mejor interacción entre los constituyentes, mecanismo que favoreció la mejor distribución de cargas durante el ensayo.

Haciendo un análisis general, se evidencia que el residuo presentó buenas propiedades, específicamente frente a la flexión de la suela, y que podría ser utilizado como sistema de carga en el sector del calzado. Además, se presentó el efecto adicional de la transmisión del color del residuo a la muestra, el cual, a simple vista, fue homogéneo y no mostró distorsión durante las pruebas.

Es necesario profundizar en la caracterización de este residuo industrial y su aplicación en el sector del caucho para obtener información sobre su posible influencia en las propiedades fisicomecánicas, pero, sin dudas, esta es una gran posibilidad de uso del residuo, dados sus buenos resultados en esta investigación preliminar.

5. Agradecimientos

Se agradece al Instituto Tecnológico Metropolitano por apoyar el programa de joven investigador, a la empresa empaques Gasko por la donación de los residuos, al laboratorio de análisis de materiales Lacpa y al centro para la manufactura avanzada en polímeros y diseño del Sena Itagüí, en cabeza del profesor Ramón Darío Tabares, por su enorme y desinteresada colaboración.

6. Contribución de autores

Todos los autores contribuyeron por igual a la investigación

Referencias

- [1] A. Zacarías Farah, “¿Qué es la economía circular y cómo cuida del medio ambiente?”, *Noticias ONU*, 2018. [En línea]. Disponible en: <https://news.un.org/es/interview/2018/12/1447801> ↑3
- [2] D. R. Askeland y W. Wright, *Ciencia e ingeniería de los materiales*, 7ma ed., Cengage Learning Editores, 2016. [En línea]. Disponible en: https://www.academia.edu/34951096/Ciencia_e_ingenier%C3%ADa_de_materiales_7a_edici%C3%B3n ↑3
- [3] R. C. Sepúlveda Molina, Preparación de nanocompósitos basados en copolímeros de etileno-1-octeno (engage)/arcillas y mezclas de polipropileno/engage/arcillas y estudio de sus propiedades, tesis de pregrado, Univ. Chile, 2006. <https://repositorio.uchile.cl/handle/2250/105602> ↑3
- [4] D. Juárez Varón, S. Ferrandiz Bou, R. Balart Gimeno y D. García Sanoguera, “Estudio, análisis y clasificación de elastómeros termoplásticos,” *3c Tecnol. Glos. Innov. Ap. Pyme*, vol. 1, no. 2, art. 4817572, 2012. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4817572> ↑3
- [5] N. Bekkedahl, “Caucho natural y caucho sintético,” *Fac. Nac. Agronom. Medellín*, vol. 6 no. 22, art 1946. <https://revistas.unal.edu.co/index.php/refame/article/view/32262> ↑3
- [6] Escuela Colombiana de Ingeniería, “Identificación de plásticos,” 2008. [En línea]. Disponible en: https://escuelaing.s3.amazonaws.com/production/documents/1960_idplasticosr2.pdf ↑3
- [7] W. Urrego Yépez, Efecto del sistema de vulcanización en la cinética de reacción y en las propiedades físico-químicas de un caucho natural colombiano, tesis de maestría, Univ. Eafit, Medellín, Colombia, 2014. <http://hdl.handle.net/10784/2836> ↑3
- [8] J. P. Fernández Rodríguez, Parámetros productivos del caucho (*Hevea brasiliensis*) y su relación espacial con las propiedades físicas y químicas del suelo, tesis de maestría, Univ. Nac. Colombia, Bogotá, Colombia 2014. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/52476> ↑3
- [9] R. A. González Carbonell, E. Álvarez García y K. Abreu González, “Influencia de los aditivos sobre las propiedades mecánicas de los elastómeros,” *Tecnol. Quím.*, vol. XXVIII, no. 2, pp. 26-34, 2008. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=445543756004> ↑3

-
- [10] E. U. Pulido Barragán, Nanocelulosa de euphorbia antisyphilitica candelilla y typha domingensis (tule), por hidrólisis ácida y oxidación mediada por tempo. Comparación y evaluación de sus propiedades, tesis de doctorado, Inst. Tecnol. Nac. México, Ciudad Maderos, Tamaulipas, México, 2019. <http://repositorio.tecnm.mx:8080/jspui/handle/123456789/403> ↑3
- [11] ASTM International, *D412 - 16 Standard test methods for vulcanized rubber and thermoplastic elastomers-tension*, West Conshohocken, PA, USA: ASTM International, 2008. ↑3
- [12] F. F. Guedes de Paiva, V. P. Klienchén de Maria, G. Barrera Torres, G. Dognani, R. J. dos Santos, F. Camargo Cabrera y A. E. Job, "Sugarcane bagasse fiber as semi-reinforcement filler in natural rubber composite sandals," *J. Mater. Cycles Waste Manag.*, vol. 21, pp. 326-335, 2019. <https://doi.org/10.1007/s10163-018-0801-y> ↑4
- [13] R. J. Santos, D. Agostini, F. C. Cabrera, E. R. Budemberg y A. E. Job "Recycling leather waste: Preparing and studying on the microstructure, mechanical, and rheological properties of leather waste/rubber composite", *Polymer Comp.*, vol. 36, no. 12, pp. 2275-2281, 2015. <https://doi.org/10.1002/pc.23140> ↑8
- [14] G. B. Bacarin et al., "Natural rubber composites with grits waste from cellulose industry", *J. Mater. Cycles Waste Manag.*, vol. 22, pp. 1126-1139, 2020. <https://doi.org/10.1007/s10163-020-01011-8> ↑8
- [15] A. Mallqui Antialón, *Caucho natural reforzado con biomásas renovables*, tesis de pregrado, Univ. Nac. Callao, Perú, 2008. <http://hdl.handle.net/20.500.12952/390> ↑10
- [16] S. J. Castro Reyes, Desarrollo de un material compuesto a partir de celulosa y poliestireno expandido residual, trabajo de pregrado, Univ. EIA, Envigado, Colombia, 2017. <https://repository.eia.edu.co/handle/11190/2296> ↑10
- [17] M. González Villareal, Optimización de las propiedades mecánicas de compósitos de resina poliéster reforzados con fibras de vidrio y cargas de carbonato de calcio, tesis de maestría, Univ. Autón. Nuevo León, México, 2014. <http://eprints.uanl.mx/4165/> ↑11
- [18] B. R. Cruz Cal, B. F. Guerra Valdés, E. A. Álvarez García y R. A. Blanco, "Evaluación de elastómeros vulcanizados", *Afinidad*, vol. 59, no. 558, pp. 131-136, 2012. <https://studylib.es/doc/5991965/evaluaci%C3%B3n-de-elast%C3%B3meros-vulcanizados> ↑12
-

María Isabel Arias Jaramillo

Estudiante de Ingeniería de Diseño Industrial. Semillero de investigación formativa Tecnología del caucho y aplicaciones sostenibles, Instituto Tecnológico Metropolitano, Medellín, Colombia.

Email: mariaarias249793@correo.itm.edu.co

José Renivaldo Dos Santos

Doctor en Ciencia y Tecnología de Materiales. Ingeniería de energía, unidad Rosana, Universidad Estadual Paulista, Rosana, SP-Brasil.

Email: renivaldo.santos@unesp.br

Leonardo Lataro Paim

Doctor en Ciencia y Tecnología de Materiales. Ingeniería de energía, unidad Rosana, Universidad Estadual Paulista, Rosana, SP-Brasil.

Email: leonardo.paim@unesp.br

Giovanni Barrera Torres

Doctor en Ciencia y Tecnología de Materiales. Profesor de la Facultad de Arte y Humanidades, Instituto Tecnológico Metropolitano, Medellin, Colombia.





Email: giovannibarrera@itm.edu.co



Research

Numerical Study on the Structural Behavior of the Blade Profile of a Savonius-Type Rotor while Implementing a Multiblade Geometry

Estudio numérico del comportamiento estructural del perfil del álabe de un rotor tipo Savonius implementando una geometría multielemento

Luis A. Gallo¹^{*}, Edwin L. Chica¹, and Elkin G. Flórez²

¹Universidad de Antioquia (Medellin, Colombia).

²Universidad de Pamplona (Pamplona, Colombia).

Abstract

Context: This study evaluates the structural stability of a Savonius-type rotor by implementing a multiblade profile, with the purpose of reducing the resistance to movement and consequently improving aerodynamic performance. The rotor with the profile under study was compared against rotors with conventional semicircular and split Bach profiles.

Method: The fluid-structure interaction was analyzed by numerically simulating the three rotors, and the state of stresses and deformations was determined under a normal operating regime. The rotors were assigned the same construction material, and they were studied under the same parameters and models of fluid dynamics and computational mechanics via the ANSYS software.

Results: The results obtained showed a better structural behavior in the rotor with the multiblade configuration, reducing the maximum equivalent stress by 59,10 and 42,87% and the deformations by 47,40 and 33,59% with respect to the rotors with the conventional semicircular and split Bach profiles, respectively.

Conclusions: The multiblade configuration allows for greater aerodynamic and structural performance while preserving the construction and operation simplicity that characterize Savonius-type rotors.

Keywords: CFD, multiblade, multiphysics, Savonius rotor, wind energy.

Article history

Received:
08th/Mar/2022

Modified:
05th/Oct/2022


Accepted:
16nd/Nov/2022

Ing., vol. 28, no. 2,
2023. e19174

©The authors;
reproduction right
holder Universidad
Distrital Francisco
José de Caldas.

Open access



* Correspondence: luis.gallo@udea.edu.co

Resumen

Contexto: Este estudio evalúa la estabilidad estructural de un rotor tipo Savonius implementando un perfil multielemento, con el propósito de reducir la resistencia al movimiento y mejorar así el rendimiento aerodinámico. El rotor con el perfil en estudio se comparó con rotores de perfiles semicircular convencional y Bach dividido.

Método: Se analizó la interacción fluido-estructura mediante la simulación numérica de los tres rotores, y se determinó el estado de esfuerzos y deformaciones en un régimen normal de operación. A los rotores se les asignó el mismo material de construcción, y estos fueron estudiados bajo los mismos parámetros y modelos de la dinámica de fluidos y mecánica computacional a través del software ANSYS.

Resultados: Los resultados obtenidos evidenciaron un mejor comportamiento estructural en el rotor con la configuración multielemento, al reducir el esfuerzo equivalente máximo en 59,10 y 42,87 % y las deformaciones en 47,40 y 33,59 % con respecto a los rotores de perfiles semicircular convencional y Bach dividido respectivamente.

Conclusiones: La configuración multielemento permite un mayor rendimiento aerodinámico y estructural, a la vez que se conserva la simplicidad de construcción y operacional que caracterizan al rotor tipo Savonius.

Palabras clave: CFD, energía eólica, multielemento, multifísica, rotor Savonius.

Table of contents

		3.1. Results analysis	9
	Page	4. Discussion	10
1. Introduction	2	5. Conclusions	13
2. Materials and methods	3	6. Acknowledgments	14
2.1. Geometrical details of the rotors . .	3	7. Author contributions	14
2.2. Numerical analysis	4	References	14
3. Results	9		

1. Introduction

The omnidirectional functioning of vertical-axis wind turbines (VAWTs) allows them to take advantage of winds with variable direction without requiring additional orientation systems (1–3). Likewise, in the last few years, it has been proven that VAWTs can operate at a shorter distance between rotors than horizontal-axis wind turbines (HAWTs), which allows for a greater number of turbines available in the same area (4,5).

The Savonius-type VAWT, whose operation principle is mainly based on aerodynamic drag force, has a high initial torque and can be operated at a low flow velocity without the need for assistance

devices to start its movement (6–9). However, this type of operation requires a blade that moves against the flow when returning to its working position, generating an opposite torque. This significantly reduces its performance, and it is mainly because of this that this type of rotor barely reaches values close to 50 % the performance of HAWTs (7, 10–12).

In previous studies, it was evidenced that employing multiblade profiles in the blades of this type of rotors can improve their performance by 10,8 % with respect to a profile without the secondary element (split Bach profile), as well as by 51,2 % regarding conventional semicircular profiles (Fig. 1) (6, 13–17). Additionally, the implementation of a multiblade geometry allows greatly preserving the construction and operation simplicity that characterize Savonius-type rotors (13).

After determining that a rotor with a multiblade Bach profile has a higher aerodynamic efficiency with respect to the conventional semicircular and split Bach profiles, it was also necessary to compare its structural behavior before aerodynamic loads. Therefore, this study aimed to assess the structural stability of a Savonius-type rotor while implementing a multiblade profile. The maximum equivalent stress (Von Mises tension) (18–21) and the maximum deformation were determined as contrast variables, which were obtained through computational simulations of the rotor models' structural behavior (22–24).

2. Materials and methods

2.1. Geometrical details of the rotors

Tridimensional models 200 mm in diameter (D) and 300 mm in height (H) were established for the three profiles, consisting of three stages with an offset of 120° in the azimuth angle (25). Discs with a diameter of 220 mm were installed in the ends of each stage (26). The blades were built considering 1 mm wall thickness and 2 mm thickness for the discs that separate each stage (Fig. 1).

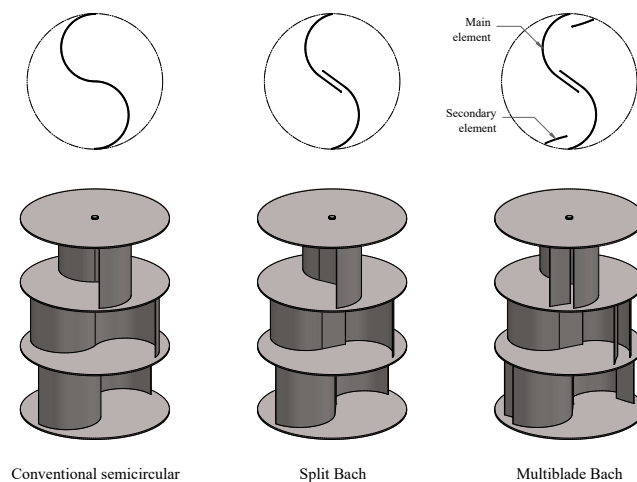


Figure 1. Rotor models analyzed in this study and their corresponding blade profiles

These measurements were established with the purpose to seek dimensional correspondence with the numerical studies of the profiles (13, 14), as well as to implement an aspect relation in accordance with that recommended in literature ($AR = H/D = 1,5$) (27). A multistage configuration was considered, as it allows analyzing the profile in different azimuth positions and reducing the fluctuation of the load (28). Thus, it is possible to reduce the deviation between a static analysis with lower computational costs and a dynamic one that generally demands more solver resources.

The geometrical properties for each profile are detailed in Table I.

Table I. Geometrical properties for each profile

Property	Conventional semicircular	Split Bach	Multiblade Bach
Profile length [mm]	313,59	314,14	380,23
Cross-sectional area (A_o) [mm ²]	313,37	313,72	379,37
Second moment of area about x (I_x) [mm ⁴]	$1,41 \times 10^6$	$1,12 \times 10^6$	$1,51 \times 10^6$
Second moment of area about y (I_y) [mm ⁴]	$1,49 \times 10^5$	$8,58 \times 10^4$	$2,08 \times 10^5$
Second polar moment of area (I_z) [mm ⁴]	$1,56 \times 10^6$	$1,21 \times 10^6$	$1,72 \times 10^6$

The second moments of area can be expressed through Eq. (1), where the averaged second moment of area in the xy plane is constant in any azimuth position (23, 24). Likewise, I_z can be used as the characteristic dimension of the second moment of area (Fig. 2).

$$I_z = I_x + I_y \quad (1)$$

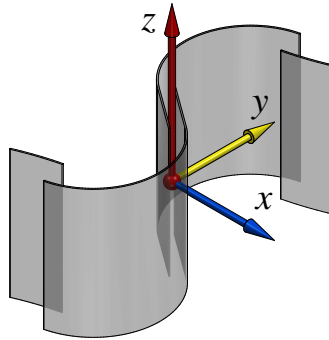


Figure 2. Reference system used to determine the second moments of area

2.2. Numerical analysis

This study was carried out through the multiphysical analysis of a two-way fluid-structure interaction, which allows for feedback between the results of each of the physics involved, linking tools of computational fluid dynamics (CFD) with those of computational solid mechanics (CSM) (29–34).

The three geometries were studied in a steady state, employing the same CFD and CSM algorithms, parameters, and models via the ANSYS Fluent and Mechanical solvers, which solve the physics of each phenomenon through the finite volume and the finite element methods, respectively (35–41).

The ANSYS Workbench automatically exchanges data between simulation solvers. Its mesh mapping technology ensures that data are transferred more accurately from CFD analysis to CSM and *vice versa* (Fig. 3).

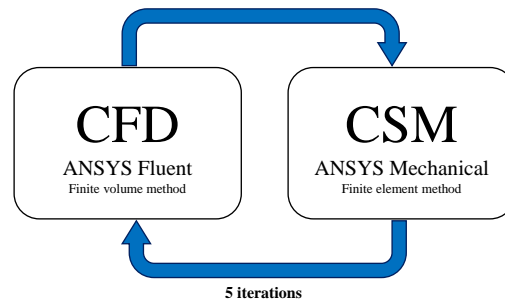


Figure 3. Two-way fluid-structure interaction for the study case

This coupling considers the pressure field of the fluid dynamic analysis and the consequences of this load in the structural analysis. A limit of five calculation cycles or iterations in the two-way coupling was established.

A turbulence model $k - \omega$ SST was proposed due to its good performance in predicting free and adverse pressure gradient flows (42–44). The convergence criterion for the solution residuals was fixed in the order of 10^{-3} .

The domain of analysis comprises two bodies: a fluid body and a solid body. The fluid body is made up of two parts: an orthohedral region that simulates the far fluid field, and a cylindrical one for the near fluid field, which contains the geometry of the rotor.

An air inlet was established at a velocity of $v = 4 \text{ m/s}$ (wind class 1) (45), corresponding to a flow regime with a Reynolds number of 6×10^4 . Likewise, the outlet was fixed at atmospheric conditions, and the side field was simulated under symmetry conditions, since it is there that low-scale gradients occur (42, 46).

The rotor walls rotate at a fixed angular velocity $\omega = 20 \text{ rad/s}$, corresponding to a $TSR = 0, 5$, in whose proximity the greatest torque load occurs (Fig. 4) (13).

The speed ratio at the tip of the blade (TSR) gives a proportion of the angular velocity of the rotor in dimensionless terms, according to Eq. (2).

$$TSR = \frac{\omega D}{2v} \quad (2)$$

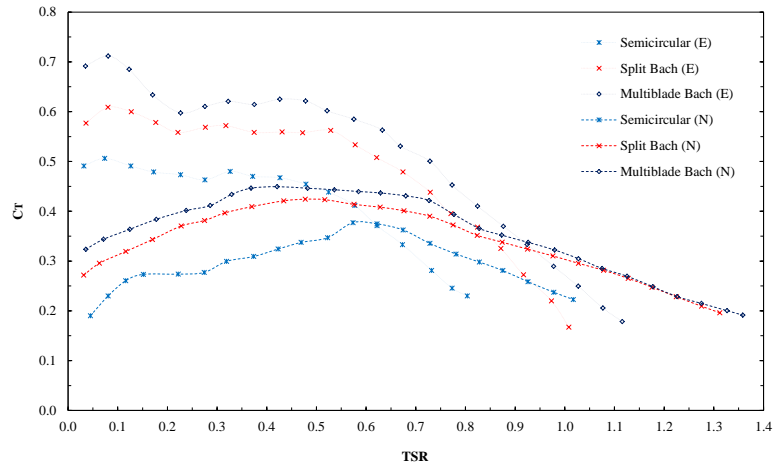


Figure 4. Experimentally obtained C_T results by the three tested rotors (E) and their comparison with the numerical results determined from the three-dimensional simulations (N)

Source: (13)

The torque coefficient (C_T) is estimated as the ratio between the torque generated by the rotor on its shaft (T) and the torque that is possible to generate under the given conditions (47,48). This is expressed by Eq. (3), where ρ is the density of the air and $A = DH$ is the frontal area of the rotor.

$$C_T = \frac{T_{turbine}}{T_{available}} = \frac{T}{\frac{1}{4} \rho A v^2 D} \quad (3)$$

The dimensions of the computational domain were set as follows: 10 m wide, 1 m high, and 10 m long, seeking to reduce the blockage effect caused by the rotor in the flow section (Fig. 5) (49,50).

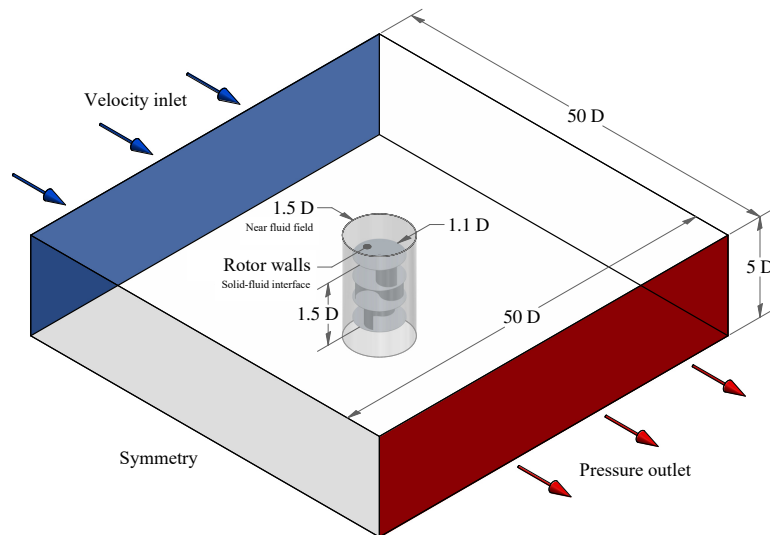


Figure 5. Three-dimensional analysis domain and its boundary conditions

In order to obtain an efficient number of partitions into which the analyzed domain had to be divided, it was necessary to carry out an independence analysis for spatial discretization, seeking to obtain convergence in the result. The rotor with the conventional semicircular profile was used as a test model during the independence analysis.

Since the model was made up of two bodies, an independence analysis was carried out for each of them. For the fluid body, five discretizations (known as *meshing*) were built with the same structure, but with an increased number of partitions in each edge according to the refinement of each mesh. The region that simulated the far field of the fluid had a structured mesh with only hexahedral elements (Figs. 6a and 6b), while the region that simulated the fluid field near the rotor had an unstructured mesh with only tetrahedral elements in order to gain greater adaptability to the geometry (Figs. 6c and 6d). The meshing adjacent to the rotor walls was refined and had a structure of perpendicular layer (*inflation*) that allowed for a better prediction of the boundary layer (Fig. 6e).

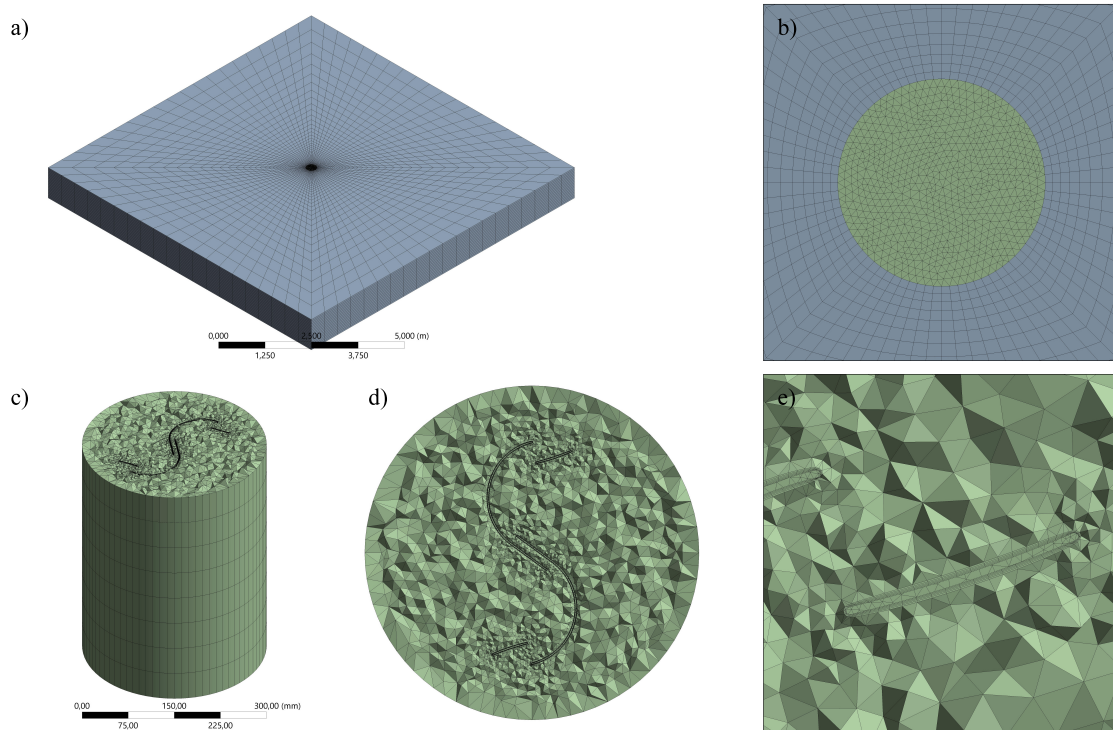


Figure 6. General structure of the meshing for the CFD analysis of the multiblade Bach rotor: (a) region far field of the fluid, (b) detail of the transition from the far field to the near field of the fluid, (c) cutaway view of region near field of the fluid, (d) profile geometry detail, and (e) detail of the profile walls

In the same way, for the solid body that simulated the rotor, five meshings were built, which were defined by predominant hexahedral elements forming structured faces on the walls of the blades (Fig. 7).

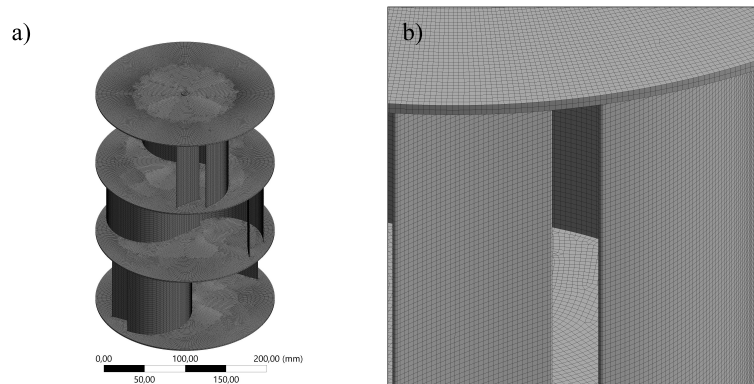


Figure 7. General structure of the meshing for the CSM analysis of the multiblade Bach rotor: (a) isometric view of the rotor model and (b) detail of the model walls

When solving each case with the different meshings, the maximum equivalent stress value was obtained, whose variation was observed to become smaller as the meshing became finer (Tables II and III). For fluid and solid body analysis, the asymptotic convergence indicators, according to the Richardson extrapolation, were 1,0042 and 1,0289, respectively, whose closeness to the unit indicates the existence of a convergence value (51).

For the meshing of the fluid body, the value of y^+ was also analyzed, which is recommended to be lower than the unit when using the turbulence model $k - \omega SST$, thus ensuring appropriate predictions in the flow near the walls (42). In this way, the third meshing was selected for both the fluid and the solid bodies.

Table II. Mesh independence test results for the fluid body

Meshing	1	2	3	4	5
Number of elements	119.791	478.077	1.805.411	7.473.517	30.180.988
Maximum equivalent stress [MPa]	0,29665	0,30367	0,30768	0,30867	0,30897
Deviation	3,89 %	1,67 %	0,41 %	0,09 %	
y^+	5,21	2,56	0,96	0,54	0,42
Simulation time [hours]	3,62	4,24	7,23	23,36	92,65

Table III. Mesh independence test results for the solid body

Meshing	1	2	3	4	5
Number of elements	59.641	238.166	912.667	3.750.668	15.102.672
Maximum equivalent stress [MPa]	0,22798	0,28475	0,30768	0,31307	0,31656
Deviation	27,98 %	10,05 %	2,81 %	1,10 %	
Simulation time [hours]	0,45	1,81	7,23	29,12	122,45

The supports and the loads of the model were considered as shown in Fig. 8. A fixed support was located in the lower hub of the rotor, simulating a full load exerted by the generator. Similarly, a cylindrical support was placed on the upper hub, simulating the restriction in the bearing. Additionally, the aerodynamic loads imported from the fluid dynamic analysis were applied to the rotor surface.

In this analysis, the loads on the rotor body (weight and centripetal force) were not taken into account, since they are not linearly scalable, given their dependence on the mass, so the result could not be generalized ($mass \propto scale^3$).

Polyethylene was defined as the construction material, as it is a commonly used medium-strength polymer. Table IV shows its main structural properties.

Table IV. Established properties for polyethylene as a construction material

Property	Magnitude
Density	950 kg/m^3
Poisson ratio	0,42
Elasticity module	1100 MPa
Yield strength	25 MPa
Ultimate tensile strength	33 MPa

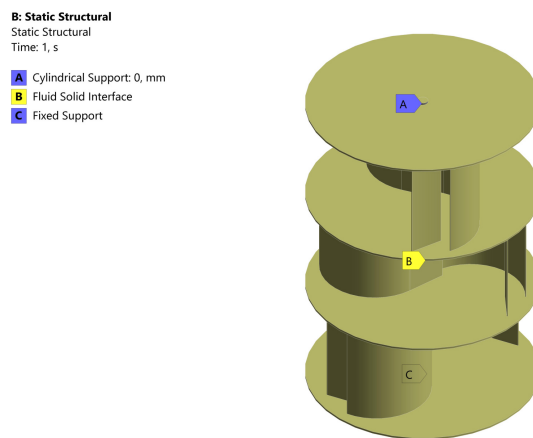


Figure 8. Established supports and loads for the multiblade Bach rotor model

3. Results

3.1. Results analysis

After solving the fluid physics, each rotor's states of pressure and flow velocity were obtained. Fig. 9 shows the state of static pressure exerted by the fluid on the walls of the multiblade Bach rotor

model by means of a contour graph. In the same figure, the fluid path lines and the corresponding velocity magnitude are shown for a flow plane. Areas of laminar flow, stagnation, recirculation, and fluid acceleration can be identified.

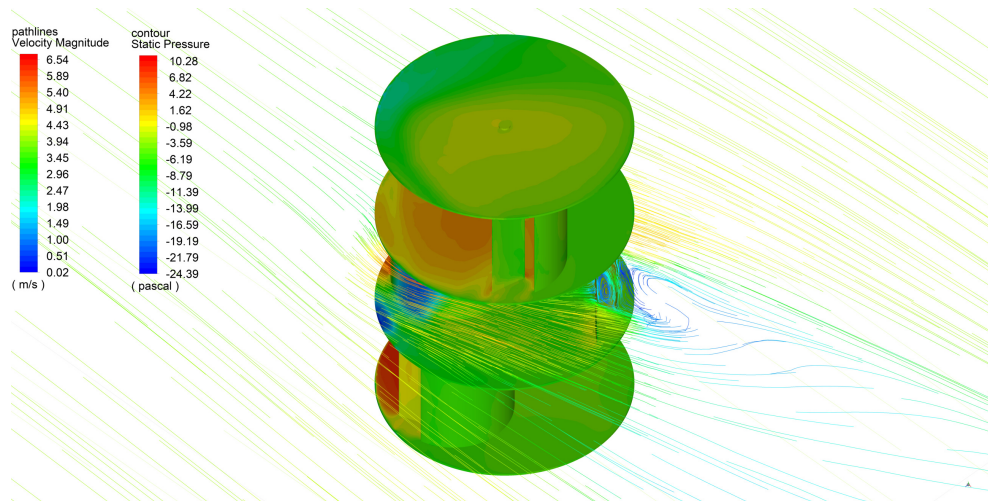


Figure 9. Results of the fluid dynamics on the multiblade Bach rotor for a wind of 4 m/s and a TSR of $0,5$

After transferring the result of the fluid dynamics analysis to the structural one, the stress and deformation states for each rotor were obtained, whose maximum values are summarized in Table V. Fig. 10 shows, represented by contours, an example of the multiblade Bach rotor's state of stress and deformation.

Table V. Structural analysis results

Rotor model	Conventional semicircular	Split Bach	Multiblade Bach
Aerodynamic load (F) [N]	0,46085	0,48876	0,53771
Torque load (T) [$N \cdot m$]	0,01213	0,01728	0,01748
Maximum equivalent stress (σ) [MPa]	0,30768	0,33277	0,21157
Maximum deformation (δ) [mm]	0,15034	0,17989	0,13296

4. Discussion

As seen in Table V, the aerodynamic loads exerted on the rotor models vary as a result of the different profile shapes. These differences in loading conditions hinder a direct comparison of the structural results.

Because the generated torque is a consequence of the aerodynamic load, it is necessary to obtain a static equivalence that explains its origin, as each profile has different capabilities when it comes

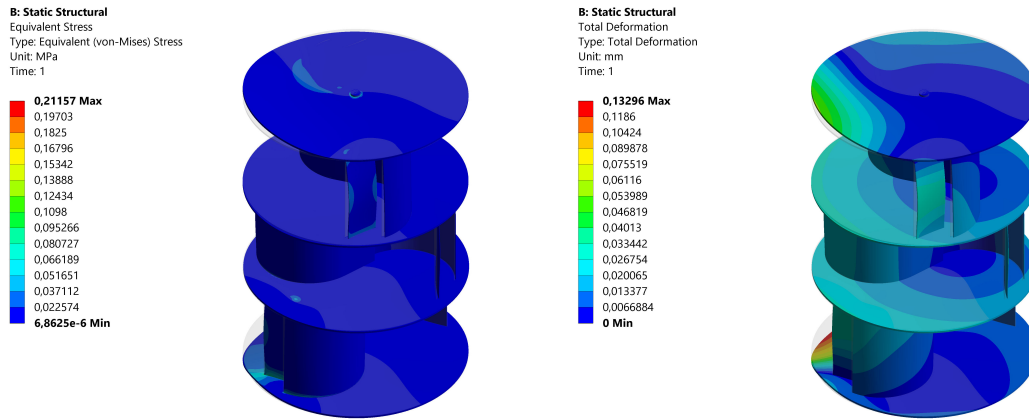


Figure 10. State of equivalent stress (left) and total deformation (right) of the multiblade Bach rotor for a wind of 4 m/s and a TSR of 0,5

to converting this aerodynamic load into useful torque. Likewise, these differences in torque induce variations in the stress and strain state of the rotor.

Eq. (4) describes the equivalent percentage of the aerodynamic load, which, when applied to the blade tip, is responsible for the generated torque, with e_{load} being the load effectiveness.

$$e_{load} = \frac{2T}{FD} \times 100\% \quad (4)$$

In the same way, when comparing the second polar moment of area with the maximum moment that can be obtained with the same area, the effectiveness in the distribution of the profile area with regard to the rigidity of the structure can be explained. Eq. (5) allows obtaining the maximum second polar moment of area given the cross-sectional area and the diameter. Likewise, Eq. (6) shows this relationship, where e_{area} is the area effectiveness.

$$I_{z_{max}} = \frac{A_o D^2}{4} - \frac{A_o^2}{2\pi} \quad (5)$$

$$e_{area} = \frac{I_z}{I_{z_{max}}} \times 100\% \quad (6)$$

By determining the ratio for each rotor model, the values plotted in Fig. 11 are obtained. It can be seen that the conventional semicircular profile has the least load effectiveness, *i.e.*, it generates great aerodynamic resistance while delivering low torque. In contrast, the split Bach profile offers the greatest load effectiveness, allowing a higher torque to be achieved with less resistance. Although the load effectiveness of the multiblade Bach profile is between that of the two previous profiles, its value is greater than the average of the two. This shows that the aerodynamic load exerted on the multiblade Bach rotor is the highest, as a consequence of a greater power transmission.

On the other hand, the greatest area effectiveness is reported by the conventional semicircular profile, which shows a greater concentration of area in the outermost region of the geometry of the profile. In contrast, the least area effectiveness is observed in the split Bach profile, indicating that the

area is more concentrated towards the center of the geometry. Although the area effectiveness of the multiblade Bach profile is between that of the two previous profiles, its value is greater than the average of the two.

Both indicators were multiplied to obtain a structural effectiveness value which showed that the changes made to the geometries, starting from the conventional semicircular profile, had positive impacts on structural stability. An increasing trend in the evolution of the rotor can be seen by means of this indicator.

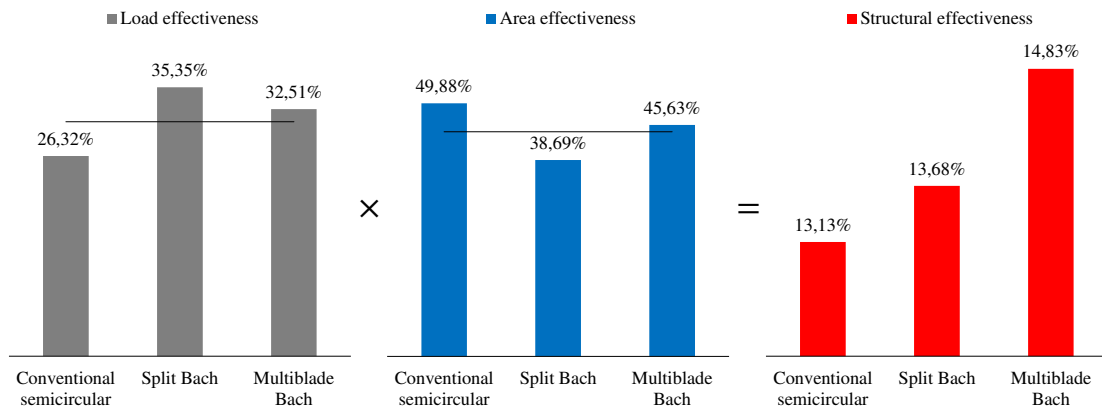


Figure 11. Load (left), area (center), and structural (right) effectiveness in profile geometries. Black lines represent the average effectiveness for the conventional semicircular and split Bach profiles.

Considering that the stresses and deformations (σ , δ) are directly proportional to the loads (F , T) (23, 24), it is possible to adjust the results of the conventional semicircular and split Bach rotors to the loading conditions of the multiblade Bach. To this effect, the compound proportionality method described in Eq. (7) is implemented.

$$\sigma_{adj_i} = \sigma_i \frac{F_j}{F_i} \frac{T_j}{T_i} \quad \delta_{adj_i} = \delta_i \frac{F_j}{F_i} \frac{T_j}{T_i} \quad (7)$$

where the subscripts adj , i , and j refer to the adjusted value, rotor i , and rotor j (multiblade Bach rotor in this case), respectively. Thus, the values reported in Table V were adjusted under the same load conditions of the multiblade Bach profile and are presented in Fig. 12.

The results in Fig. 12 reveal a consistent trend with the structural effectiveness results (Fig. 11), with the values of the adjusted maximum equivalent stress and deformation being significantly lower for the multiblade geometry, which indicates that the multiblade Bach profile offers greater strength and stiffness.

The adjusted maximum equivalent stresses were reduced by 59,10 and 42,87%, and the deformations by 47,40 and 33,59% with respect to the conventional semicircular and split Bach profiles, respectively.

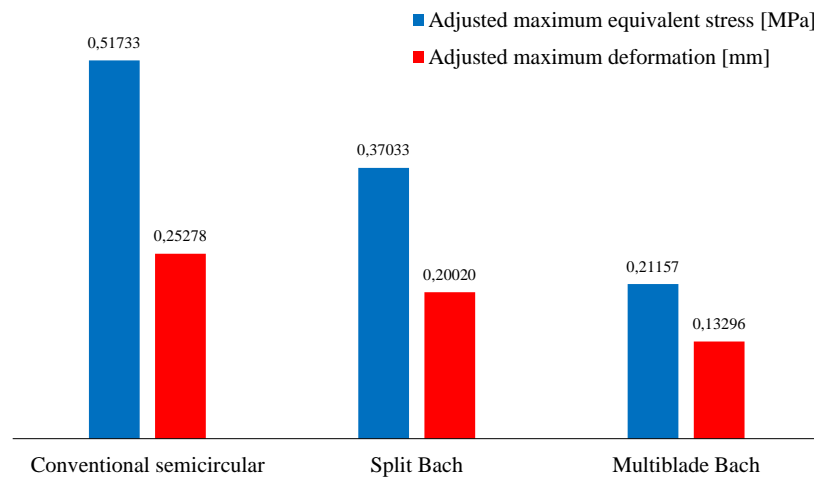


Figure 12. Adjusted maximum equivalent stress and deformation for each rotor

This additional structural stability is provided by the greater moment of area provided by the secondary element of the multiblade profile, where the I_z of the multiblade Bach profile is 42,47% greater than that of the split Bach.

The mass moment of inertia (I_M) is directly proportional to the second polar moment of area, with the constant of proportionality being the product between the density of the construction material (ρ_M) and the height of the blade, as described in Eq. (8).

$$I_M = \rho_M H \cdot I_z \quad (8)$$

Therefore, as the second polar moment of area increases, the mass moment of inertia also increases. This means a greater difficulty for the rotor to start its movement. However, in the case of the multiblade profile, this is compensated by the higher static torque that is generated when the rotor starts up (Fig. 4) (13). Additionally, a greater inertia reduces the fluctuation of the torque transmitted, working as a flywheel.

5. Conclusions

This study compared the structural behavior under aerodynamic loads of rotors with conventional semicircular, split Bach, and Bach multiblade profiles. The models were studied via a two-way fluid-structural interaction analysis and in a steady state.

The results revealed that the multielement rotor had greater strength and stiffness, provided by the increase in the second polar moment of area implied by the secondary element in the profile. The maximum equivalent stresses were reduced by 59,10 and 42,87%, and the deformations by 47,40 and 33,59% with regard to the conventional semicircular and split Bach profiles, respectively.

The implementation of the secondary element allows for a greater aerodynamic and structural performance, preserving, to a large extent, the construction and operation simplicity that characterizes Savonius-type rotors, requiring an addition of only 21 % of the material involved for manufacturing the main elements.

6. Acknowledgments

The authors gratefully acknowledge the financial support provided by the Colombia Scientific Program within the framework of call Ecosistema Científico [contract number FP44842-218-2018].

