

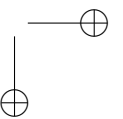
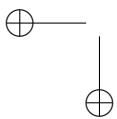
UNIVERSIDAD DISTRITAL  
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS  
FACULTAD DE INGENIERIA

# REVISTA Ingeniería

Volumen 21 • Número 2 • ISSN 0121-750X • E-ISSN 2344-8393

REVISTA CIENTÍFICA CUATRIMESTRAL

# 2016



# REVISTA Ingeniería

Volumen 21 · Número 2 · Año 2016 · ISSN 0121-750X · E-ISSN 2344-8393

## REVISTA CIENTÍFICA CUATRIMESTRAL



UNIVERSIDAD DISTRITAL  
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS  
FACULTAD DE INGENIERÍA

Carrera 7 No. 40-53  
Edificio Administrativo  
Piso 4 - Facultad de Ingeniería  
Bogotá, Colombia  
Teléfono: + 57 (1) 323 93 00 ext. 2413  
Correo revista:  
revista.ing@udistrital.edu.co

<http://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/reving>

## POSTURA EDITORIAL Y AUDIENCIA

Su principal objetivo es difundir y debatir avances en investigación y desarrollo en las diferentes áreas de la ingeniería, con artículos de contenido original e inédito. La revista está dirigida a investigadores, especialistas, docentes, estudiantes de pregrado y posgrado, ingenieros en ejercicio y al sector empresarial

## EDITOR

**Sergio A. Rojas, PhD.**  
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

## COMITÉ EDITORIAL

<b>Sarah Greenfield, PhD.</b> Faculty of Technology of Montfort University, UK	<b>Carlos Andrés Peña, PhD.</b> University of Applied Sciences Western Switzerland, Switzerland
<b>Jose Marcio Luna, PhD.</b> GRASP Lab, University of Pennsylvania, Estados Unidos	<b>Luz Esperanza Bohorquez, PhD.</b> Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia
<b>José Luis Villa, PhD.</b> Universidad Tecnológica de Bolívar, Colombia	<b>Víctor Hugo Grisales, PhD.</b> Universidad Nacional de Colombia, Colombia
<b>Carlos Eduardo Moreno, PhD.</b> Universidad Nacional de Colombia, Colombia	<b>Juan Carlos Figueroa, PhD.</b> Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia
<b>Diego Cantor, PhD.</b> University of Western Ontario Robarts Research Institute	<b>Iván Santelices Malfanti, PhD.</b> Universidad del Bío-Bío, Chile

## COMITÉ CIENTÍFICO

<b>Rodrigo Herrera, Msc.</b> Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia	<b>Germán Jairo Hernández, PhD.</b> Universidad Nacional de Colombia, Colombia
<b>Marco Aurelio Alzate, PhD.</b> Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia	<b>Diego Pardo Ayala, PhD.</b> Agile and Dexterous Robotics Lab - ETHZ (Zurich)
<b>Germán Méndez, PhD.</b> Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia	<b>Edwin Rivas, PhD.</b> Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia
<b>Ana María Peña, PhD.</b> Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia	<b>Henry Alberto Diosa, PhD.</b> Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia

## DIRECTIVAS

<b>Carlos Javier Mosquera S. (E)</b> Rector
<b>Nelson Libardo Forero Chacón, PhD.</b> Centro de Investigación y Desarrollo Científico
<b>Roberto Ferro Escobar, PhD.</b> Decano Facultad Ingeniería

## PREPARACIÓN EDITORIAL

<b>Gestora Editorial</b> Carolina Suárez R., Msc.	<b>Corrección de Estilo</b> Jenny Alexandra Jimenez, Msc
<b>Diagramación L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X</b> Julian Arcila Forero, Msc(c)	<b>Impresión</b> Editorial Kimpres