7. Author contributions

Luis A. Gallo: Conceptualization, Investigation, Methodology, Software, Writing – original draft.
Edwin L. Chica: Writing – review & editing, Data curation, Supervision, Resources
Elkin G. Flórez: Project administration, Supervision, Resources

References

- [1] A. A. Mohammed, H. M. Ouakad, A. Z. Sahin, and H. Bahaidarah, "Vertical axis wind turbine aerodynamics: Summary and review of momentum models," *J. Energy Resour. Technol.*, vol. 141, no. 5, 2019. <https://doi.org/10.1115/1.4042643>. ↑ 2
- [2] S. Eriksson, H. Bernhoff, and M. Leijon, "Evaluation of different turbine concepts for wind power," *Renew. Sust. Energ. Rev.*, vol. 12, no. 5, pp. 1419–1434, 2008. <https://doi.org/10.1016/j.rser.2006.05.017>. ↑ 2
- [3] K. Ibrahim, V. S. Djanali, and N. Ikhwan, "Numerical study of bach-bladed savonius wind turbine with varying blade shape factor," *JMES Int. J. Mech. Sci.*, vol. 4, no. 2, pp. 12–21, 2020. <http://dx.doi.org/10.12962/j25807471.v4i2.7839>. ↑ 2
- [4] B. Zhang, B. Song, Z. Mao, and W. Tian, "A novel wake energy reuse method to optimize the layout for Savonius-type vertical axis wind turbines," *Energy*, vol. 121, pp. 341–355, 2017. <https://doi.org/10.1016/j.energy.2017.01.004>. ↑ 2
- [5] J. T. Hansen, M. Mahak, and I. Tzanakis, "Numerical modelling and optimization of vertical axis wind turbine pairs: A scale up approach," *Renew. Energ.*, vol. 171, pp. 1371–1381, 2021. <https://doi.org/10.1016/j.renene.2021.03.001>. ↑ 2
- [6] S. J. Savonius, "The S-rotor and its applications," *Mech Eng.*, vol. 53, no. 5, pp. 333–338, 1931. ↑ 3
- [7] L. Chen, J. Chen, and Z. Zhang, "Review of the Savonius rotor's blade profile and its performance," *Renew. Sust. Energ. Rev.*, vol. 10, no. 1, p. 013306, 2018. <https://doi.org/10.1063/1.5012024>. ↑ 3
- [8] K. Golecha, M. Kamoji, S. Kedare, and S. Prabhu, "Review on Savonius rotor for harnessing wind energy," *Wind. Eng.*, vol. 36, no. 6, pp. 605–645, 2012. <https://doi.org/10.1260/0309-524X.36.6.605>. ↑ 3

- [9] A. Kumar and R. P. Saini, "Performance parameters of Savonius type hydrokinetic turbine: A review," *Renew. Sust. Energ. Rev.*, vol. 64, pp. 289–310, 2016. <https://doi.org/10.1016/j.rser.2016.06.005>. ↑ 3
- [10] S. J. Savonius, "Vertical axis wind turbine," 1929. US Patent 1,697,574. ↑ 3
- [11] H. H. Al-Kayiem, B. A. Bhayo, and M. Assadi, "Comparative critique on the design parameters and their effect on the performance of S-rotors," *Renew. Energ.*, vol. 99, pp. 1306–1317, 2016. <https://doi.org/10.1016/j.renene.2016.07.015>. ↑ 3
- [12] Y. Cengel and J. Cimbala, *Fluid Mechanics: Fundamentals and Applications, Forth Edition*. New York: McGraw-Hill Education, 2018. ↑ 3
- [13] L. A. Gallo, E. L. Chica, E. G. Flórez, and F. A. Obando, "Numerical and experimental study of the blade profile of a Savonius type rotor implementing a multi-blade geometry," *Appl. Sci.*, vol. 11, no. 22, p. 10580, 2021. <https://doi.org/10.3390/app112210580>. ↑ 3, 4, 5, 6, 13
- [14] L. A. Gallo, E. L. Chica, and E. G. Flórez, "Numerical optimization of the blade profile of a savonius type rotor using the response surface methodology," *Sustainability*, vol. 14, no. 9, p. 5596, 2022. <https://doi.org/10.3390/su14095596>. ↑ 3, 4
- [15] S. Roy and U. K. Saha, "Wind tunnel experiments of a newly developed two-bladed Savonius-style wind turbine," *Appl. Energy*, vol. 137, pp. 117–125, 2015. <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2014.10.022>. ↑ 3
- [16] J. V. Akwa, G. A. da Silva Júnior, and A. P. Petry, "Discussion on the verification of the overlap ratio influence on performance coefficients of a Savonius wind rotor using computational fluid dynamics," *Renew. Energ.*, vol. 38, no. 1, pp. 141–149, 2012. <https://doi.org/10.1016/j.renene.2011.07.013>. ↑ 3
- [17] L. A. Gallo, E. L. Chica, and E. G. Flórez, "Estudio de desempeño de distintos perfiles de álabe de una turbina eólica para aprovechar vientos de baja velocidad," *Ing.*, vol. 27, no. 1, 2022. <https://doi.org/10.14483/23448393.18127>. ↑ 3
- [18] R. v. Mises, "Mechanik der festen körper im plastisch-deformablen zustand," *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, vol. 1913, pp. 582–592, 1913. ↑ 3
- [19] R. Hill, "The mathematical theory of plasticity: Oxford University," *Press New York*, 1950. ↑ 3
- [20] I. J. Levinson, *Mechanics of materials*. Prentice-Hall, 1963. ↑ 3
- [21] P. D. Barsanescu and A. M. Comanici, "von Mises hypothesis revised," *Acta Mechanica*, vol. 228, no. 2, pp. 433–446, 2017. <https://doi.org/10.1007/s00707-016-1706-2>. ↑ 3
- [22] D. Best and N. I. Fisher, "Efficient simulation of the von Mises distribution," *J. R. Stat. Soc., C: Appl. Stat.*, vol. 28, no. 2, pp. 152–157, 1979. <https://doi.org/10.2307/2346732>. ↑ 3
- [23] R. C. Hibbeler, *Mecánica de materiales*. Pearson México, 2017. ↑ 3, 4, 12
- [24] F. P. Beer, E. R. Johnston, J. T. DeWolf, and D. F. Mazurek, *Mecánica de materiales*. McGraw-Hill Education, 2021. ↑ 3, 4, 12

- [25] M. Kamoji, S. B. Kedare, and S. Prabhu, "Experimental investigations on single stage modified Savonius rotor," *Appl. Energy.*, vol. 86, no. 7-8, pp. 1064–1073, 2009. <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2008.09.019>. ↑ 3
- [26] K. S. Jeon, J. I. Jeong, J.-K. Pan, and K.-W. Ryu, "Effects of end plates with various shapes and sizes on helical Savonius wind turbines," *Renew. Energ.*, vol. 79, pp. 167–176, 2015. <https://doi.org/10.1016/j.renene.2014.11.035>. ↑ 3
- [27] S. Roy and U. K. Saha, "Review of experimental investigations into the design, performance and optimization of the Savonius rotor," *Proc. Inst. Mech. Eng. A: J. Power Energy*, vol. 227, no. 4, pp. 528–542, 2013. <https://doi.org/10.1177/0957650913480992>. ↑ 4
- [28] T. Hayashi, Y. Li, and Y. Hara, "Wind tunnel tests on a different phase three-stage Savonius rotor," *JSME Int. J. Ser. B*, vol. 48, no. 1, pp. 9–16, 2005. <https://doi.org/10.1299/jsmeb.48.9>. ↑ 4
- [29] M. Braza, A. Bottaro, and M. Thompson, "Advances in fluid-structure interaction," 2016. ↑ 4
- [30] Y. Bazilevs, K. Takizawa, and T. E. Tezduyar, *Computational fluid-structure interaction: Methods and applications*. John Wiley & Sons, 2013. ↑ 4
- [31] J.-F. Sigrist, *Fluid-structure interaction: An introduction to finite element coupling*. John Wiley & Sons, 2015. ↑ 4
- [32] H.-J. Bungartz, M. Mehl, and M. Schäfer, *Fluid Structure Interaction II: Modelling, Simulation, Optimization*, vol. 73. Springer Science & Business Media, 2010. ↑ 4
- [33] F. Axisa and J. Antunes, *Modelling of mechanical systems: Fluid-structure interaction*, vol. 3. Elsevier, 2006. ↑ 4
- [34] G. P. Galdi and R. Rannacher, *Fundamental trends in fluid-structure interaction*, vol. 1. World Scientific, 2010. ↑ 4
- [35] G. Hou, J. Wang, and A. Layton, "Numerical methods for fluid-structure interaction: A review," *Commun. Comput. Phys.*, vol. 12, no. 2, pp. 337–377, 2012. <https://doi.org/10.4208/cicp.291210.290411s>. ↑ 5
- [36] S. Bhakade, S. Kumbhar, Y. Mohite, and P. Kengar, "A review on fluid structure interaction analysis methodology," *Int. j. trend res. dev.*, vol. 3, no. 3, pp. 617–6199, 2016. ↑ 5
- [37] T. Belytschko, "Fluid-structure interaction," *Comput. Struct.*, vol. 12, no. 4, pp. 459–469, 1980. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(80\)90121-2](https://doi.org/10.1016/0045-7949(80)90121-2). ↑ 5
- [38] J. Penrose, D. Hose, C. Staples, I. Hamill, I. Jones, and D. Sweeney, "Fluid structure interactions: Coupling of cfd and fe," in *18th CAD-FEM User's Meeting-International Congress on FEM Technology*, 2000. ↑ 5
- [39] K. Molina, D. Ortega, M. Martínez, W. Pinto-Hernández, and O. A. G. Estrada, "Modelado de la interacción fluido estructura (fsi) para el diseño de una turbina eólica hawt," *Revista UIIS Ingenierías*, 2018. <https://doi.org/10.18273/revuin.v17n2-2018023>. ↑ 5
- [40] A. Beckert, "Coupling fluid (cfd) and structural (fe) models using finite interpolation elements," *Aerosp. Sci. Technol.*, vol. 4, no. 1, pp. 13–22, 2000. [https://doi.org/10.1016/S1270-9638\(00\)00111-5](https://doi.org/10.1016/S1270-9638(00)00111-5). ↑ 5

-
- [41] Y. L. Young, "Fluid-structure interaction analysis of flexible composite marine propellers," *J. Fluids. Struct.*, vol. 24, no. 6, pp. 799–818, 2008. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2007.12.010>. ↑ 5
- [42] B. Andersson, R. Andersson, L. Håkansson, M. Mortensen, R. Sudiyo, and B. Van Wachem, *Computational fluid dynamics for engineers*. Cambridge university press, 2011. ↑ 5, 8
- [43] F. R. Menter, M. Kuntz, and R. Langtry, *Ten years of industrial experience with the SST turbulence model*, vol. 4. 2003. ↑ 5
- [44] N. Alom and U. K. Saha, "Influence of blade profiles on Savonius rotor performance: Numerical simulation and experimental validation," *Energy Convers. Manag.*, vol. 186, pp. 267–277, 2019. <https://doi.org/10.1016/j.enconman.2019.02.058>. ↑ 5
- [45] P. Jain, *Wind energy engineering*, New York: McGraw-Hill Education, 2016. ↑ 5
- [46] H. K. Versteeg and W. Malalasekera, *An introduction to computational fluid dynamics: The finite volume method*. Pearson education, 2007. ↑ 5
- [47] S. Mathew, *Wind energy: fundamentals, resource analysis and economics*, vol. 1. Springer, 2006. <https://doi.org/10.1007/3-540-30906-3>. ↑ 6
- [48] M. Al-Ghriybah, M. F. Zulkafli, D. H. Didane, and S. Mohd, "The effect of inner blade position on the performance of the savonius rotor," *Sustain. Energy Technol. Assess.*, vol. 36, p. 100534, 2019. <https://doi.org/10.1016/j.seta.2019.100534>. ↑ 6
- [49] I. Ross and A. Altman, "Wind tunnel blockage corrections: Review and application to Savonius vertical-axis wind turbines," *J. Wind. Eng. Ind. Aerodyn.*, vol. 99, no. 5, pp. 523–538, 2011. <https://doi.org/10.1016/j.jweia.2011.02.002>. ↑ 6
- [50] S. Roy and U. K. Saha, "An adapted blockage factor correlation approach in wind tunnel experiments of a Savonius-style wind turbine," *Energy Convers. Manag.*, vol. 86, pp. 418–427, 2014. <https://doi.org/10.1016/j.enconman.2014.05.039>. ↑ 6
- [51] K. Almohammadi, D. Ingham, L. Ma, and M. Pourkashan, "Computational fluid dynamics (cfd) mesh independency techniques for a straight blade vertical axis wind turbine," *Energy*, vol. 58, pp. 483–493. <https://doi.org/10.1016/j.energy.2013.06.012>, 2013. ↑ 8
-

Luis Antonio Gallo Jaramillo

Master of Mechanical Engineering from Universidad de Antioquia; Mechanical Engineer from the same university. He is part of the Research Group on Alternative Energy (GEA) at Universidad de Antioquia. Professor at the Universidad de Pamplona.

Email: luis.gallo@udea.edu.co

Edwin Lenin Chica Arrieta

PhD in Engineering from the University of Valladolid (Spain). Master of Engineering and Specialist in Mechanical Design from Universidad Eafit (Colombia). Mechanical Engineer from Universidad de

Antioquia (Colombia). Professor at Universidad de Antioquia and leader of the Research Group on Alternative Energy (GEA) from the same university.

Email: edwin.chica@udea.edu.co

Elkin Gregorio Flórez Serrano

PhD in Mechanical Engineering from the Polytechnical University of Catalonia in Barcelona (Spain). Master of Mechanical Engineering from Universidad de los Andes (Colombia) and Master of Chemical and Process Engineering from Rovira i Virgili University, Tarragona campus (Spain). Mechanical Engineer from Universidad Francisco de Paula Santander, Cúcuta campus. Tenured professor of the Mechanical Engineering program at the University of Pamplona. Director of the Research Group in Mechanical Engineering at the University of Pamplona (GIMUP).

Email: eflorez@unipamplona.edu.co



Research

A Model for Documenting Requirements Elicitation

Un modelo para documentar la elicitación de requisitos

Edgar Serna M¹  * and Alexei Serna A¹ 

¹Instituto Antioqueño de Investigación (Medellín-Antioquia, Colombia).

Abstract

Context: This work proposes a model to document the elicitation of requirements in the field of Requirements Engineering.

Method: A systematic review of the literature was conducted to determine the validity and effectiveness of the existing models for documenting requirements elicitation.

Results: By analyzing the results of this review, it was concluded that it is possible – and that is required – to take the best documented practices and add principles from logic, abstraction, and formal methods to them in order to structure a semi-formal model for documenting elicitation. Those currently proposed focus on techniques to collect information and pay little attention to documentation. In addition, these models are mainly based on natural language, which makes their interpretation difficult, and they generate re-processing in later stages of the life cycle due to ambiguities.

Conclusions: This article describes a structured model, as well as its application and validation by, comparing it against five models found in the review.

Keywords: software engineering, requirements elicitation, formal methods, specifications, documenting.

Article history

Received:
23rd/May/2022

Modified:
9th/Dec/2022


Accepted:
21st/Feb/2023

Ing, vol. 28, no. 2,
2023. e19411

©The authors;
reproduction right
holder Universidad
Distrital Francisco
José de Caldas.

Open access



*  **Correspondence:** eserna@fundacioniai.org

Resumen

Contexto: En este trabajo se propone un modelo para documentar la elicitación de requisitos en el área de Ingeniería de Requisitos.

Método: Se realizó una revisión sistemática de la literatura para determinar la validez y efectividad de los modelos que existen para documentar la elicitación de requisitos.

Resultados: Analizando los resultados de esta revisión, se concluyó que es posible –y así se requiere– tomar las mejores prácticas documentadas y agregarles principios de lógica, abstracción y métodos formales para estructurar un modelo semiformal para documentar la elicitación. Los que se proponen actualmente se centran en las técnicas de recogida de información y prestan poca atención a la documentación. Además, estos modelos se basan principalmente en el lenguaje natural, por lo cual es difícil su interpretación, y generan reprocesos para las etapas posteriores del ciclo de vida debido a las ambigüedades.

Conclusiones: En este artículo se describe un modelo estructurado, así como su aplicación y validación mediante la comparación con cinco modelos encontrados en la revisión.

Palabras clave: ingeniería de *software*, elicitación de requisitos, métodos formales, especificaciones, documentación.

Table of contents

	Page		
1. Introduction	2	4. Structuring, applying, and validating the model	9
2. Method	3	4.1. Structuring the model	9
2.1. Background	3	4.2. Application	10
2.2. Related works	4	4.3. Validation	15
3. Results	7	5. Results analysis	19
3.1. Better practices	7	6. Conclusions	20
3.2. Principles	8	7. Contribution of authors	21
		References	21

1. Introduction

Software is designed and developed through a series of stages known as a *lifecycle*, which is structured and developed as a solution to the needs of clients. It is teamwork involving different actors, and most of the difficulties in the process are related to requirements engineering, more specifically to the elicitation stage. Thus, if the client's needs are not properly elicited, the product will have problems, since it will not meet the established needs. Therefore, the importance of requirements elicitation lies in the fact that it provides the necessary information for the specification, which in turn is the basis for the design and development of the solution.

Elicitation must meet the needs of software engineering (SE) because the problems it must solve are complex, as well as the fact that the ensuing processes must minimize re-engineering and expedite the transition to design (1). However, the system range, the lack of comprehension of the problem, and the volatility of requirements increase the complexity of the process. This is why the different stages of requirements engineering (RE) are demanding and involve systematic and iterative procedures, during which an analyst must rely on logic and abstraction, as well as on their capabilities for modeling, with the aim to have a mental representation of the problem and start solving it. Nevertheless, the methods currently used to apply RE are informal and based on natural language, which results in a higher complexity regarding the SE process. In such circumstances, it is required to formalize either part of the process or its entirety in order to achieve a better interpretation of the client's needs.

A method is formal if it has a stable mathematical basis, which is normally supported by a specification language that allows defining precise notions such as consistency, completeness, specification, implementation, and correctness (2). By using notations and formal languages, it is possible to structure the system requirements and generate the specifications that will allow defining its behavior according to what must be done, not to how it is done (3). However, this process is incomplete if the elicited requirements are not founded upon solid documentation, which accelerates the procedures in the other stages of RE and supports the comprehension of the problem to be solved. This proposal for designing a semi-formal model to document the elicitation of requirements results from including the textual description of formal elements, with the purpose of establishing the necessary information to minimize comprehension problems regarding client needs, as well as to improve the specification.

To this effect, a systematic review of the literature was conducted in order to analyze the validity and effectiveness of the models to elicit requirements based on a perspective of documentation. By taking the best documented practices and adding principles based on logic and formal methods, a semi-formal method for documenting requirements elicitation was elaborated as a response to the current needs of SE, which were not fully satisfied by the analyzed models.

2. Method

The methodology of this work is based on a systematic review of the literature that applies the proposal made by (39). This review involved searching for standards and regulations for documenting the elicitation of requirements. The proposals with the same purpose were reviewed. During this process, two major fields were identified: background and related works.

2.1. Background

Constructing an information system is a difficult task whose issues are derived from the translation of requirements in a software project. In RE, *i.e.*, the first stage of software engineering, needs must be identified, defined, and documented to properly meet the objectives of the system. Nevertheless, although different techniques to elicit requirements have been proposed (4) (whose application allows

understanding such needs), most of them do not describe a model to document them and ensure that the elicitation is visible and understood by the interested parties. To achieve this goal, requirements must be properly documented in order to ensure that the parties establish common agreements about what needs to be modeled and presented as a solution to a specific problem (5). During this review, it was not possible to identify standard guidelines or directly related procedures on how to document the elicitation of requirements. However, different processes, specifications, standards, and initiatives use this stage as the starting point for software projects, among which the following can be mentioned:

1. *Project Management Body of Knowledge (PMBOK)* (6) is a set of management practices that constitute the basis for a project management methodology. PMBOK defines requirements elicitation as the process during which the needs of the interested parties are defined and documented through initiation, planning, execution, monitoring, control, and closing. However, although it has been widely adopted by software engineers, it does not describe what and how to document in each step.
2. *Capability Maturity Model Integration (CMMI)* (7) is a series of practices and high-level processes that help organizations build a model for improving their processes and, to a certain extent, their quality. The development of requirements is part of the third level of CMMI, and its purpose is to identify, determine, and analyze the needs of the client, but, although this level describes the procedure to be followed through 13 activities, none of them are oriented towards documenting the elicited requirements.
3. *Software Engineering Body of Knowledge (SWEBOK)* (8) is defined as a guide to knowledge for SE. Specifically regarding requirements, it defines the analysis processes of client needs in order to discover and solve conflicts, find flaws, and determine how to interact with the context. Nevertheless, this stage has a serious issue with regard to the development of a software product; it does not explicitly reference or describe a procedure for documenting elicitation.
4. There are other specifications and standards related to RE, such as *ISO/IEC 12207 Information Technology – Software Life-Cycle Processes for Software Requirements Specifications*, *MIL-STD 490A Specification Practices*, *MIL-STD 498 Software Development and Documentation*, *SAPSS – 05 European Space Agency*, *ISO/IEC 9126 Information Technology – Software Product Evaluation – Quality Characteristics and Guidelines for Their Use*, *CMU/SEI-92-TR-012*, and *CMU/SEI-2006-TR-013*, among others. Nevertheless, although all of them accept that the documentation of requirements is essential to quicken the processes of the lifecycle, none of them describes or proposes a model, method, or process to that effect.

2.2. Related works

In addition to the previously described background, several authors have proposed and disseminated models for eliciting requirements. During this systematic review of the literature, 73 works and relevant studies were found, out of which 10 were excluded because of their title and 45 because of their abstract. The result was a sample of 18 works that met the criteria of the search protocol. During the search, little information about the topic was found, so it was decided to include research with contents on how to document elicitation.

(9) proposes a model that is useful when a set of complex conditions appears in a software component. However, it does not consider that, generally, the interested parties express these conditions in natural language, so these tables do not allow evaluating the resulting ambiguities before recognizing the actions as requirements. This proposal is more oriented towards creating a list of needs that are candidates to requirements. It has not been widely adopted by the community, which is evident because of the model's little referencing and application. The proposal made by (10) acts as a bridge for the parties, which is mainly applied to model functional requirements and does not consider non-functional requirements. Additionally, it lacks well-defined semantics, which could result in different interpretations. Despite the fact that this kind of representation is used as a model of the agreement for the parties and to describe needs, as a descriptive document, it does not provide enough information for the other stages of the lifecycle. Therefore, this proposal is limited to specifications.

(11) structured a model for representing requirements through mathematical variables, which allow defining said requirements without ambiguities. Although this model clarifies the association of client needs with elements and mathematical variables, the problem is that the required level of mathematical knowledge is very high, and most engineers and interested parties are not able to apply it. Therefore, it has not been widely adopted by the community. According to (12), it is necessary to collect and organize requirements based on different approaches, as do the interested parties. However, because this point of view recognizes multiple perspectives, it does not provide a framework to discover conflicts in the proposed requirements, nor does it allow managing inconsistencies. Moreover, a high number of perspectives makes it difficult to define the priority of the requirements, so the generated documentation is not enough to accept them.

The proposal made by (13) describes a process to elicit requirements in which the user has little participation and the formats to document them do not have a defined structure. Requirements must be expressed non-graphically and observe a specific methodology, which is not aligned with paradigms such as UML or POO. Thus, this model does not offer an efficient alternative to document elicitation, nor does it consider non-functional requirements, which must therefore be collected and documented separately. In (14), the documentation of requirements comprises a general vision and a functional description, but the product that it generates is a long document that does not offer a clear description of the needs of the parties. It adopts the IEEE STD-830-1998 standard, which is oriented towards specification, not towards elicitation.

(15) propose a set of structures to better organize requirements documentation. However, they assume that natural language has no specific formal or graphic notation, so they orient their structures towards both algorithms and programming languages, which limits freedom in the subsequent codification process. Besides, these tools cannot represent the descriptions of needs made in natural language. Hence, the interested parties do not easily reach agreements. (16) describe a theoretical framework with a variety of styles for documenting the elicited requirements with regard to the variety of situations in which the software is developed. Although this can be useful and its goal is to explain the different ways in which requirements are documented in practice, until now, and according to the results of the analysis conducted in this proposal, this diversity has not been evaluated by another

work, theoretical framework, or study case, which does not allow understanding its efficiency and effectiveness in the industrial practice.

In their proposal, (17) argue that, when elicitation does not present a semantically transparent model of the problem domain, the analyst must use underlying objects to document the process, but, although this procedure can yield good requirements, its development is usually slow, as one must work simultaneously with characteristics such as multilanguage, sequentiality, hierarchies, multidimensionality, and integrity for all the requirements. This increases the difficulty of documenting elicitation because many of these requirements are still unknown at this stage. Furthermore, the generated document is nothing more than a personal vision of each engineer, and it does not facilitate a proper discussion with the interested parties. (17) use tables to represent requirements, including their properties and relations. The problem emerges when the client makes modifications, as the structure of these tables is not flexible and does not allow re-processing. This lack of dynamism does not provide the engineer with maneuverability to maintain the document of elicitation up to date. Thus, the proposal does not have proper tracing.

(18) use agile methods to elicit most of the essential requirements through incremental development. The point here is that agile processes for requirements do not consider the planning or design of possible future requirements, and the documentation remains insufficient at every stage. Meanwhile, (19) proposes a two-variable model, which is common in Mechanical and Electrical Engineering and is used to document requirements. Although, in theory, it is useful in software systems, it is not practical due to its volatility. Besides, it cannot easily adapt to contexts where the volatility of the client needs is high and a higher dynamism is required to keep the elicitation document up to date.

(20) provide templates for use cases that are informally described along the lines of software products, and they document their use. Each study case provides one or more scenarios that describe how the system must interact, but this interaction is not reflected on the tables. Therefore, any modification of the requirements creates a new data table. (21) developed Athenea, a tool that allows users to translate their experiences and points of view, to later negotiate the requirements collaboratively. This is an experimental tool that, after six years, has not been tested in real software development environments. Thus, it is not possible to verify its efficiency and effectiveness in creating elicitation documents.

(22) describe elicitation as an important step for creating the specifications document and propose a series of templates to document it. The results include process representations, field observation notes, and interview transcriptions. However, by analyzing them, it is found that they suggest different ways for the users of the process to describe their needs, which makes it difficult to obtain the expected documentation. In this regard, the objective of the model elaborated by (23) is to simplify, structure the elicitation process, and generate a document that presents a set of selection criteria. Although it is relevant, few works on this subject were found which describe its application in small-scale projects, so its success on a larger scale cannot be ensured.

(24) propose a method to elicit and document requirements based on collaboration technologies and audio records. To structure their documentation, they propose a template that uses key terms collected and defined in a glossary. Although these terms are useful to establish a common language and avoid ambiguities, the subsequent relationship with the terms used in the documentation is not clear, and traceability becomes difficult. The model presented by (25) constitutes a way to analyze elicited and obtained data based on the information and the documentation regarding system requirements. However, although it is successful in terms of documentation, it does not assign a well-defined role to the interested parties. Thus, the final version is a vision by engineers and for engineers only, and it does not consider the required dialogue with clients and users.

3. Results

During this review, a model that allowed formally or semi-formally documenting requirements elicitation could not be found, so it was decided that a set of principles should be selected, which were deemed necessary or not by the researchers for a model of this type, as well as the better practices described in the reviewed works.

3.1. Better practices

- *Templates.* They are used as a means to collect information and document processes. In elicitation, they constitute a useful tool to store the necessary data to identify and recognize the client's needs. Some authors use them as elicitation and negotiation models, and they apply them as a complement to elicitation techniques, where the final documentation is managed directly through the interactions of the participants.
- *Schemes.* In practice, many works propose making different types of diagrams and schemes to observe elicitation factors in an organized way. Other works use conceptual schemes oriented towards objects that are obtained from the specification model. CASE tools are another option. These are especially used to detail the requirements and produce schemes. In general, the literature uses them to represent subsystems or components of a system, or the relations between them.
- *Variable matrices.* They are used as an analytic way to manage the interaction between factors in the initial layer of the logic of a program. For some authors, the variables that interact and the behavior of the system are correct only when properly documented. In general, they are used as a complement to templates because they also use variables or fields to properly associate and divide information.
- *Indicators.* The use of indicators allows evaluating the way in which elicitation contributes to improving problem interpretation. This vision is oriented to processes aimed at systematically defining the activities that make up a process, identifying the interrelation between them and the persons in charge, and introducing indicators to measure the results regarding the capacity and efficiency of the process. Consequently, criteria must be introduced which allow improving the elicitation process.

- *Scenarios*. Some authors use scenarios to describe the behavior of the system, in order to ensure a better comprehension and collaboration among parties during the requirements elicitation process, as well as to maintain the information they can recognize. This practice allows for the validation of requirements with the users. The main objective, according to the literature, is to capture the vocabulary of an application and its semantics, with the aim to facilitate the understanding of the application's functionality, as each scenario describes a specific situation and behavior.
- *Diagrams*. Some works translate requirements into diagrams to show the interaction between the different actors and the system, which adds value for the user in the form of use case diagrams specifying the system behavior. That is to say, they describe what the system does, not how to do it. This practice indicates the sequence of the processes involved, the units, and the persons in charge of execution. In this sense, diagrams are the symbolic or pictorial representations of administrative processes.

3.2. Principles

- *Logic and abstraction*. These concepts are useful because they allow understanding, analyzing, and modeling both the problem and its possible solution while making it easier for users and clients to understand what they are interpreting, e.g., the requirements. In this research, *logic* is conceived as a set of principles that allows people to judge based on evidence and make decisions supported by an activity. *Abstraction* is the process of removing or extracting the characteristics of something in order to reduce it to a set of essential particularities. In the elicitation of requirements, these notions can be used to establish the common characteristics of the needs, objects, and procedures of the users; or when two functions perform almost the same task and can be combined. To structure the proposed semi-formal model, this research considers understanding, interpretation, modeling, problem-solving, and logical reasoning. Both are necessary principles to understand both the context and the problem to be solved; they are tools that make it easier to find the necessary information to document the elicitation process.
- *Formal methods*. This concept refers to techniques and tools based on principles and mathematical postulates that are used to specify, design, validate, and verify software and hardware systems, among others. The specifications used in formal methods consist of well-established statements with regard to mathematical logic. Formal verification is based on rigorous deductions; it is the logic itself, *i.e.*, each step follows a rule of inference and can be therefore verified through a sequential process (26). During the stage of requirements engineering, formal specification is important; it is a task that requires care because its function is to ensure that both the operation and the performance of the program are correct in any situation. The principles of formal methods considered while structuring the proposed model are propositional calculus (27), decision tables (28), set theory (40), declarative languages (29), and design by contract (30).

4. Structuring, applying, and validating the model

A *semi-formal model* is understood as a set of procedure codes indicating the type of description used to document information (31), focused on creating a system model for a particular stage of the development lifecycle. Here, the objective is to perform transformations of automatic models (32). Unlike a non-formal model, its notations are intuitive, allowing for a better abstraction of the details and applying standardized and well-defined methodologies (33). Semi-formal models are widely used in the software industry because their semantics help to avoid ambiguity, inconsistency, and vagueness, as well as the fact that they are formally reasoned (34).

4.1. Structuring the model

Step 1. Preparing the process diagram: A process diagram is used to show the relations between the main components of a system. This diagram is also used to tabulate values of process design for the components in different operating modes. It shows the relations between the sub-processes of a system, but it hides the less important details, such as the responsibilities and denominations of agents. As a graphic representation, the model is used to visualize the process flow, showing the different activities of the system and the connections between them. This allows the interested parties to have a better comprehension of the problem, as well as to analyze the abstraction and the modeling of the solution.

Step 2. Applying propositional calculus: Propositional calculus is one of the methods used to formalize natural language, whereby users can express their needs, and to structure them in the form of logical propositions (35). In logic, these propositions are shown as objects of a formal language through different types of symbols, which are concatenated according to recursive rules, with the aim to build chains to which real values are assigned. By representing the needs in this way, it is possible to verify whether the interactions between the actors and the system observe the rules of the business and that, in the subsequent test activities, the expected input and output values are obtained. During requirements elicitation, it is important to represent needs as mathematical formulae, in order to structure the testing plan more easily.

Step 3. Preparing the path diagram: A path diagram is the representation of the ideal system behavior model which employs a directed graph. To this effect, a sequential node value and a priority and a dependence of execution are assigned according to the process diagram, whose edges describe the pre- and post-conditions. This graph shows the initial information and facilitates the construction, reading, and interpretation of the elicitation document. The iterated and represented propositions in the path diagram represent the actions that the actors perform on the system.

Step 4. Completing the elicitation template: The iterated and represented propositions in the path diagram are actions performed by an actor on the system, *i.e.*, a process that takes place through a series of interactions, equally formed by a set of actions. Moreover, this relation generates a set of actions that the system executes as a response to actor requests. This communication produces a change of state in the variables, the values, the database, and the hardware, which must also be described. To document this actor-system-actor communication, the model proposes a template to collect the process

information. The template contains the necessary information to generate a system behavior model: *actor action*, to detail the action performed by the actor as part of an interaction; *business rules*, to verify the operations, *i.e.*, whether the resulting values are as expected and whether the test cases do not break the established rules; *system action/response*, to describe the actions or responses that the system executes as inner actions or as a response to a previous action of the actor; *state change*, to verify that the changes in the DB and those of the operational variables are the expected ones.

Step 5. *Generating the requirements report*: A requirements report details the first approach to the description of requirements extracted from the propositions, their type (functional or non-functional), and their relations. It is a table that serves as a complement for the template and that, put together, constitutes the benefit of the model for the next stage (requirements engineering) and the subsequent specification document. It is worth noting that, because of the constant changes in client needs, and because of the volatility of requirements, all these documentation processes can be updated dynamically, given that, without considering the action to be *bottom-up* or *up-bottom*, these results will be easily reflected on the other steps.

4.2. Application

The ATM network is one of the three pillars of any country's banking infrastructure. It has been increasingly common to use ATMs to make it easier for the users of the financial system to make transactions, and it is useful to promote financial inclusion. An ATM has a screen, a keyboard as the main interface, and a card reader. Additionally, it can print the receipts of the transactions. Before performing operations on an ATM, the client has to log into the system. To this effect, the client slides their card to validate their information. If the card is not valid, it is returned to the client, and, if the password is incorrectly entered three consecutive times, the ATM cancels the transaction and denies access to the system. Among others, the operations supported by ATMs are deposits, withdrawals, balance inquiries, and password changes. Each of them is registered for subsequent verification and validation. In this research, and to apply the proposed semi-formal model to document the elicitation of requirements (REDOC), the *withdrawal module* is taken as a study case.

Step 1. *Preparing the process diagram*: Fig. 1 presents the sequence of activities involved in a withdrawal from an ATM. This diagram represents the relations between the parts of the ATM system, but it must be acknowledged that this system is part of a larger, more complex system that involves the bank and its relations with other systems. A visual representation provides the interested parties with a better understanding of the abstract description of a problem, and it allows them to interpret the requirements to be met for its solution.

Step 2. *Applying propositional calculus*: After using some of the elicitation techniques, observing the users in the context of the problem, and listening to their descriptions in natural language, the process diagram is elaborated, from which the propositions shown in Table I are extracted. Since the work carried out with the interested parties is iterative, these propositions are under permanent evaluation until they are enough to solve the problem, ensuring that they describe the actions necessary to meet the needs of the parties. Table II details the propositions resulting from the iterations.

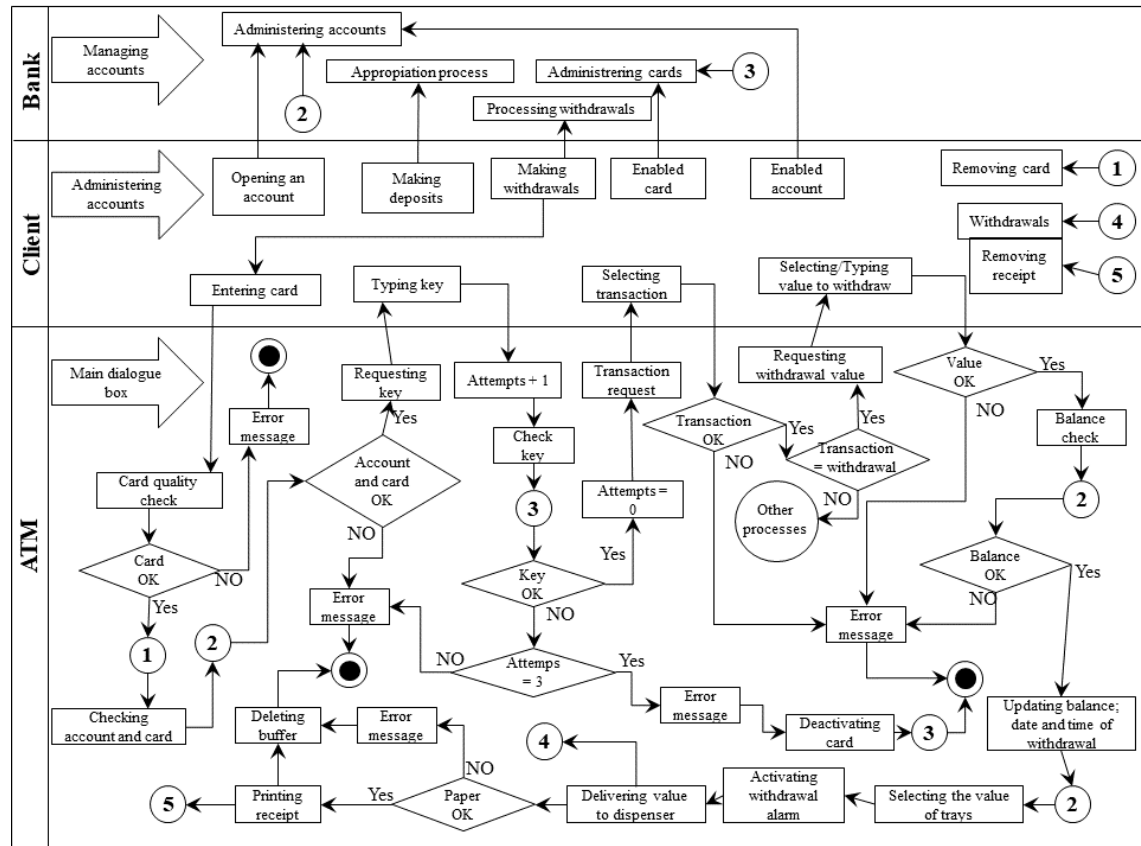


Figure 1. Process diagram for the ATM withdrawal module

Table I. Needs as propositions

Paths	Propositions
Main	1. The ATM displays the main dialogue box
	2. The CLIENT introduces the card in the ATM
	3. The ATM verifies card quality
	4. The CLIENT removes the card
	5. The ATM verifies the status of the account and the card
	6. The ATM displays the password dialogue box
	7. The CLIENT enters the password
	8. The ATM increases the number of attempts by 1
	9. The ATM verifies the password
	10. The ATM display selects the transaction dialogue box
	11. The CLIENT selects the transaction
	12. The ATM verifies the transaction

	13. The ATM displays a select/type withdrawal value dialogue box
	14. The CLIENT selects/types a withdrawal value
	15. The ATM verifies the withdrawal value
	16. The ATM verifies the balance
	17. The ATM updates the new balance
	18. The ATM updates the time and date of the withdrawal
	19. The ATM selects, from the trays, the bills corresponding to the withdrawal value
	20. The ATM activates the withdrawal alarm
	21. The CLIENT withdraws the money
	22. The ATM deactivates the withdrawal alarm
	23. The ATM verifies the existence of paper
	24. The ATM prints a transaction receipt
	25. The CLIENT removes the transaction receipt
	26. The ATM equals the variables of the defined value
	27. The ATM displays the main dialogue box
Alternative 1	1.1 The card is in bad condition
	1.2 The ATM displays an error message
	1.3 The ATM ends the process
	1.4 The ATM displays the main dialogue box
Alternative 2	2.1 The account or card is deactivated
	2.2 The ATM displays an error message
	2.3 The ATM ends the process
	2.4 The ATM displays the main dialogue box
Alternative 3	3.1 The password is incorrect and the number of tries is less than 3
	3.2 The ATM displays an error message
	3.3 The ATM ends the process
	3.4 The ATM displays the main dialogue box
Alternative 4	4.1 The typing password is incorrect and the number of tries is equal to 3
	4.2 The ATM displays an error message
	4.3 The ATM disables the card
	4.4 The ATM ends the process
	4.5 The ATM displays the main dialogue box
Alternative 5	5.1 The selected transaction is incorrect
	5.2 The ATM displays an error message
	5.3 The ATM ends the process
	5.4 The ATM equals the number of tries to 0
	5.5 The ATM displays the main dialogue box
Alternative 6	6.1 The typed value for the withdrawal is incorrect

	6.2 The ATM displays an error message
	6.3 The ATM ends interaction withdrawals
	6.4 The ATM equals the number of tries to 0
	6.5 The ATM displays the main dialogue box
Alternative 7	7.1 The typed value for the withdrawal is higher than the balance
	7.2 The ATM displays an error message
	7.3 The ATM ends the withdrawal interaction
	7.4 The ATM equals the number of tries to 0
	7.5 The ATM displays the main dialogue box
Alternative 8	8.1 The ATM has no paper
	8.2 The ATM displays an error message
	8.3 The ATM ends the withdrawal interaction
	8.4 The ATM equals the number of tries to 0
	8.5 The ATM equals the variables to the defined value
	8.6 The ATM displays a welcome dialogue box

Step 3. *Preparing the path diagram*: The first visual approach to problem modeling, the process diagram, allows understanding the context of the problem, while a path diagram models the possible solution. For this study case, and according to the iterated propositions, the resulting path diagram is shown in Fig. 2.

Step 4. *Completing the elicitation template*: To document actor-system-actor communication, a template has been proposed to capture the documentation of the requirements elicitation process, as shown in Table III.

- *Actor action*. This column details the action performed by the actor as part of their interaction with the system. To document it, the principle of propositional calculus in discrete mathematics is employed to translate the actions into propositions, which allows representing the requirements without ambiguities.
- *Business rules*. To document this column, the principles of logic and abstraction, design by contract, and formal methods are used. This, in order to transform the propositions into mathematical formulae, thus making it possible to verify the operations and whether the resulting values are the expected ones for the test cases. The changes in the main process and the alternatives, which are described in the path diagram, occur according to the documented conditions, and the appropriate path for each circumstance is taken. Moreover, the rules of the business established by the customer and the users must be observed.
- *System action/response*. This column uses the concept of *scenarios*, taken as good practice based on the literature review. It describes the actions-responses executed by the system as inner processes or in response to a previous action by the actor. Scenarios allow understanding the application and its functionality, and they describe each specific situation in this regard, focusing on its behavior and ensuring understanding and collaboration between the involved parties.

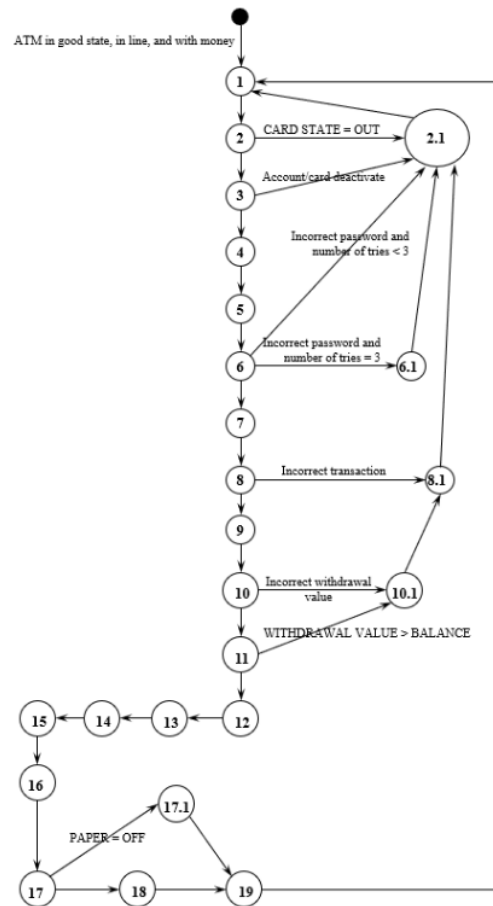


Figure 2. Resulting path diagram

- *State changes.* It is necessary to know the state changes because, in the model, the tests and quality management are run parallel to the whole lifecycle of the product. This column documents the changes that occur in the database and the operating variables, with the aim to verify that they behave as expected for the system. All the information is expressed through mathematical formulae in order to structure the necessary test plan and observe the business rules. Based on the actor action and the system action/response, it is possible to know the possible state changes regarding the information entered in the system, which will be later validated when the process follows the route established in the path diagram.

Step 5. *Generating the requirements report:* It is worth clarifying that this report does not replace the specifications document to any extent; it only represents the result of the process of documenting the elicitation. Table IV presents the format of this report. The semi-formal language used to express the requirements in this report allows designers to understand the context in which they must work, as it suppresses many of the ambiguities of natural language, which is often used by clients when expressing their needs.

Table II. Iterated propositions

Priority	Resulting proposition
1	The ATM displays the main dialogue box
2	The ATM verifies card quality
3	The ATM verifies card and account statement
4	The ATM displays a type password dialogue box
5	The ATM increases the number of tries to 1
6	The ATM verifies the password
7	The ATM displays a select transaction dialogue box
8	The ATM verifies the transaction
9	The ATM displays a select/type withdrawal value dialogue box
10	The ATM verifies the withdrawal value
11	The ATM verifies the account balance
12	The ATM updates the new balance
13	The ATM updates the time and date of the withdrawal
14	The ATM selects the withdrawal value from the tray of bills
15	The ATM activates the withdrawal alarm
16	The ATM deactivates the withdrawal alarm
17	The ATM verifies paper existence
18	The ATM prints the transaction receipt
19	The ATM equals the variables to the defined value
20	The ATM displays the main dialogue box
2,1	The ATM displays an error message and ends the process
6,1	The ATM deactivates the card
8,1	The ATM equals the number of tries to 0
10,1	The ATM ends the withdrawal interaction
17,1	The ATM displays an error message

4.3. Validation

To carry out this activity, five models were taken from the sample of the systematic literature review, in order to compare and analyze the results obtained in this same study case. This, according to a set of selected variables from other works that performed similar comparisons (36, 37), which were adapted to the objective of this research. Table V shows the variables that were used to validate the application results of the different models *vs.* those of our semi-formal proposal. The process consisted of verifying the efficiency and effectiveness of each model in comparison with the results obtained with the semi-formal model.

Table III. Template for documenting interactions

Interaction Code	001-1	Interaction Name:	Withdrawals	Interaction description:	The client withdraws money from their account through an ATM	
Actors:	Bank, Client, ATM	Pre-conditions:	ATM in a good state, ATM online, ATM with money			
Previous Dependencies	Opening an account, activating the account and card, making a deposit					
Main Paths	Actor action	Business rules	System action/response	State changes		
	1. Enter the card	1. QUALITY CARD = YES	1. Electronically verify card quality			
	2. Remove card	2. Account \wedge active cards	2. Verify ACCOUNT STATE AND CARD: BD 3. Dialogue box for typing PASSWORD			
	3. Enter PASSWORD	3. Password = 9999, TRIES <3	4. Verify PASSWORD: BD 5. Dialogue box: TRANSACTION	TRIES + = 1 TRIES = 0		
	4. Select TRANSACTION	4. TRANSACTION Select options	6. Dialogue box: WITHDRAWAL VALUE			
	5. Select/Type WITHDRAWAL VALUE	5. WITHDRAWAL VALUE (option V multiple 10K)	7. Verify WITHDRAWAL VALUE 6. WITHDRAWAL VALUE < BALANCE	8. Verify WITHDRAWAL VALUE < BALANCE: BD		
		6. BALANCE = BALANCE - WITHDRAWAL VALUE	9. Update BALANCE: BD		BALANCE = BALANCE - WITHDRAWAL VALUE	
		7. DATE = Date() \wedge TIME = Time()	10. Update DATE and TIME of withdrawal: BD		DATE = Date() TIME = Time()	
			11. Select WITHDRAWAL in bills		Available money- WITHDRAWAL VALUE	
			12. Take WITHDRAWAL VALUE to the dispenser 13. Activate the withdrawal dispenser alarm		Alarm activates	
	6. Remove money		14. Verify PAPER 14. Print transaction receipt		Deactivate alarm Values to 0	
	7. Remove receipt		15. Erase buffer		Variables in white	
	Alternative Paths	1. CARD QUALITY= NO		1.1 Error Message; ENDS process		
		2. Account \vee Deactivate the card		2.1 Error message; ENDS process		
		3. Incorrect password \wedge TRIES <3		3.1 Error message; ENDS process		
4. Incorrect password \wedge TRIES = 3			4.1 Error message; ENDS process		CARD = OFF	
5. Incorrect TRANSACTION			5.1 Error message; ENDS process		TRIES = 0	
6. Incorrect WITHDRAWAL VALUE			6.1 Error message ENDS money withdrawal interaction		TRIES = 0	
7. WITHDRAWAL VALUE > BALANCE			7.1 Error message ENDS money withdrawal interaction		TRIES = 0	
		8. PAPER = OFF	8.1 Error message ENDS withdrawal process		Values to 0 Variables in white	
Previous Dependencies	Change card; Reactivate account; Reactivate card					
Post-conditions	BALANCE update; DATE and TIME update; Values to 0; Variables in white					
Observations						

Table IV. Requirements report

ID	Requirement - proposition	Requirement	Relations	Justification
1	The ATM verifies electronically the card quality	Non-functional	2	It is a system-solution external routine
2	CARDQUALITY = YES	Functional	1	
3	CARDQUALITY = NO	Functional	1-4-y	
4	The system generates an error message	Functional	1-3	
5	The Count \wedge card is active	Functional	6-7-8-9	
6	The bank verifies BALANCE and CARD	Non-functional	1-7	It is a system-solution external routine
7	The account \vee the card is deactivated	Non-functional	6-8	It is a system-solution external routine
8	The system generates an error message	Functional	7-9	
9	The system shows dialogue box type PASSWORD	Functional	1-6-y	
10	The PASSWORD = 9999 \wedge TRIES $<$ 3	Functional	9-11	
11	The bank verifies PASSWORD	Non-functional	10	It is a system-solution external routine
12	The system increases TRIES + = 1	Functional	10	
13	The password is incorrect \wedge TRIES $<$ 3	Functional	11	
14	The system generates an error message	Functional	13	
15	The password is incorrect \wedge TRIES = 3	Functional	10-11-y	
16	The system generates an error message	Functional	15	
17	The bank makes CARD = OFF	Non-functional	15	It is a system-solution external routine
18	The system shows the TRANSACTION dialogue box	Functional	10	
19	The system makes TRIES = 0	Functional	18-20	
20	The system shows a WITHDRAWAL VALUE dialogue box	Functional	10-18-y	
21	The system receives a WITHDRAWAL VALUE	Functional	20	
22	The system verifies the WITHDRAWAL VALUE	Functional	21	
23	The WITHDRAWAL VALUE is incorrect	Functional	22-24	
24	The system shows an error message	Functional	23	
25	The bank verifies WITHDRAWAL VALUE $<$ BALANCE	Non-functional	21	It is a system-solution external routine
26	The WITHDRAWAL VALUE $>$ BALANCE	Functional	25-27	
27	The system shows an error message	Functional	26	
28	The bank makes BALANCE = BALANCE - WITHDRAWAL VALUE	Non-functional	22-29	It is a system-solution external routine
29	The bank makes DATE = Date() \wedge TIME = Time()	Non-functional	22-28	It is a system-solution external routine
30	The system takes WITHDRAWAL VALUE to the dispenser	Functional	29-31	
31	The system activates the dispenser withdrawal alarm	Non-functional	30	Not all ATMs have this function
32	The system verifies PAPER	Non-functional	31-33	Not all ATMs have this function
33	The system prints transaction receipt	Non-functional	32	Not all ATMs have this function
34	The system takes the values to 0 \wedge places variables in white	Functional	28-33-35	
35	The system erases buffer	Functional	34	

Table V. Validation variables

Variable	Detail
Graphic model	Level of use from the graphic representation to describe the process
Requirements readability	The documented requirement is described without ambiguities
Resolution of ambiguities	The ambiguities are solved before documentation
Capability to facilitate communication	The language and the graphics are clear, concise, and precise
Type of relation between requirements	The documented requirement has relation and continuity
Representation by type of requirements	Classification of the requirements according to their type
Semantic definition	It details and explains all the symbols and words that can cause confusion
Requirements traceability	It allows understanding the historical register, location, and trajectory of each requirement
Stage continuity	It allows advancing from one step to another transparently
Specification contribution	It generates documentation regarding the elicitation that is applicable and useful for the specification

Table VI. Summary of the validation of all the models

Variables	D 1	D 2	D 3	D 4	D 5	RE DO C
Graphic modeling	L	H	M	M	L	H
Requirements readability	M	M	M	M	M	M
Resolution of ambiguities	L	M	L	L	L	H
Capability to facilitate communication	L	M	L	M	L	M
Type of relation between requirements	M	M	L	L	L	M
Representation by type of requirements	L	M	L	L	L	H
Semantic definition	L	L	L	L	L	M
Requirements traceability	L	L	L	M	M	M
Stage continuity	L	M	M	L	L	H
Specification contribution	L	M	L	M	L	M

H: High, M: Medium, L: Low

From the literature, five proposals were selected, which were considered to be the most complete because of their steps and products:

- D1: Decision tables in software engineering (9).
- D2: Object-oriented software engineering: A use case driven approach (10).

- D3: Viewpoints for requirements elicitation: A practical approach (12).
- D4: Writing a software requirements document (14).
- D5: A template for requirement elicitation document of software product lines (20).

5. Results analysis

D1. The decision tables do not allow for iterative work between engineers and clients, since the tabular forms used to organize information are rigid. Besides, the model lacks a functional approach because its derivations are extensive and do not involve either the use of abstract or theoretical concepts, nor a structured language to document the elicitation. It is worth noting the usefulness of the Chapin and HIPO diagrams to document requirements, which are closer to the proposed process and path diagrams, although they require a structured programming philosophy, which has not been used for a long time. As a result, it was not possible to identify time ambiguities, most of them camouflaged as non-functional requirements. Besides, the graphic representation is not easily readable, and is not possible to identify the type of requirements. In addition, it does not allow tracking the requirements accepted by the interested parties before including them in the specification.

D2. Applying this model generates a wide number of diagrams that, in a certain way and depending on the system size, make the selection of the requirements difficult. However, this graphic representation is useful to customize requirements, and, with the use cases diagram, it is possible to model the functional requirements, given that it acts as a bridge between the technical actors and the clients. Disadvantages were found mainly when modeling non-functional requirements, as this approach lacks formally defined semantics, which does not allow clarifying the differences between the parties when analyzing the needs. In addition, the documentation in the tables does not represent the dynamism of actor-system-actor interactions, so it is not possible to document the state changes or their responses.

D3. Identifying issues and bad interpretations of the requirements as soon as possible during elicitation is one of the greatest difficulties of this model, too much information is accumulated because each point of view implies a different interpretation, and, in the end, unnecessary information is documented. Although it is possible to combine requirements management, the verification of inconsistencies, and their traceability, there are still multiple perspectives, which does not provide a framework to discover conflicts in the proposed requirements. In addition, this model does not allow managing inconsistencies. It is also difficult to define a requirement's level of priority, for which the generated documentation is not enough. The document generated is too long because it responds to each point of view according to the PREview tool, which is only employed at the end of the process, which makes changing the requirements difficult.

D4. The issue found when applying this model is that it does not consider how to properly document the definitions of the requirements, since the generated document only has two parts: a general vision and a functional description of the system. In addition, appendices must be included

depending on the need for additional information which cannot be properly located in the document. The resulting document is extensive and does not offer a clear understanding of the needs. Therefore, it must be re-read several times to find any interpretation differences before specifying the requirements.

D5. This model uses templates to informally describe the lines of software products and document their use. The issue found is that the resulting interaction between requirements is not reflected in the tables.

Hence, any change generates a new data table. The exclusive use of natural language to describe requirements does not allow eliminating the ambiguities that may arise during the negotiation between parties, and, in the end, a kind of puzzle is obtained, which must be delivered for specification.

In general, any of the models could document elicitation in a way that could be considered sufficient to construct the specifications document. The main issue is that these models work in natural language, and they do not provide a sufficiently clear graphic representation to understand the problem and model a possible solution. Thus, the interested parties and the engineer need more time to analyze each item before assigning it as a requirement. Table VI summarizes the results of the assessment.

High, medium, and low levels were used to qualify the degree of fulfillment for the evaluated variables. For example, for 'graphic modeling', H was assigned if a graphic representation was used in all steps to describe the process; M if it is used for at least half of them; and L if it is used for less than half of them. Although this valuation can be subjective due to the lack of experience in the use of these models, a trend of use can be identified, where D2 and the proposed semi-formal model stand out.

To summarize, and after analyzing these data, it can be concluded that the semi-formal model's efficiency and effectiveness in documenting requirements elicitation are higher than those of most models proposed in this context. This validates the hypothesis that a semi-formal description helps to suppress the ambiguity of natural language, which allows the parties and engineers to more easily reach agreements regarding the needs that must be characterized as requirements, as well as to deliver an elicitation document from which specifications can be easily generated.

6. Conclusions

Although the community widely recognizes the importance of requirements engineering and elicitation as one of its key stages. The fact that there are few models for documenting requirements is concerning. Proper documentation is important at this stage because it allows for a better understanding of the client's needs, and it helps the engineers to better perceive the problem and model a solution that could be properly reflected in the specification. In addition, it provides a better basis to approach the rest of the stages of the lifecycle, as it can be consulted every time that the needs are not understood, or when modifications must be made. This is necessary for software projects not to exceed the initially established times or costs (38).

The REDOC semi-formal model proposed in this research starts by including the textual description of formal elements, such as those of templates, to document interactions. This constitutes an advantage over the other models evaluated because they are static and use natural language, which results in considerable differences in the interpretation of requirements. This model includes characteristics such as storage, state changes, and business rules, so it coherently, clearly, and completely represents the functionality of the project, in a way that is scalable and adaptable to the medium. In the same way, it improves communication between the actors involved in order to generate the requirements report. After implementing the model and analyzing the results, the future possible lines of work to approach the process of documenting the requirements elicitation stage are the following:

- Increasing research on formal methods in requirements engineering, as they are already widely used in other fields of software engineering, and, although they have a broad background and their usefulness and efficiency in critical development have already been demonstrated, there is still a need for more work, so that most of the engineers understand and are able to apply them.
- The automation of tests must be included in a new requirements management model. Current software testing models employ methodologies that suggest acquiring different levels of maturity during the process, but they do not provide details, which results in a complex development.
- Better training students to work with the mathematization of software engineering. Thus, the tasks and activities carried out by a software engineer could involve real engineering, which, in turn, could result in reliable software products that meet the established needs.
- It is necessary to validate the REDOC model in real cases of the industry, in order to verify the logical consistency of all its components and address the failures and complications that emerge in real applications.
- It is necessary to experiment with processes for including the results of the model in specification techniques and documents, with the aim to determine the efficiency and effectiveness of the propositions provided by the elicitation stage.

7. Contribution of authors

All authors contributed equally to the research.

References

- [1] E. Serna and A. Serna, "La especificación formal en contexto: actual y futuro," in Serna E., Ed., *Métodos Formales, Ingeniería de Requisitos y Pruebas del Software*, Medellín, Colombia: Editorial Instituto Antioqueño de Investigación, 2021, pp. 124-138. ↑3
- [2] E. Serna, "Formal methods and Software Engineering," *Rev. Virtual Univ. Católica del Norte*, vol. 30, pp. 158-164, 2010. ↑3
- [3] M. Bolstad, "Design by contract: A simple technique for improving the quality of software," in *31st Annual Int. Symp. Comp. Arch.*, München, Germany, 2004. https://doi.org/10.1109/DOD_UGC.2004.10 ↑3

-
- [4] E. Serna, "Analysis and selection to requirements elicitation techniques," in *7th Col. Comp. Cong.*, Medellín, Colombia, 2012. <https://doi.org/10.1109/ColombianCC.2012.6398001> ↑3
- [5] A. Davis, P. Davis, and H. Davis, *Great software debates*, New York, USA: John Wiley & Sons, 2004. ↑4
- [6] PMI, *Guía de los fundamentos para la dirección de proyectos (PMBOK®)*, New York, USA: Project Management Institute, 2009. ↑4
- [7] SEI, "Software Engineering Institute," 2015. [Online]. Available: <http://www.sei.cmu.edu/cmml/> ↑4
- [8] IEEE, *Guide to the Software Engineering Body of Knowledge SWEBOOK®*, New York, USA: IEEE Computer Society, 2014. ↑4
- [9] R. Hurley, *Decision tables in Software Engineering*, London, UK: Van Nostrand Reinhold, 1982. ↑5, 18
- [10] I. Jacobson, *Object-oriented Software Engineering: A use case driven approach*, New York, USA: Addison-Wesley, 1992. ↑5, 18
- [11] D. Parnas and J. Madey, "Functional documents for computer systems," *Sci. Comp. Prog.*, vol. 25, no. 1, pp. 41-61, 1995. [https://doi.org/10.1016/0167-6423\(95\)96871-J](https://doi.org/10.1016/0167-6423(95)96871-J) ↑5
- [12] I. Sommerville, P. Sawyer, and S. Viller, "Viewpoints for requirements elicitation: A practical approach," in *3rd Int. Conf. Req. Eng.*, Colorado Springs, USA, 1998. ↑5, 19
- [13] K. Beck, *Extreme Programming explained: Embrace change*, San Diego, USA: Addison-Wesley, 1999. ↑5
- [14] T. Berezin, "Writing a software requirements document," 2015. [Online]. Available: <http://home.adelphi.edu/~siegfried/cs480/ReqsDoc.pdf> ↑5, 19
- [15] K. Cooper and M. Robert, "Formalizing a structured natural language requirements specification notation," in *Twelfth Annual Int. Symp. Int. Council Syst. Eng.*, Las Vegas, USA, 2002. ↑5
- [16] N. Power and T. Moynihan, "A theory of requirements documentation situated in practice," in *21st Annual Int. Conf. Doc.*, San Francisco, USA, 2003. <https://doi.org/10.1145/944868.944887> ↑5
- [17] L. Mich, F. Mariangela, and N. Pierluigi, "Market research for requirements analysis using linguistic tools," *Req. Eng.*, vol. 9, no. 2, pp. 40-56, 2004. <https://doi.org/10.1007/s00766-003-0179-8> ↑6
- [18] J. Atlee, S. Pfleeger, *Software Engineering*. New York, USA: Prentice Hall, 2005. ↑6
- [19] D. Parnas, "From requirements to architecture," in *New Trends in Software Methodologies, Tools and Techniques*, H. Fujita, Ed., Netherlands: IOS Press, 2006, pp. 3-36. ↑6
- [20] B. Gallina, N. Guelfi, A. Monnat, and H. Perrouin, "A template for requirement elicitation document of software product lines," Univ. Luxembourg, Luxembourg, Tech. Rep. TR-LASSY-06-08, 2007. ↑6, 19
- [21] V. Laporti, M. Borges, and V. Braganholo, "Athena: A collaborative approach to requirements elicitation," *Comp. Ind.*, vol. 60, no. 6, pp. 367-380, 2009. <https://doi.org/10.1016/j.compind.2009.02.011> ↑6

- [22] C. Crabtree, C. Seaman, and A. Norcio, "Exploring language in software process elicitation: A grounded theory approach," in *3rd Int. Symp. Emp. Software Eng. Meas.*, Florida, USA, 2009. <https://doi.org/10.1109/ESEM.2009.5315984> ↑6
- [23] G. Murtaza, N. Ikram, and A. Basit, "A framework for eliciting value proposition from stakeholders," *WSEAS Trans. Comp.*, vol. 9, no. 6, pp. 557-572, 2010. ↑6
- [24] A. Menten, S. Scheibmayr, and L. Klimpke, "Using audio and collaboration technologies for distributed requirements elicitation and documentation," in *Third Int. Work. Manag. Req. Knowledge*, Sydney, Australia, 2010. <https://doi.org/10.1109/MARK.2010.5623808> ↑7
- [25] A. Sajid, A. Nayyar, and A. Mohsin, "Modern trends towards requirement elicitation," in *2010 Nat. Software Eng. Conf.*, Rawalpindi, Pakistan, 2010. <https://doi.org/10.1145/1890810.1890819> ↑7
- [26] C. Burgess, "The role of formal methods in Software Engineering education and industry," in *4th Software Quality Conf.*, Dundee, UK, 1995. ↑8
- [27] M. Soares and D. Sousa, "Analysis of techniques for documenting user requirements," *Lect. Notes Comp. Sci.*, vol. 7336, pp. 16-28, 2012. https://doi.org/10.1007/978-3-642-31128-4_2 ↑8
- [28] C. Smith and L. Williams, "Best practices for software performance engineering," in *29th Int. Conf. Comp. Meas. Group*, Dallas, USA, 2003. ↑8
- [29] J. Lloyd, "Practical advantages of declarative programming," in *Joint Conf. Dec. Prog.*, Peñíscola, Spain, 1994. ↑8
- [30] R. Mitchell and J. McKim, *Design by contract by example*, New York, USA: Addison Wesley, 2001. ↑8
- [31] A. Matta, C. Furia, and M. Rossi, "Semi-formal and formal models applied to flexible manufacturing systems," *Lect. Notes Comp. Sci.*, vol. 3280, pp. 718-728, 2004. https://doi.org/10.1007/978-3-540-30182-0_72 ↑9
- [32] H. Ehrig, F. Orejas, and M. Wirsing, *Semi-formal and formal specification techniques for software systems*, Berlin, Germany: Technical University, 2000. ↑9
- [33] C. Snook and M. Butler, "UML-B: Formal modeling and design aided by UML," *ACM Trans. Software Eng. Meth.*, vol. 15, no. 1, pp. 92-122, 2006. <https://doi.org/10.1145/1125808.1125811> ↑9
- [34] D. Harel and B. Rumpe, "Meaningful modeling: What's the semantics of 'semantics'?" *Comp.*, vol. 37, no. 1010, pp. 64-72, 2004. <https://doi.org/10.1109/MC.2004.172> ↑9
- [35] W. Grassmann and J. Tremblay, *Matemática discreta y lógica*, Madrid, Spain: Pearson Education, 1998. ↑9
- [36] M. Rebernik and M. Bradač, *Idea evaluation methods and techniques*, India: Institute for Entrepreneurship and Small Business Management, 2010. ↑15
- [37] ICCD, *Developing and implementing an evaluation plan - Evaluation methods*, USA: Innovation Center for Community and youth Development, 2005. ↑15
- [38] E. Serna, *Prueba funcional de Software – Un proceso de Verificación constante*, Medellín, Colombia: Fondo Editorial ITM, 2013. ↑20

-
- [39] E. Serna, "Metodología de investigación aplicada", in Serna E., Ed., *Ingeniería: Realidad de una Disciplina*, Medellín, Colombia: Editorial Instituto Antioqueño de Investigación, 2018, pp. 4-32. ↑3
- [40] S. Smith, L. Lai, and R. Khedri, "Requirements analysis for engineering computation – A systematic approach for improving reliability," *Reliable Comp.*, vol. 13, no. 1, pp. 83-107, 2007. <https://doi.org/10.1007/s11155-006-9020-7> ↑8
-

Edgar Serna M

Eng., MsC, PhD, and Senior Researcher (IS). Professor, researcher, and business consultant. Analyst, logician, visionary, and computational theorist. Business advisor in the design, implementation, and maintenance of IT Architectures, as well as in the management of innovation and new technologies. Consultant for the innovation of education and the creation of new programs. Theoretical computational scientist with over 20 years of industry experience as a project leader in information systems and as a software architect. He is a university professor and researcher with over 30 years of experience. His areas of research are education, software engineering, computer science, complex thought, and computer mathematics, around which he has published books and articles and participated with papers in national and international events.

Email: eserna@eserna.com

Alexei Serna A

Eng., MsC, and Associate Researcher (I) in the Universus Group of Instituto Antioqueño de Investigación. His interests include digital animation and videogames, as well as formal methods and software engineering.

Email: alexei.serna@fundacioniai.org





Research

Comparative Analysis of Boost and Hybrid Boost Converters

Análisis comparativo entre los convertidores Boost y Boost híbrido

Anamaría Romero Carvajal¹, Nicolás Muñoz-Galeano¹, and Jesús María López-Lezama¹✉*

¹Grupo de Investigación en Manejo Eficiente de la Energía (GIMEL), Departamento de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Antioquia (UdeA), Calle 70 No. 52-21, Medellín 050010, Colombia.

Abstract

Context: In power electronics applications, it is important to make comparisons between converters to choose the device that best suits a particular application. This paper compares the Boost converter and the hybrid Boost converter. The operating models of both converters under study are developed and explained in detail to allow for a proper comparison and analysis.

Method: Using the passive sign law, the differential equations that govern the behavior of each converter are determined upon the basis of their switching states. Then, circuit simulations are performed by using the OpenModelica software to analyze the output signals of both converters with the same input parameters.

Results: Comparisons of voltage and current gains, current and voltage time response, and ripple were obtained. Additionally, the efficiency was analyzed by adding resistive losses in each passive element of both converters.

Conclusions: For high duties, the hybrid Boost converter has a greater capacity to increase the output voltage than the Boost converter. It was also found that the hybrid Boost converter has a low overshoot and a low ripple in the time response of its output signals. However, this converter is less efficient.

Keywords: Boost converter, hybrid Boost converter, DC/DC converters, voltage and current gains, efficiency.

Article history

Received:
14th/Sep/2022

Modified:
27th/Dec/2022

Accepted:
14th/Feb/2023

Ing, vol. 28, no. 2,
2023. e19929

©The authors;
reproduction right
holder Universidad
Distrital Francisco
José de Caldas.

Open access



*✉ Correspondence: jmaria.lopez@udea.edu.co

Resumen

Contexto: En las aplicaciones de electrónica de potencia, es importante realizar comparaciones entre convertidores para escoger el dispositivo que mejor se adapte a una aplicación en particular. Este artículo compara el convertidor Boost y el convertidor Boost híbrido. Los modelos de operación de ambos convertidores en estudio se desarrollan y explican en detalle para permitir una adecuada comparación y análisis.

Método: Mediante la ley pasiva de signos, se encuentran las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento de cada convertidor con base en sus estados de conmutación. Acto seguido, se realizan simulaciones circuitales en el *software* OpenModelica para analizar las señales de salida de ambos convertidores con los mismos parámetros de entrada.

Resultados: Se obtuvieron comparaciones de ganancia de voltaje y corriente, respuesta en el tiempo de corriente y voltaje, rizados. Además, se analizó la eficiencia al añadir pérdidas resistivas en cada elemento pasivo de ambos convertidores.

Conclusiones: Para anchos de pulso altos, el convertidor Boost híbrido tiene una mayor capacidad de elevar el voltaje de la salida que el convertidor Boost. También se encontró que el convertidor Boost híbrido presenta bajos sobrepicos y rizados en la respuesta en el tiempo de sus señales de salida. Sin embargo, este convertidor es menos eficiente.

Palabras clave: convertidor Boost, convertidor Boost híbrido, convertidores DC/DC, ganancia de voltaje y corriente, eficiencia.

Table of contents

	Page		
1. Introduction	2	3. Modeling the hybrid Boost converter	6
2. Boost converter modeling	3	3.1. Methodology for obtaining the voltage and current references . . .	6
2.1. Methodology for obtaining voltage and current references	4	3.2. Differential equations and switched model	7
2.2. Differential equations and switched model	5	3.3. Average model and system gains .	8
2.3. Average model and system gains .	5	3.4. Ripple and continuous condition mode (CCM)	9
2.4. Ripple and continuous condition mode (CCM)	5	4. Results	9
		5. Conclusions	16
		6. Contribution of authors	17
		References	17

1. Introduction

DC/DC converters have sparked great interest in power electronics research, as they offer multiple applications in the automotive sector, power amplification, battery energy storage systems, consumer electronics, and communication. These converters allow controlling the DC voltage at the output of a

DC voltage source, acting as energy transfer bridges between sources and loads. There are different boost converter topologies containing a minimum of two semiconductors (a diode and a transistor) and a minimum of one energy storage element (inductor or capacitor). One of the most widely used DC/DC converters in power electronics applications is the Boost converter, given that it offers considerable output voltage gains and high efficiency. For the interconnection of domestic and industrial power with renewable resources, such as photovoltaic (PV) systems, different variations of this converter have been developed, thus leading to hybrid Boost converters, with advantages such as offering higher output voltage gains and improved output signal ripples (1,2).

When studying the behavior of conventional Boost and hybrid Boost converters, as well as conducting comparative analyses, it is necessary to define the converter that best suits an application, with the aim to obtain a high performance. The main objective of this paper is to compare both converters by means of circuit simulations in the OpenModelica software, as well as to present a detailed explanation of their operating principles (3,4).

This paper presents a complete explanation of these converters' modeling, starting from the law of passive signs, when the passive elements of the converter absorb or deliver energy in each switching state. In the literature, it is common to find papers that implement hybrid Boost converter models in different systems without a detailed description of the comprehensive derivation regarding the equations governing the model (5). However, a detailed explanation of the model to be used is of paramount importance for the design of power electronics applications (6–9).

Current research studies have implemented hybrid Boost converter topologies without a precise comparison with conventional Boost converters. Therefore, said comparison is presented in this work to establish the advantages and disadvantages of the Hybrid model (10–13).

The results were obtained by simulating the circuit that allows analyzing the time response of both converters. The OpenModelica software was employed because of its widespread use in the industry, as it is a free and open-source environment based on Modelica. In addition, OpenModelica allows for the simulation of linear and nonlinear systems (14), (15).

The rest of this paper is structured as follows. Section 2 presents the mathematical modeling of the Boost converter. Section 3 presents the mathematical modeling of the hybrid Boost converter. Section 4 corresponds to the results obtained from the simulation of the converter circuits under study. Finally, Section 5 presents the conclusions and analyses derived from this study.

2. Boost converter modeling

Fig. 1 illustrates the topology of the conventional Boost converter under study. This device is composed of the following elements: an input DC voltage source V_i , an inductor L , a switch Q , a diode D , a capacitor C , and a resistive load R .

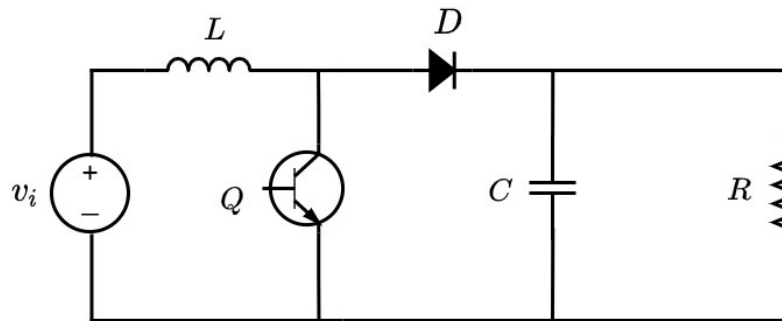


Figure 1. Boost converter topology under study

2.1. Methodology for obtaining voltage and current references

The Boost converter features two switching states, which are depicted in Figs. 2 and 3. In the first state, the switch Q is closed, and the diode has reverse polarity, so the inductor L is in parallel to the source V_i and reacts by absorbing energy, while the capacitor C feeds the resistive load R . In the second state, the switch Q is open while the diode D has direct polarity. Now, the inductor L changes its polarity, and, together with the source V_i , they deliver energy to the capacitor and the load R .

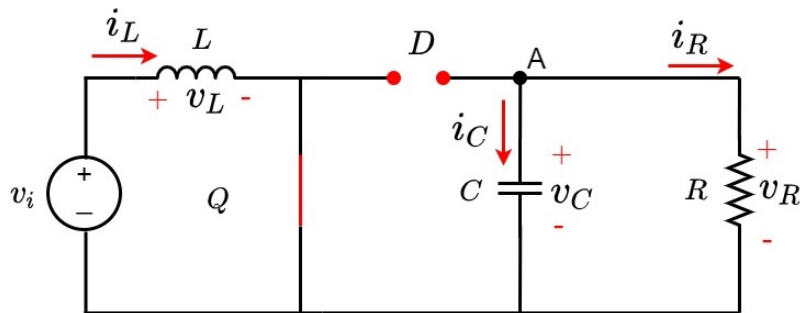


Figure 2. Boost converter with Q closed

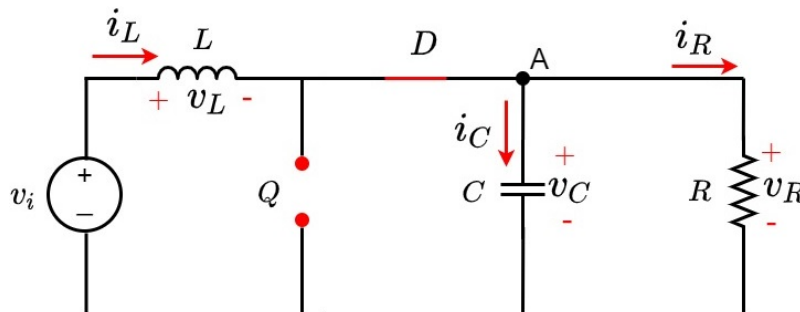


Figure 3. Boost converter with Q open

2.2. Differential equations and switched model

To find the equations that govern the converter's behavior, the differential equations for each switching state are deduced via Kirchhoff's laws, considering the voltage and current references with respect to node A. Eqs. (1) and (2) refer to when switch Q is closed, while Eqs. (3) and (4) refer to when switch Q is open.

$$L \cdot \frac{di_L}{dt} = v_i \quad (1)$$

$$c \cdot \frac{dv_c}{dt} = \frac{-v_c}{R} \quad (2)$$

$$L \cdot \frac{di_L}{dt} = v_i - v_c \quad (3)$$

$$c \cdot \frac{dv_c}{dt} = i_L - \frac{v_c}{R} \quad (4)$$

Subsequently, the auxiliary variable u is defined to obtain the switched model. Thus, when $u = 1$, switch Q is closed; otherwise, when $u = 0$, switch Q is open. Eqs. (1) and (2) yield Eq. (5) which defines the state of the inductor L as a function of u . On the other hand, Eqs. (3) and (4) yield Eq. (6), which defines the state of the capacitor C as a function of u .

$$L \cdot \frac{di_L}{dt} = v_i \cdot u + (v_i - v_c) \cdot (1 - u) \quad (5)$$

$$c \cdot \frac{dv_c}{dt} = \frac{-v_c}{R} \cdot u + (i_L - \frac{v_c}{R}) \cdot (1 - u) \quad (6)$$

2.3. Average model and system gains

To obtain the steady-state mean values of the converter output signals, it is necessary to use the averaging model. This is done by setting the derivatives of Eqs. (5) and (6) as zero. The average of the signals is defined by the average inductor current L (I_L), the average capacitor voltage c (V_c), and the average value of the function u (D), which is called the *duty cycle*.

$$0 = V_i \cdot D + (V_i - V_c) \cdot (1 - D) \quad (7)$$

$$0 = \frac{-V_c}{R} \cdot D + (I_L - \frac{V_c}{R}) \cdot (1 - D) \quad (8)$$

Eqs. (9) and (10) are obtained by clearing Eqs. (7) and (8), respectively. They refer to the voltage and current gains.

$$\frac{V_c}{V_i} = \frac{1}{1 - D} \quad (9)$$

$$\frac{I_L}{I_R} = \frac{1}{1 - D} \quad (10)$$

2.4. Ripple and continuous condition mode (CCM)

Discretizing Eqs. (1) and (2) while considering $\Delta t = DfsW$ results in the inductor current ripple L , Eq. (11), and the capacitor voltage ripple c , Eq. (12).

$$\Delta i_L = \frac{v_i \cdot D}{2L \cdot f_{SW}} \quad (11)$$

$$\Delta v_c = \frac{V_c \cdot D}{2C \cdot f_{sw} R} \quad (12)$$

When the converter operates in continuous conduction mode, a reduction in electromagnetic interference and an easy control of the device is guaranteed. This occurs if the average inductor current is greater than the inductor current ripple, as shown in Eq. (13), which has been obtained by substituting Eqs. (10) and (11) into $|I_L| > |\Delta i_L|$, where $K_c = \frac{2L \cdot f_{sw}}{R}$ and $K(D) = (1 - D)^2 D$.

$$K_c > K(D) \quad (13)$$

By making Eq. (13) zero and using the maximum and minimum criterion of differential calculus, the maximum value of $K(D)$ can be found. The maximum value of $K(D)$ is 0,1481 at a duty of $D = 0,3337$. Therefore, if the converter has a K_c greater than this value, it will show CCM for any steady-state duty cycle value.

3. Modeling the hybrid Boost converter

Fig. 4 illustrates the topology of the hybrid Boost converter under study. The converter is composed of the following elements: an input DC voltage source v_i , two inductors L_1 and L_2 , a switch Q , two diodes D_1 and D_2 , three capacitors C_1 , C_2 and C_3 , and a resistive load R .

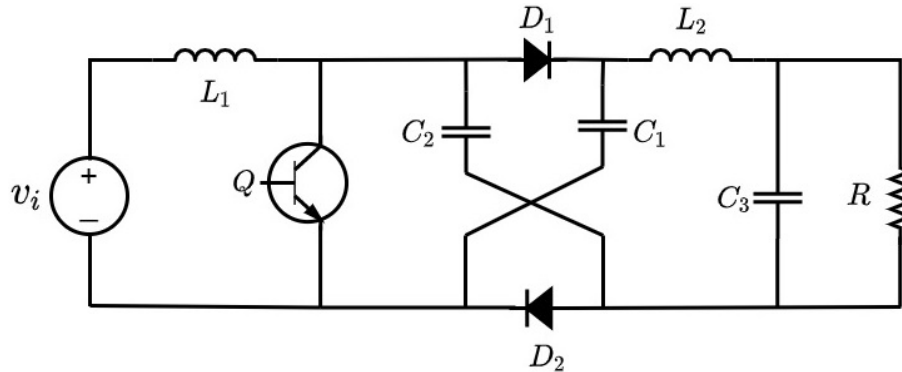


Figure 4. Hybrid Boost converter

3.1. Methodology for obtaining the voltage and current references

The first switching state of the hybrid Boost converter is shown in Fig. 5. In this state, switch Q is closed, so the inductor L_1 absorbs energy by being in parallel to the source v_i . On the other hand, capacitors C_1 and C_2 deliver energy to elements L_3 , C_3 , and R . This behavior does not allow for the conduction of diodes D_1 and D_2 . In the second state, illustrated in Fig. 6, switch Q is open, indicating that inductor L_1 , together with source v_i , will now deliver power to capacitors C_1 and C_2 , so diodes D_1 and D_2 become directly polarized, and inductor L_3 reacts by delivering power to C_3 and R .