## ÁRBITROS EN ESTA EDICIÓN

<b>Ricardo Moreno Chuquen, PhD.</b> Escuela Colombiana de Ingeniería	<b>Carlos Mateo Domingo, PhD.</b> Universidad Pontificia Comillas, España
<b>Edwin Causado Rodríguez, PhD.</b> Universidad del Magdalena, Colombia	<b>Luz Esperanza Bohorquez, PhD.</b> Universidad Distrital FJDC, Colombia
<b>Patricia Carolina Barreto Bernal, PhD.</b> Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia	<b>Oscar Gutiérrez Molina, PhD(c).</b> Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia
<b>Juan Carlos Figueroa, PhD.</b> Universidad Distrital FJDC, Colombia	<b>Adriana Patricia Uribe Uran, PhD.</b> Universidad Simón Bolívar, Colombia
<b>Edwin Rivas, PhD.</b> Universidad Distrital FJDC, Colombia	<b>German Hernández, PhD.</b> Universidad Nacional de Colombia
<b>Edwyn López-Santana, PhD(c)</b> Universidad Distrital FJDC, Colombia	<b>Monica Arcila Rivera, PhD(c).</b> Servicio Geológico Colombiano
<b>Jorge Alberto Mejía Mejía, PhD.</b> Consorcio Yacimientos, outsourcing Ecopetrol, Colombia	<b>Yuri Mejía-Melgarejo, PhD(c).</b> Universidad Industrial de Santander, Colombia
<b>Helmer Acevedo, PhD(c).</b> Universidad Nacional de Colombia	<b>Andres Navarro Cadavid, PhD.</b> Universidad Icesi, Colombia
<b>Jorge E. Camargo Mendoza, PhD.</b> Universidad Antonio Nariño, Colombia	<b>Jorge E. Higuera Portilla, PhD.</b> Catalonia Institute For Energy Research, España
<b>Khriscia S. Cecilia Utría Salas, MSc.</b> Universidad Autónoma del Caribe, Colombia	<b>Sarah Greenfield, PhD.</b> Faculty of Technology of Montfort University, UK
<b>Carlos Celemin, PhD(c).</b> Universidad de Chile	<b>Javier Arturo Orjuela Castro, PhD(c).</b> Universidad Distrital FJDC, Colombia
<b>Liliana R. Delgado Mirquez, PhD.</b> Universidad de Ibagué, Colombia	<b>Diana M. Ovalle Martínez, PhD.</b> Universidad Distrital FJDC, Colombia
<b>María del Pilar Villamil Giraldo, PhD.</b> Universidad de los Andes Colombia	<b>Lázaro V. Cremades Oliver, PhD.</b> Universitat Politècnica de Catalunya, España
<b>Katherine A. Baquero Duarte, PhD(c).</b> University of Liège, Francia	<b>German A. Mendez Giraldo, PhD.</b> Universidad Distrital FJDC, Colombia
<b>Juan Guillermo Villegas Ramírez, PhD.</b> Universidad de Antioquia, Colombia	<b>Adriana Herrera Barros, PhD.</b> Universidad de Cartagena, Colombia
<b>Mauricio González Palacio, MSc.</b> Universidad de Medellín, Colombia	<b>Iván Lizarazo Salcedo, PhD.</b> Universidad Distrital FJDC, Colombia
<b>Doris Mejía Avila, PhD.</b> Universidad de Córdoba, Colombia	<b>Milton M. Herrera Ramírez, MSc.</b> Universidad Piloto de Colombia
<b>Emmanuel G. Lasso Sambony, PhD(c).</b> Universidad del Cauca, Colombia	<b>Ricardo Delgado Cadena, PhD(c).</b> Universidad de los Andes, Colombia
<b>Luis Jorge Hernández F, PhD.</b> Universidad de los Andes, Colombia	<b>Lina M. González Rodríguez, PhD.</b> Universidad de Antioquia, Colombia
<b>Oswaldo Ramón Terán Villegas, PhD.</b> Universidad de los Andes, Venezuela	<b>Luis Ángel Guzmán García, PhD.</b> Universidad de los Andes, Colombia

## PERMISO DE REPRODUCCIÓN

Los textos de los artículos incluidos en esta edición pueden ser utilizados y reproducidos con fines sin ánimo de lucro y dando crédito a los autores.

### Open access



Este trabajo está bajo una Licencia de Creative Commons Reconocimiento - No comercial - Sin Obra Derivada 3.0 Unported.

Ni la Revista INGENIERÍA, Editor, Comité Editorial, Comité Científico, Facultad de Ingeniería de la Universidad Distrital F.J.C., otorgan ninguna garantía, expresa o implícita, a asumen responsabilidad alguna por la exactitud, completitud o utilidad de cualquier información, aparato, producto o proceso divulgado, o que represente que su uso no infrinja derechos privados. La mención o referencia a algún producto, proceso o servicio comercial en específico, por su marca comercial, marca registrada, fabricante o cualquier otra denominación, no implica ni constituye su endoso, recomendación endoso, recomendación o favorecimiento por parte de la Revista INGENIERÍA. Los juicios y opiniones expresadas por los autores en este medio son de su responsabilidad y no establecen, reflejan o comprometen los de la Revista INGENIERÍA.

## INDIZADA EN



## CARÁTULA

"La carátula alude al papel de la Ingeniería como Motor de Desarrollo, Innovación y Conocimiento para la Sociedad". Las imágenes de la carátula son de dominio público liberadas bajo la licencia Creative Commons CC0. Idea creativa: Sergio A. Rojas y Carolina Suárez R; diseño: Liliana Valencia.