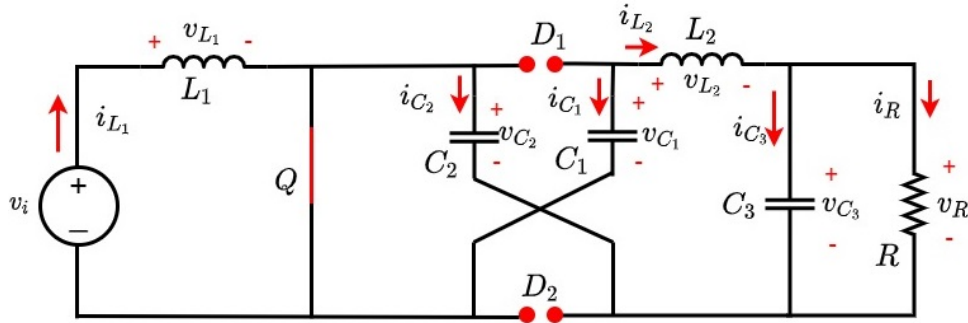


Figure 5. Hybrid Boost converter with Q closed

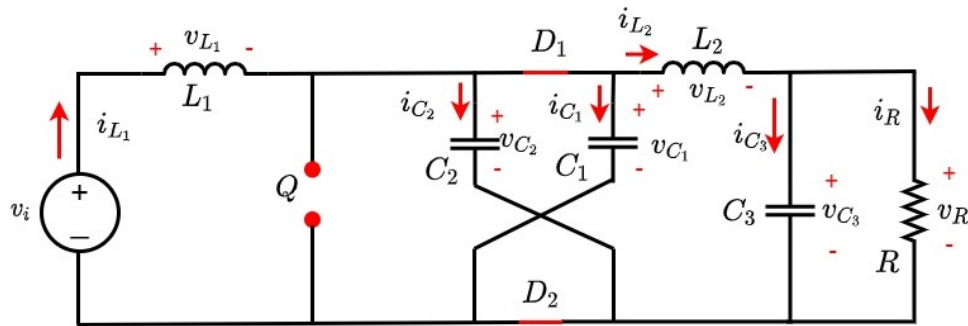


Figure 6. Hybrid Boost converter with Q open

3.2. Differential equations and switched model

The differential equations that govern the behavior of the converter are found using Kirchhoff’s laws, considering the voltage and current references at node B and assuming $C_1 = C_2 = C$. Eqs. (14) to (18) refer to when switch Q is closed, while Eqs. (19) (23) refer to when switch Q is open.

$$L_1 \cdot \frac{di_{L_1}}{dt} = v_i \tag{14}$$

$$L_2 \cdot \frac{di_{L_2}}{dt} = 2v_C - v_{C_3} \tag{15}$$

$$C_1 \cdot \frac{dv_{C_1}}{dt} = -i_{L_2} \tag{16}$$

$$C_2 \cdot \frac{dv_{C_2}}{dt} = -\frac{v_R}{R} - C_3 \cdot \frac{dv_{C_3}}{dt} \tag{17}$$

$$C_3 \cdot \frac{dv_{C_3}}{dt} = i_{L_2} - \frac{v_R}{R} \tag{18}$$

$$L_1 \cdot \frac{di_{L_1}}{dt} = v_i - v_{C_1} \tag{19}$$

$$L_2 \cdot \frac{di_{L_2}}{dt} = v_{C_2} - v_{C_3} \quad (20)$$

$$C_1 \cdot \frac{dv_{C_1}}{dt} = i_{L_1} - C_2 \cdot \frac{dv_{C_2}}{dt} - i_{L_2} \quad (21)$$

$$C_2 \cdot \frac{dv_{C_2}}{dt} = i_{L_1} - C_1 \cdot \frac{dv_{C_1}}{dt} - i_{L_2} \quad (22)$$

$$C_3 \cdot \frac{dv_{C_3}}{dt} = i_{L_2} - \frac{v_R}{R} \quad (23)$$

The auxiliary variable u is defined to conveniently write the DEs. When $u = 1$, Q is closed; otherwise, when $u = 0$, Q is open. Eqs. (14) and (19) yield Eq. (24), which defines the state of inductor L_1 ; Eqs. (15) and (20) yield Eq. (25), which defines the state of inductor L_2 ; Eqs. (16) and (21) yield Eq. (26), which represents the state of capacitor C_1 ; Eqs. (17) and (22) yield Eq. (27), which refers to the state of capacitor C_2 ; and, finally, Eqs. (18) and (23) yield Eq. (28), which defines the state of capacitor C_3 .

$$L_1 \cdot \frac{di_{L_1}}{dt} = v_i \cdot u + (v_i - v_{C_1}) \cdot (1 - u) \quad (24)$$

$$L_2 \cdot \frac{di_{L_2}}{dt} = (2v_{C_2} - v_{C_3}) \cdot u + (v_{C_2} - v_{C_3}) \cdot (1 - u) \quad (25)$$

$$C_1 \cdot \frac{dv_{C_1}}{dt} = -i_{L_2} \cdot u + (i_{L_1} - C_2 \cdot \frac{dv_{C_2}}{dt} - i_{L_2}) \cdot (1 - u) \quad (26)$$

$$C_2 \cdot \frac{dv_{C_2}}{dt} = (-\frac{v_R}{R} - C_3 \cdot \frac{dv_{C_3}}{dt}) \cdot u + (i_{L_1} - C_1 \cdot \frac{dv_{C_1}}{dt} - i_{L_2}) \cdot (1 - u) \quad (27)$$

$$C_3 \cdot \frac{dv_{C_3}}{dt} = (i_{L_2} - \frac{v_R}{R}) \cdot (u) + (i_{L_2} - \frac{v_R}{R}) \cdot (1 - u) \quad (28)$$

3.3. Average model and system gains

The average of the signals is defined by the average current of the inductors L_1 and L_2 (i_{L_1}, i_{L_2}); the average voltage of the capacitors C_1, C_2, C_3 ($v_{C_1}, v_{C_2}, v_{C_3}$); and the average value of the function u (D), *i.e.*, the duty cycle.

$$0 = V_i \cdot D + (V_i - V_{C_1}) \cdot (1 - D) \quad (29)$$

$$0 = (2V_{C_2} - V_{C_3}) \cdot D + (V_{C_2} - V_{C_3}) \cdot (1 - D) \quad (30)$$

$$0 = -I_{L_2} \cdot D + (I_{L_1} - (I_{L_1} + \frac{I_{L_2} - I_{L_1}}{2} - i_{L_2})) \cdot (1 - D) \quad (31)$$

$$0 = (-\frac{V_R}{R} - (\frac{-V_R}{R} + I_{L_2})) \cdot D + (I_{L_1} - \frac{I_{L_2} - I_{L_1}}{2} - i_{L_2}) \cdot (1 - D) \quad (32)$$

$$0 = (I_{L_2} - \frac{V_R}{R}) \cdot (D) + (I_{L_2} - \frac{V_R}{R}) \cdot (1 - D) \quad (33)$$

Eq. (34) indicates the voltage gain, which is obtained from Eqs. (29) and (30), while Eq. (35) refers to the current gain, which is obtained from Eqs. (32) and (33).

$$\frac{V_{C_3}}{V_i} = \frac{1 + D}{1 - D} \quad (34)$$

$$\frac{I_{L_1}}{I_R} = \frac{1 - D}{1 + D} \quad (35)$$

3.4. Ripple and continuous condition mode (CCM)

Discretizing Eqs. (14) and (18) with $\Delta t = Df_sW$ yields the input current and output voltage ripples given by Eqs. (36) and (37), respectively.

$$\Delta i_{L_1} = \frac{V_i \cdot D}{2L \cdot f_{SW}} \quad (36)$$

$$\Delta v_{C_3} = \frac{i_{L_2} - \left(\frac{V_{C_3}}{R}\right) \cdot D}{2C \cdot f_{SW} R} \quad (37)$$

To ensure that the converter operates in continuous conduction mode, the average inductor L_1 current must be greater than the inductor L_1 current ripple. Eq. (38) is obtained by substituting Eqs. (35) and (36) into $|I_L| > |\Delta i_L|$, where $K_c = \frac{2L_1 \cdot f_{SW}}{R}$ and $K(D) = \frac{(1-D)^2 D}{(1+D)^2}$.

$$K_c > K(D) \quad (38)$$

By making Eq. (38) zero and using the maximum and minimum criterion of differential calculus, the maximum value of $K(D)$ can be found. The maximum value of $K(D)$ is 0,0902 at a duty of $D = 0,2325$. Therefore, if the converter has a K_c greater than this value, it will show CCM for any steady-state duty cycle value.

4. Results

The OpenModelica software (version 1.18) was used to simulate the circuits of both converters. Figs. 7 and 8 show the software implementation of the Boost converter and the Hybrid Boost converter, respectively. These figures show the setpoint block that represents the input voltage of the circuit. Moreover, the pulse block generates a PWM (pulse width modulation) signal that, together with a voltage source, feeds the switch.

Fig. 9 shows the voltage gain *vs.* the duty of the studied converters. The blue signal represents the voltage gain of the Boost converter, while the red signal illustrates the voltage gain of the hybrid Boost converter. It can be seen that, for both converters, the $\frac{V_o}{V_i}$ ratio is proportional to the duty. Furthermore, it is evident that the hybrid Boost converter achieves a higher voltage gain from a duty greater than 10%, and that, from a duty greater than 85%, the gain of the hybrid Boost converter almost doubles that of the Boost converter.

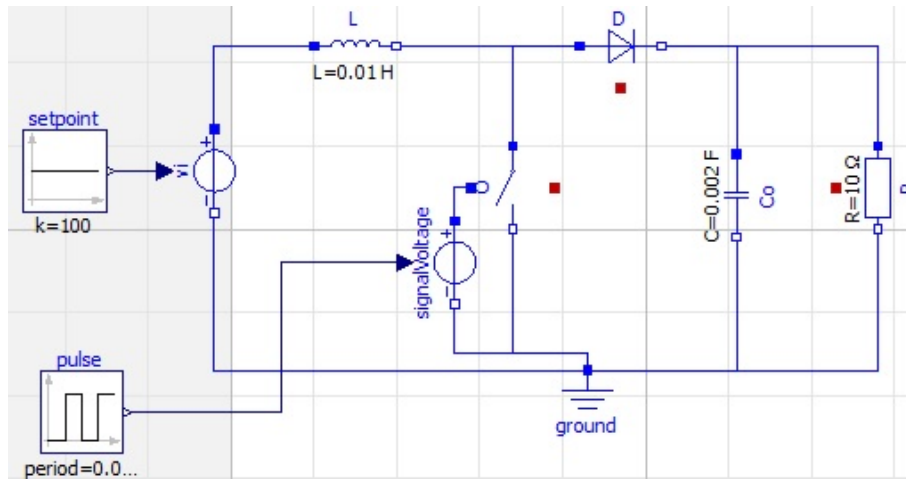


Figure 7. Simulation of the Boost converter in OpenModelica

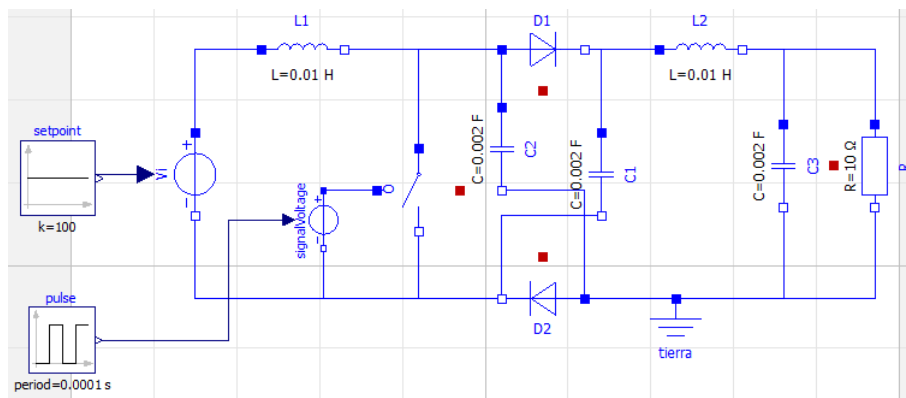


Figure 8. Simulation of the hybrid Boost converter in OpenModelica

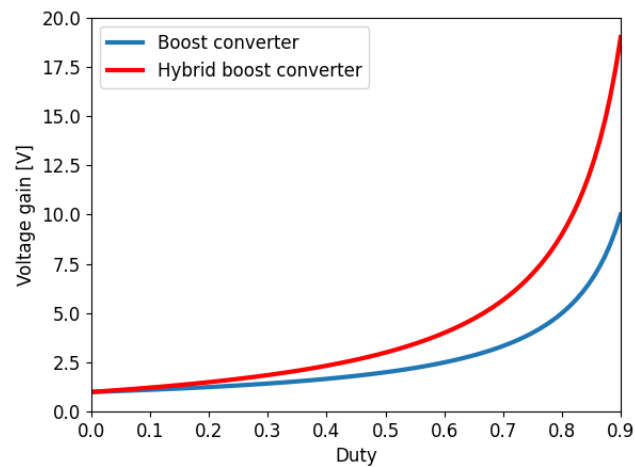


Figure 9. Voltage gain vs. duty

The current gain of the converters is illustrated in Fig. 10. The blue signal represents the current gain of the Boost converter, while the red signal illustrates the current gain of the hybrid Boost converter. For both converters, the I_o/I_i ratio is inversely proportional to the duty. Furthermore, it is observed that the current gain of the hybrid Boost converter decreases faster for duties below 40% than the current gain of the Boost converter. For duties greater than 40%, as the duty increases, the current gain signal of the hybrid Boost converter begins to decrease at a faster rate than that of the Boost converter. However, the former will always have a lower current gain.

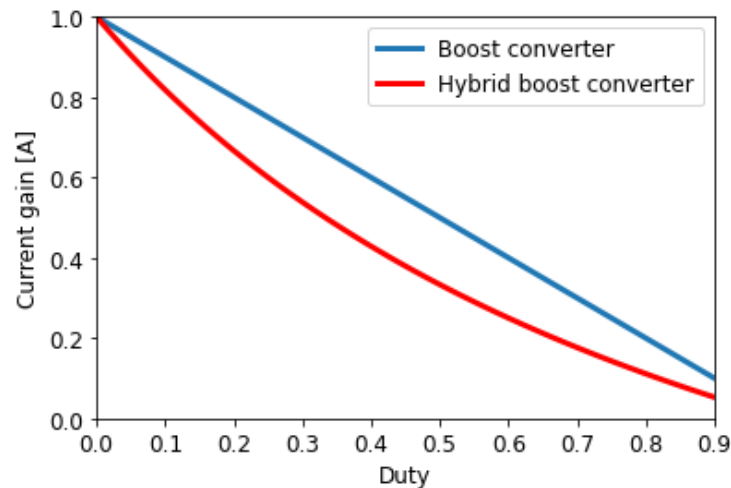


Figure 10. Current gain vs. duty

Fig. 11 shows the output voltage (or the voltage across capacitor C or resistor R) and the input voltage V_{in} of the Boost converter. The green and red signals represent the input and output voltage, respectively. It can be seen that, in the transient state, the output voltage has an overshoot of 50% and a settling time of about 0.25 seconds. In a steady state, it has a gain of 100% with respect to the input voltage.

As for the hybrid Boost converter, Fig. 12 illustrates the output voltage (or the voltage across capacitor C_3 or resistor R) and the input voltage V_{in} . The green signal represents the input voltage, and the red signal the output voltage. It is observed that, in the transient state, the output voltage has an over-peak of 45% and a stabilization time of approximately 0.45 seconds. In addition, in the steady state, it has a gain of 200% with respect to the input voltage.

Fig. 13 shows the output current (or current in the resistor R) and the input current (or current in the inductor L) of the Boost converter. The green signal represents the input current, and the red signal represents the output current. The input current has an overshoot of 150% and a settling time of approximately 0.25 seconds. The output current in the transient state has an overshoot of 50% and a settling time of approximately 0.22 seconds. In the steady state, it reports a decrease of 50% with respect to the input current. Fig. 14 shows the output current (or current at the resistor R) and the input current (or current at L_1) of the hybrid Boost converter. The green signal represents the input current, and the

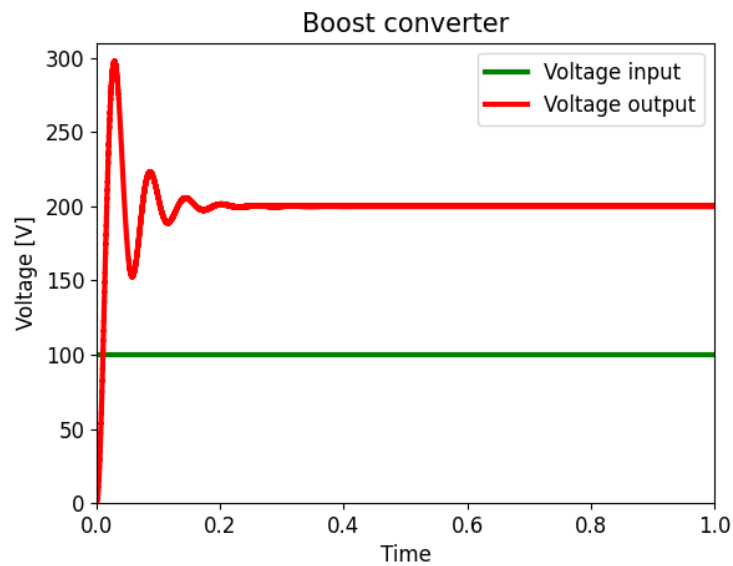


Figure 11. Time response of the voltage in the Boost converter

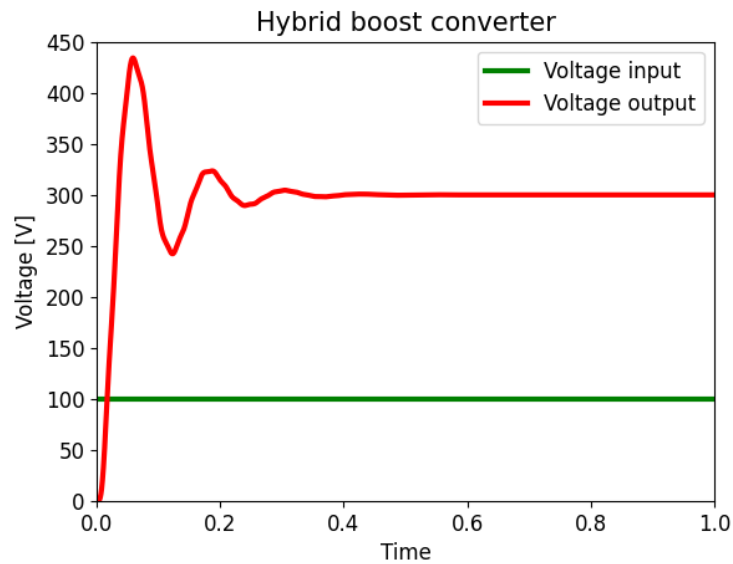


Figure 12. Time response of the voltage in the hybrid Boost converter

red signal represents the output current. It is observed that, in the transient state, the input current presents an over-peak of 122 % and a settling time of approximately 0.45 seconds. The output current in the transient state has an over-peak of 43 % and a stabilization time of approximately 0.35 seconds, and it shows a decrease of 33 % in the steady state with respect to the input current.

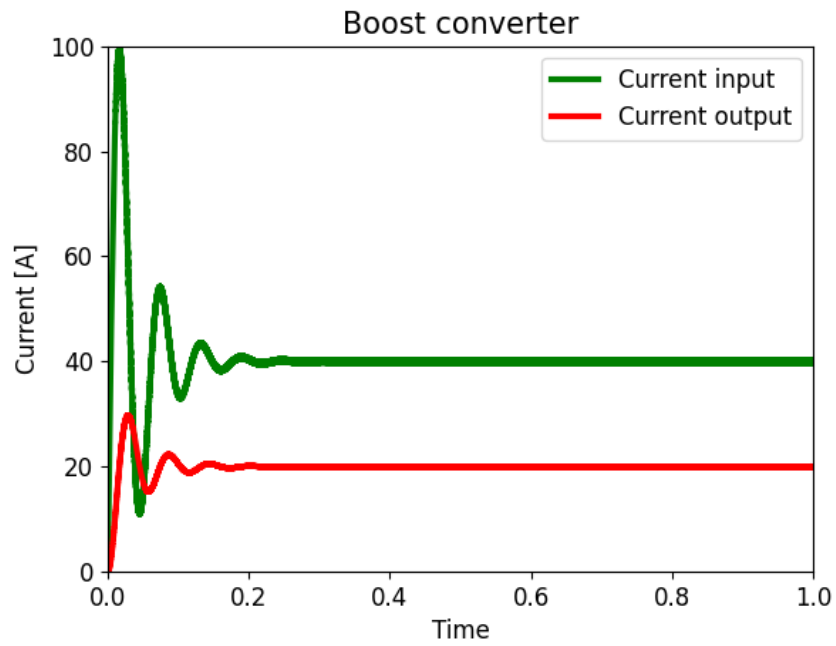


Figure 13. Time response of the current in the Boost converter

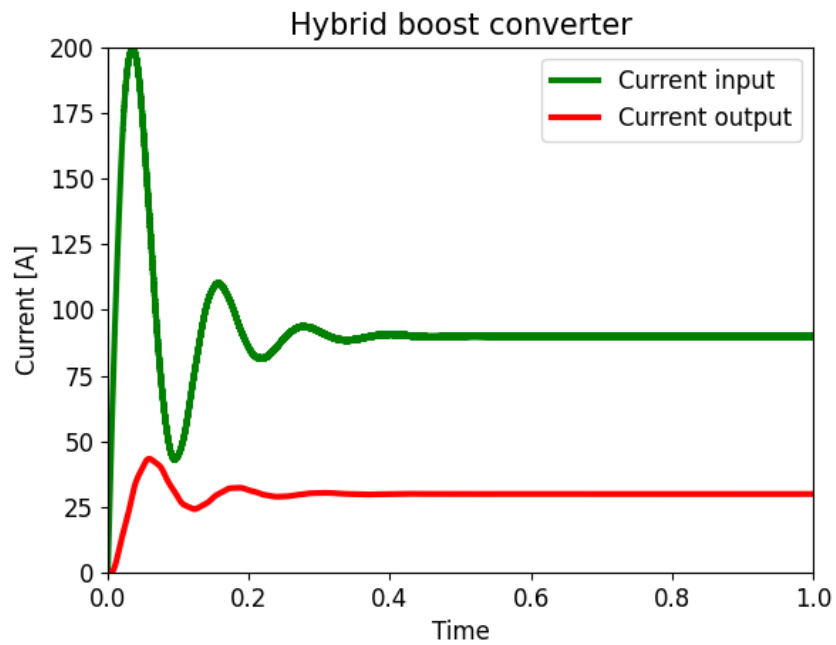


Figure 14. Time response of the current in the hybrid Boost converter

Fig. 15 shows the comparison of the output voltage ripple of the two converters, the red signal refers to the voltage ripple of the Hybrid Boost converter while the orange signal represents the voltage ripple of the Boost converter. The sub-figures in 15 were plotted with the same scale for a proper comparison. The voltage ripple of the Boost converter is 0.5002 V , while the voltage ripple of the Hybrid converter is 0.0532 V , resulting in a decrease of 840 %.

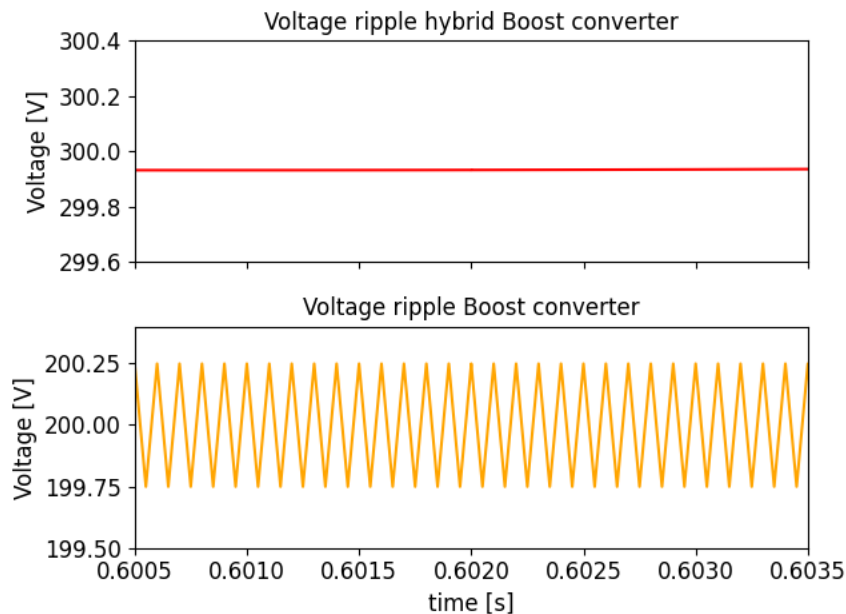


Figure 15. Voltage ripple

Fig. 16 shows a comparison between the output current ripple of the two converters. The red signal refers to the current ripple of the hybrid Boost converter, while the orange signal represents the current ripple of the Boost converter. The sub-figures in Fig. 16 were plotted with the same scale for the sake of comparison. The current ripple of the Boost converter is 0.050 , while the voltage ripple of the Hybrid converter is 0.005 , which constitutes a 900 % decrease.

Fig. 17 shows the efficiency with respect to the duty. This was determined by adding the inductor and capacitor losses of $R = 0.3$ in the Open Modelica circuit simulation of both converters. It is observed that, for duties lower than 20 %, the hybrid Boost converter obtains higher efficiency compared to the Boost converter. On the other hand, for duties between 20 and 70 %, the Boost converter manages to maintain higher efficiency than the hybrid Boost converter. In addition, for duties higher than 70 %, both efficiencies decrease, with a higher efficiency for the Boost converter.

Fig. 18 shows the continuous driving mode for the Boost converter, which is represented by $K(D)_B$ (blue graph), and for the hybrid Boost converter, denoted by $K(D)_H$ (orange graph). This comparison is made to illustrate that the Boost converter has less capacity to enter the discontinuous conduction mode, as the maximum value obtained by the KD_B graph is lower than that of the KD_H graph.

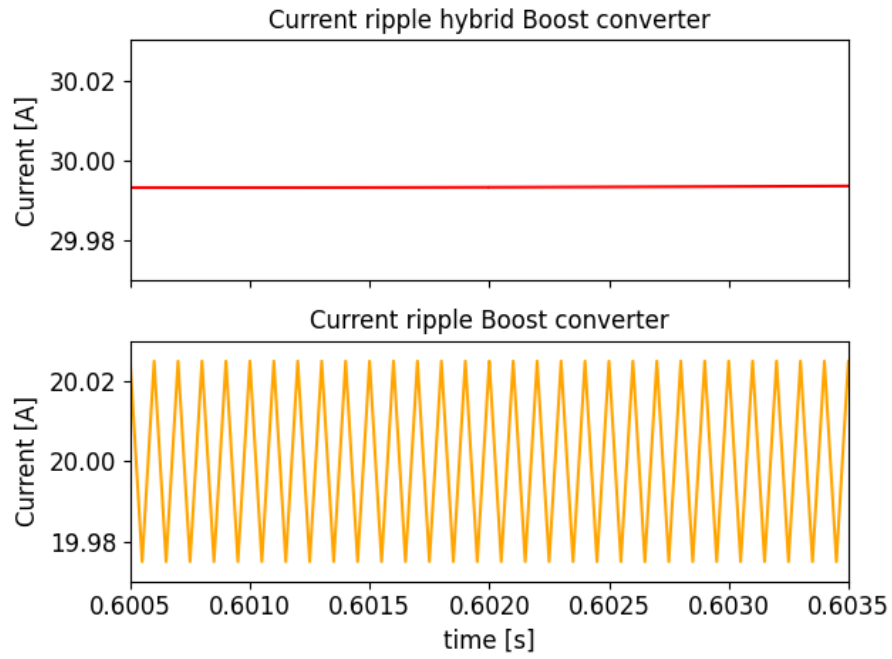


Figure 16. Current ripple

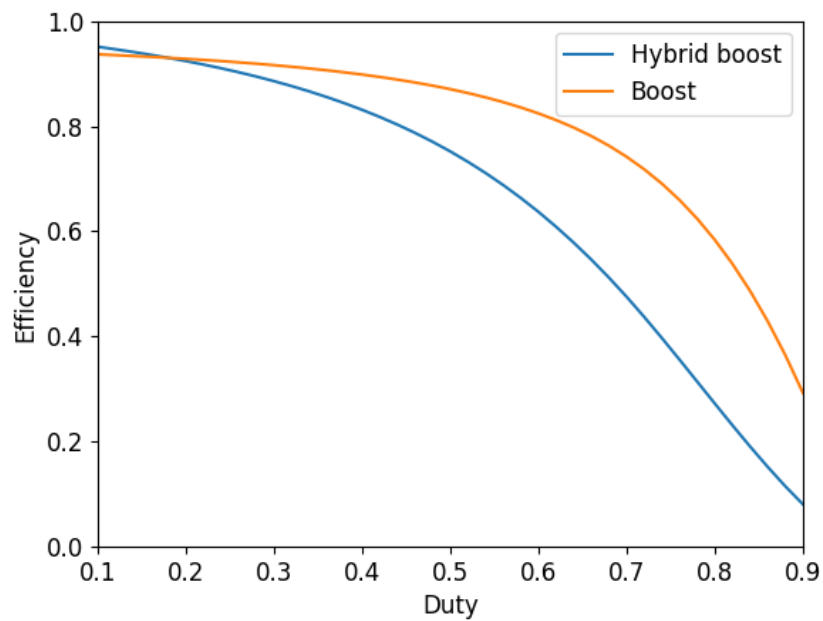


Figure 17. Efficiency

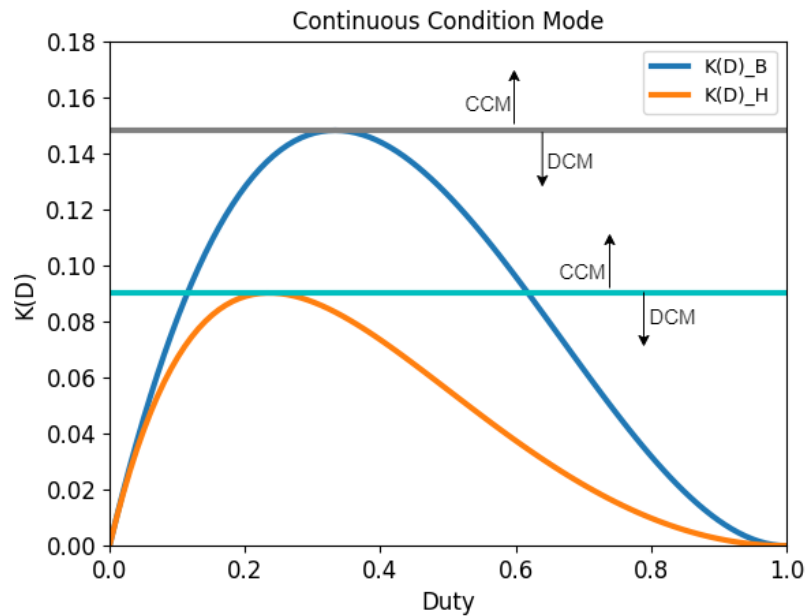


Figure 18. Continuous condition mode

5. Conclusions

This paper presented a comparative analysis of the Boost and hybrid Boost converters. According to the results obtained, it can be stated that, for high voltages, the hybrid converter has a greater capacity to raise the output voltage than the Boost converter. That is because the former has more capacitors in its hybrid branch, which store energy in each switching state. However, for energy conservation at the output, the hybrid Boost converter has a lower current gain than the Boost converter.

For the same input voltage, the hybrid Boost converter has a lower over-peak and a longer output voltage stabilization time than the Boost converter. On the other hand, both converters exhibit different input currents due to the differences in their topologies. The hybrid Boost converter has a higher input current than the other because it has more elements connected in parallel. It can be said that, to work with hybrid Boost converters, having sources whose rated current is higher than the current required by the converter is advised. As for the output current, the Boost converter exhibits less overshoot and less stabilization time than the hybrid Boost converter.

By analyzing the voltage and current ripple, it is concluded that the hybrid Boost converter has much less ripple than the Boost converter. By implementing a hybrid Boost converter, there is an 840 % decrease in voltage ripple and a 900 % decrease in current ripple with respect to the Boost converter.

By adding resistive losses of 0,3 Ohms in the inductors and capacitors of both converters, the hybrid Boost converter has a higher efficiency than the Boost converter at voltages below 20 %. For voltages above 20 %, the latter is more efficient than the former, as it has fewer elements and therefore less losses.

6. Contribution of authors

All authors contributed equally to the research.

References

- [1] A. Tazay and Z. Miao, "Control of a Three-Phase Hybrid Converter for a PV Charging Station," *IEEE Trans. Energy Convers.*, vol. 33, no. 3, pp. 1002–1014, Sep. 2018. <https://doi.org/10.1109/TEC.2018.2812181> 3
- [2] P. K. Maroti, S. Padmanaban, M. S. Bhaskar, M. Meraj, A. Iqbal, and R. Al-Ammari, "High gain three-state switching hybrid boost converter for DC microgrid applications," *IET Power Electronics*, vol. 12, no. 14, pp. 3656–3667, 2019. <https://doi.org/10.1049/iet-pel.2018.6403> 3
- [3] M. Evzelman and S. Ben-Yaakov, "Modeling and analysis of hybrid converters," in *2012 IEEE Energy Convers. Congr. Expo. (ECCE)*, 2012, pp. 1592–1598. <https://doi.org/10.1109/ECCE.2012.6342623> 3
- [4] B. M. Hasaneen and A. A. E. Mohammed, "Design and simulation of DC/DC boost converter," in *2008 12th Int. Middle-East Power System Conf.*, Mar. 2008, pp. 335–340. <https://doi.org/10.1109/MEPCON.2008.4562340> 3
- [5] B. Axelrod, Y. Berkovich, and A. Ioinovici, "Switched-capacitor/switched-inductor structures for getting transformerless hybrid dc-dc pwm converters," *IEEE Trans. Circ. Syst. I Reg. Papers*, vol. 55, no. 2, pp. 687–696, 2008. 3
- [6] D. F. Cortez, M. C. Maccarini, S. A. Mussa, and I. Barbi, "High static gain single-phase PFC based on a hybrid boost converter," *Int. J. Electronics*, vol. 104, no. 5, May 2017. <https://doi.org/10.1080/00207217.2016.1253782> 3
- [7] M. Malik, A. Farooq, A. Ali, and G. Chen, "A DC-DC Boost Converter with Extended Voltage Gain," in *MATEC Web of Conf.*, vol. 40, Dec. 2015. <https://doi.org/10.1051/mateconf/20164007001> 3
- [8] J. C. Rosas-Caro, J. M. Ramirez, F. Z. Peng, and A. Valderrabano, "A DC-DC multilevel boost converter," *IET Power Electronics*, vol. 3, no. 1, pp. 129–137, Jan. 2010. <https://doi.org/10.1049/iet-pel.2008.0253> 3
- [9] F. H. Dupont, C. Rech, R. Gules, and J. R. Pinheiro, "Reduced-Order Model and Control Approach for the Boost Converter With a Voltage Multiplier Cell," *IEEE Trans. Power Electronics*, vol. 28, no. 7, pp. 3395–3404, Jul. 2013. <https://doi.org/10.1109/TPEL.2012.2224672> 3
- [10] S. Belhimer, M. Haddadi, and A. Mellit, "A novel hybrid boost converter with extended duty cycles range for tracking the maximum power point in photovoltaic system applications," *Int. J. Hydrogen Energy*, vol. 43, no. 14, pp. 6887–6898, Apr. 2018. <https://doi.org/10.1016/j.ijhydene.2018.02.136> 3
- [11] Y. Zhang, J.-T. Sun, and Y.-F. Wang, "Hybrid Boost Three-Level DC-DC Converter With High Voltage Gain for Photovoltaic Generation Systems," *IEEE Trans. Power Electronics*, vol. 28, no. 8, pp. 3659–3664, Aug. 2013. <https://doi.org/10.1109/TPEL.2012.2229720> 3

-
- [12] F. Velasco, S. Casanova, and D. Perez, "Dynamics of a Boost Converter with Inclusion of Internal Resistance Controlled with ZAD." *Rev. Ing. Energética*, vol. 37, no. 2, pp. 144–154, May 2016. 3
- [13] M. Evzelman and S. Ben-Yaakov, "Simulation of Hybrid Converters by Average Models," *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 50, no. 2, pp. 1106–1113, Mar. 2014. <https://doi.org/10.1109/TIA.2013.2272286> 3
- [14] P. Fritzson, et al., "The OpenModelica Integrated Modeling, Simulation, and Optimization Environment," in *Proc. Amer. Modelica Conf. 2018*, Feb. 2019, pp. 206–219. <https://doi.org/10.3384/ecp18154206> 3
- [15] A. Ganeson, P. Fritzson, O. Rogovchenko, A. Asghar, M. Sjölund, and A. Pfeiffer, "An OpenModelica Python Interface and its use in PySimulator," in *Proc. 9th Int. Modelica Conf.*, Munich, Sep. 2012, pp. 537–548. <https://doi.org/10.3384/ecp12076537> 3
-

Anamaría Romero Carvajal

Currently, she is an electrical engineering student and young researcher of the GIMEL research group at Universidad de Antioquia. Her research work is focused on the line of power electronics and control.

Nicolás Muñoz Galeano

He received a BE degree in Electric Engineering at Universidad de Antioquia (UdeA-2004), and a PhD in Electronics Engineering (UPVLC-2011). Since 2005, he has been a professor at the Electric Engineering Department of UdeA (Colombia) and a member of the GIMEL research group. His research work is focused on power electronics design, control, and electrical machines.

Jesús María López Lezama

He received his BSc and MSc degrees from Universidad Nacional de Colombia in 2001 and 2006, respectively. He also received his PhD at Universidade Estadual Paulista (UNESP, SP, Brazil) in 2011. He is currently an associate professor at Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia. His main research interests are the planning and operation of electrical power systems and distributed generation



Research

MPPT Charge Controller with State of Charge Estimation Method based on Ampere-Hour Counting and Open Circuit Voltage

Controlador de carga MPPT con método de estimación del estado de carga basado en conteo de amperios hora y voltaje a circuito abierto

Luis. F. Bustos-Márquez^{1,2}✉, Sergio B. Sepúlveda-Mora¹✉**, Dinael Guevara-Ibarra¹ y Byron Medina-Delgado¹

¹Departamento de Electricidad y Electrónica, Universidad Francisco de Paula Santander, Cúcuta, Norte de Santander 540006, Colombia.

²Department of Electrical and Computer Engineering, Institute of Energy Conversion, University of Delaware, Newark, DE 19715, USA.

Abstract

Context: Off-grid photovoltaic systems are one of the main alternatives to fulfill the need for electricity in rural areas where the connection to traditional electrification systems is not possible. Among the components of a photovoltaic off-grid system, the charge controller must adapt the voltage and current levels to store the energy delivered by the panels in batteries.

Method: In this work, a maximum power point tracking (MPPT) charge controller based on the Perturbation and Observation (P&O) technique was implemented and evaluated. Additionally, the state of charge of the battery was estimated by combining the ampere-hour counting method and the open-circuit voltage. The controller implements a two-phase charging algorithm for lead-acid batteries.

Results: The developed charge controller obtained an average efficiency of 84,7 % and reached a maximum value of 96,3 %. In addition, the two-phase charging algorithm and the state of charge estimation method implemented in the controller allowed for the adequate control and monitoring of the battery charging and discharging processes.

Conclusions: The proposed charge controller follows the maximum power point of the solar panel and allows storing energy in lead-acid batteries while supervising their state of charge.

Acknowledgements: Ministry of Science, Colombia.

Keywords: charge controller, maximum power point tracking, off-grid photovoltaic systems.

Article history

Received:
23th/Oct/2021

Modified:
06th/Sep/2022

Accepted:
17th/Nov/2022

Ing., vol. 28, no. 2,
2023. e18722

©The authors;
reproduction right
holder Universidad
Distrital Francisco
José de Caldas.

Open access



*✉ Correspondence: luisfernandobm@ufps.edu.co

*✉ Correspondence: sergio.sepulveda@ufps.edu.co

Resumen

Contexto: Los sistemas fotovoltaicos desconectados de la red son una de las principales alternativas para suplir la necesidad de electricidad en zonas rurales donde la conexión a los sistemas tradicionales de electrificación no es posible. Entre los componentes del sistema fotovoltaico, el controlador de carga debe adaptar los niveles de corriente y voltaje para almacenar en baterías la energía entregada por los paneles.

Método: En este trabajo se implementó y evaluó un controlador de carga de seguimiento del punto de máxima potencia (MPPT) basado en la técnica de perturbación y observación (P&O). Adicionalmente, se estimó el estado de carga de la batería combinando los métodos de conteo de amperios-hora y voltaje de circuito abierto. El controlador implementa un algoritmo de carga de dos fases para baterías de ácido-plomo.

Resultados: El controlador de carga desarrollado obtuvo una eficiencia promedio de 84,7% y alcanzó un valor máximo de 96,3%. Adicionalmente, el algoritmo de carga de dos fases y el método de estimación del estado de carga implementados en el controlador permitieron un control adecuado y monitoreo de los procesos de carga y descarga de la batería.

Conclusiones: El controlador de carga propuesto sigue el punto de máxima potencia del panel solar y permite almacenar energía en baterías de ácido-plomo a la vez que monitorea el estado de carga de estas.

Agradecimientos: Ministerio de Ciencia, Colombia.

Palabras clave: controlador de carga, seguimiento del punto de máxima potencia, sistemas fotovoltaicos desconectados.

Tabla de contenidos

	Página		
1. Introducción	3	2.3.1. Método de perturbación y observación para el MPPT	8
2. Metodología	4	2.3.2. Método de estimación del estado de carga	10
2.1. Arquitectura del controlador de carga	4	2.3.3. Métodos de carga y descarga	11
2.1.1. Selección del microcontrolador y sensores	5	3. Resultados y discusión	13
2.2. Convertidor DC-DC tipo Buck	6	3.1. Seguimiento del punto de máxima potencia	13
2.2.1. Diseño del convertidor DC-DC	7	3.2. Carga y descarga de la batería	14
2.2.2. Selección de dispositivos para el convertidor DC-DC	8	4. Conclusiones y trabajo futuro	16
2.3. Funcionamiento del controlador de carga	8	5. Contribución de autores	17
		Referencias	17

1. Introducción

La energía solar fotovoltaica es una de las principales fuentes de energía renovables para la mitigación del cambio climático. Entre sus ventajas se encuentra el hecho de que no requiere ser extraída del suelo como los combustibles fósiles, no debe transportada hasta el lugar de uso, no emite gases de efecto invernadero ni ruido, no precisa de un combustible para su funcionamiento, no necesita grandes estructuras para su implementación y el mantenimiento es mínimo, por lo cual produce un impacto ambiental muy bajo (1,3).

Los sistemas solares fotovoltaicos se pueden clasificar con base en la forma en la que interactúan con la carga en: desconectados de la red, conectados a la red e híbridos. Los sistemas fotovoltaicos desconectados de la red eléctrica (también llamados autónomos) surgen como alternativa de solución energética para aquellos lugares en los que es inviable técnica y económicamente conectar a los usuarios a redes eléctricas (3, 4). En este sentido, un sistema fotovoltaico autónomo cuenta, a grandes rasgos, con los siguientes componentes: arreglo de paneles solares, banco de baterías, controlador de carga e inversor –este último, cuando se quiere alimentar cargas de corriente alterna.

Por otro lado, el controlador de carga es uno de los principales componentes de los sistemas fotovoltaicos (SFV) autónomos, toda vez que es el encargado de transferir energía desde el panel solar hacia la batería, evitando situaciones de sobrecarga o sub-carga. Los controladores de carga se dividen principalmente en *pulse width modulation* (PWM) y *maximum power point tracking* (MPPT). Los controladores de carga PWM conectan directamente el panel solar con la batería y tienen una eficiencia alrededor del 70 %, mientras que los MPPT buscan extraer la máxima potencia del panel solar mediante algoritmos que lleven a estas condiciones de operación y circuitos de electrónica de potencia de alta eficiencia (4).

En este trabajo se implementó un SFV autónomo conformado por cuatro bloques: arreglo fotovoltaico, controlador de carga, batería y carga (5). El arreglo fotovoltaico corresponde a un panel solar de potencia pico de 30 W y con punto de máxima potencia en 18 V y 1,667 A. El controlador de carga cuenta con un microcontrolador PIC16F887 que permite el seguimiento del punto de máxima potencia mediante el algoritmo de perturbación y observación (P&O). Con respecto a la batería, se utilizó una de ácido plomo Air Glass Mat (AGM) de voltaje nominal de 12 V y con capacidad de 18 Ah. Por otro lado, la carga utilizada es una lámpara led de 6 W. Finalmente, el sistema desarrollado cuenta con una autonomía de dos días, una profundidad de descarga de la batería del 50 % y una eficiencia promedio del 84,7 %. El sistema fotovoltaico desarrollado opera de la siguiente manera: el controlador de carga interactúa con el panel solar para extraer la producción energética, transfiere la energía eléctrica hacia la batería, evitando sobrecargas, y, en condiciones óptimas de operación para la batería (estado de carga suficiente), permite que la carga sea alimentada.

Con respecto a investigaciones similares, en (5) se desarrolló un sistema fotovoltaico autónomo para la alimentación de pequeñas cargas en DC, el sistema tenía una capacidad máxima de 50 W de producción energética y contaba con un convertidor DC-DC tipo reductor para el controlador de carga.

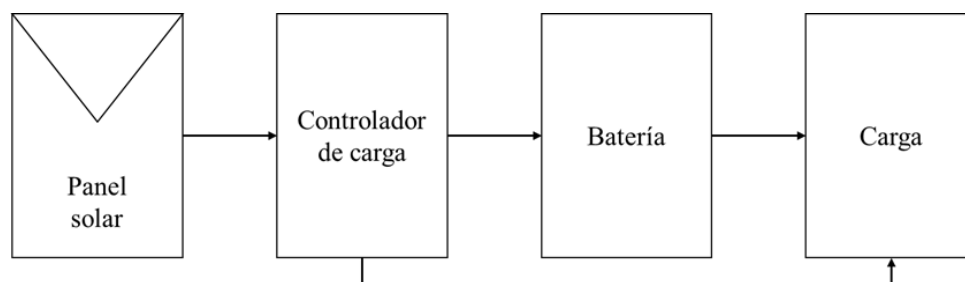


Figura 1. Diagrama de bloques de un sistema fotovoltaico autónomo

Los resultados del presente trabajo con los de (5) se diferencian en la inclusión de la eficiencia promedio del controlador; la estimación del estado de carga para baterías, que en este trabajo consistió en la fusión de dos métodos de estimación de carga (voltaje a circuito abierto y conteo de amperios-horas); y la protección contra sobrecargas y descargas profundas mediante el análisis de variables de corriente y voltaje y no solo mediante dispositivos de protección.

El controlador de carga MPPT presentado en este estudio fue comparado con un controlador de carga PWM bajo las mismas condiciones de radiación, generador fotovoltaico, batería y carga (6). El controlador MPPT propuesto demostró una mayor eficiencia. Los autores de (7) propusieron el diseño de un controlador MPPT, pero solo con convertidor DC/DC reductor, y también los compararon con un controlador de carga PWM. La eficiencia máxima reportada en el controlador MPPT fue de 92,6 %, mientras que la eficiencia máxima en este estudio fue de 96 %.

En otros estudios se han propuesto algoritmos MPPT más complejos. Por ejemplo, en (8) diseñaron un controlador MPPT no lineal de paso hacia atrás y lo compararon con controladores de lógica difusa y de perturbación y observación. Se propusieron controladores MPPT basados en redes neuronales en (9) y (10). Sin embargo, todos estos algoritmos avanzados han sido reportados como simulaciones en Matlab y no implementados en hardware real como el que se describe en este trabajo.

2. Metodología

2.1. Arquitectura del controlador de carga

En la Fig. 2 se muestra la arquitectura del controlador de carga que tiene como componente central el microcontrolador PIC16F887. Esta captura los valores de voltaje y corriente del panel solar y la batería a través del convertidor analógico a digital (ADC) que se conecta con los sensores de corriente y voltaje. Se utiliza el circuito integrado IR2110 para lograr la operación del convertidor DC/DC tipo Buck, debido a la baja diferencia de tensión entre el panel solar y la batería. El controlador de carga cuenta con un teclado matricial de 4x4 y una interfaz humano-máquina (HMI, por sus siglas en inglés) compuesta por una pantalla LCD de 4x20. Las salidas S2 y S3 se conectan a dos interruptores, uno para verificar el estado de carga inicial de la batería y otro encargado de conectar o desconectar la carga dependiendo de la energía almacenada en la batería.

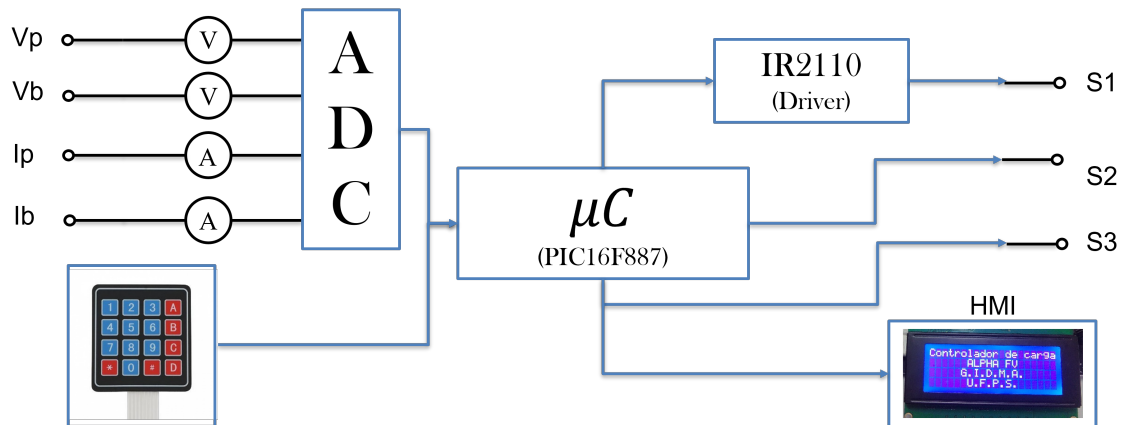


Figura 2. Arquitectura del controlador de carga

El diagrama esquemático del controlador de carga se muestra en la Fig. 3, en la cual se diferencian (de izquierda a derecha) la conexión del arreglo fotovoltaico, el convertidor DC/DC tipo Buck, la conexión de la batería y de la carga. En el diagrama se señalan los interruptores S_2 y S_3 encargados de la prueba del estado inicial de la batería y la conexión de la carga, los cuales fueron mencionados anteriormente.

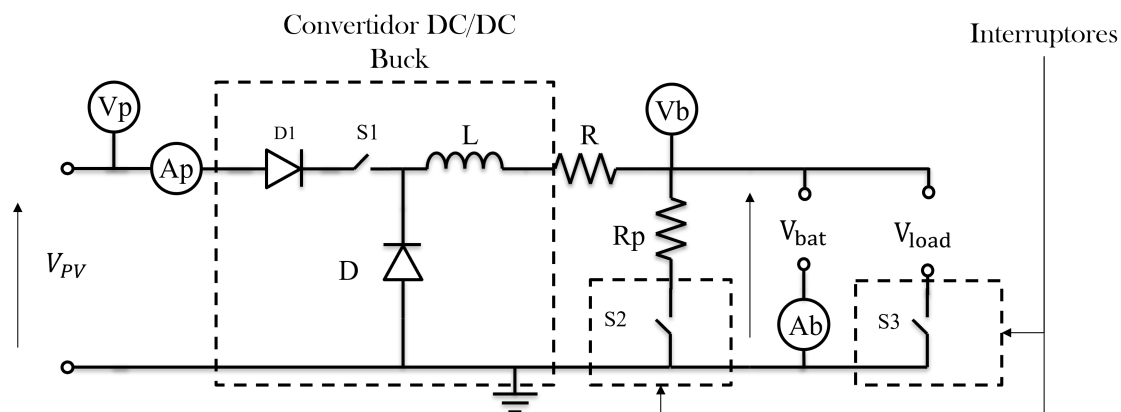


Figura 3. Diagrama esquemático del controlador de carga

2.1.1. Selección del microcontrolador y sensores

Se seleccionó el microcontrolador PIC16F887 de Microchip debido a que cuenta con 26 pines de entrada-salida, dos módulos de CCP (captura, comparación y PWM) y un módulo ADC con 14 canales. Además, tiene la capacidad de almacenar variables flotantes y de caracteres (debido al uso de la pantalla LCD y el teclado) y permite guardar en memoria ROM los datos correspondientes a la contraseña del equipo.

Debido a que la lectura del conversor analógico digital del microcontrolador es una transducción a valores de tensión, se decidió implementar sensores de corriente basados en efecto Hall. Estos operan con bajo consumo de energía y voltajes de 5 V, lo cual facilitó su implementación. En este trabajo se utilizaron dos sensores de corriente: uno para la corriente enviada desde el panel FV y otro para la corriente que circula a través de la batería. Por lo cual se seleccionó un sensor de corriente ACS714x05B y un sensor de corriente ACS714x20A, que son para lecturas de corriente máxima de 5 A y 20 A respectivamente.

El sensor de voltaje se basa en un divisor de tensión y, para retener este valor en la entrada, se utiliza un capacitor en paralelo con la salida. Con respecto a los sensores de corriente, los sensores de efecto Hall miden corriente de manera bidireccional y, en este caso, su salida es un valor de tensión comprendido entre 0 y 5 V, donde 0 A corresponde a una salida de 2,5 V.

En la Tabla I se resumen los componentes de cada sensor de voltaje y las características principales de los sensores de corriente.

Tabla I. Parámetros de los sensores

Sensor de tensión para el panel FV	Sensor de tensión para la batería	Sensores de corriente
R1 = 5 k Ω	R1 = 5 k Ω	ACS714x05B y ACS714x20A
R2 = 19 k Ω	R2 = 10 k Ω	Ancho de banda de 80 kHz
C = 1000 pF	C = 100 nF	Rango de temperatura de -40 °C hasta 150 °C

2.2. Convertidor DC-DC tipo Buck

El convertidor DC/DC reductor tiene como característica la reducción de la tensión de entrada, transportando la potencia desde la fuente hacia la carga con una alta eficiencia. Este convertidor se compone por un diodo, un interruptor conmutado (generalmente un MOSFET o un IGBT) y un filtro LC para adecuar la señal de salida a la requerida por la carga (11–13).

En la Fig. 4 se muestra el convertidor DC/DC propuesto, el cual consta de un diodo D1 que evita el flujo de corriente desde la batería hacia el panel solar en horas de baja radiación, un interruptor conmutado S, un diodo D2 como interruptor fijo, un filtro de corriente L y una resistencia R encargada de limitar la corriente de salida del convertidor. Nótese que no se utiliza un capacitor a la salida del convertidor DC/DC debido a que la carga es una batería y esta mantendrá una tensión de salida en DC aproximadamente fija que aumentará a medida que la batería cargue, por lo cual este se hace innecesario.

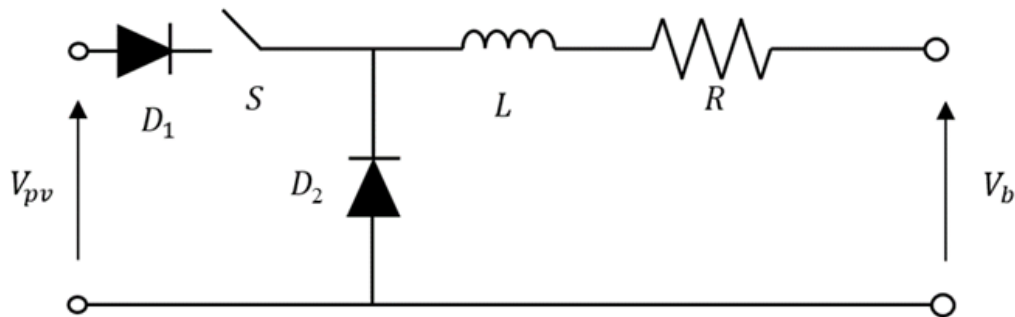


Figura 4. Convertidor DC/DC reductor propuesto

2.2.1. Diseño del convertidor DC-DC

Para la fase de diseño, se establecieron los parámetros de entrada y salida del convertidor (ver Tabla II). Estos están definidos por la potencia máxima que debe transportar el convertidor, la variación de la tensión de entrada entre el valor mínimo permitido y la tensión en el MPP. La frecuencia de los interruptores se seleccionó en 25 kHz para dar un tiempo de respuesta óptimo al algoritmo. El filtro de salida se diseñó con base en la tensión que presentará la batería entre las fases de carga, desde un nivel de descarga del 50 % hasta la tensión de flotación.

Tabla II. Parámetros del convertidor DC/DC tipo Buck

Parámetros de entrada	Parámetros de salida
$V_{in} = 15 - 18 \text{ V}$	$V_{out} = 12 - 13,7 \text{ V}$
$P_{\text{máx in}} = 90 \text{ W}$	$\Delta I_L = 5 \% I_L$
$f_s = 25 \text{ kHz}$	$I_o \text{ máx} = 7,5 \text{ A}$

El valor de inductancia mínima requerida para el filtro L se define según (Ec. (2)) (11). La Ec. (1) determina el valor de la relación de trabajo del interruptor S como la razón entre la tensión de salida y la tensión de entrada. La tensión de entrada será la entregada por el panel solar, mientras que la tensión de salida será la suma de la tensión de salida exigida por la batería y la tensión que cae en el diodo.

$$D = \frac{V_0 + V_f}{V_{inmax}} \quad (1)$$

$$L_{min} = \frac{V_{inmax} - V_{sat} - V_0}{\Delta I_L \cdot f_s} \cdot D \quad (2)$$

Sustituyendo (1) en (2) y reemplazando los valores, se obtiene una inductancia mínima de $333,3 \mu\text{H}$. Para la construcción del inductor se utilizó un núcleo E-E y conductor de cobre calibre AWG 16.

2.2.2. Selección de dispositivos para el convertidor DC-DC

El convertidor reductor está compuesto por dos interruptores, uno controlado y uno no controlado (S y D_2 , respectivamente). El interruptor S debe presentar una caída de tensión baja, por lo cual su resistencia de activación debe ser de bajo valor. Con base en las características del controlador y la corriente máxima de entrada en este, que es de 5 A conmutando a una frecuencia de 25 kHz, se escogió el MOSFET IFRZ44N.

Para D_1 y D_2 , se debe considerar que D_1 es un diodo de bloqueo, el cual debe soportar la corriente máxima de entrada al polarizarse, así como la tensión de polarización en inversa máxima, correspondiente al voltaje a circuito abierto máximo permitido, es decir 24 V. Adicionalmente, debe presentar una baja caída de potencial, comprendida entre 0,5 V y 1 V. Con respecto a D_2 , se debe tener en cuenta la frecuencia de conmutación del convertidor y la corriente promedio que lo atravesará, la cual es de aproximadamente 8 A. Por ello, D_2 debe ser un diodo de conmutación rápida con un corto tiempo de recuperación inversa. Por lo anterior, para ambos interruptores se escogió el diodo SF164.

Tabla III. Interruptores seleccionados

D1 y D2	S
Diodo: DSF164	MOSFET: IRFZ44N
$I_{m\acute{a}x} = 16 \text{ A}$	$V_{DSS} = 55 \text{ V}$
$V_{rp} = 400 \text{ V}$	$I_D = 49 \text{ A}$
$t_R = 35 \text{ ns}$	$R_{DS} = 17,5 \text{ m}\Omega$

2.3. Funcionamiento del controlador de carga

El funcionamiento del controlador de carga se describe en la Fig. 5 y consiste en varias funciones que permiten la carga o descarga de la batería, así como la estimación del estado de carga, las cuales se explicarán a detalle en las siguientes secciones. De manera general, el controlador de carga sigue estos pasos: se debe ingresar la capacidad de la batería de ácido de plomo. Con esto, se estima el estado de carga (State of Charge, SOC) inicial. Luego, se procede a medir los valores de voltaje y corriente en la batería y el panel solar a través de los sensores para determinar si el panel está en capacidad de entregar energía a la batería. Después de esto, se valida si la batería debe ser cargada al comparar el voltaje de la batería con el de absorción (este voltaje corresponde a un SOC aproximado de 80% y, para baterías de ácido plomo, es de aproximadamente 14,25 V). Se procede a aplicar el método de carga de dos fases o el método de descarga según la respuesta obtenida y, para finalizar, se estima el estado de carga actual con base en el método de conteo de amperios-hora y se reinician las mediciones de voltaje y corriente en batería y panel para monitorizar el estado de carga de la batería y el funcionamiento del sistema.

2.3.1. Método de perturbación y observación para el MPPT

El método de seguimiento del punto de máxima potencia mediante perturbación y observación (Fig. 6) consiste en modificar el voltaje del panel solar variando el ciclo de trabajo del convertidor DC/DC,

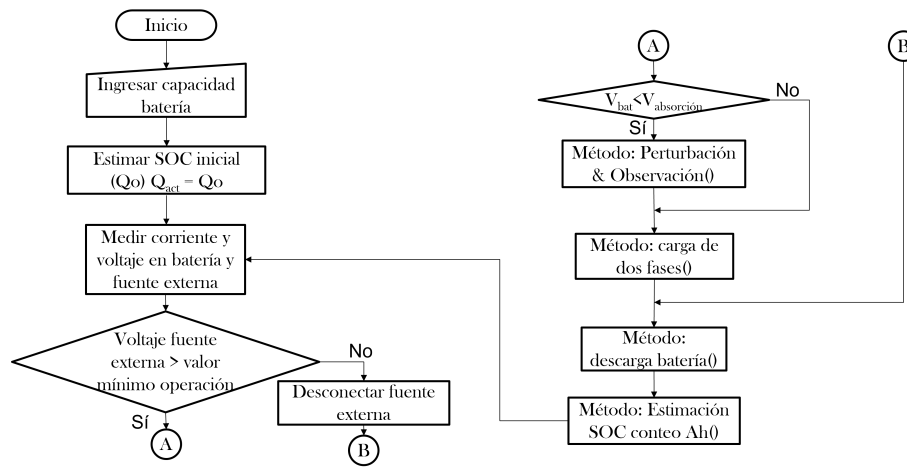


Figura 5. Algoritmo general de funcionamiento del controlador

observar la variación de potencia y decidir si aumentar o disminuir el voltaje, dependiendo de si la variación de potencia fue positiva o negativa. En caso de que la variación sea positiva y se esté a la izquierda del punto de máxima potencia (MPP, por sus siglas en inglés), se debe aumentar el voltaje para moverse a la derecha de la curva de potencia. En caso de estar a la derecha del MPP, se debe disminuir el voltaje y, en caso de que la variación sea negativa y se esté a la derecha del MPP, se debe disminuir el voltaje para moverse a la izquierda de la curva. Finalmente, si está a la izquierda del MPP, se debe aumentar el voltaje. Este proceso se repite de manera continua hasta obtener variaciones mínimas, en la cuales, se considera, está el MPP del panel solar (14,15).

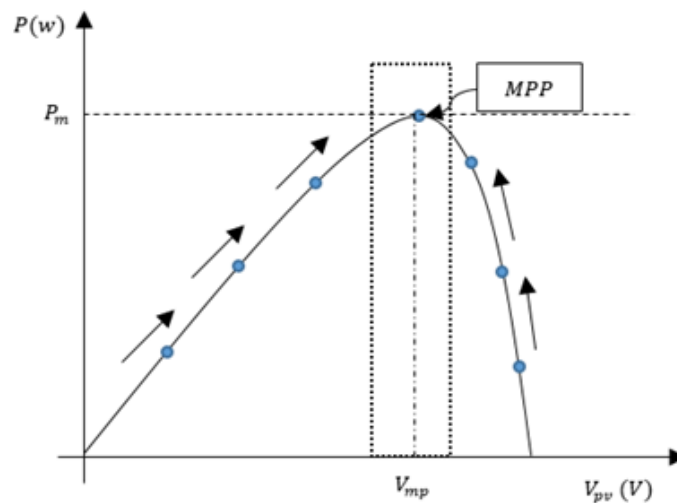


Figura 6. Método de perturbación y observación para el MPPT

El algoritmo de perturbación y observación desarrollado se expone en la Figura 6. Primero, se

calcula la potencia del panel solar y se determina el delta de potencia con la potencia anterior y la actual. Este proceso se repite para los valores de voltaje del panel solar. A continuación, se valida que el delta de potencia calculado sea menor a un umbral mínimo y, en caso de ser inferior, se iguala con el valor de potencia y voltaje. En este punto, el algoritmo terminaría, pues se ha encontrado el punto de máxima potencia.

En caso de que la diferencia de potencia anterior y actual (ΔP) sea mayor que el umbral mínimo, se valida si el voltaje estaba aumentando o disminuyendo, y si la potencia entregada estaba variando de igual manera sobre la curva de potencia versus voltaje. En caso de requerir mayor voltaje, se aumenta el ciclo de trabajo y, en caso contrario, se disminuye. En ambos casos, se valida que el ciclo de trabajo calculado se encuentre en los límites de operación, igualándose al valor mínimo o máximo según corresponda. Después de estas validaciones, se igualan la potencia y el voltaje anterior a los valores actuales, y se termina el método de perturbación y observación.

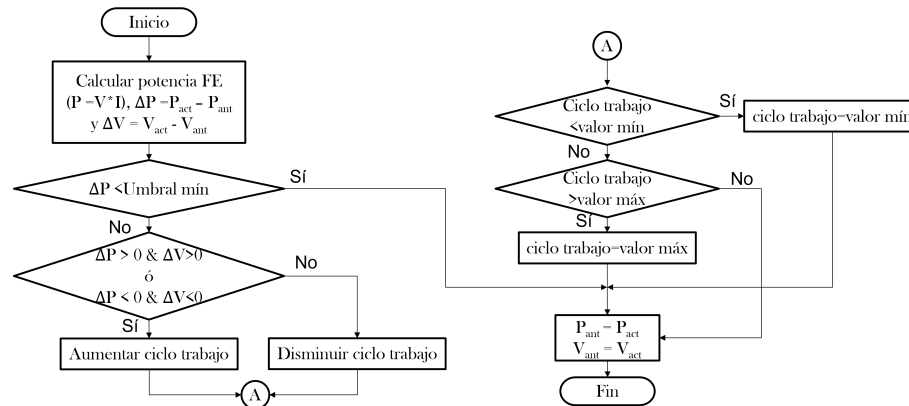


Figura 7. Algoritmo del método de perturbación y observación

2.3.2. Método de estimación del estado de carga

Para estimar el estado de carga de la batería, se combina el método de estimación de voltaje a circuito abierto y el método de conteo de amperios-hora (16, 17). Con el valor de la capacidad nominal de la batería ingresado por el usuario, y conectando una resistencia de prueba en paralelo con la batería, el algoritmo estima un estado de carga inicial, toda vez que exista una relación lineal entre el voltaje a circuito abierto y el estado de carga. El método de conteo de amperios-hora mide la corriente que fluye desde y hacia la batería y la multiplica por un diferencial de tiempo para determinar la carga que ingresa o sale de esta (Figura 7).

Para esto, se calcula la corriente en la batería para cada intervalo de tiempo (Δt) y se multiplica por la duración de este. Los valores obtenidos se convierten a unidades de Ah, como se muestra en la Ec. (3).

$$\Delta Q = I_{bat} \cdot \Delta t \quad (3)$$

ΔQ es un delta de carga que indicará si entra o sale carga de la batería, dependiendo de la dirección

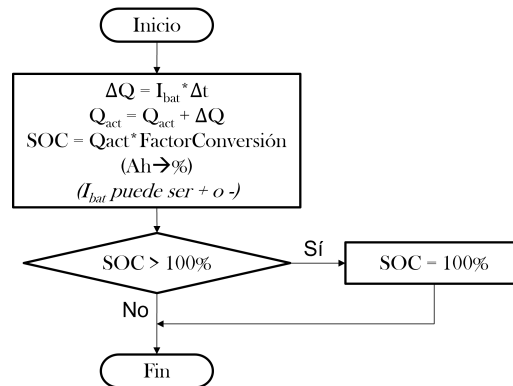


Figura 8. Algoritmo de estimación del SOC

de la corriente. Si la corriente ingresa a la batería, se considera positiva y, en caso contrario, negativa. De esta manera, ΔQ representa un valor positivo o negativo en Ah, dependiendo de si se carga o descarga la batería respectivamente.

Por lo tanto, el estado de carga actual de la batería se calcula como la suma del valor de carga actual más el delta de carga ($Q_{act} = Q_{act} \pm \Delta Q$), y el estado de carga será el valor de carga actual en amperios-hora multiplicado por un factor de conversión, lo que lo lleva a un valor porcentual. También se incluye un condicional de este método que permite llevar el estado de carga en memoria a 100% en caso de que sea calculado por encima de este valor.

2.3.3. Métodos de carga y descarga

El método de carga de la batería consta de dos fases, como se describe en (18). En la primera fase, el voltaje de carga se mantiene constante, mientras que en la batería aumenta hasta llegar al voltaje de absorción (segunda fase). Alcanzado el voltaje de absorción, este valor se mantiene constante mientras que la corriente que ingresa a la batería disminuye de forma exponencial y, finalmente, cuando la corriente que ingresa a la batería es menor al 2% de la capacidad nominal de esta, se considera que la batería ha cargado por completo.

En la Fig. 8 se muestra el algoritmo de carga. Inicialmente se pregunta si el estado de carga es del 100% o superior (esta pregunta se debe a que al estimar el SOC podría darse un valor mayor que 100% y el algoritmo debe detener el uso de la fuente externa), o si la corriente de carga es menor al 2% de la capacidad nominal (carga completa), o si esta es superior al 20% de la capacidad nominal. Esta última condición evita sobrecargas y, por lo tanto, la reducción del tiempo de vida útil de la batería. Si cualquiera de estas condiciones se cumple, el algoritmo desconecta el panel solar.

En caso de que se presenten las condiciones permitidas para cargar la batería, el algoritmo evalúa si se alcanzó el voltaje de absorción, pues, de ser el caso, el ciclo de trabajo del convertidor debe disminuirse para mantener este voltaje en la batería y reducir la corriente que ingresa a esta.

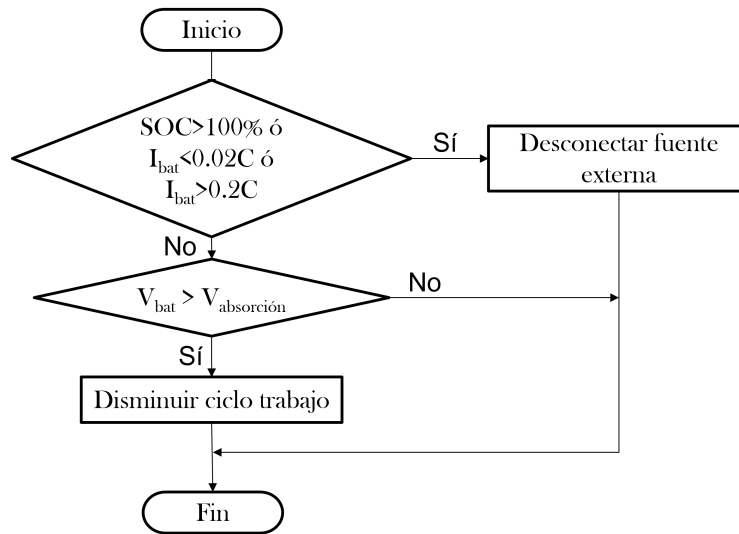


Figura 9. Algoritmo de carga de dos fases de la batería

El algoritmo de descarga (Fig. 10) condiciona la extracción de energía de la batería a los siguientes casos: que el voltaje en la batería sea el mínimo de operación para la carga, que el estado de carga no sea inferior al 50 % o que la corriente exigida por la carga no sea superior al 40 % de la capacidad nominal, pues esto conllevaría a una descarga demasiado rápida y reduciría la vida útil de la batería. Si cualquiera de estas condiciones se cumple, el algoritmo desconecta la carga y, en caso contrario, permite el suministro de energía.

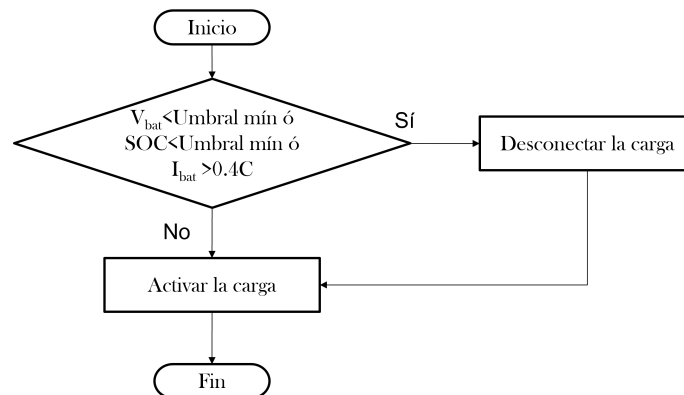


Figura 10. Algoritmo para la descarga de la batería

3. Resultados y discusión

3.1. Seguimiento del punto de máxima potencia

Para evaluar el seguimiento del punto de máxima potencia, se tomaron datos de voltaje y corriente para determinar la potencia producida por el panel solar y la consumida por la batería durante un tiempo de 2 horas y 20 minutos. En la Fig. 10 se observa que la potencia almacenada por la batería sigue el comportamiento de la potencia producida durante el tiempo de prueba y alcanza valores cercanos a esta.

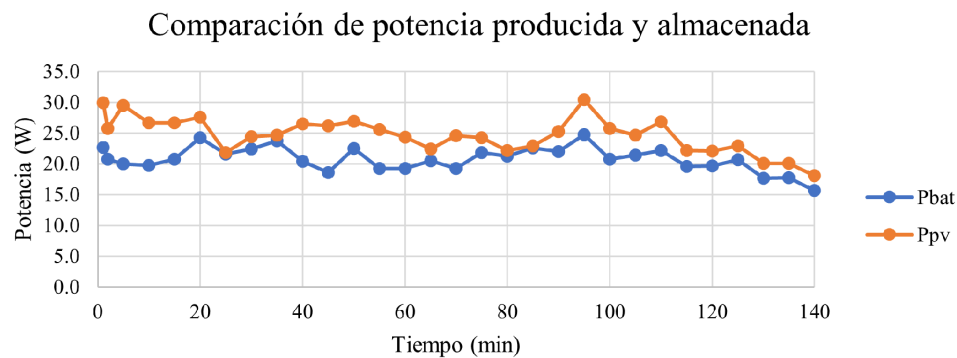


Figura 11. Comparación de potencia producida y almacenada

Con respecto al análisis de eficiencia del controlador, se obtuvo un promedio de 84,7% (línea horizontal, Fig. 12). Asimismo, se observa que la eficiencia durante el inicio del controlador varía de forma abrupta entre el 70 y el 96 %, para luego estabilizarse alrededor del valor promedio. Lo anterior implica que, pese a las variaciones de radiación, el controlador de carga MPPT desarrollado tiene una eficiencia superior a la de un controlador PWM, cuyo valor promedio es del 70 %.

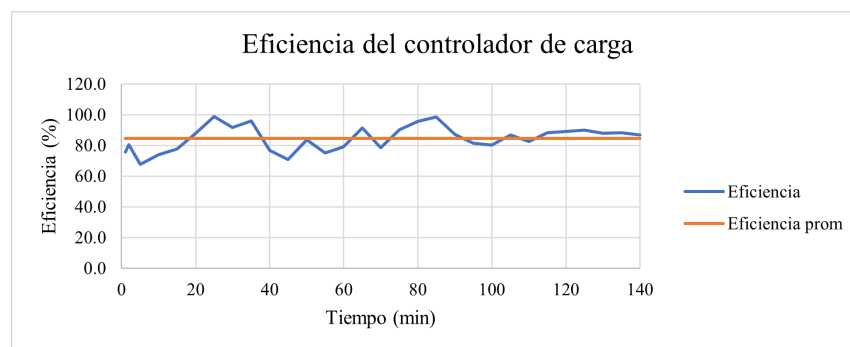


Figura 12. Eficiencia del controlador de carga

3.2. Carga y descarga de la batería

La Fig. 12 muestra los resultados del proceso de carga de dos fases de la batería, la línea sólida que acompaña la gráfica corresponde al comportamiento ideal que debería tener el controlador durante las dos fases. Durante la fase de *Bulk* (llenado), el voltaje de la batería incrementa de forma exponencial desde 12,6 hasta 14,7 V. Al alcanzar este valor, inicia la fase de absorción, durante la cual el controlador empieza a variar el ciclo de trabajo para lograr que el voltaje de la batería converja alrededor del voltaje de absorción. En el minuto 250 se muestra una caída de tensión, debido a que el controlador reduce el ciclo de trabajo hasta 0 con el propósito de mantener el voltaje en 14,7 V. En la Fig. 14 se observa la

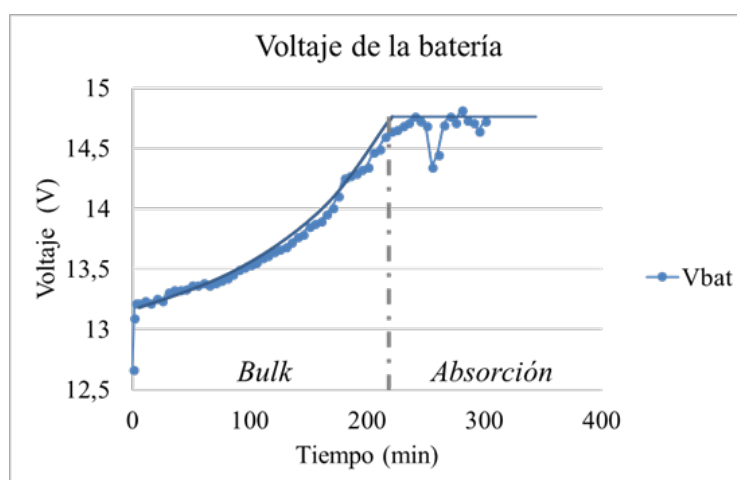


Figura 13. Voltaje de carga de la batería

corriente de carga de la batería, la cual inicialmente fluctúa entre 1,4 y 1,8 A. Luego empieza a decaer después del minuto 100 y mantiene esta tendencia hasta el minuto 200, tomando un mínimo de 1 A. En el intervalo del minuto 200 a 300, la corriente empieza a decaer por debajo de 1 A, tomando algunos picos por encima, lo que se explica debido a que durante este tiempo se encuentra en la fase de absorción el controlador, interrumpiendo la corriente con ciclos de trabajo variantes para tratar de mantener la tensión de la batería mientras que la corriente disminuye. Como resumen de esto, se observa que el controlador no solo toma en cuenta que la corriente de carga sea menor al 2% de la capacidad de la batería, sino que, al establecer un porcentaje de carga del 100%, la batería entra en la fase de tensión no regulada, por lo que el controlador realiza una comparación de dos posibles indicativos de la carga completa de la batería, optando por el método de estimación del SOC propuesto. Esto se observa al comparar que el estado de carga se acerca al 95%, mientras que la corriente que fluye hacia la batería aún no es menor al 2% de la capacidad de la batería y, aun así, el controlador reconoce que la batería ha sido recargada de forma adecuada.

Para evaluar el comportamiento del controlador de carga de la batería se realizó una prueba de descarga constante de la batería utilizando una carga de aproximadamente 6 W a 12 V. La prueba realizada tuvo una duración de 4 horas.

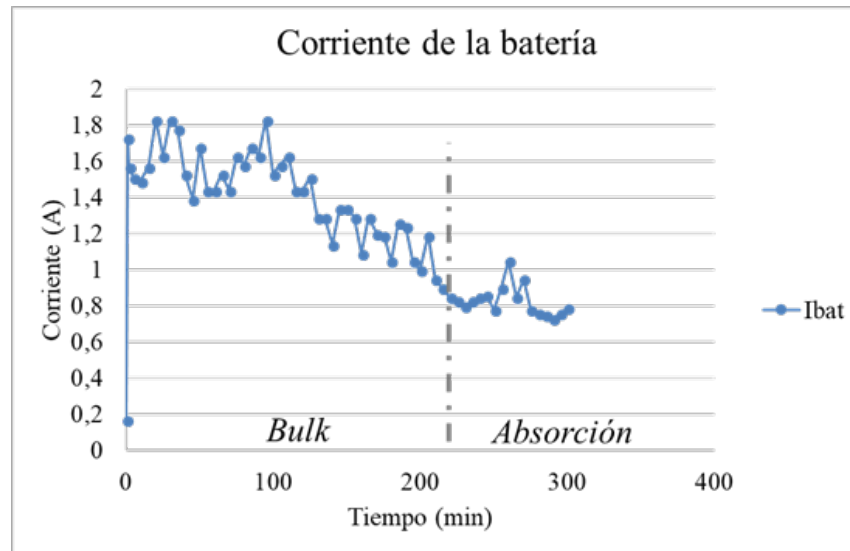


Figura 14. Corriente de carga de la batería

Como se observa en la Fig. 14, el voltaje de la batería decae paulatina y aproximadamente de forma lineal desde 12,84 hasta 12,44 V.

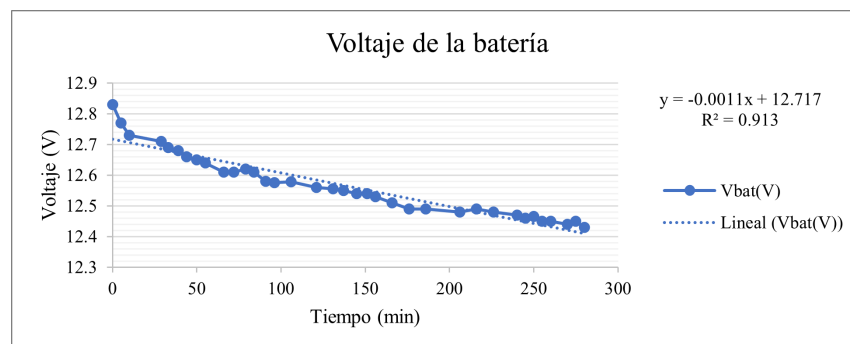


Figura 15. Voltaje de descarga de la batería

Aplicando una regresión lineal simple, se obtiene que la razón de cambio de descarga es de $-0,0011$ V/min, con un coeficiente de correlación cuadrática de $0,913$. Tomando como referencia que el umbral mínimo de voltaje en batería es de 12 V (necesarios para operar la carga), se obtiene un tiempo de funcionamiento de 652 minutos, lo que equivale a 10 horas y 52 minutos de operación constante por parte del controlador en ausencia de radiación solar para cargar la batería.

La Fig. 15 muestra la corriente de descarga de la batería, la cual varía con respecto al tiempo entre $0,56$ y $0,58$ A. Aunque la variación es mínima, se observa que, al conectar directamente la carga con la batería, esta última no entrega potencia de manera constante y se ve influenciada por el estado de carga. Lo anterior se refleja al comparar las disminuciones del voltaje y la corriente en la batería para cada

instante de tiempo.

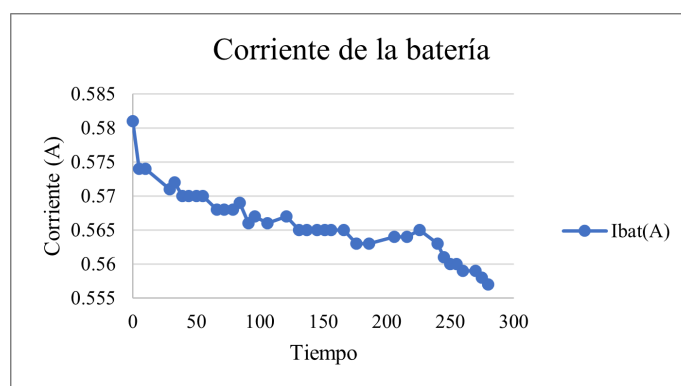


Figura 16. Corriente de descarga de la batería

4. Conclusiones y trabajo futuro

El controlador de carga desarrollado en este trabajo presentó un rendimiento acorde a las condiciones de operación, con eficiencia promedio del 84,7% y picos de hasta 96,3%, y está diseñado para transportar hasta 90 W de potencia de entrada y almacenar energía en baterías de ácido plomo de tensión nominal de 12 V. A nivel de *firmware*, el controlador de carga incluye un algoritmo de seguimiento del punto de máxima potencia basado en el método perturbación y observación, un algoritmo de carga de dos fases para baterías de ácido plomo y un algoritmo de protección para descargas y sobrecargas.

El controlador de carga cumple con el algoritmo de carga de dos fases propuesto, aunque es claro que la corriente de carga varía en función de la radiación y, por lo tanto, no se puede garantizar una corriente constante durante la fase Bulk. Durante la fase de absorción, la tensión de la batería tiende a mantenerse constante, con picos cercanos al 5% de la tensión de absorción (14,7 V), y la corriente de carga decae exponencialmente. Sin embargo, cuando el porcentaje de carga alcanza el 100% no siempre corresponde con que la corriente sea menor o igual al 2% de la capacidad nominal.

Como trabajo futuro de esta investigación, se podrían comparar los resultados de este controlador de carga con otros de similares características, pero con diferentes técnicas de estimación del punto de máxima potencia, tales como el algoritmo de conductancia incremental o algoritmos inteligentes basados en lógica difusa y redes neuronales. De esta manera, al comparar las diferentes técnicas de estimación del MPPT, se podría determinar cuál de estas presenta un mejor rendimiento y adaptación.

Asimismo, este trabajo presenta los resultados experimentales de implementación del algoritmo y del dispositivo mismo. Sería importante aumentar el tiempo de experimentación por lo menos uno o dos años, con el propósito de conocer el comportamiento de este dispositivo a lo largo del tiempo.

5. Contribución de autores

Luis Bustos: curación de datos, análisis formal, adquisición de fondos, investigación, metodología, software, validación, visualización, escritura borrador original.

Sergio Sepúlveda: conceptualización, adquisición de fondos, supervisión, escritura: revisión y edición.

Dinael Guevara: Administración de proyecto, supervisión, escritura: revisión y edición.

Byron Medina: supervisión, escritura: revisión y edición

Referencias

- [1] UPME, “Plan indicativo de expansión de cobertura de energía eléctrica 2013 - 2017”, Unidad de Planeación Minero Energética, 2013. [En línea]. Disponible en: https://www1.upme.gov.co/Documents/Libro_PIEC.pdf ↑3
- [2] A. K. Pandey, V. V. Tyagi, J. A. Selvaraj, N. A. Rahim y S. K. Tyagi, “Recent advances in solar photovoltaic systems for emerging trends and advanced applications”, *Renew. Sustain. Energy Rev.*, vol. 53, pp. 859-884, 2016. <https://doi.org/10.1016/j.rser.2015.09.043> ↑
- [3] A. Goetzberger y V. U. Hoffmann, *Photovoltaic solar energy generation, SSOS*, vol. 112, Berlín, Alemania: Springer, 2005. ↑3
- [4] V. Salas, E. Olías, A. Barrado y A. Lázaro, “Review of the maximum power point tracking algorithms for stand-alone photovoltaic systems”, *Sol. Energy Mater. Sol. Cells*, vol. 90, no. 11, pp. 1555-1578, 2006. <https://doi.org/10.1016/j.solmat.2005.10.023> ↑3
- [5] M. Pathare, V. Shetty, D. Datta, R. Valunekar, A. Sawant y S. Pai, “Designing and implementation of maximum power point tracking solar charge controller”, *2017 Int. Conf. Nascent Technol. Eng. ICNTE 2017 - Proc.*, 2017, art. 7947928. <https://doi.org/10.1109/ICNTE.2017.7947928> ↑3, 4
- [6] M. A. Laguado Serrano, E. A. Luna Paipa, L. F. Bustos Márquez y S. B. Sepúlveda Mora, “Performance comparison between PWM and MPPT charge controllers”, *Sci. Tech.*, vol. 24, no. 1, pp. 6-11, 2019. <https://doi.org/10.22517/23447214.20681> ↑4
- [7] S. Salman, X. Ai y Z. Wu, “Design of a P-&O algorithm based MPPT charge controller for a stand-alone 200W PV system”, *Prot. Control Mod. Power Syst.*, vol. 3, 2018. <https://doi.org/10.1186/s41601-018-0099-8> ↑4
- [8] M. Arsalan, R. Iftikhar, I. Ahmad, A. Hasan, K. Sabahat y A. Javeria, “MPPT for photovoltaic system using nonlinear backstepping controller with integral action”, *Sol. Energy*, vol. 170, pp. 192-200, 2018. <https://doi.org/10.1016/j.solener.2018.04.061> ↑4
- [9] J. de D. Nguimfack-Ndongmo *et al.*, “Nonlinear neuro-adaptive MPPT controller and voltage stabilization of PV Systems under real environmental conditions”, *Energy Rep.*, vol. 8, pp. 1037-1052, 2022. <https://doi.org/10.1016/j.egyrs.2022.07.138> ↑4
- [10] A. S. Saidi *et al.*, “A novel approach in stand-alone photovoltaic system using MPPT controllers & NNE”, *Ain Shams Eng. J.*, vol. 12, no. 2, pp. 1973-1984, 2021. <https://doi.org/10.1016/j.asej.2021.01.006> ↑4
- [11] M. H. Rashid, *Electrónica de potencia*, Hoboken, NJ, USA: Prentice Hall, 2001. ↑6, 7

-
- [12] D. Choudhary y A. R. Saxena, "DC-DC buck-converter for MPPT of PV System", *Int. J. Emerg. Technol. Adv. Eng.*, vol. 4, no. 7, 2014. <http://read.pudn.com/downloads788/doc/project/3116266/Incremental%20Conductance%20MPPT.pdf> ↑6
- [13] A. S. Werulkar y P. S. Kulkarni, "Design of a constant current solar charge controller with microcontroller based soft switching buck converter for solar home lighting system", *2012 - IEEE Int. Conf. Power Elec. Drives Energy Syst. (PEDES)*, 2012, art. 6484337. <https://doi.org/10.1109/PEDES.2012.6484337> ↑6
- [14] D. Sera, L. Mathe, T. Kerekes, S. V. Spataru y R. Teodorescu, "On the perturb-and-observe and incremental conductance mppt methods for PV systems", *IEEE J. Photovoltaics*, vol. 3, no. 3, pp. 1070-1078, 2013. <https://doi.org/10.1109/JPHOTOV.2013.2261118> ↑9
- [15] R. Garraoui, M. Ben Hamed y L. Sbita, "Comparison of MPPT algorithms for DC-DC boost converters based PV systems using robust control technique and artificial intelligence algorithm", *2015 IEEE 12th Int. Multi-Conf. Syst. Signals Devices (SSD15)*, 2015, art. 7348163. <https://doi.org/10.1109/SSD.2015.7348163> ↑9
- [16] S. Piller, M. Perrin y A. Jossen, "Methods for state-of-charge determination and their applications", *J. Power Sources*, vol. 96, no. 1, pp. 113-120, 2001, [https://doi.org/10.1016/S0378-7753\(01\)00560-2](https://doi.org/10.1016/S0378-7753(01)00560-2) ↑10
- [17] C. D. Burgos Mellado, "Estimación del estado de carga para un banco de baterías basada en modelación difusa y filtro extendido de Kalman," tesis de maestría, Univ. de Chile, 2013. <https://repositorio.uchile.cl/handle/2250/114516> ↑10
- [18] Schneider Electric, "Schneider electric handbook for solar installers", 2022. [En línea]. Disponible en: https://download.schneider-electric.com/files?p_Doc_Ref=Solar-Installer-Handbook_UL&p_enDocType=Brochure&p_File_Name=20230120-Solar-Installer-Handbook_UL.pdf ↑11
-

Luis F. Bustos-Márquez

He received the BS degree in Electronics Engineering in 2016 from Universidad Francisco de Paula Santander in Cúcuta, Colombia. He worked as an adjunct professor at the same university from 2019 to 2022. He is currently pursuing a PhD in the Electrical and Computer Engineering Department of the University of Delaware. Since 2022, he has been a research assistant at the Institute of Energy Conversion of the University of Delaware. His research interests include renewable energy integration, battery energy storage systems, microgrids, power energy systems, and machine learning applications. **Email:** luisfernandobm@ufps.edu.co

Sergio B. Sepúlveda-Mora

He received the bachelor's degree in Electronics Engineering in 2007 from Universidad Francisco de Paula Santander in Cúcuta, Colombia. He received his Master of Science in Electrical and Computer Engineering in 2012 and his PhD in 2022 from University of Delaware, Newark, DE, USA. From 2017 to 2022, he was a research and teaching assistant at the Institute of Energy Conversion of the University of Delaware. Since 2016, he has been an associate professor with the Electricity and Electronics

Department of Universidad Francisco de Paula Santander. His research interests include the modeling and simulation of microgrids, renewable energy integration, power energy systems, data science, and machine learning applications.

Email: sergio.sepulveda@ufps.edu.co

Dinael Guevara-Ibarra

He received the BS degree in Electrical Engineering (1989) from Universidad Industrial de Santander, in Bucaramanga, Colombia, the MS degree in Telecommunications Engineering (2006) from Universidad Nacional Experimental Politécnica Antonio José de Sucre, in Barquisimeto, Venezuela, and a PhD (2012) from Universidad Pontificia Bolivariana, in Medellín, Colombia. He is currently a professor of Electronics Engineering at the Department of Electrical and Electronics Engineering, Universidad Francisco de Paula Santander, Cúcuta, Colombia.

Email: dinaelgi@ufps.edu.co

Byron Medina-Delgado

He received his bachelor's degree in Electronics Engineering in 2003 from Universidad Francisco de Paula Santander in Cúcuta, Colombia. He received his Master of Science in Electronics Engineering in 2009 from Universidad Nacional Experimental del Táchira, in San Cristóbal, Venezuela, and a Ph.D. in 2019 from Universidad Rafael Bellosillo Chacín, Maracaibo, Venezuela. Since 2013, he has been an associate professor at the Electricity and Electronics Department of, Universidad Francisco de Paula Santander.

Email: byronmedina@ufps.edu.co



Research

Defending State-Feedback Based Controllers Against Sensor Attacks

Defensa de los controladores basados en realimentación de estado contra ataques de sensores

Luis Francisco Cómbita¹  , Nicanor Quijano² , and Álvaro A. Cárdenas³

¹Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

²Universidad de Los Andes, Bogotá, Colombia.

³University of California, Santa Cruz, CA, USA.

Abstract

Context: This paper is motivated by the need to improve the resilience of industrial control systems. Many control systems currently operating in the industry were designed and implemented before the boom in communications (wired and wireless networks) within industrial control systems. However, nowadays, they operate connected to the communications network. This increase in connectivity has made these systems susceptible to cyber-attacks that seek to deteriorate the proper operation of the control loop, even when affecting only one sensor.

Method: Concepts from fault tolerant control and classic control theory are used to show that it is possible to reconstruct the system state without (any) one of the system outputs. This is employed in the control action signal recalculation through an algorithm of attack detection and isolation, in order to prevent an attack being fed back to the system, mitigating its effect. This work shows the effectiveness of our proposal with simulations on a four tanks testbed using Matlab and Simulink.

Results: This work demonstrates that a bank of unknown input observers can be designed to recover true information from attacked sensors, *i.e.*, the information without the effect of the attack. Therefore, the estimate obtained from said observers can be utilized for computing a control action that mitigates the effect of the attack.

Conclusions: This mitigation prevents a single sensor attack from significantly impairing the action of low-level controllers, improving the resilience of the system by only modifying the digital controller architecture. This development is limited to cyber-attacks on system sensors happening one at a time, which can still seriously compromise the system behavior. Future work will address the extension of the results to situations with simultaneous attacks on more than one sensor and/or consider attacks on the control system actuators.

Keywords: cyber-physical systems, unknown input observer, sensor attack, false data injection.

Article history

Received:
15th / Nov / 2022

Modified:
26th / Apr / 2023

Accepted:
05th / May / 2023

Ing., vol. 28, no. 2,
2023. e20094

©The authors;
reproduction right
holder Universidad
Distrital Francisco
José de Caldas.

Open access



*  **Correspondence:** lfcombita@udistrital.edu.co

Resumen

Contexto: La motivaci3n de este art3culo es la necesidad de mejorar la resiliencia en sistemas de control industriales. Muchos de los sistemas de control que operan actualmente en la industria fueron dise1ados e implementados antes de que se diera el *boom* de las comunicaciones (cableadas a inal3mbricas) dentro de los sistemas de control industrial. Sin embargo, estos sistemas funcionan conectados en red. Dicho incremento en la conectividad ha hecho que estos sistemas sean susceptibles a ataques cibern3ticos que buscan degradar la operaci3n adecuada del lazo de control con tan solo afectar un sensor.

M3todo: Se utilizan conceptos de control tolerante a fallos y teor3a de control cl3sica para demostrar que es posible estimar el estado del sistema sin una de las salidas del sistema (cualquiera). Esto se emplea para recalcular la acci3n de control a partir de un algoritmo que detecta y aisla el ataque, evitando que este sea realimentado al sistema y, por ende, mitigando su efecto. Este trabajo muestra la efectividad de nuestra propuesta con simulaciones desarrolladas sobre Matlab y Simulink para un sistema de cuatro tanques.

Resultados: Este trabajo demuestra que se puede dise1ar un banco de observadores de entrada desconocida para recuperar la informaci3n real de sensores atacados, *i.e.*, la informaci3n del sensor sin el efecto del ataque. Por lo tanto, el estimado obtenido de dicho banco de observadores puede utilizarse para recalcular la acci3n de control que mitigue el efecto del ataque.

Conclusiones: Esta mitigaci3n previene que ataques en alg3n sensor puedan comprometer significativamente el desempe1o del sistema, mejorando su resiliencia a partir 3nicamente de la modificaci3n de la arquitectura del controlador digital. Este desarrollo est3 limitado a ataques que ocurren uno a la vez en cualquier sensor, pero que a3n as3 pueden afectar fuertemente el desempe1o del sistema. Los trabajos futuros abordarán la extensi3n de los resultados a situaciones donde ocurran ataques simult3neos en m3s de un sensor y/o considerarán ataques en los actuadores del sistema.

Palabras clave: sistemas ciberf3sicos, observador de entrada desconocida, ataques en sensores, inyecci3n de datos falsos.

Table of contents

	Page		
1. Introduction	3	5.1. System model	14
2. Existing system setup	5	5.2. Closed-loop system behavior . . .	15
3. Unknown input observers for the recovery of the state without the effect of the attack	7	5.3. UIOs bank design	16
4. Detection, isolation and mitigation	12	5.4. Impact of the attack on the system	18
5. Numerical results	14	5.5. Attack mitigation	19
		6. Conclusions	20
		7. Acknowledgment	20
		8. Contribution of authors	20
		References	20

1. Introduction

The growing incorporation of sensors, actuators, and controllers with digital communication capabilities in process control systems has enabled data collection and analysis from the operational physical world, which allows optimizing manufacturing processes to increase efficiency and reduce costs. Consequently, the inclusion of these digital capabilities opens an opportunity for intruders to gain knowledge of process data and use it fraudulently. However, most of these episodes are not publicly reported, unlike the enterprise cyber-threats and incidents that are widely documented (1).

In the scientific literature, there is evidence of the concern about the security of control systems of critical infrastructures for at least the two last decades. However, it is just about twelve years since some reports of successful cyber-attacks led public policies and funds to increase the security of cyber-physical systems. Some of the vulnerabilities of the process control systems show the need to find tools to build more secure control systems. Public reports of computer attacks on control process systems demonstrate the relevance of these malicious actions since 2000. As a starting point for a discussion on security issues in process control systems, a brief description of the first three known attacks is shown below.

In March 2000, the wastewater system of the Maroochy Shire Council (Queensland) reported issues with its pumping stations. Radiofrequency communications between pumping stations and the control center failed. Hence, the pumps had an improper operation, and the alarms did not signal the faults to the system operator (2).

Stuxnet has been widely considered as the first computer virus to attack a process control system. This computer worm was first detected in June 2010. The purpose was to attack an uranium enrichment process control based on a Supervisory Control And Data Acquisition (SCADA) system. The virus penetrated through a USB memory to infect the whole corporate network and went undetected. At the same time, as the virus identified the machines where designated people automated the manufacturing process based on Siemens Program Logic Controllers (PLCs), the worm uploaded the last updated file running on the controller to the Internet. The virus exploited a 'zero-day' vulnerability before the security experts identified it. After achieving the domination of the target, the intruders could spy, in detail, on the operation of the control systems and generate actions that could degrade their performance in the worst way. In this regard, rotor speed and over-pressure strategies were simultaneously used on the centrifuges to attack the uranium enrichment process. Modifying the rotor speed can cause a severe decrease in the useful life of the centrifuge. A chronic over-pressure condition inside the centrifuge can hinder uranium enrichment and erroneously indicate the end of the centrifuge's useful life, which implies the need to replace the centrifuging equipment. Tamper control actions did not generate any alarm activation because the data obtained from the correct operation of the process supplanted the genuine values of the measurements of abnormal situations (3,4).

In 2015, the first known successful cyber-attack on a power grid was reported. In this attack, 30 substations of the Ukrainian power distribution network were successively attacked, which caused

several outages (5). As a result of this incident, about 230.000 people were left without electricity for up to six hours. Similar to the aforementioned cases, there are more incidents across several industries.

The security of cyber-physical systems (CPSs) is an issue that has currently sparked great attention in researchers. Among the different topics developed by the control systems community over the years, there are definitions of cyber-attacks, the design of effective attacks, various techniques for attack detection and isolation, and the design of resilient controllers, as well as some works related to attack mitigation, all of them with variations for linear and nonlinear systems, with or without noise, and for either continuous or discrete-time systems. Recent surveys and works in CPS security (6–10) agree on the fact that cyber-attack response has received considerably less attention than attack detection and isolation, which is the gap to which this work contributes.

A relatively new topic related to the one discussed in this paper is *secure estimation*, which consists of the capability to reconstruct the system state even when the CPS of interest is under attack. The authors of (11) establish the maximum number of allowed corrupted sensors in order to be able to recover the information from all sensors in the system. This work requires the corrupted sensors not to change over time. In (12), a more flexible condition for the structure of the corrupted sensors is considered, as well as the practical incidence of noise. However, these works assume that there are low-level control loops that cannot be accessed by attackers, but, in cyber-security, it is well known that this feature is usually related to the available budget of the attacker (13). Besides, an attack on one sensor of a low-level controller is enough to cause changes in the stability of the overall system, which can have catastrophic consequences, as demonstrated in (14).

In the context of multi-sensor schemes, where redundant information helps to improve the security and accuracy of state estimation, some works can be mentioned: (15–17). A particular approach to achieving a fast-secure estimation is presented in (15), where the authors leverage the advantage of sensor redundancy in some systems. Therein, a quantification of the measurements' degree of similarity is defined, which allows for a convenient categorization of the sensors and increases the computational efficiency of the state estimation. For nonlinear systems, in (16), methods of nonlinear fusion estimation in a distributed framework are utilized in order to obtain a secure estimation, in cases where sensor measurements are corrupted with false data injection attacks. In this approach, no prior information about the attack is necessary. In (17), the encryption of the information transmitted and received through a wireless channel of a control system is shown to be effective against linear deception attacks. This work provides valid results even if the attacker has information about the watermark used to encrypt the innovation sequence.

However, the aforementioned redundancy is not a typical property of industrial control systems. The authors of (18) develop an adaptive controller for time-invariant and time-varying deception attacks. The adaptive controller is also effective when both a sensor attack and an actuator attack coexist. They also provide an in-depth analysis of the stability of the control system under attack. In contrast with our work, this strategy requires the total design of a new controller and cannot be used to improve the security of legacy control systems.

Bearing this in mind, this study developed a strategy for low-level controllers in industrial control systems or critical infrastructure. Our goal is to use analytical redundancy to prevent attacks in these low-level controllers from harming the operation of the whole system.

Our main contributions focus on a low-budget defense strategy design and the efficient implementation of this mitigation strategy, which can be summarized as follows:

1. This work shows that a system state without the effect of the attack can be recovered with the design of a bank of unknown input observers (UIOs), as well as providing the necessary conditions for the existence of a solution for each UIO.
2. The mitigation algorithm and the bank of UIOs can be developed in the same PLC where the local controller is implemented.
3. This UIO design shows how to choose the decoupling matrix, which allows the state estimation to be achieved without the effect of the attack.
4. The way in which disturbances affect a system is usually assumed to be known. Hence, it can be used in the design of the UIOs. This is not a valid assumption in the case of the disturbances produced by attacks on sensors. Therefore, this work makes some remarks on how to decouple the disturbance from the original system to be able to estimate the system state using a bank of UIOs.

The remainder of the paper is organized as follows. Section 2 presents the general setup of an existing, working control system. Section 3 shows how to reconstruct the original system state without the effect of the attack. Afterwards, Section 4 depicts the general scheme to detect and isolate attacks, in order to be able to reconstruct the system state. Later, in Section 5, system state reconstruction is applied to the four tanks system benchmark (19), with the aim to show how a system can recover its controlled operation even in the presence of attacks. Finally, some conclusions are drawn, and future works are proposed.

2. Existing system setup

This study considers a physical system that works with a digital controller in a closed loop through a network, *i.e.*, an existing cyber-physical control system, as depicted in Fig. 1, without considering the attack and the mitigation mechanism (yellow blocks). The controller allows the system to maintain a specific behavior, where the system would normally be able to follow a reference input and maintain specific characteristics in the transient response. Since the real system is considered to be generally nonlinear, its behavior is modeled as

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \boldsymbol{\eta}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \boldsymbol{\zeta}(t),\end{aligned}\tag{1}$$

where $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$, and $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ are the system state, input, and output, respectively. The vectors $\boldsymbol{\eta}$ and $\boldsymbol{\zeta}$ represent noise, disturbances, or variations in the model parameters, related to the system state in the first equation and to the system output in the second equation. Since the closed-loop system works with a digital controller, this study assumes that the controller is designed with the more

straightforward approximation, *i.e.*, a noiseless discrete-time linear approximation of the system, which can be expressed as

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[k+1] &= \mathbf{A} \mathbf{x}[k] + \mathbf{B} \tilde{\mathbf{u}}[k] + \mathbf{E} d[k], \\ \mathbf{y}[k] &= \mathbf{C} \mathbf{x}[k], \end{aligned} \quad (2)$$

where $\mathbf{x}[k] \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{\mathbf{u}}[k] \in \mathbb{R}^m$, and $\mathbf{y}[k] \in \mathbb{R}^p$ are the discrete-time system state, input, and output, respectively. The signal $d[k] \in \mathbb{R}$ corresponds to disturbances such as noise, nonlinearities, model inaccuracies, or uncertainties; and the matrix $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ represents how the disturbances affect the system. Note that the system input is not $\mathbf{u}[k]$ but $\tilde{\mathbf{u}}[k]$, which represents $\mathbf{u}[k]$ after passing through the network. $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ and $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ are the dynamic, input, and output matrices of the system, respectively. This kind of system model defined by (2) can be obtained from either: (i) modeling the system, linearizing it, and discretizing it; or (ii) learning the discrete-time model from input-output data, using an adequate sampling time according to the closed-loop system's dynamical behavior (20).

The controller that works with the system is considered to be a tracking control with state feedback, *i.e.*, a servo system (21), represented as

$$\begin{aligned} \mathbf{v}[k] &= \mathbf{y}^r[k] - \tilde{\mathbf{y}}[k] + \mathbf{v}[k-1], \\ \mathbf{u}[k] &= \mathbf{K}_I \mathbf{v}[k] - \mathbf{K}_S \hat{\mathbf{x}}[k], \end{aligned} \quad (3)$$

where $\mathbf{y}^r[k] \in \mathbb{R}^p$ is the system reference input (the one to be followed by the system), $\tilde{\mathbf{y}}[k]$ represents $\mathbf{y}[k]$ after passing through the network, and $\hat{\mathbf{x}}[k]$ is the estimated state. Note that the first equation in (3) expresses the integrator state (which, in this case, is considered as an interior variable of the controller in Fig. 1), where $\mathbf{v}[k] \in \mathbb{R}^p$ is a discrete-time approximation of the error integral, with the error defined as $\mathbf{e}[k] = \mathbf{y}^r[k] - \mathbf{y}[k]$. The control signal $\mathbf{u}[k]$ is obtained as a linear combination of the states, through the state feedback gain $\mathbf{K}_S \in \mathbb{R}^{m \times n}$, and a linear combination of the error integral, through the integral gain $\mathbf{K}_I \in \mathbb{R}^{m \times p}$.

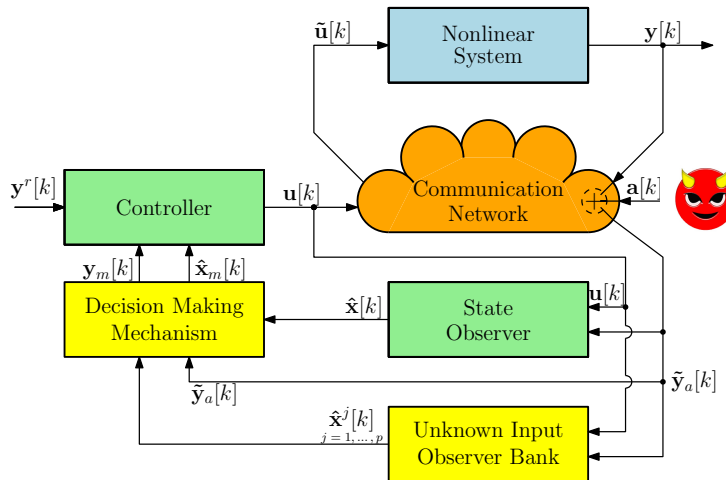


Figure 1. Control systems with mitigation of sensor attacks mechanism included

As usual, it is assumed that not all the system states are available for implementing the part of the controller related to state feedback. In order to estimate the system states, a full-order current observer is used (20,22), with the following dynamics:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}}[k] &= \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}[k-1] + \mathbf{B} \mathbf{u}[k-1], \\ \hat{\mathbf{x}}[k] &= \bar{\mathbf{x}}[k] + \mathbf{L} (\tilde{\mathbf{y}}[k] - \mathbf{C} \bar{\mathbf{x}}[k]),\end{aligned}\quad (4)$$

where $\bar{\mathbf{x}}[k]$ is the predicted estimate, which is based on a model prediction from the previous time estimate, corrected by the measurement of the output, becoming $\hat{\mathbf{x}}[k]$. $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ is the observer gain that guarantees that the matrix $\mathbf{A} - \mathbf{L} \mathbf{C} \mathbf{A}$ is Hurwitz, when the pair $(\mathbf{A}, \mathbf{C} \mathbf{A})$ is observable. It is assumed that the controller and the observer have been properly designed.

Since the system and the controller are coupled by a network, the control signal received by the system is not $\mathbf{u}[k]$ but $\tilde{\mathbf{u}}[k]$, and the output signal received by the controller is not $\mathbf{y}[k]$ but $\tilde{\mathbf{y}}[k]$, where

$$\tilde{\mathbf{u}}[k] = \sum_{i=0}^q \delta[\tau_k - i] \mathbf{u}[k-i] \quad (5)$$

and

$$\tilde{\mathbf{y}}[k] = \sum_{i=0}^q \delta[\tau_k - i] \mathbf{y}[k-i]. \quad (6)$$

The Kronecker delta function $\delta[\tau_k - i]$ is used to represent the random communication delays and the missing stochastic data. The time delay τ_k is a random variable considered to be an integer multiple of the sampling time T_s , introduced to describe the possibility of data missing, as well as the size of the delay at time instant k (23).

3. Unknown input observers for the recovery of the state without the effect of the attack

Consider the closed-loop control system of the previous section with a model such as that in (2), a controller as in (3), and an observer as in (4). The system is disturbed with a sensor attack (after passing through the network), with

$$\tilde{\mathbf{y}}_a[k] = \tilde{\mathbf{y}}[k] + \mathbf{F}_a \mathbf{a}[k], \quad (7)$$

where $\mathbf{a}[k]$ is a vector of p functions that represents the attack signals, and $\mathbf{F}_a \in \mathbb{R}^{p \times p}$ represents the outputs affected by the attack $\mathbf{a}[k]$, *i.e.*, only one output at a time.

In this particular case, for the system in (2), the disturbances $\mathbf{d}[k]$ are considered to represent the state variables' alteration due to the change in the control signal produced by a sensor attack. Subsequently, under the assumption that only one attack is occurring concurrently, it is considered that these modifications can be encapsulated by a single signal. Therefore, the matrix \mathbf{F}_a represents the unattacked outputs acting on the system state.

This work takes interest in estimating the output signals without the effect of the attack, in order to compensate the control action signal and prevent the attack from feeding back the system and causing

it to collapse. A bank of p UIOs was used, one for each sensor that could be attacked, where each UIO does not take consider the j^{th} output. That is to say,

$$\tilde{\mathbf{y}}_a^j[k] = \mathbf{M}^j \tilde{\mathbf{y}}_a[k],$$

where $\mathbf{M}^j \in \mathbb{R}^{(p-1) \times p}$ is a transformation matrix equal to an identity one without the j^{th} row, with $j = 1, 2, \dots, p$. The hypothesis behind using UIOs without one of the outputs is that, since there is no more than one attack at the same time, if the attacked output is not involved, then an unbiased estimation of all the state variables of the system can be achieved – and, therefore, the outputs.

The j^{th} UIO is described using the following state-space representation, which is inspired by (24),

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^j[k+1] &= \mathbf{F}^j \mathbf{z}^j[k] + \mathbf{T}^j \mathbf{B} \mathbf{u}[k] + \mathbf{K}^j \tilde{\mathbf{y}}_a^j[k], \\ \hat{\mathbf{x}}^j[k+1] &= \mathbf{z}^j[k+1] + \mathbf{H}^j \tilde{\mathbf{y}}_a^j[k+1], \end{aligned} \quad (8)$$

where $\mathbf{z}^j[k] \in \mathbb{R}^n$ is the dynamic (first) approximation of the estimated state vector, and $\hat{\mathbf{x}}^j[k] \in \mathbb{R}^n$ is the estimated state vector, which corresponds to the UIO that does not use the information of the j^{th} output for the estimation process, i.e., $\tilde{\mathbf{y}}_a^j[k]$ is the output vector $\tilde{\mathbf{y}}_a[k]$ whose j^{th} component is eliminated. $\mathbf{F}^j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{T}^j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{K}^j \in \mathbb{R}^{n \times (p-1)}$, and $\mathbf{H}^j \in \mathbb{R}^{n \times (p-1)}$ are design matrices such that the estimated state of the UIO, $\hat{\mathbf{x}}^j[k]$, converges to $\mathbf{x}[k]$ when there is no attack, i.e., $\mathbf{F}_a = \mathbf{0}$. When the j^{th} UIO (8) is applied to the system (3), decomposing $\mathbf{K}^j = \mathbf{K}_1^j + \mathbf{K}_2^j$, the estimation error ($\mathbf{e}^j[k] = \mathbf{x}[k] - \hat{\mathbf{x}}^j[k]$) is governed by the following equation

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^j[k+1] &= \mathbf{F}^j \mathbf{e}^j[k] - \mathbf{K}_1^j \mathbf{F}_a^j \mathbf{a}[k] - \mathbf{H}^j \mathbf{F}_a^j \mathbf{a}[k+1] + \\ &\quad - \left[\mathbf{F}^j - (\mathbf{I} - \mathbf{H}^j \mathbf{C}^j) \mathbf{A} + \mathbf{K}_1^j \mathbf{C}^j \right] \mathbf{x}[k] + \\ &\quad - \left[\mathbf{T}^j - (\mathbf{I} - \mathbf{H}^j \mathbf{C}^j) \right] \mathbf{B} \mathbf{u}[k] + \\ &\quad - \left[\mathbf{K}_2^j - \mathbf{F}^j \mathbf{H}^j \right] \tilde{\mathbf{y}}_a^j[k] + \\ &\quad + (\mathbf{I} - \mathbf{H}^j \mathbf{C}^j) \mathbf{E}^j d^j[k], \end{aligned} \quad (9)$$

Note that \mathbf{E}^j is used instead of \mathbf{E} and $d^j[k]$ instead of $d[k]$, indicating that each UIO considers its own perturbations. That is because, for each UIO, a way to approximate the control action modification is to assign more weight to the state variables related with the outputs used directly by the j^{th} UIO.

Consider the UIOs' behavior, neglecting the effect of the attack on the output sensors ($\mathbf{F}_a = \mathbf{0}$), in order to see how the UIOs estimate the system state. For this case, $\tilde{\mathbf{y}}_a^j[k] = \tilde{\mathbf{y}}^j[k]$ and (9) yield

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^j[k+1] &= \mathbf{F}^j \mathbf{e}^j[k] + (\mathbf{I} - \mathbf{H}^j \mathbf{C}^j) \mathbf{E}^j d^j[k] + \\ &\quad - \left[\mathbf{F}^j - (\mathbf{I} - \mathbf{H}^j \mathbf{C}^j) \mathbf{A} + \mathbf{K}_1^j \mathbf{C}^j \right] \mathbf{x}[k] + \\ &\quad - \left[\mathbf{T}^j - (\mathbf{I} - \mathbf{H}^j \mathbf{C}^j) \right] \mathbf{B} \mathbf{u}[k] + \\ &\quad - \left[\mathbf{K}_2^j - \mathbf{F}^j \mathbf{H}^j \right] \tilde{\mathbf{y}}^j[k]. \end{aligned} \quad (10)$$

It is known that a proper state estimation is achieved when the estimation error for the j^{th} UIO takes the following form:

$$\mathbf{e}^j[k+1] = \mathbf{F}^j \mathbf{e}^j[k]. \quad (11)$$

In addition, the eigenvalues of \mathbf{F}^j must be stable in order for the estimation error to converge to zero. This implies that, for the UIO to estimate the state, all the terms on the right side of (10) but the first must be equal to zero. That is, it must be ensured that

$$\mathbf{E}^j = \mathbf{H}^j \mathbf{C}^j \mathbf{E}^j, \quad (12)$$

$$\mathbf{F}^j = (\mathbf{I} - \mathbf{H}^j \mathbf{C}^j) \mathbf{A} + \mathbf{K}_1^j \mathbf{C}^j, \quad (13)$$

$$\mathbf{T}^j = \mathbf{I} - \mathbf{H}^j \mathbf{C}^j, \quad (14)$$

$$\mathbf{K}_2^j = \mathbf{F}^j \mathbf{H}^j. \quad (15)$$

When considering the effect of the attack on the outputs ($\mathbf{F}_a \neq \mathbf{0}$) while holding (12)-(15), the estimation error of the j^{th} UIO is governed by

$$\mathbf{e}^j[k+1] = \mathbf{F}^j \mathbf{e}^j[k] - \mathbf{K}_1^j \mathbf{F}_a^j \mathbf{a}[k] - \mathbf{H}^j \mathbf{F}_a^j \mathbf{a}[k+1], \quad (16)$$

which, depending on the form of $\mathbf{H}^j \mathbf{F}_a^j$ and $\mathbf{K}_1^j \mathbf{F}_a^j$, will eventually converge proportionally to $\mathbf{a}[k]$ or zero. That is to say, if there is an attack on the j^{th} output, and since the j^{th} UIO does not consider that output, then $\mathbf{e}^j[k] \rightarrow \mathbf{0}$, i.e., $\hat{\mathbf{x}}^j[k] \rightarrow \mathbf{x}[k]$, which produces the estimation of the outputs without the effect of the attack. On the other hand, if there is an attack on the i^{th} output, and since the j^{th} UIO considers that output, $\mathbf{e}^j[k] \propto \mathbf{a}[k]$, and the estimated state will not aid in recovering the outputs without the effect of the attack.

In order to design the UIOs, Eqs. (12)-(15) need to be solved. Note that it is only necessary to solve (12) for \mathbf{H}^j , which allows solving the rest of the equations if it can be ensured that $(\mathbf{A}_1^j, \mathbf{C})$ is detectable, with $\mathbf{A}_1^j = (\mathbf{I} - \mathbf{H}^j \mathbf{C}^j) \mathbf{A}$. A Lemma addressing the existence of a solution to (12) is introduced below:

Lemma 3.1. Eq. (12) is solvable if and only if

$$\text{rank}(\mathbf{C}^j \mathbf{E}^j) = \text{rank}(\mathbf{E}^j).$$

If \mathbf{E}^j is full column rank, then a special solution to (12) is

$$\mathbf{H}_*^j = \mathbf{E}^j [(\mathbf{C}^j \mathbf{E}^j)^\top \mathbf{C}^j \mathbf{E}^j]^{-1} (\mathbf{C}^j \mathbf{E}^j)^\top.$$

Proof. When (12) has a solution \mathbf{H}^j , then $\mathbf{H}^j \mathbf{C}^j \mathbf{E}^j = \mathbf{E}^j$ or

$$(\mathbf{C}^j \mathbf{E}^j)^\top \mathbf{H}^{j\top} = \mathbf{E}^{j\top} \quad (17)$$

i.e., $\mathbf{E}^{j\top}$ belongs to the range space of the matrix $(\mathbf{C}^j \mathbf{E}^j)^\top$, and this leads to

$$\text{rank}(\mathbf{E}^{j\top}) \leq (\text{rank}(\mathbf{C}^j \mathbf{E}^j)^\top),$$

i.e.,

$$\text{rank}(\mathbf{E}^j) \leq \text{rank}(\mathbf{C}^j \mathbf{E}^j). \quad (18)$$

However,

$$\text{rank}(\mathbf{C}^j \mathbf{E}^j) \leq \min\{\text{rank}(\mathbf{C}^j), \text{rank}(\mathbf{E}^j)\},$$

and, since (\mathbf{E}^j) is full column rank,

$$\min\{\text{rank}(\mathbf{C}^j), \text{rank}(\mathbf{E}^j)\} \leq \text{rank}(\mathbf{E}^j),$$

then

$$\text{rank}(\mathbf{C}^j \mathbf{E}^j) \leq \text{rank}(\mathbf{E}^j). \quad (19)$$

Therefore, the only way to satisfy (18) and (19) is that $\text{rank}(\mathbf{C}^j \mathbf{E}^j) = \text{rank}(\mathbf{E}^j)$. Thus, the necessary condition is proven.

When $\text{rank}(\mathbf{C}^j \mathbf{E}^j) = \text{rank}(\mathbf{E}^j)$ holds true, $\mathbf{C}^j \mathbf{E}^j$ is a full column rank matrix, and there is a left inverse of $\mathbf{C}^j \mathbf{E}^j$:

$$(\mathbf{C}^j \mathbf{E}^j)^+ = [(\mathbf{C}^j \mathbf{E}^j)^\top \mathbf{C}^j \mathbf{E}^j]^{-1} (\mathbf{C}^j \mathbf{E}^j)^\top \quad (20)$$

Clearly, $\mathbf{H}^j = \mathbf{E}^j (\mathbf{C}^j \mathbf{E}^j)^+$ is a solution to (12). \square

Now, a lemma is introduced to show the equivalence of the detectability of an augmented system and the one of the original system.

Lemma 3.2. Let $\mathbf{C}_1^j = [\mathbf{C}^j \quad \mathbf{C}^j \mathbf{A}]^\top$. Then, the detectability of the pair $(\mathbf{C}_1^j, \mathbf{A})$ is equivalent to that of the pair $(\mathbf{C}^j, \mathbf{A})$.

Proof. The observability of a system can also be verified if

$$\text{rank} \left\{ \begin{bmatrix} s \mathbf{I} - \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \right\} = n, \quad (21)$$

for any $s \in \mathbb{C}$ (see Theorem 5-13 in (25)). Therefore, if $s_1 \in \mathbb{C}$ is an unobservable mode of the pair $(\mathbf{C}_1^j, \mathbf{A})$, then

$$\text{rank} \left\{ \begin{bmatrix} s_1 \mathbf{I} - \mathbf{A} \\ \mathbf{C}_1^j \end{bmatrix} \right\} = \text{rank} \left\{ \begin{bmatrix} s_1 \mathbf{I} - \mathbf{A} \\ \mathbf{C}^j \\ \mathbf{C}^j \mathbf{A} \end{bmatrix} \right\} < n.$$

This means that a vector $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^n$ will exist, such that

$$\begin{bmatrix} s_1 \mathbf{I} - \mathbf{A} \\ \mathbf{C}^j \\ \mathbf{C}^j \mathbf{A} \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} = 0,$$

which implies that

$$\begin{bmatrix} s_1 \mathbf{I} - \mathbf{A} \\ \mathbf{C}^j \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} = 0, \quad \text{or} \quad \text{rank} \left\{ \begin{bmatrix} s_1 \mathbf{I} - \mathbf{A} \\ \mathbf{C}^j \end{bmatrix} \right\} < n.$$

This is to say that s_1 is also an unobservable mode of the pair $(\mathbf{C}^j, \mathbf{A})$. Now, if $s_2 \in \mathbb{C}$ is an unobservable mode of the pair $(\mathbf{C}^j, \mathbf{A})$, then

$$\text{rank} \left\{ \begin{bmatrix} s_2 \mathbf{I} - \mathbf{A} \\ \mathbf{C}^j \end{bmatrix} \right\} < n.$$

This means that a vector $\beta \in \mathbb{C}^n$ can always be found, such that

$$\begin{bmatrix} s_2 \mathbf{I} - \mathbf{A} \\ \mathbf{C}^j \end{bmatrix} \beta = 0,$$

which can be rewritten as

$$(s_2 \mathbf{I} - \mathbf{A}) \beta = 0 \quad \text{and} \quad \mathbf{C}^j \beta = 0. \quad (22)$$

Multiplying by \mathbf{C}^j on the left of the first equation in (22),

$$\mathbf{C}^j (s_2 \mathbf{I} - \mathbf{A}) \beta = 0,$$

which is equivalent to

$$\mathbf{C}^j s_2 \beta = \mathbf{C}^j \mathbf{A} \beta = 0 \quad (\text{since } \mathbf{C}^j \beta = 0).$$

Hence,

$$\begin{bmatrix} s_2 \mathbf{I} - \mathbf{A} \\ \mathbf{C}^j \\ \mathbf{C}^j \mathbf{A} \end{bmatrix} \beta = \begin{bmatrix} s_2 \mathbf{I} - \mathbf{A} \\ \mathbf{C}_1^j \end{bmatrix} \beta = 0,$$

i.e., s_2 is also an unobservable mode of the pair $(\mathbf{C}_1^j, \mathbf{A})$. As the pairs $(\mathbf{C}_1^j, \mathbf{A})$ and $(\mathbf{C}^j, \mathbf{A})$ have the same unobservable modes, their detectability is formally equivalent. \square

At this point, it is important to include the necessary and sufficient conditions for the UIOs.

Theorem 3.1. *The conditions for (8) to be an UIO for the system defined by (3) are:*

- (i) $\text{rank}(\mathbf{C}^j \mathbf{E}^j) = \text{rank}(\mathbf{E}^j)$.
- (ii) $(\mathbf{C}^j, \mathbf{A}_1^j)$ is detectable pair, where

$$\mathbf{A}_1^j = \mathbf{A} - \mathbf{E}^j [(\mathbf{C}^j \mathbf{E}^j)^\top \mathbf{C}^j \mathbf{E}^j]^{-1} (\mathbf{C}^j \mathbf{E}^j)^\top \mathbf{C}^j \mathbf{A}.$$

Proof. According to Lemma 3.1, (12) is solvable when condition 1 holds true. A special solution for \mathbf{H}^j is

$$\mathbf{H}_*^j = \mathbf{E}^j [(\mathbf{C}^j \mathbf{E}^j)^\top \mathbf{C}^j \mathbf{E}^j]^{-1} (\mathbf{C}^j \mathbf{E}^j)^\top.$$

In this case, the system dynamics matrix is

$$\mathbf{F}^j = \mathbf{A} - \mathbf{H}^j \mathbf{C}^j \mathbf{A} - \mathbf{K}_1^j \mathbf{C}^j = \mathbf{A}_1^j - \mathbf{K}_1^j \mathbf{C}^j,$$

which can be stabilized by selecting the gain matrix \mathbf{K}_1^j due to condition 2. Finally, the remaining UIO matrices described in (8) can be calculated using (14) - (15). Thus, the observer (8) is a UIO for the system defined in the two first rows of (3).

Since (8) is a UIO for (3), (12) is solvable. This leads to the fact that condition 1 holds true according to Lemma 3.1. The general solution of the matrix \mathbf{H}^j for (12) can be calculated as

$$\mathbf{H}^j = \underbrace{\mathbf{E}^j (\mathbf{C}^j \mathbf{E}^j)^+}_{\mathbf{H}_*^j} + \mathbf{H}_0^j [\mathbf{I}_m - \mathbf{C}^j \mathbf{E}^j (\mathbf{C}^j \mathbf{E}^j)^+],$$

where $\mathbf{H}_0^j \in \mathbb{R}^{n \times (p-1)}$ is an arbitrary matrix and $(\mathbf{C}^j \mathbf{E}^j)^+$ is the left inverse of $\mathbf{C}^j \mathbf{E}^j$, as defined in (20). Substituting the solution for \mathbf{H}^j into (13), the system dynamics matrix \mathbf{F}^j is

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^j &= \mathbf{A} - \mathbf{H}^j \mathbf{C}^j \mathbf{A} - \mathbf{K}_1^j \mathbf{C}^j \\ &= [\mathbf{I}_n - \mathbf{E}^j (\mathbf{C}^j \mathbf{E}^j)^+ \mathbf{C}^j] \mathbf{A} + \\ &\quad - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1^j & \mathbf{H}_0^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}^j \\ [\mathbf{I}_m - \mathbf{C}^j \mathbf{E}^j (\mathbf{C}^j \mathbf{E}^j)^+] \mathbf{C}^j \mathbf{A} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{A}_1^j - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1^j & \mathbf{H}_0^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}^j \\ \mathbf{C}^j \mathbf{A}_1^j \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{A}_1^j - \bar{\mathbf{K}}_1^j \bar{\mathbf{C}}_1^j, \end{aligned}$$

where $\bar{\mathbf{K}}_1^j = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1^j & \mathbf{H}_0^j \end{bmatrix}$ and $\bar{\mathbf{C}}_1^j = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^j \\ \mathbf{C}^j \mathbf{A}_1^j \end{bmatrix}$. Since the matrix \mathbf{F}^j is stable, the pair $(\bar{\mathbf{C}}_1^j, \mathbf{A}_1^j)$ is detectable, as well as the pair $(\mathbf{C}^j, \mathbf{A}_1^j)$, according to Lemma 3.2. \square

Once the necessary conditions to design the bank of UIOs have been verified, it is necessary to prove that it is possible to recover the state estimation of the output without the effect of the attack from the j^{th} UIO.

Theorem 3.2. *Suppose that (8) is the j^{th} UIO for the system defined by (3). If there is an attack in the j^{th} output, then an estimation of the output without the effect of the attack can be obtained from the j^{th} UIO.*

Proof. Considering that there is an attack on the system (3), i.e., $\mathbf{F}_a \neq \mathbf{0}$. In fact, since one simultaneous attack \mathbf{F}_a is considered, this can be written as a set of unitary column vectors with all but one element different from zero. Consider a simpler case, where $\mathbf{a}[k]$ is a scalar function and \mathbf{F}_a is a unitary vector. Assuming that the attack affects the j^{th} output, the form of \mathbf{F}_a is

$$\mathbf{F}_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \vdots & \underbrace{1}_{j^{\text{th}} \text{ row}} & \vdots & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Then, $\mathbf{F}_a^j = \mathbf{0}_{(p-1) \times 1}$ (\mathbf{F}_a^j equals \mathbf{F}_a without the j^{th} row. In this assumption, the only element different from zero, and clearly (16), will become (11). The above implies that $\hat{\mathbf{x}}[k] \rightarrow \mathbf{x}[k]$. Therefore, $\hat{\mathbf{y}}[k] = \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}[k]$ can be found, which represents the estimation of the outputs without the effect of the attack.

Now, considering the general case where $\mathbf{a}[k]$ is a vector of p functions and $\mathbf{F}_a \in \mathbb{R}^{p \times p}$, the previous procedure holds, albeit only for the time intervals where each attack is happening, under the assumption that no more than one attack will occur concurrently. \square

4. Detection, isolation and mitigation

Note that Theorem 3.2 provides the opportunity to recalculate the control signal to prevent the attack from being fed back to the system. However, this is possible only if we know when and where the attack takes place, which we do not know *a priori*. In order to answer these questions, this study

proposes the use of the already working full order current observer described by (4) to know when an attack occurs within a process known as *detection*, and, since UIOs are used to recalculate the control signal, they could also be used to determine where the attack takes place, in a process known as *isolation*. The complete scheme for mitigating the effect of the attack in a closed-loop control system is shown in Fig. 1, where the decision-making mechanism includes attack detection and isolation and mitigation, which includes recovering the state and, therefore, the sensor output, both without the effect of the attack.

To find out when an attack takes place, full order current observer-associated residues are defined as

$$r[k] = \|\tilde{\mathbf{y}}_a[k] - \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}[k]\|_2, \quad (23)$$

where $\|\mathbf{x}\|_2$ stands for the 2-norm of a vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. An attack is detected when

$$r[k] > \tau_D, \quad (24)$$

where τ_D is a threshold associated with the maximum estimation error that the system could supposedly tolerate. In order to find τ_D a number of simulations have to be carried out in different conditions, with the aim to minimize false alarms. Then, a binary variable $b[k]$ is used to denote whether or not an attack is active at time k in any sensor of the system, as

$$b[k] = \begin{cases} 1, & r[k] > \tau_D \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (25)$$

The isolation process is carried out using the UIOs bank, each of them with dynamics given by (8). The j^{th} UIO's associated residue is defined as

$$r^j[k] = \|\tilde{\mathbf{y}}_a^j[k] - \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}^j[k]\|_2. \quad (26)$$

An attack is isolated in output j when an attack has been detected at time k , i.e.,

$$r^j[k] > \tau_I^j, \quad (27)$$

where τ_I^j is a threshold associated with the maximum estimation error that the system could supposedly tolerate in the j^{th} UIO. In the same way as before, it is necessary to carry out several simulations in order to adjust the value of τ_I^j , aiming to not generate many false alarms while also not neglecting many attacks. The isolation of an attack in the sensor of the j^{th} output at k is denoted using the variable $l^j[k]$:

$$l^j[k] = \begin{cases} 1, & r^j[k] > \tau_I^j \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (28)$$

Because $l^j[k]$ produces false alerts regarding the isolation of an attack, a mechanism based on (26) is used to prevent them. Thus, the new variable $L[k]$ is built, which represents the isolation of an attack on the j^{th} sensor at time k with a reduced number of or no false alerts. Using the variables $b[k]$ and $L[k]$, the variable $m^j[k]$ is defined, which indicates that an attack is detected in the j^{th} sensor at time k and must hence be mitigated. The signal $m^j[k]$ is given by

$$m^j[k] = b[k] \& L^j[k], \quad (29)$$

where $\&$ is the logical operator "AND". In (29), $m^j[k] = 1$ when there is an attack on the j^{th} sensor.

Finally, with the definition of $m^j[k]$, the mitigated state estimation can be mitigated as

$$\hat{\mathbf{x}}_m[k] = (\overline{m^1}[k] \& \overline{m^2}[k] \& \dots \& \overline{m^p}[k]) \hat{\mathbf{x}}[k] + \sum_{j=1}^p m^j[k] \hat{\mathbf{x}}^j[k], \quad (30)$$

where $\overline{m^j}[k]$ represents the logical operator "NOT" acting on the binary variable $m^j[k]$. In (30), the first term on the right side shows that, if there is no attack in any output, the full order current observer estimation is used. The second term shows that, if there is an attack in sensor j , the estimation of the j^{th} UIO is used. Therefore, the controller that mitigates attacks on the system can be written as

$$\begin{aligned} \mathbf{v}[k+1] &= \mathbf{y}^r[k] - \mathbf{C}_m \mathbf{x}_m[k] + \mathbf{v}[k], \\ \mathbf{u}[k] &= \mathbf{K}_I \mathbf{v}[k] - \mathbf{K}_S \hat{\mathbf{x}}_m[k]. \end{aligned} \quad (31)$$

Note that the aforementioned mitigation mechanism is different from the one in (26), which constitutes an improvement, as the use of the mitigated state in the control calculation reduces the effect of the attack on the system even more.

5. Numerical results

This section considers the four tanks benchmark initially proposed in (19). A tracking controller with state feedback is used, working with a full order current observer. The objective of this section is to show (i) the system working in closed-loop before any attack is considered, (ii) the effect of an attack on one output, and (iii) the effect on the system of using the proposed mitigation mechanism.

5.1. System model

The four tanks benchmark system is described in detail in (19). It has two inputs related to the pumps, u_1 and u_2 , which allow liquid to be fed into the tanks. The heights of the four tanks, h_i $i = 1, 2, 3, 4$, are the state variables of the system, and the height of tanks 1 and 2 are the system outputs. The four tanks system model can be written as

$$\begin{aligned} \frac{dh_1}{dt} &= -\frac{a_1}{A_1} \sqrt{2gh_1} + \frac{a_3}{A_1} \sqrt{2gh_3} + \frac{\gamma_1 k_1}{A_1} u_1, \\ \frac{dh_2}{dt} &= -\frac{a_2}{A_2} \sqrt{2gh_2} + \frac{a_4}{A_2} \sqrt{2gh_4} + \frac{\gamma_2 k_2}{A_2} u_2, \\ \frac{dh_3}{dt} &= -\frac{a_3}{A_3} \sqrt{2gh_3} + \frac{(1-\gamma_2)k_2}{A_3} u_2, \\ \frac{dh_4}{dt} &= -\frac{a_4}{A_4} \sqrt{2gh_4} + \frac{(1-\gamma_1)k_1}{A_4} u_1, \end{aligned} \quad (32)$$

where A_i is the area of the i -th tank, a_i is the outflow section of the i -th tank (at the bottom of the tank), g is the acceleration of gravity, $\gamma_j \in [0, 1]$ for $j = 1, 2$ is a proportional constant that divides a pump flow u_j in two parts (γ_j and its complement to feed two different tanks), and k_j are the pump gains. The parameters of the system are the same as in (19), as shown in Table I.

Table I. Four tanks system parameters

Parameter	Unit	Value
A_1, A_3	[cm ²]	28
A_2, A_4	[cm ²]	32
a_1, a_3	[cm ²]	0,071
a_2, a_4	[cm ²]	0,057
k_c	[V cm ⁻¹]	0,50
g	[cm s ⁻²]	981
γ_1, γ_2		(0.70, 0.60)
k_1, k_2	[cm ³ V ⁻¹ s ⁻¹]	(3,33, 3,35)
(\bar{h}_1, \bar{h}_2)	[cm]	(12,4, 12,7)
(\bar{h}_3, \bar{h}_4)	[cm]	(1,8, 1,4)
(\bar{u}_1, \bar{u}_2)	[V]	(3,00, 3,00)

The controller used with the system has form as that in (3), with

$$\mathbf{K}_I = \begin{bmatrix} 0,0150 & 0,0037 \\ -0,0016 & 0,0092 \end{bmatrix}$$

and

$$\mathbf{K}_S = \begin{bmatrix} 0,0928 & 0,0086 & 0,0056 & -0,0025 \\ -0,0021 & 0,0797 & -0,0002 & -0,0040 \end{bmatrix}.$$

The full order current observer for the system is as described in (4), with

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0,0736 & -0,0002 \\ -0,0000 & 0,0054 \\ 0,0007 & -0,0000 \\ 0,0000 & 0,0054 \end{bmatrix}.$$

5.2. Closed-loop system behavior

The closed-loop system behavior with the controller and the observer is shown in Fig. 2, considering no delays in the communication network (for information about the effects of the delays induced by the network on control systems, see (27)). The figure shows the behavior of the outputs when a change in the reference input is introduced. The coupling between the system variables is evident, given that variations in one reference input affects the related output and the opposite one.

Fig. 2 also shows the output variables estimated by the full order current observer, $\hat{y}[k] = \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}[k]$, where the estimates of the outputs are similar to their ideal values. However, since the variables and their estimate have differences, such offset can be used to determine the detection threshold. The

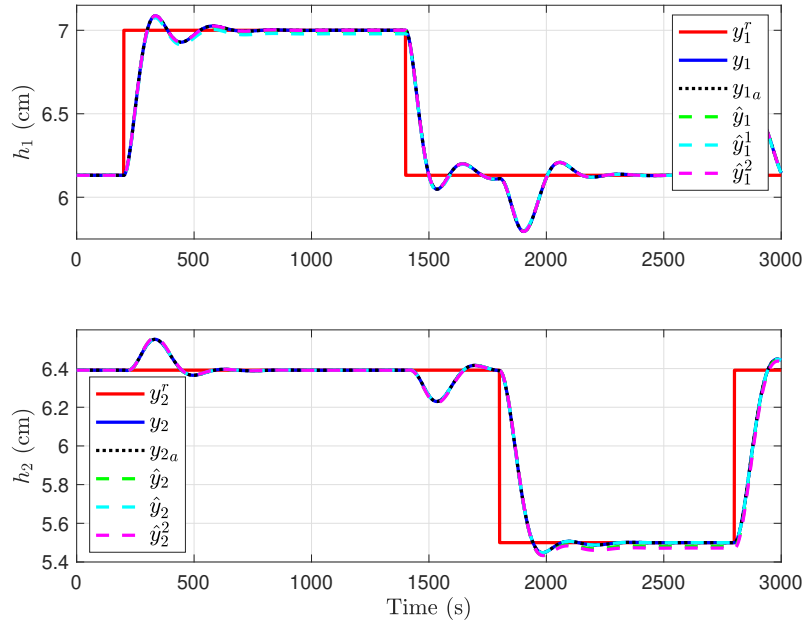


Figure 2. System response to variations in the reference inputs. The top figure shows the behavior of level 1, and the bottom one the behavior of level 2. The reference is shown in red, the measured output in blue, the attacked output as a dotted black line, the estimation of the full order current observer in dashed green, and the estimations of UIOs 1 and 2 in dashed cyan and magenta, respectively.

full order current estimator-associated threshold was selected after performing multiple simulations, considering the system behavior in light of various inputs. This, in order to select a value that does not generate false alarms when there is no attack. In that sense, for the four tanks system, $\tau_D = 0,033$.

5.3. UIOs bank design

Even though the system sensors have not been attacked yet, this subsection deals with the design process of the UIOs, as well as their behavior, in order to show their associated residuals and how to set their thresholds. In order to design the UIO bank, linear discrete-time representation of the system is needed. Such representation is obtained by linearization through the Jacobian, around an equilibrium point defined by \bar{h}_i and \bar{u}_i (Table I). The linearized model is discretized using the zero-order hold technique (20), with $T = 1$ s, obtaining a model such as the one in (2), with

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,9842 & 0 & 0,0407 & 0 \\ 0 & 0,9890 & 0 & 0,0326 \\ 0 & 0 & 0,9590 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,9672 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0,0826 & 0,0010 \\ 0,0005 & 0,0625 \\ 0 & 0,0469 \\ 0,0307 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

With the linear discrete-time model, the design process for the UIO bank may begin. Let us start with UIO 1. First, it is necessary to select the value of the \mathbf{E}^1 matrix, which defines the way in which the perturbation $\mathbf{d}[k]$ acts on the system. For this case, the following was selected

$$\mathbf{E}^1 = \begin{bmatrix} 10^{-4} & 1 & 10^{-4} & 10^{-4} \end{bmatrix}^\top,$$

which implies that we consider that the greatest effect of the attack takes place in state 2, which is related to the only output that UIO 1 works with (output 2).

After obtaining \mathbf{E}^1 , (12)-(15) must be satisfied. From (12), \mathbf{H}^1 can be calculated. With \mathbf{H}^1 , \mathbf{T}^1 can be obtained from (14). In order to find \mathbf{F}^1 using (13), observability must first be verified, or, at least, the detectability of the pair $(\mathbf{A}_1^1, \mathbf{C}^1)$. The rank of the observability matrix of the pair $(\mathbf{A}_1^1, \mathbf{C}^1)$ is 1 instead of $n = 4$, which means that the system is not completely observable. Moreover, there is only one observable mode. Then, the pair $(\mathbf{A}_1^1, \mathbf{C}^1)$ must be transformed into its observability canonical form, in order to (i) verify whether the nonobservable modes of the system are stable and, if that is true, (ii) to define the closed-loop desired mode for UIO 1. Effectively, in this case, the three nonobservable modes are stable and, therefore, a good location for the only observable mode could be $z = 10^{-3}$, in order to guarantee that the convergence of the estimation error is faster than the closed-loop system dynamics. Given the above, the following is found

$$\mathbf{K}_1^1 = \begin{bmatrix} -1 & -0,002 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (33)$$

With \mathbf{F}^1 , from (15), \mathbf{K}_2^1 can be calculated. Finally, $\mathbf{K}^1 = \mathbf{K}_1^1 + \mathbf{K}_2^1$ is obtained, which completes UIO 1 design process.

A similar process is followed to design UIO 2, where

$$\mathbf{E}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 10^{-4} & 10^{-4} & 10^{-4} \end{bmatrix}^\top.$$

For this case,

$$\mathbf{K}_2^1 = \begin{bmatrix} -0,002 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (34)$$

and the design can be completed as before.

State estimation via the bank of UIOs is very similar to the one obtained with the full order current observers, and, even though the residues have different shapes, the definition of the thresholds is carried out in the same way, with $\tau_I^1 = 0,0315$ and $\tau_I^2 = 0,0420$.

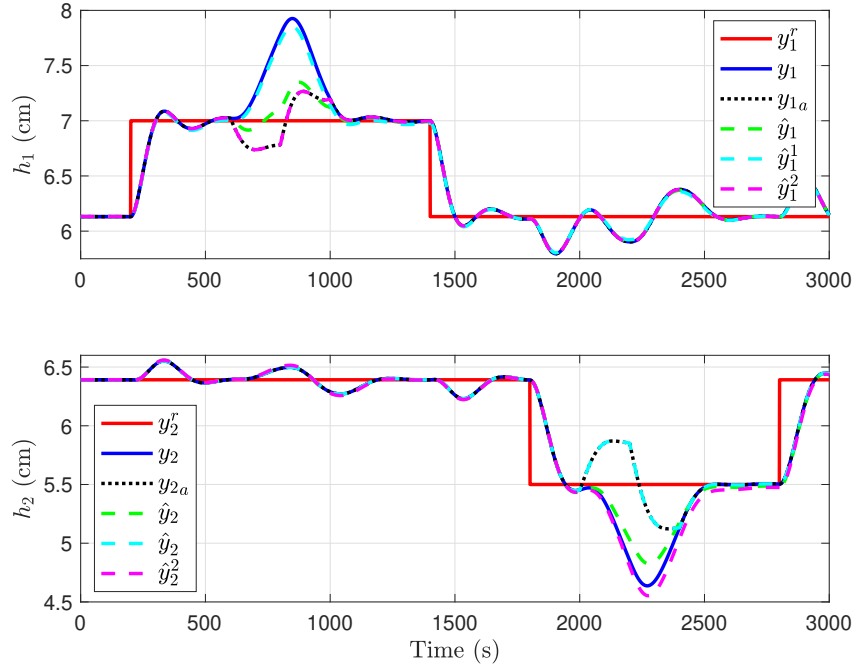


Figure 3. System response with attacks on both sensors. The top figure shows the behavior of level 1, and the bottom figure the behavior of level 2. The reference is shown in red, the measured output in blue, the attacked output in a dotted black line, the estimation of the full order current observer in dashed green, and the estimations of UIOs 1 and 2 in dashed cyan and magenta, respectively.

5.4. Impact of the attack on the system

Attacks in both output sensors at different times are considered. In this case, the attack signal is defined by

$$a_i[k] = \begin{cases} 0, & k < t_{1_i}, \\ -\frac{1}{m_i}(k - t_{1_i}), & t_{1_i} \leq k < t_{2_i}, \\ -1 + \frac{1}{m_i}(k - t_{2_i}), & t_{2_i} \leq k \leq t_{3_i}, \\ 0, & t_{3_i} < k. \end{cases} \quad (35)$$

For $a_1[k]$, $m_1 = 200$, $t_{1_1} = 600\text{s}$, $t_{2_1} = 800\text{s}$, $t_{3_1} = 1000\text{s}$, and for $a_2[k]$, $m_2 = -200$, $t_{1_2} = 2000\text{s}$, $t_{2_2} = 2200\text{s}$, $t_{3_2} = 2400\text{s}$.

Therefore $\mathbf{a}[k] = [a_1[k] \ a_2[k]]^\top$, and $\mathbf{F}^a = \mathbf{I}_p$. The closed-loop response system with the attack is shown in Fig. 3. Here, it can be observed that the attack mainly affects one output, *i.e.*, $\hat{y}_1^a[k]$ is affected directly by $a_1[k]$. However, due to the coupling in the system variables, the effect of the attack is also visible in the other output.

In addition, Fig. 3 shows the output variables for the attacked system, as estimated by the full order current observer, UIO 1, and UIO 2, in dashed green, cyan and magenta lines, respectively. The estimate of the full-order observer is not good during either of the attack times. Note that UIO 1's estimate for output 1 matches the real measurement (blue line), while output 2 tends to the sensor value. Something similar happens with UIO 2, where the estimation of output 1 coincides with the sensor value, while the estimations of output 2 tend to the real measurement. As shown in Fig. 3, this is exactly what was expected from the UIOs. It is important to mention that the attacks affect the energy used by the controllers to keep the tank levels at the desired values, given that they have to make a different effort (when compared to normal operation) to increase – or decrease – the tank levels depending on the shape of the attacks.

5.5. Attack mitigation

This subsection shows the results of using UIO estimations to recalculate the control action and mitigate the attacks. Fig. 4 shows the outputs with the reconfiguration mechanism activated. Notice the difference with Fig. 3, where the deviation for the outputs with attacks is higher due to the input change. Meanwhile, in Fig. 4, the deviation is even smaller than the overshoot. Therefore, it can be seen that the proposed mitigation scheme indeed helps to achieve a behavior closer to the system without attack. Note that the same observations holds for each estimation mentioned in the previous subsection. UIO i very closely estimates the output i , and the full order observer lies in the middle, but helps to avoid corrections for longer times.

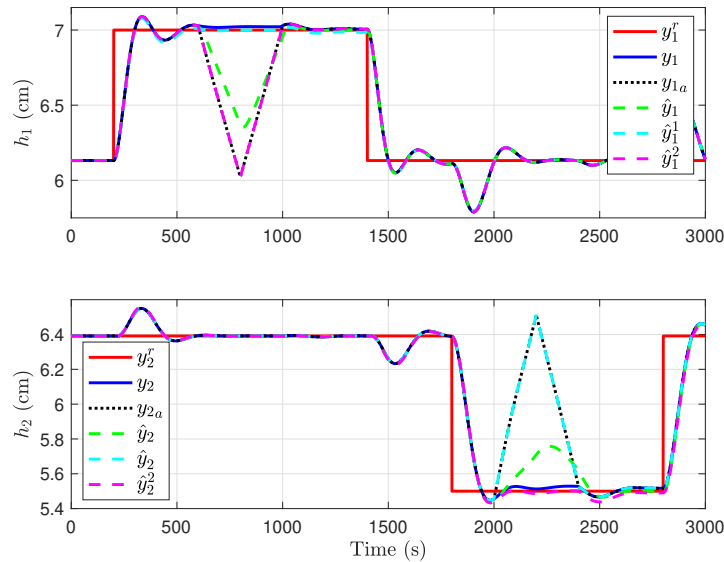


Figure 4. System response with mitigation of attacks on both sensors. The top figure shows the behavior of level 1, and the bottom figure the behavior of level 2. The reference is shown in red, the measured output in blue, the attacked output in dotted black lines, the estimation of the full order current observer in dashed green, and the estimations of UIO 1 and 2 in dashed cyan and magenta, respectively.

6. Conclusions

This paper we have studied the problem of defending low-level controllers based on state-feedback against sensor attacks. It shows that, for an attacked system with only one attack at a time, using a bank of unknown input observers, it is possible to recover the complete state of the system without the effect of the attack and, therefore, the output. It also shows how the control action can be re-computed with the uncorrupted information once the attack has been detected and isolated. This work improves the results shown in (26), obtaining less oscillations in the steady state for the mitigated response – in that work, only the output was recovered. The proposed mechanism was tested on an existing control system with the four tank system testbed, with no simultaneous attacks on the sensors of the outputs of the system, showing satisfying results. The results of this work show a way to improve the resilience of low-level controllers in order to make them suitable for more sophisticated mechanisms such as secure estimation, where it is assumed that the low-level controller is secure.

7. Acknowledgment

This work was partially supported by the Studies Commission No. 015 of 2014 of Universidad Distrital Francisco Jos3 de Caldas. We thank the anonymous reviewers for their careful reading of our manuscript and their insightful comments and suggestions.

8. Contribution of authors

All authors contributed equally to the research.

References

- [1] K. E. Hemsley and D. R. E. Fisher, "History of industrial control system cyber incidents," tech. rep., Idaho National Lab. (INL), Idaho Falls, ID, USA, Dec. 2018. <https://doi.org/10.2172/1505628> ↑ 3
- [2] R. M. Lee, M. J. Assante, and T. Conway., "Malicious control system cyber security attack case study - Maroochy water services, Australia," McLean, VA: The MITRE Corporation, 2008. ↑ 3
- [3] R. Langner, "Stuxnet: Dissecting a cyberwarfare weapon," *IEEE Secur Priv*, vol. 9, no. 3, pp. 49–51, May-Jun. 2011. <https://doi.org/10.1109/MSP.2011.67> ↑ 3
- [4] A. Nourian and S. Madnick, "A systems theoretic approach to the security threats in cyber physical systems applied to Stuxnet," *IEEE Trans. Dependable Secure Comput*, vol. 15, no. 1, pp. 2–13, Jan-Feb. 2018. <https://doi.org/10.1109/TDSC.2015.2509994> ↑ 3
- [5] M. Abrams and J. Weiss., "Analysis of the cyber attack on the Ukrainian power grid," *SANS ICS Report*, Mar 2016. ↑ 4
- [6] Y. Z. Lun, A. D'Innocenzo, F. Smarra, I. Malavolta, and M. D. D. Benedetto, "State of the art of cyber-physical systems security: An automatic control perspective," *J. Syst. Softw*, vol. 149, pp. 174 – 216, Jul. 2019. <https://doi.org/10.1016/j.jss.2018.12.006> ↑ 4

- [7] H. S. S3nchez, D. Rotondo, T. Escobet, V. Puig, and J. Quevedo, "Bibliographical review on cyber attacks from a control oriented perspective," *Annu. Rev. Control*, vol. 48, pp. 103–128, Dec. 2019. <https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2019.08.002> ↑ 4
- [8] L. Cao, X. Jiang, Y. Zhao, S. Wang, D. You, and X. Xu, "A survey of network attacks on cyber-physical systems," *IEEE Access*, vol. 8, pp. 44219–44227, Mar. 2020. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.2977423> ↑ 4
- [9] M. Kordestani and M. Saif, "Observer-based attack detection and mitigation for cyberphysical systems: A review," *IEEE Syst. Man Cybern. Syst.*, vol. 7, no. 2, pp. 35–60, Mar. 2021. <https://doi.org/10.1109/MSMC.2020.3049092> ↑ 4
- [10] W. Duo, M. Zhou, and A. Abusorrah, "A survey of cyber attacks on cyber physical systems: Recent advances and challenges," *IEEE/CAA J. Autom. Sin.*, vol. 9, no. 5, pp. 784–800, 2022. ↑ 4
- [11] H. Fawzi, P. Tabuada, and S. Diggavi, "Secure estimation and control for cyber-physical systems under adversarial attacks," *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 59, no. 6, pp. 1454–1467, Jun. 2014. <https://doi.org/10.1109/TAC.2014.2303233> ↑ 4
- [12] Y. H. Chang, Q. Hu, and C. J. Tomlin, "Secure estimation based kalman filter for cyber-physical systems against sensor attacks," *Automatica*, vol. 95, pp. 399 – 412, Nov. 2018. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2018.06.010> ↑ 4
- [13] R. Deng, G. Xiao, and R. Lu, "Defending against false data injection attacks on power system state estimation," *IEEE Trans. Industr. Inform.*, vol. 13, no. 1, pp. 198–207, Feb 2017. <https://doi.org/10.1109/TII.2015.2470218> ↑ 4
- [14] L. F. C3mbita, N. Quijano, and A. A. C3rdenas, "On the stability of cyber-physical control systems with sensor multiplicative attacks," *IEEE Access*, vol. 10, pp. 39716–39728, 2022. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2022.3164424> ↑ 4
- [15] L. An and G.-H. Yang, "Fast state estimation under sensor attacks: A sensor categorization approach," *Automatica*, vol. 142, p. 110395, Apr. 2022. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2022.110395> ↑ 4
- [16] P. Weng, B. Chen, S. Liu, and L. Yu, "Secure nonlinear fusion estimation for cyber-physical systems under fdi attacks," *Automatica*, vol. 148, p. 110759, Feb. 2023. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2022.110759> ↑ 4
- [17] C. Wang, J. Huang, D. Wang, and F. Li, "A secure strategy for a cyber physical system with multi-sensor under linear deception attack," *J. Franklin Inst.*, vol. 358, no. 13, pp. 6666–6683, Sep. 2021. <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2021.06.029> ↑ 4
- [18] X. Wang and P. Zhao, "An adaptive control scheme against state-dependent sensor attacks and input-dependent actuator attacks in cyber-physical systems," *IET Control Theory Appl*, vol. 17, no. 8, pp.1061-1075, Mar. 2023. <https://doi.org/10.1049/cth2.12443> ↑ 4
- [19] K. H. Johansson, "The quadruple-tank process: a multivariable laboratory process with an adjustable zero," *IEEE Trans Control Syst. Technol.*, vol. 8, no. 3, pp. 456–465, May 2000. <https://doi.org/10.1109/87.845876> ↑ 5, 14
- [20] G. F. Franklin, M. L. Workman, and D. Powell, *Digital Control of Dynamic Systems*. Boston, MA, USA: Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., 3rd ed., 1997. ↑ 6, 7, 16

-
- [21] K. Ogata, *Discrete-Time Control Systems (2nd Ed.)*. USA: Prentice-Hall, Inc., 1995. ↑ 6
- [22] C. L. Phillips and H. T. Nagle, *Digital Control System Analysis and Design (3rd Ed.)*. USA: Prentice-Hall, Inc., 1995. ↑ 7
- [23] X. He, Z. Wang, and D. Zhou, "Robust fault detection for networked systems with communication delay and data missing," *Automatica*, vol. 45, no. 11, pp. 2634 – 2639, Nov. 2009. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2009.07.020> ↑ 7
- [24] J. Chen and R. J. Patton, *Robust Model-based Fault Diagnosis for Dynamic Systems*. Norwell, MA, USA: Kluwer Academic Publishers, 1999. <https://doi.org/10.1007/978-1-4615-5149-2> ↑ 8
- [25] C. T. Chen, *Linear System Theory and Design*. New York: Oxford University Press, Inc., 1984. ↑ 10
- [26] L. F. Combata, A. Cardenas, and N. Quijano, "Mitigating sensor attacks against industrial control systems," *IEEE Access*, vol. 7, pp. 92444–92455, 2019. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2927484> ↑ 13, 14, 20
- [27] K. Liu, A. Selivanov, and E. Fridman, "Survey on time-delay approach to networked control," *Annu Rev. Control*, vol. 48, pp. 57–79, 2019. <https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2019.06.005> ↑ 15
-

Luis Francisco C3mbita

Electronics engineer, BS degree from Universidad Distrital, Bogot3, Colombia, 1992. He received the MS and PhD degrees in Electrical Engineering from Universidad de los Andes, Bogot3, Colombia in 2002 and 2021, respectively. He joined the Engineering Faculty of Universidad Distrital as an auxiliary professor in 1997, where he currently works as an assistant professor. His current research interests include cyber-physical systems security, modeling and simulation of dynamical systems, and industrial control systems.

Email: lcombata@udistrital.edu.co

Nicanor Quijano

Electronics engineer, BS degree from Pontificia Universidad Javeriana, Bogot3, Colombia, 1999. He received the MS and PhD degrees in Electrical and Computer Engineering from Ohio State University, Columbus, OH, USA, in 2002 and 2006, respectively. He joined the Electrical and Electronics Engineering Department of Universidad de los Andes (Bogot3) as an assistant professor in 2007, where he currently serves as a full professor and director of the Control and Automation Systems Research Group. His current research interests include hierarchical and distributed optimization methods using bio-inspired and game-theoretical techniques for dynamic resource allocation problems, especially those in energy, water, and transportation.

Email: nquijano@uniandes.edu.co

3lvvaro A. C3rdenas

Associate professor at the Department of Computer Science and Engineering of the University of California, Santa Cruz. He received his PhD and MS from University of Maryland, College Park, and his BS from Universidad de Los Andes, Colombia. His research interests include cyber-physical systems and IoT security and privacy, network intrusion detection, and wireless networks.

Email: alacarde@ucsc.edu





Research

Evaluation of Protocols for the Synthesis of Copper or Copper Oxides Nanoparticles

Evaluación de protocolos de síntesis de nanopartículas de cobre u óxidos de cobre

Daniela Acevedo-León¹, Claudia Patricia Ossa-Orozco² y Ana María Torres-López^{2*}

¹Estudiante de Bioingeniería, Grupo de Investigación de Biomateriales, Universidad de Antioquia (Medellín, Colombia)

²PhD Grupo de Investigación en Biomateriales, Programa de Bioingeniería, Facultad de Ingeniería, Universidad de Antioquia, (Medellín, Colombia)

Abstract

Context: Copper or copper oxide nanoparticles are materials of interest in the field of agriculture due to their multiple properties, including their antimicrobial activity, which is useful in the biological control of pests. Several authors have reported that nanoparticles smaller than 50 nm have a greater antimicrobial effect. Accordingly, this study aimed to compare different synthesis protocols, with the purpose of obtaining copper or copper oxide nanoparticles with adequate size for their subsequent evaluation in the biological control of species that commonly affect crops in Colombia.

Method: Five synthesis protocols were evaluated, four of them classified as green chemical synthesis methods, and the other as biological synthesis. The obtained nanoparticles were characterized via UV-Vis spectroscopy, DLS, TEM, FTIR, XRD, SEM, and EDS.

Results: Protocol 3, which uses copper sulfate pentahydrate as precursor salt, ascorbic acid as reducing agent, and starch as stabilizer, proved to be the most suitable, as spherical metallic copper nanoparticles with a size of 4,5 nm were obtained with it.

Conclusions: It was possible to compare methodologies for copper and copper oxide nanoparticles production, analyze the effect of synthesis conditions on their characteristics, and finally obtain a protocol to synthesize copper nanoparticles with an adequate size for potential use in biological control applications.

Keywords: nanoparticles, copper, copper oxides, chemical synthesis, biological synthesis.

Article history

Received:
2nd/Feb/2022

Modified:
23th/Jun/2022

Accepted:
1st/Nov/2022

Ing, vol. 28, no. 2,
2023. e19067

©The authors;
reproduction right
holder Universidad
Distrital Francisco
José de Caldas.

Open access



*✉ Correspondence: maria.torres@udea.edu.co

Resumen

Contexto: Las nanopartículas de cobre u óxidos de cobre son materiales de interés para la agricultura por sus múltiples propiedades, entre ellas su actividad antimicrobiana, que resulta útil en el control biológico de plagas. Diversos autores han reportado que las nanopartículas con tamaño inferior a 50 nm tienen mayor efecto antimicrobiano. De acuerdo con esto, este estudio tuvo como objetivo comparar diferentes protocolos de síntesis de nanopartículas de cobre u óxidos de cobre, con el propósito de obtener NPs de tamaños adecuados para su futura evaluación en el control biológico de especies que afectan comúnmente los cultivos en Colombia.

Método: Se evaluaron cinco protocolos de síntesis, cuatro de ellos clasificados como métodos de síntesis química verde y el otro como síntesis biológica. Las nanopartículas obtenidas fueron caracterizadas mediante espectroscopía UV-Vis, DLS, TEM, FTIR, DRX, SEM y EDS.

Resultados: El protocolo 3, que utiliza sulfato de cobre pentahidratado como sal precursora, ácido ascórbico como agente reductor y almidón como estabilizante, resultó ser el más adecuado, pues con él se obtuvieron nanopartículas esféricas de cobre metálico con un tamaño promedio de 4,5 nm.

Conclusiones: Fue posible comparar las metodologías de obtención de nanopartículas de cobre y óxidos de cobre, analizar el efecto de las condiciones de síntesis en sus características y finalmente obtener un protocolo para sintetizar nanopartículas de cobre con un tamaño adecuado para un potencial uso en aplicaciones de control biológico.

Palabras clave: nanopartículas, cobre, óxidos de cobre, síntesis química, síntesis biológica.

Tabla de contenidos

		2.2. Caracterización de las nanopartículas de cobre	6
	Página	3. Resultados	7
1. Introducción	2	4. Conclusiones	13
2. Materiales y métodos	4	5. Agradecimientos	13
2.1. Síntesis de nanopartículas de cobre u óxidos de cobre	4	6. Contribución de autores	13
		Referencias	13

1. Introducción

Las nanopartículas (NPs) de naturaleza metálica y de óxidos de metales son ampliamente estudiadas en la ciencia y la ingeniería debido a sus propiedades ópticas, electrónicas, químicas, físicas y mecánicas. Estas propiedades están ligadas al tamaño, la estructura cristalina, la morfología y la composición de las partículas (1). Entre las características que poseen las NPs se encuentra su alta relación área superficial/volumen, lo cual favorece el incremento de la energía interfacial, la reactividad de la nanopartícula, la eficiencia en la absorción y la capacidad de ser funcionalizadas con moléculas de interés (2), (3).

En la agricultura, la nanotecnología se ha enfocado en el desarrollo de herramientas que ayuden a fortalecer el sector agrícola desde distintas aplicaciones, como el desarrollo de nanoformulaciones de agroquímicos para aplicar pesticidas y fertilizantes para el mejoramiento de los cultivos; el uso de nanosensores en la protección de cultivos para la identificación de enfermedades y residuos de agroquímicos; el empleo de nanodispositivos para la ingeniería genética de las plantas; los diagnósticos de enfermedades en plantas; y el manejo poscosecha (4). Actualmente, este sector se enfrenta a múltiples desafíos como el control de plagas, la absorción de nutrientes en los suelos, el mejoramiento genético de plantas, la detección temprana de patógenos, el manejo de recursos naturales, contaminantes en productos alimenticios, entre otros. Aunque el manejo de todas estas problemáticas se ha hecho empleando distintas herramientas, algunas son muy costosas y otras siguen siendo inútiles o poco efectivas (5).

Una de las posibles soluciones es el uso de NPs metálicas que, entre otras propiedades interesantes, tienen propiedades antimicrobianas. Las nanopartículas de cobre (CuNPs) u óxidos de cobre (CuONPs) poseen dichas propiedades y, además, son de bajo costo y fácil obtención. Estas nanopartículas han sido utilizadas para múltiples aplicaciones como fungicidas y bactericidas, así como para promover el crecimiento de las plantas (6). Las propiedades de las NPs están ligadas a su tamaño y forma (7), y, a su vez, estas características dependen del método de síntesis utilizado, que puede ser físico, químico o biológico.

En los métodos físicos, las NPs se generan mediante la reducción del tamaño del material original; las NPs obtenidas no presentan contaminación por solventes y tienen una distribución uniforme, lo cual constituye una mejora con respecto a la síntesis química. Sin embargo, en los métodos físicos se requieren equipos costosos y un alto uso de energía (8).

En la síntesis química se utilizan reactivos para la reducción de los iones cobre, y el mayor inconveniente que se presenta es el uso de materiales tóxicos (9). Esto ha llevado a evaluar compuestos como el azúcar, el ácido ascórbico, el almidón, *etc.*, los cuales resultan ambientalmente más amigables. A los procesos de síntesis que incluyen este tipo de compuestos se les llama *química verde* (10).

Por su parte, los métodos biológicos utilizan bacterias, hongos y extractos de plantas como agentes reductores de los iones cobre (11). Estos métodos tienen la ventaja de que utilizan materiales más ecológicos, siendo más económicos, simples y sostenibles que los métodos químicos. Es preferible utilizar extractos de plantas para obtener NPs en lugar de usar microorganismos, pues es más difícil preservar los cultivos celulares (12). Estos extractos, además, son adecuados para la síntesis de NPs a gran escala (13).

Se ha observado que los cambios en la temperatura, el pH, la naturaleza del agente reductor y su concentración, entre otros factores, afectan el tamaño y la forma de las NPs obtenidas (14–19).

Algunos estudios han demostrado que el tamaño de partícula influye directamente en la citotoxicidad. Las partículas más pequeñas tienen una mayor relación área superficial/volumen, lo cual

aumenta la reactividad y facilita el transporte intracelular (20). Los autores de (21) evaluaron el efecto del tamaño (53, 84, 120 y 174 nm) y de la concentración de las CuNPs (5, 10 y 20 ppm) en la actividad antifúngica contra los hongos patógenos *Fusarium oxysporum* y *Phytophthora capsici*, encontrando que el mayor grado de inhibición del crecimiento se logra al utilizar las NPs más pequeñas, correspondientes a un tamaño de 53 nm, a una concentración de 20 ppm.

(22) estudiaron el efecto antimicrobiano de CuNPs de 5 nm en cepas de *Escherichia coli* (bacteria Gram-negativa), encontrando que, después de 2 horas de tratamiento con las NPs a una concentración de 32 ppm, se logró inhibir el crecimiento en un 100 %. Por último, a partir de ensayos con microscopio de fuerza atómica, los autores pudieron concluir que la cepa *E. coli* es susceptible a las CuNPs, pues se evidenciaron daños en la membrana celular. Por su parte, (23) propusieron la síntesis verde de fungicidas, que consistían en CuNPs preparadas en medio acuoso. Mediante experimentos *in vitro*, evaluaron la actividad antifúngica de dichas NPs contra los hongos patógenos de plantas *Fusarium solani*, *Neofusicoccum* sp. y *Fusarium oxysporum*, encontrando que, aunque la actividad antifúngica difiere para cada especie, las CuNPs inducen fuertes cambios morfológicos en el micelio, además de daño en las membranas celulares.

(24) sintetizaron CuNPs y CuONPs a través del método de reducción química. La actividad antifúngica de las NPs obtenidas, con un tamaño promedio en el rango de 20 a 50 nm, se evaluó mediante ensayos contra *Fusarium* sp., encontrando que el diámetro de la colonia fúngica casi no aumenta y que el crecimiento se inhibe en un 93,98 % al emplear una concentración de NPs de 450 ppm después de incubación por 9 días.

Dada la comprobada actividad antimicrobiana que han demostrado las CuNPs y las CuONPs, resulta de gran interés evaluar metodologías de síntesis que permitan su obtención, y poder así posteriormente evaluar su potencial aplicación en el control biológico de plagas como *Fusarium oxysporum*, *Ralstonia solanacearum* spp. y *Xanthomonas* spp., las cuales afectan cultivos importantes para Colombia, como es el caso del plátano, el tomate, el pimentón, la berenjena y la papa (25,26). De acuerdo con ello, el objetivo del presente estudio fue comparar diferentes protocolos para la síntesis de CuNPs y CuONPs a partir de métodos de química verde y biológica reportados en la literatura. La caracterización de las NPs sintetizadas se realizó mediante las técnicas de UV-Vis, DLS, TEM, FTIR, DRX, SEM y EDS, y, según el tamaño obtenido, se infirió un posible uso en aplicaciones de control biológico.

2. Materiales y métodos

2.1. Síntesis de nanopartículas de cobre u óxidos de cobre

Con base en metodologías de síntesis de CuNPs reportadas en la literatura, se implementaron los protocolos que se describen a continuación. La Tabla I resume las principales condiciones evaluadas e indica si se realizó alguna modificación a la metodología. Los ensayos se realizaron por triplicado.

1. Métodos de química verde:

- *Protocolo 1*, basado en la metodología desarrollada por (23). Se preparó una solución de citrato de sodio tribásico dihidratado (PanReac AppliChem ITW Reagents) al 2,5 % m/V,

se adicionaron 5 g de sulfato de cobre pentahidratado (Carlo Erba) y luego se agregaron, bajo agitación constante, 50 ml de ácido ascórbico (PanReac AppliChem ITW Reagents) 0,2 M y 30 ml de hidróxido de sodio (PanReac AppliChem ITW Reagents) 1 M. Finalmente, la mezcla se calentó a 95 °C durante 90 minutos y, cuando se formó un precipitado de color rojo, la solución se centrifugó, y el precipitado obtenido se almacenó en una nevera.

- *Protocolo 2*, basado en la metodología desarrollada por (24). Se disolvieron 0,1712 g de cloruro de cobre dihidratado (Reactivos Ru) en 50 ml de agua desionizada. La solución se dejó en agitación hasta formar una solución homogénea de color azul. Después se adicionaron lentamente 10 ml de ácido ascórbico (PanReac AppliChem ITW Reagents) 0,1 M y, terminado este procedimiento, se ajustó el pH a 5 utilizando hidróxido de sodio (PanReac AppliChem ITW Reagents) 1 M. Posteriormente se agregaron lentamente 10 ml de CTAB (PanReac AppliChem ITW Reagents) 0,025 M, y la solución resultante se mantuvo a 80 °C hasta adquirir una coloración rojo-marrón. Al terminar el proceso, la solución se dejó enfriar a temperatura ambiente, y el precipitado obtenido conservó el color.
- *Protocolo 3*, basado en la metodología desarrollada por (27). Se disolvieron 2,5 g de almidón (Almidón Rey) en 15 ml de agua destilada, y se agitó a velocidad constante hasta obtener una mezcla homogénea. Luego, la solución de almidón se goteó a 10 ml de sulfato de cobre pentahidratado (Carlo Erba) 0,04 M, y se adicionó 1 g de ácido ascórbico (PanReac AppliChem ITW Reagents) directamente a la mezcla, la cual se mantuvo en agitación a velocidad constante durante 3 horas a 60 °C. La solución se centrifugó durante 5 minutos a 15.000 rpm, y el precipitado se refrigeró en nevera.
- *Protocolo 4*, basado en la metodología propuesta por (28). Se calentaron 50 ml de una solución de cloruro de cobre dihidratado (Reactivos Ru) 0,01 M en baño María a 80 °C y se mantuvieron en agitación magnética. Posteriormente, se gotearon 50 ml de ácido ascórbico (PanReac AppliChem ITW Reagents) 0,4 M a la solución, manteniendo las mismas condiciones de calentamiento y agitación. La solución se mantuvo en agitación constante por un periodo de 16 horas hasta alcanzar la coloración esperada (café oscuro), y finalmente se centrifugó a 5.000 rpm durante 20 minutos.

2. Método de síntesis biológica:

- *Protocolo 5*, basado en la metodología desarrollada por (29). Se utilizó sulfato de cobre pentahidratado 0,5 M como sal precursora y extracto de hojas de albahaca morada (*Ocimum sanctum*) como agente reductor. Para obtener el extracto, se lavaron hojas frescas de albahaca morada, primero con agua corriente y después con agua destilada, para eliminar tierra e impurezas. Posteriormente se cortaron en pequeños pedazos y se tomaron 100 g, los cuales fueron agregados a 100 ml de agua destilada. Se realizó calentamiento a 60 °C durante 15 minutos, se filtró el extracto obtenido y se enfrió a temperatura ambiente. Para la síntesis de las NPs, se gotearon 50 ml de extracto de albahaca en una solución de 50 ml de sulfato de cobre 0,05 M. La mezcla se dejó reaccionar durante 24 horas a temperatura ambiente. Terminada la reacción, la solución se centrifugó a 15.000 rpm durante 10 minutos. Finalmente, se recuperó el precipitado y se almacenó en nevera.

Tabla I. Protocolos implementados

Condiciones	Protocolo 1	Protocolo 2	Protocolo 3	Protocolo 4	Protocolo 5
Sal precursora	Sulfato de cobre pentahidratado	Cloruro de cobre dihidratado	Sulfato de cobre pentahidratado	Cloruro de cobre dihidratado	Sulfato de cobre pentahidratado
Agente reductor	Ácido ascórbico	Ácido ascórbico	Ácido ascórbico	Ácido ascórbico	Extracto de albahaca
Estabilizante	Citrato de sodio	CTAB	Almidón	—	—
Temperatura (°C)	95	80	60	80	30
Tiempo de agitación (h)	1,5	2	3	16	1
Centrifugación (rpm)	5.000	5.000	15.000	5.000	15.000
Modificación implementada	Se seleccionó una velocidad de centrifugación de 5.000 rpm, no reportada por (23).	Ninguna	Para la síntesis se empleó agitación por 3 h, y se realizó la lectura de UV-vis, mientras que (27) emplearon 3 h de reacción y 2 h adicionales antes de realizar la lectura del UV-Vis. Se seleccionó una velocidad de centrifugación de 1.500 rpm, no reportada por (27), quienes además emplearon secado por liofilización.	En el protocolo reportado por (28), la centrifugación se realizó a 8.000 rpm durante 15 min, en este estudio se hizo a 5.000 rpm durante 20 min.	Ninguna.

2.2. Caracterización de las nanopartículas de cobre

Para la caracterización se empleó espectroscopía UV-Vis con un equipo MAPADA 3200C, haciendo un barrido entre 200 y 800 nm para identificar el plasmón de resonancia superficial característico de las NPs de cobre u óxidos de cobre.

El tamaño y forma de las nanopartículas se midieron empleando las técnicas de microscopía electrónica de transmisión (TEM), utilizando el equipo Tecnai F20 Super Twin de FEI, y dispersión de luz dinámica (DLS), empleando un Zetasizer Lab con un índice de refracción de 1,54 correspondiente al cobre.

Las características morfológicas y la composición elemental se evaluaron empleando microscopía electrónica de barrido (SEM) y espectroscopía de rayos X por energía dispersiva (EDS), utilizando un microscopio electrónico JEOL-JSM 6490 LV, el cual opera con una aceleración de 20 V.

Mediante espectroscopía infrarroja se identificaron los grupos funcionales presentes en las muestras mediante un espectrofotómetro Alpha (Bruker®), tomando 32 escaneos con una resolución de 4 cm^{-1} y barriendo el espectro entre 500 hasta 4.000 cm^{-1} .

También se empleó la técnica de difracción de rayos X para determinar la cristalinidad y la composición de las fases. Esto, por medio del difractómetro Malvern-Panalytical, modelo Empryeam 2012, con detector Pixel 3D y fuente de Cu ($\lambda = 1,5418774$) a 45 kV y 40 mA .

Se realizó análisis de caracterización en muestras específicas con base en las características y resultados obtenidos en las muestras analizadas.

3. Resultados

La Fig. 1 presenta los espectros UV-Vis de las NPs sintetizadas con los protocolos 1, 2 y 5. El espectro corresponde a un valor medio de absorbancia obtenido para cada protocolo con los tres ensayos realizados.

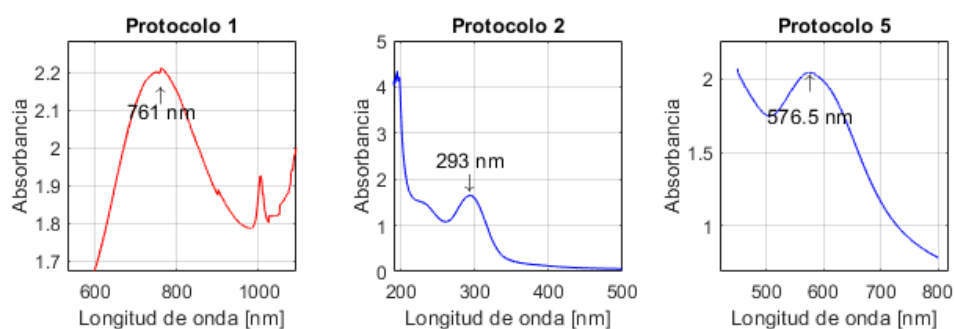


Figura 1. Espectros UV-Vis de las nanopartículas obtenidas con los protocolos de síntesis 1, 2 y 5

(23) no realizaron caracterización mediante UV-Vis, por lo que no es posible saber si el máximo de absorción obtenido al emplear el protocolo 1 ($761\pm 0,3\text{ nm}$) es acorde o no con sus resultados. Si bien la investigación de (30) reporta que las nanopartículas de óxido de cobre I (Cu_2O) pueden presentar un máximo de absorción entre 590 y 800 nm , otros investigadores indican absorción a longitudes de onda entre 250 y 300 nm (31) y 560 y 650 nm (32). Por lo tanto, con el resultado de UV-Vis obtenido, no es posible inferir si hay formación o no de este tipo de NPs. Es por ello que dicho protocolo fue descartado.

Los resultados obtenidos con el protocolo 2 son diferentes a lo reportado por (24), quienes obtuvieron un pico de máxima absorción en 560 nm , atribuido a la formación de NPs de cobre. Por otro lado, en el presente estudio, dicho pico se obtuvo en $293\pm 0,17\text{ nm}$, lo cual, según (33), puede estar asociado a la presencia de NPs de óxido de cobre II (CuO). Por su parte, el trabajo de (31) reporta que el óxido de cobre I (Cu_2O) puede ser monitoreado a través de los espectros UV-visibles, basándose en la formación de una banda del plasmón de resonancia superficial entre 250 y 300 nm . Es así que, a partir de estos datos, podría inferirse que en el presente estudio ocurrió oxidación de CuNPs, pues estas,

cuando son expuestas a ambientes acuosos, son susceptibles a la oxidación, y el cobre se transforma en CuO y Cu₂O.

En cuanto al protocolo 5, (29) reportaron un pico de máxima absorción en 659 nm, el cual atribuyen a la presencia de CuNPs. Sin embargo, otros investigadores indican que los picos en una longitud de onda superior a 590 nm son característicos de NPs de óxido de cobre. Los estudios de (31) y (33) reportan picos de máxima absorción a 620 y 670 nm respectivamente. Ambos investigadores atribuyen dichos picos a la formación de nanopartículas de óxido de cobre II (CuO). En este estudio, la máxima absorción se obtuvo a $576 \pm 0,76$ nm, longitud de onda cercana al intervalo de absorción (580-590 nm) reportado por (18) para las CuNPs.

Cabe resaltar que la resonancia del plasmón de superficie es un fenómeno en el que los átomos interactúan entre ellos, generando una banda de resonancia característica al usar espectroscopía UV-Vis. Sin embargo, esta interacción se ve afectada por factores como el tamaño y forma de las NPs y la naturaleza y composición del medio de dispersión (31), por lo cual, dependiendo de la naturaleza de la NP, se obtiene un máximo de absorción en un intervalo u otro, y este, a su vez, puede presentar corrimientos. Esto podría explicar el desplazamiento de los picos de absorción y, por ende, la discrepancia con otros datos reportados en la literatura.

Por otro lado, no se observó un pico de absorción en la síntesis con los protocolos 3 y 4. A pesar de realizar las debidas diluciones de la muestra, no se logró una lectura adecuada. Los picos obtenidos representan únicamente el ruido del equipo y, por consiguiente, no se presenta el espectro. En el protocolo 3, basado en el reportado por (27), el espectro de UV-Vis obtenido presenta una banda de absorción muy tenue. Este estudio no obtuvo un resultado similar, posiblemente debido a que el tiempo de reacción empleado (3 horas) no fue suficiente para asegurar la reducción de todos los iones Cu²⁺ a cobre metálico, ya que la concentración de NPs en solución aumenta conforme ocurre la reacción de reducción, generando así una mayor absorbancia en el espectro UV-Vis. Cabe añadir que en (27) se empleó un total de 5 horas de reacción.

Para el caso del protocolo 4, los resultados difieren de los reportados por (28), debido posiblemente al efecto de la velocidad de centrifugación sobre la separación de NPs por tamaños –en este estudio se emplearon 5.000 rpm en vez de 8.000.

Es preciso añadir que se consideró realizar la caracterización de las muestras obtenidas con los protocolos 3, 4 y 5 mediante otras técnicas.

La Tabla II presenta los resultados obtenidos en el análisis de DLS. El ensayo se realizó por triplicado, y los valores corresponden al promedio. Con el protocolo 3 se obtuvieron valores inferiores a 1μ , donde cerca del 27% de las partículas tenían un tamaño de 27,8 nm y 14,6% tenía un tamaño de 230 nm. Aunque no se obtuvo un espectro UV-Vis adecuado, sí se obtuvo la coloración rojo oscuro en la solución, tal y como lo reportan los autores del protocolo (27), quienes, además, obtuvieron un tamaño de partícula de $5,7 \pm 1,8$ nm. El índice de polidispersidad es cercano a 1 tanto en el sobrenadante como

en el precipitado, lo que indica que la distribución de tamaños es heterogénea y hay poblaciones de NPs grandes y pequeñas. Por otro lado, los tamaños de partícula obtenidos con el protocolo 4 son muy grandes; un 33 % de las partículas media 1.039 nm. Estos resultados difieren mucho de los reportados por (28), quienes obtuvieron un tamaño de partícula de menos de 2 nm. Teniendo en cuenta lo anterior, así como el hecho de que no se obtuvo un espectro UV-Vis para la muestra sintetizada con el protocolo 4, este se descartó.

Tabla II. Resultados de DLS para sobrenadante y precipitado obtenidos con diferentes métodos de síntesis

	Protocolo 3		Protocolo 4		Protocolo 5	
	Sobrenadante	Precipitado	Sobrenadante	Precipitado	Sobrenadante	Precipitado
Tamaño medio [nm]	491	1.037	3.420	2.199	1.556	5.716
Índice de polidispersidad	0,79	0,82	0,63	0,40	0,94	0,48

Con el protocolo 5, (29) obtuvieron un tamaño promedio de 29 nm; este estudio obtuvo 1.556 nm. Las diferencias en el tamaño promedio pueden deberse a que, al centrifugar a 15.000 rpm, las nanopartículas se aglomeraron, lo cual derivó en cúmulos de tamaño micrométrico. Sin embargo, en el análisis de DLS también se encontró que un 36,8 % de las partículas tenía un tamaño de 50,99 nm. El índice de polidispersidad del sobrenadante es casi 1, lo que significa que la muestra efectivamente tiene muchas partículas aglomeradas de diversos tamaños. Por el contrario, el índice de polidispersidad del precipitado es relativamente bajo e indica que el tamaño de partículas tiende a ser homogéneo.

En la Fig. 2a, *i.e.*, la imagen TEM para la muestra obtenida con el protocolo 3, se observa que las nanopartículas obtenidas tienen un tamaño de aproximadamente 4,5 nm y son de forma casi esférica. La Fig. 2b muestra las nanopartículas sintetizadas mediante el protocolo 5, con un tamaño de aproximadamente 5,03 nm y con la misma tendencia a ser esféricas.

En la Tabla III se presenta un resumen de los resultados obtenidos con las diferentes técnicas de caracterización empleadas.

Tabla III. Resultados de caracterización

Protocolo	Max. Abs. UV-Vis (nm)	Tamaño NP DLS (nm)	Tamaño NP TEM (nm)	Tipo de NP (DRX)
1	761	—	—	—
2	293	—	—	—
3	—	491	4,5	CuNP
4	—	3.421	—	—
5	576	1.566	5,03	Enmascaramiento por el almidón

La Fig. 3 presenta el espectro FTIR obtenido para la muestra sintetizada empleando el protocolo 3. Según (34), las vibraciones por enlaces OH- son evidentes en la banda 3.386 cm^{-1} y pertenecen a los

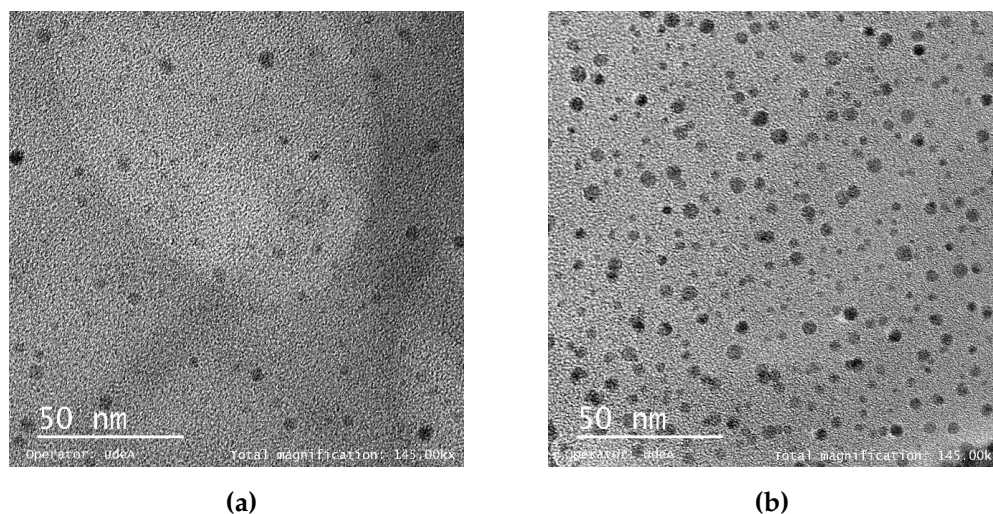


Figura 2. Imágenes TEM de nanopartículas de cobre sintetizadas (a) con el protocolo 3 y (b) con el protocolo 5

hidroxilos del almidón y el ácido ascórbico. Enseguida está la banda 2.931 cm^{-1} de los grupos CH_2 . Luego están 2.149 y 2.067 cm^{-1} por la vibración del grupo alquino ($\text{C}\equiv\text{C}$) y 1.761 cm^{-1} por la vibración de un grupo carbonilo ($\text{C}=\text{O}$), perteneciente a un éster. En la banda 1.690 cm^{-1} se encuentra $\text{C}=\text{C}$, que puede pertenecer al ácido ascórbico y puede estar desplazado porque el carbonilo y el oxígeno, al tener mayor densidad de carga, desplazan la banda a otras longitudes de onda. Después están las bandas 1.411 y 1.367 cm^{-1} , correspondientes a deformaciones fuera del plano de metilos y metilenos respectivamente. Las bandas 1.204 y 1.238 cm^{-1} son grupos $\text{C}-\text{O}$ de ésteres. En 1.023 cm^{-1} se encuentra un grupo $-\text{COOH}$ y, en 1.153 cm^{-1} , el movimiento vibracional de $\text{C}-\text{O}$ de un éter. Las últimas bandas por debajo de 900 cm^{-1} pueden ser carbonos sustituidos con cobre y grupos CH sueltos.

La Fig. 4 presenta el espectro infrarrojo para la muestra sintetizada con el protocolo 5. De acuerdo con (34), la primera banda, ubicada en 3.389 cm^{-1} , corresponde al estiramiento de enlaces $-\text{OH}$ de alcoholes y fenoles. Enseguida se encuentran las bandas 2.965 y 2.926 cm^{-1} , correspondientes a deformaciones simétricas de metilos (CH_3) y metilenos (CH_2) respectivamente. En 2.371 cm^{-1} hay dos pequeños picos que evidencian la presencia de armónicos provenientes de grupos aromáticos, en 1.605 cm^{-1} hay una banda fuerte de un grupo carbonilo perteneciente a una cetona y en 1.512 cm^{-1} hay una banda desplazada de un grupo ($\text{C}=\text{C}$) debido a la presencia de grupos electroatrayentes. Las bandas 1.441 y 1.384 cm^{-1} corresponden a deformaciones por fuera del plano de grupos metilo (CH_3) y metileno (CH_2). En 1.339 cm^{-1} hay una mezcla de grupos $-\text{COOH}$ y $-\text{OH}$ de un éster. Las últimas dos bandas, 829 y 621 cm^{-1} , muestran la presencia de grupos aromáticos. Estos grupos funcionales coinciden con la presencia de compuestos en el extracto de albahaca, tales como el eugenol, el ácido ascórbico, los polifenoles, los flavonoides y las saponinas, entre otros (35). El grupo sulfonato aparece en 1.339 cm^{-1} debido a la presencia de sulfato de cobre pentahidratado en la reacción.

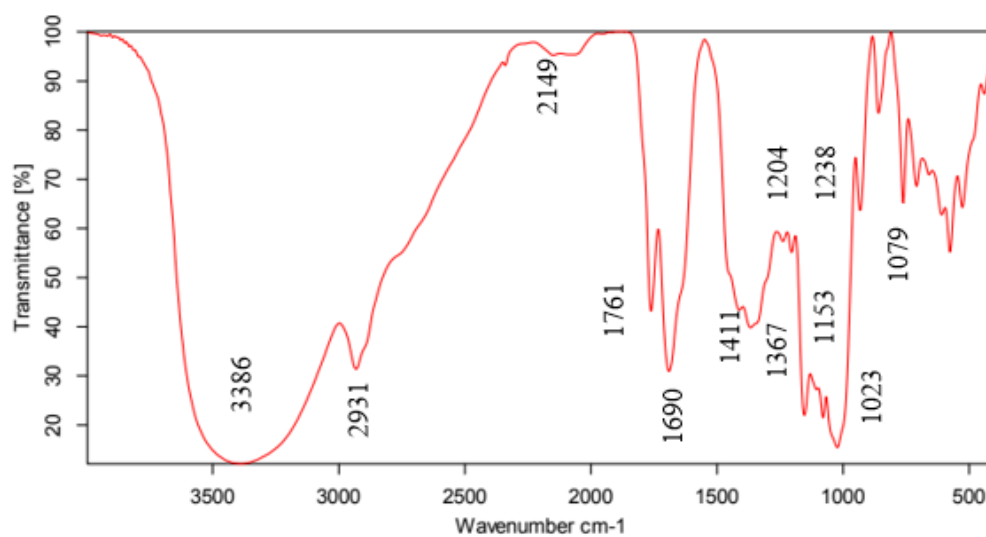


Figura 3. Espectro FTIR de la solución obtenida con el protocolo 3

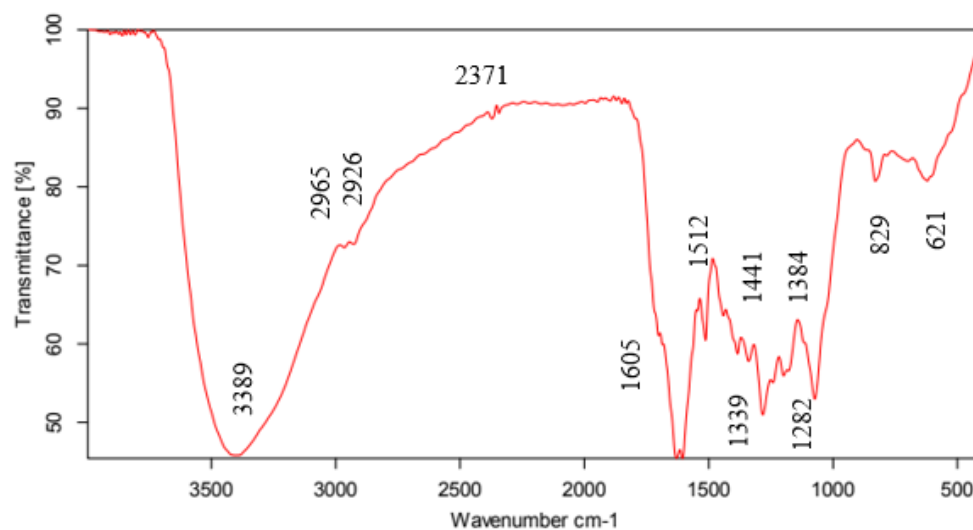


Figura 4. Espectro FTIR de la solución obtenida con el protocolo 5

Según los resultados obtenidos al verificar la reproducibilidad de los métodos, solamente el protocolo 3 logró un resultado similar al reportado por (27), encontrándose un espectro de DRX similar y que representa el cobre metálico puro, identificado por los picos en los ángulos 2θ de 43.31, 50.45 y 74.19°, que corresponden a la estructura cúbica centrada en las caras del cobre; así como a los planos (111), (200) y (220) respectivamente, lo cual concuerda con lo reportado por (27) y otros estudios (36,37). Se concluye, entonces, que con este protocolo es posible obtener nanopartículas de cobre.

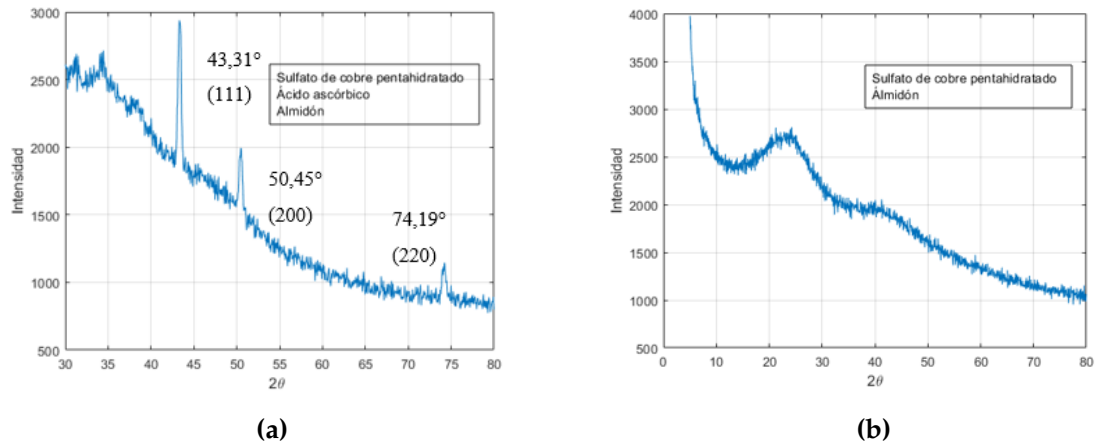


Figura 5. DRX de las nanopartículas de cobre sintetizadas con: (a) protocolo 3 y (b) protocolo 5

La Fig. 5b presenta el difractograma de la muestra obtenida con el protocolo 5. Se puede observar un pico ancho en 26° que no corresponde a lo reportado en la literatura para las NPs de cobre. Es posible que algunas macromoléculas presentes en el extracto de albahaca hayan enmascarado la superficie de las NPs de cobre, impidiendo su identificación en el DRX. (38) explicaron que esto se debe a la estructura cristalina dependiente de las características del polímero (peso molecular) y los parámetros utilizados en el proceso de síntesis y fabricación. Como resultado, este método también se descartó, ya que, aunque es probable que la síntesis de NPs de cobre haya sucedido, no es posible asegurarlo.

Mediante SEM, se obtuvo la Fig. 6a para la muestra sintetizada con el protocolo 3, en la cual se observan cúmulos de $2\ \mu\text{m}$, pues la muestra no se sonicó antes del ensayo. En la Fig. 6b, el análisis de EDS indica la presencia de cobre, carbono y oxígeno, que pueden atribuirse a los compuestos utilizados en la síntesis. También se observa cloro, que pudo haberse utilizado en la limpieza de la cristalería y/o los viales utilizados para almacenar las muestras.

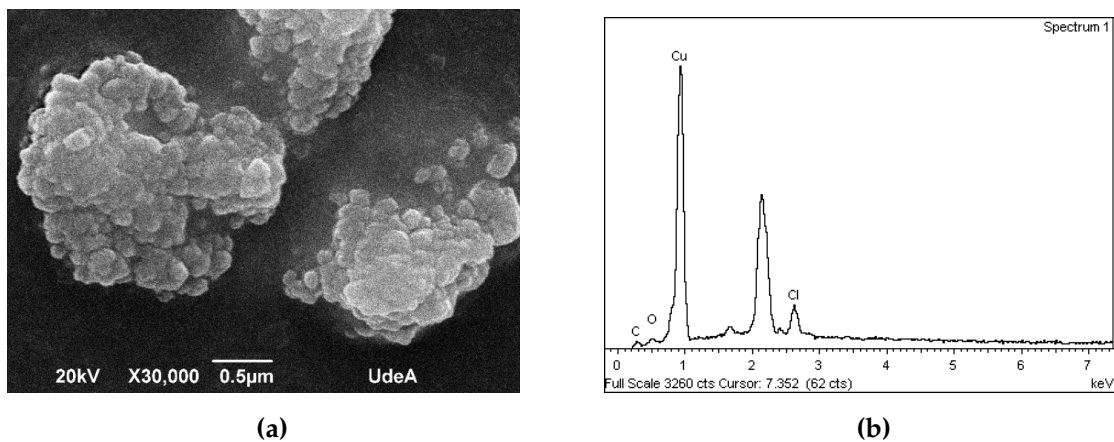


Figura 6. Imágenes (a) SEM y (b) EDS de nanopartículas de cobre metálico sintetizadas con el protocolo 3

Según los reportes de la literatura, CuNPs de tamaños entre 2 y 5 nm han mostrado una actividad antibacteriana adecuada, al disminuir la concentración de microorganismos en un 99,9% (39). Este tamaño corresponde a lo obtenido para los protocolos 3 y 5, y este hecho fue corroborado por (40), quienes evaluaron la actividad antibacteriana frente a *E. coli* empleando CuNPs de diámetro promedio de 4,8 y 7,8 nm. Estos autores encontraron que las NPs de menor tamaño exhibían una actividad antibacteriana significativamente mejor que las partículas más grande. Por su parte, (24) corroboraron la actividad antifúngica de CuNPs y CuONPs, con un tamaño promedio entre 20 y 50 nm frente al hongo *Fusarium sp.*

Los resultados de la caracterización muestran que el protocolo 3 permite obtener NPs de 4,5 nm que podrían ser adecuadas para control biológico debido a su actividad antimicrobiana. Por otro lado, los análisis químicos evidenciaron la presencia de cobre y la fase presente de cobre metálico, el cual mejora la germinación y crecimiento de las plantas (41), por lo que las CuNPs podrían aplicarse también en cultivos.

4. Conclusiones

El protocolo 3, en el que se utilizó sulfato de cobre pentahidratado como sal precursora, ácido ascórbico como agente reductor y almidón como estabilizante, permitió obtener nanopartículas de cobre con un tamaño adecuado para un potencial uso en aplicaciones de control biológico.

La reproducibilidad de los protocolos que se pretendió replicar en este estudio no fue completamente verificada, ya que algunas condiciones de la síntesis y de la caracterización no se pudieron implementar. No obstante, adaptar los protocolos a las condiciones disponibles en el laboratorio permitió comparar las metodologías de obtención de CuNPs u CuONPs, así como analizar el efecto que las condiciones de síntesis tienen en sus características.

5. Agradecimientos

Al Comité para el Desarrollo e Investigación (CODI) por la financiación del proyecto de trabajo de grado identificado con el código PR21-1-06; al Grupo de Investigación en Biomateriales (Biomat); a Jorge Higueta-Castro y Sara Robledo-Restrepo del Programa de Estudio y Control de Enfermedades (PECET); y al profesor Luis Fernando Giraldo-Morales del Laboratorio de Investigación en Polímeros, por la colaboración brindada para el desarrollo del proyecto.

6. Contribución de autores

Todos los autores contribuyeron por igual a la investigación

Referencias

- [1] R. Singla, A. Guliani, A. Kumari, and S. K. Yadav, "Metallic Nanoparticles, Toxicity Issues and Applications in Medicine," in *Nanoscale Materials in Targeted Drug Delivery, Theragnosis and Tissue Regeneration*, 1st ed. Singapore:Springer, 2016, pp. 41–71. https://doi.org/10.1007/978-981-10-0818-4_3 ↑ 2
- [2] R. A. Sperling and W. J. Parak, "Surface modification, functionalization and bioconjugation of colloidal inorganic nanoparticles," *Trans. R. Soc. A*, vol. 368, pp. 1333–1383, 2010. <https://doi.org/10.1098/rsta.2009.0273> ↑ 2
- [3] H. Kumar K, N. Venkatesh, H. Bhowmik, and A. Kuila, "Metallic nanoparticle: a review," *BJSTR*, vol. 4, no. 2, pp. 3765–3775, 2018. <https://doi.org/10.26717/BJSTR.2018.04.0001011> ↑ 2
- [4] A. Y. Ghidan and T. M. A. Antary, "Applications of nanotechnology in agriculture," in *Applications of Nanobiotechnology*, 2020, pp. 1–14. <https://www.intechopen.com/chapters/68970> ↑ 3
- [5] R. H. Lira Saldivar, et al, "Potencial de la nanotecnología en la agricultura," *Acta Univer.*, vol. 28, no. 2, pp. 9–24, 2018. <https://doi.org/10.15174/au.2018.1575> ↑ 3
- [6] S. Baker, T. Volova, S. Prudnikova, Svetlana V. Satish, and N. Prasad M.N., "Nanoagroparticles emerging trends and future prospect in modern agriculture system," *Environ. Toxicol. Pharmacol.*, vol. 53, no. 53, pp. 10–27, 2017. <https://doi.org/10.1016/j.etap.2017.04.012> ↑ 3
- [7] B. Khodashenas and H. R. Ghorbani, "Synthesis of copper nanoparticles: An overview of the various methods," *Korean J. Chem. Eng.*, vol. 31, no. 7, pp. 1105–1109, 7 2014. <https://doi.org/10.1007/s11814-014-0127-y> ↑ 3
- [8] M. C. Crisan, M. Teodora, and M. Lucian, "Copper nanoparticles: synthesis and characterization, physiology, toxicity and antimicrobial applications," *Appl. Sci.*, vol. 12, no. 1, 2021. <https://doi.org/10.3390/app12010141> ↑ 3
- [9] H. J. Lee, J. Y. Song, and B. S. Kim, "Biological synthesis of copper nanoparticles using Magnolia kobus leaf extract and their antibacterial activity," *J. Chem. Technol. Biotechnol.*, vol. 88, no. 11, pp. 1971–1977, nov 2013. <http://bit.ly/3WdTAOe> ↑ 3
- [10] D. Ray, S. Pramanik, R. P. Mandal, S. Chaudhuri, and S. De, "Sugar-mediated 'green' synthesis of copper nanoparticles with high antifungal activity," *Mater. Res. Express*, vol. 2, no. 10, p. 105002, oct 2015. <https://doi.org/10.1088/2053-1591/2/10/105002> ↑ 3
- [11] S. Adewale, A. Similoluwa, F. Adekunle, and A. Kolawole, "Green synthesis of copper oxide nanoparticles for biomedical application and environmental remediation," *Heliyon*, vol. 6, no. 7, 2020, art. e04508. <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2020.e04508> ↑ 3
- [12] M. A. Asghar and M. A. Asghar, "Green synthesized and characterized copper nanoparticles using various new plants extracts aggravate microbial cell membrane damage after interaction with lipopolysaccharide," *Int. J. Biol. Macromol.*, vol. 160, pp. 1168–1176, oct 2020. <https://doi.org/10.1016/j.ijbiomac.2020.05.198> ↑ 3
- [13] S. S. Shankar, A. Rai, A. Ahmad, and M. Sastry, "Rapid synthesis of Au, Ag, and bimetallic Au core-Ag shell nanoparticles using Neem (*Azadirachta indica*) leaf broth," *J. Colloid. Interface Sci.*, vol. 275, no. 2, pp. 496–502, jul 2004. <https://doi.org/10.1016/j.jcis.2004.03.003> ↑ 3

- [14] S. Shankar and J. W. Rhim, "Effect of copper salts and reducing agents on characteristics and antimicrobial activity of copper nanoparticles," *Mater. Lett.*, vol. 132, pp. 307–311, oct. 2014. <https://doi.org/10.1016/j.matlet.2014.06.014> ↑ 3
- [15] S. Chandra, A. Kumar, and P. K. Tomar, "Synthesis and characterization of copper nanoparticles by reducing agent," *J. Saudi Chem. Soc.*, vol. 18, no. 2, pp. 149–153, abr. 2014. <https://doi.org/10.1016/j.jscs.2011.06.009> ↑ 3
- [16] G. Madras and B. J. McCoy, "Temperature effects on the transition from nucleation and growth to Ostwald ripening," *Chem. Eng. Sci.*, vol. 59, no. 13, pp. 2753–2765, jul. 2004. <https://doi.org/10.1016/j.ces.2004.03.022> ↑ 3
- [17] Y. Qu, H. Yang, N. Yang, Y. Fan, H. Zhu, and G. Zou, "The effect of reaction temperature on the particle size, structure and magnetic properties of coprecipitated CoFe_2O_4 nanoparticles," *Mater. Lett.*, vol. 60, no. 29–30, pp. 3548–3552, dic. 2006. <https://doi.org/10.1016/j.matlet.2006.03.055> ↑ 3
- [18] R. A. Soomro, S. T. Hussain Sherazi, Sirajuddin, N. Memon, M. R. Shah, N. H. Kalwar, K. R. Hallam, and A. Shah, "Synthesis of air stable copper nanoparticles and their use in catalysis," *Adv. Mater. Lett.*, vol. 5, no. 4, pp. 191–198, abr. 2014. <https://doi.org/10.5185/AMLETT.2013.8541> ↑ 3, 8
- [19] J. J. Lenders, G. Mirabello, and N. A. Sommerdijk, "Bioinspired magnetite synthesis via solid precursor phases," *Chemical Science*, vol. 7, no. 9, pp. 5624–5634, 2016. <https://doi.org/10.1039/C6SC00523C> ↑ 3
- [20] T. Ameh and C. M. Sayes, "The potential exposure and hazards of copper nanoparticles: A review," *Environ. Toxicol. Pharmacol.*, vol. 71, , pp. 103–220, 2019. <https://doi.org/10.1016/j.etap.2019.103220> ↑ 4
- [21] N. D. Pham, M. M. Duong, M. V. Le, H. A. Hoang, and L. K. O. Pham, "Preparation and characterization of antifungal colloidal copper nanoparticles and their antifungal activity against *Fusarium oxysporum* and *Phytophthora capsici*," *C. R. Chim*, vol. 22, no. 11–12, pp. 786–793, 2019. <https://doi.org/10.1016/j.crci.2019.10.007> ↑ 4
- [22] U. Bogdanović, V. Lazić, V. Vodnik, M. Budimir, Z. Marković, and S. Dimitrijević, "Copper nanoparticles with high antimicrobial activity," *Mater. Lett.*, vol. 128, pp. 75–78, ago. 2014. <https://doi.org/10.1016/j.matlet.2014.04.106> ↑ 4
- [23] N. Pariona, A. I. Mtz-Enriquez, D. Sánchez-Rangle, G. Carrión, F. Paraguay-Delgado, and G. Rosas-saito, "Green-synthesized copper nanoparticles as a potential antifungal against plant pathogens," *RSC*, vol. 9, pp. 18 835–18 843, 2019. <https://doi.org/10.1039/C9RA03110C> ↑ 4, 6, 7
- [24] P. V. Viet, H. T. Nguyen, T. M. Cao, and L. V. Hieu, "Fusarium antifungal activities of copper nanoparticles synthesized by a chemical reduction method," *J. Nanomat.*, vol. 2016, 2016. <https://doi.org/10.1155/2016/1957612> ↑ 4, 5, 7, 13
- [25] A. Varympopi, *et al.*, "Bactericides based on copper nanoparticles restrain growth of important plant pathogens," *Pathogens*, vol. 9, no. 12, pp. 1–14, 2020. <https://doi.org/10.3390/pathogens9121024> ↑ 4
- [26] H. T. Luong, *et al.*, "Antibacterial effect of copper nanoparticles produced in a *Shewanella*-supported non-external circuit bioelectrical system on bacterial plant pathogens," *RSC Adv.*, vol. 12, no. 7, pp. 4428–4436, Feb. 2022. <https://doi.org/10.1039/D1RA08187J> ↑ 4

- [27] G. Dinda, D. Halder, C. Vazquez-Vazquez, M. A. Lopez-Quintela, and A. Mitra, "Green synthesis of copper nanoparticles and their use in biomedical applications," *J. Surf. Sci. Technol.*, vol. 31, no. September, pp. 1–3, 2015. <https://doi.org/10.18311/jsst/2015/1709> ↑ 5, 6, 8, 11
- [28] J. Xiong, Y. Wang, Q. Xue, and X. Wu, "Synthesis of highly stable dispersions of nanosized copper particles using L-ascorbic acid," *Green Chem.*, vol. 13, no. 2011, pp. 900–904, 2011. <https://doi.org/10.1039/C0GC00772B> ↑ 5, 6, 8, 9
- [29] S. Kothai and U. R., "Green synthesis, characterization of copper nanoparticles derived from ocimum sanctum leaf extract and their antimicrobial activities," *J. Chem. Chem. Sci.*, vol. 8, no. 7, pp. 984–992, 2018. <http://dx.doi.org/10.29055/jccs/670> ↑ 5, 8, 9
- [30] S. Banerjee and D. Chakravorty, "Optical absorption by nanoparticles of Cu₂O," *EPL*, vol. 52, pp. 468–473, 2000. <https://doi.org/10.1209/epl/i2000-00461-5> ↑ 7
- [31] R. Cuevas, N. Durán, M. C. Diez, G. R. Tortella, and O. Rubilar, "Extracellular biosynthesis of copper and copper oxide nanoparticles by *Stereum hirsutum*, a native white-rot fungus from chilean forests," *J. Nanomater.*, vol. 2015, art. 789089, 2015. <https://doi.org/10.1155/2015/789089> ↑ 7, 8
- [32] M. Mallik, S. Monia, M. Gupta, A. Ghosh, M. P. Toppo, and H. Roy, "Synthesis and characterization of Cu₂O nanoparticles," *J. Alloys Compd.*, vol. 829, art. 154623, 2020. <http://bit.ly/3VXeSQs> ↑ 7
- [33] Y. Abboud, *et al.*, "Biosynthesis, characterization and antimicrobial activity of copper oxide nanoparticles (CONPs) produced using brown alga extract (*Bifurcaria bifurcata*)," *Appl. Nanosci.*, vol. 4, pp. 571–576, jun. 2014. <https://doi.org/10.1007/s13204-013-0233-x> ↑ 7, 8
- [34] R. M. Silverstein, F. X. Webster, and D. J. Kiemle, *Spectrometric Identification of Organic Compounds*, 7th ed. NY, USA: John Wiley & Sons, Ltd, 2005. ↑ 9, 10
- [35] J. M. Jacob, *et al.*, "Bactericidal coating of paper towels via sustainable biosynthesis of silver nanoparticles using *Ocimum sanctum* leaf extract," *Mater. Res. Express*, vol. 6, no. 4, p. 45401, 2019. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/2053-1591/aafaed> ↑ 10
- [36] E. A. Mohamed, "Green synthesis of copper & copper oxide nanoparticles using the extract of seedless dates," *Heliyon*, vol. 6, no. 1, p. e03123, ene. 2020. <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2019.e03123> ↑ 11
- [37] A. M. Raspolli Galletti, C. Antonetti, M. Marracci, F. Piccinelli, and B. Tellini, "Novel microwave-synthesis of Cu nanoparticles in the absence of any stabilizing agent and their antibacterial and antistatic applications," *Appl. Surf. Sci.*, vol. 280, pp. 610–618, sep. 2013. <https://doi.org/10.1016/j.apsusc.2013.05.035> ↑ 11
- [38] F. Kurd, M. Fathi, and H. Shekarchizadeh, "Basil seed mucilage as a new source for electrospinning: Production and physicochemical characterization," *Int. J. Biol. Macromol.*, vol. 95, pp. 689–695, 2017. <https://doi.org/10.1016/j.ijbiomac.2016.11.116> ↑ 12
- [39] M. Rafique, *et al.*, "Aquatic biodegradation of methylene blue by copper oxide nanoparticles synthesized from *azadirachta indica* leaves extract," *J. Inorg. Organomet. Polym. Mater.*, vol. 28, no. 6, pp. 2455–2462, 2017. <https://doi.org/10.1007/s10904-018-0921-9> ↑ 13

- [40] V. V. T. Padil and M. Černík, "Green synthesis of copper oxide nanoparticles using gum karaya as a biotemplate and their antibacterial application," *Int. J. Nanomedicine*, vol. 8, pp. 889–898, 2013. <https://doi.org/10.2147/IJN.S40599> ↑ 13
- [41] M. Rai, *et al.*, "Copper and copper nanoparticles: Role in management of insect-pests and pathogenic microbes," *Nanotechnol. Rev.*, vol. 7, no. 4, pp. 303–315, ago. 2018. <https://doi.org/10.1515/ntrev-2018-0031> ↑ 13

Daniela Acevedo-León

Nació en Buga, Colombia. Obtuvo su título como bioingeniera en la Universidad de Antioquia, sede Medellín (Colombia). Sus áreas de interés son la biotecnología, los biomateriales y la biomecánica.

Email: daniela.acevedol@udea.edu.co

Claudia Patricia Ossa-Orozco

Nació en Medellín, Colombia. Obtuvo su título como ingeniera mecánica en la Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín, y su título de doctora en Ingeniería Metalúrgica y de Materiales en la Universidad de São Paulo en Brasil. En el año 2006, se vinculó como profesora de tiempo completo al Programa de Bioingeniería de la Universidad de Antioquia. Sus áreas de interés son los biomateriales, específicamente la extracción y aplicación de polímeros naturales, la síntesis de nanopartículas metálicas y cerámicos de fosfato de calcio y la fabricación de plataformas para crecimiento celular. Actualmente pertenece al Grupo de Investigación en Biomateriales (BIOMAT) de la Universidad de Antioquia.

Email: claudia.ossa@udea.edu.co

Ana María Torres-López

Nació en Medellín, Colombia. Obtuvo su título como ingeniera química, y de magíster en Ingeniería en la Universidad de Antioquia. Obtuvo su título de doctora en Nanotecnología en el Centro de Investigación en Materiales Avanzados (Monterrey, México). Desde el año 2018, se vinculó como profesora de tiempo completo al Programa de Bioingeniería de la Universidad de Antioquia. Sus áreas de interés son la biotecnología, la nanotecnología y los fenómenos de transporte. Actualmente pertenece al Grupo de Investigación en Biomateriales (BIOMAT) de la Universidad de Antioquia.

Email: maria.torres@udea.edu.co