# CONTENIDO

## EDITORIAL

- Señales prometedoras en INGENIERÍA** 117  
*INGENIERIA: Encouraging Signs*  
Sergio A. Rojas

## Inteligencia Computacional

- Metodología para el Diseño de Conjuntos Difusos Tipo-2 a partir de Opiniones de Expertos** 121  
*Methodology for Designing Type-2 Fuzzy sets from Experts Opinions*  
Mónica Lorena Rodríguez Ayala · Yeniffer Estefanía Huertas Moreno

- Nie-Tan Method and its Improved Version: A Counterexample** 138  
*Método Nie-Tan y su Versión Mejorada: Un contraejemplo*  
Omar Salazar · Juan Diego Rojas · Humberto Serrano

## Ingeniería Eléctrica

- Una Propuesta Metodológica para Dimensionar el Impacto de los Vehículos Eléctricos sobre la Red Eléctrica** 154  
*A Methodological Proposal to Measure the Impact of Electric Vehicles on the Electric Grid*  
John Edward Ceballos Delgado · Sandra Ospina Arango · Eduardo Francisco Caicedo Bravo

## Ingeniería Ambiental

- Desempeño de la Planta de Tratamiento de Aguas Residuales de São João de Iracema (Brasil)** 176  
*Performance of the Sewage Treatment Plant of São João de Iracema (Brazil)*  
Tsunao Matsumoto · Iván Andrés Sánchez

## SECCIÓN ESPECIAL : MEJORES ARTÍCULOS EXTENDIDOS - WEA 2015

- Workshop on Engineering Applications 2015: On the road to build a space for better engineers** 187  
*WEA 2015: En Vía de Construir un Espacio para Mejores Ingenieros*  
Juan Carlos Figueroa García

- Local and Global Path Generation for Autonomous Vehicles Using Splines** 188  
*Generación Local y Global de Trayectorias para Vehículo Autónomos Usando Splines*  
Olmer García · Randerson Lemos · Janito Vaqueiro Ferreira

- A Compressive System Matrix Design in Spectral Imaging by a Homogenization Algorithm** 201  
*Diseño de la Matriz de un Sistema Compresivo en Imágenes Espectrales por medio de un Algoritmo de Homogeneización*  
Camilo Noriega · Yuri Mejía · Henry Arguello

- Adaptive Beamforming for Moving Targets Using Genetic Algorithms** 214  
*Formación de Haz Adaptativo para Objetos Móviles usando Algoritmos Genéticos*  
Diego Burgos Beltrán · Rodrigo Pinto Lemos · Hugo Leão e Silva · Jonas Augusto Kunzler · Ednas Lúcia Flôres

- A Comparison Between the Centroid and the Yager Index Rank for Type Reduction of an Interval Type-2 Fuzzy Number** 225  
*Comparación entre el Índice de Yager y el Centroide para Reducción de tipo de un Número Difuso Tipo-2 de Intervalo*  
Juan Carlos Figueroa · Diego Pachon Neira

- A Hybrid Mixed-Integer Optimization and Clustering Approach to Selective Collection Services Problem of Domestic Solid Waste** 235  
*Un Enfoque Híbrido de Agrupamiento y Optimización Entera Mixta para el Problema de Servicios de Recolección Selectiva de Residuos Sólidos Domésticos*  
Johana Andrea Patiño Chirva · Yesica Xiomara Daza Cruz · Eduyn Ramiro Lopez Santana

- Instrucciones para los Autores** 248

### Señales Prometedoras en INGENIERÍA

Hace un lustro anunciábamos en este mismo espacio el inicio de una “Reingeniería a la Revista INGENIERÍA” (Nota Editorial, Vol. 15, No. 1, 2010), como respuesta a la situación coyuntural que motivaba la necesidad de aumentar su visibilidad, impacto y compenetración con la comunidad académica ingenieril. Con ese fin pusimos en marcha planes de choque en tres frentes, en los que reconocimos amplias oportunidades de mejoramiento que exigían cambios radicales: rigurosidad editorial, plataformas digitales y apoyo institucional. Al cabo de este tiempo, la transformación gradual propiciada por dichos cambios ha comenzado a rendir frutos gratificantes, que hemos celebrado con ustedes en nuestras notas editoriales recientes.

Quizás entre ellos los más notables sean la indización en Scielo, EBSCO y Pubindex B, así como el aumento a la periodicidad cuatrimestral y la publicación anticipada de nuestra versión en línea. Otros tal vez menos vistosos, pero para nosotros más satisfactorios, son los que nos han permitido mejorar la experiencia editorial y la garantía de objetividad con nuestros autores, evaluadores y lectores, lo cual se refleja en las estadísticas de los dos números publicados hasta el momento en este año, Vol. 21, 2016 (No. 1 y No. 2): tiempo promedio de decisión del editor de 8 semanas (No. 1) y 9 semanas (No. 2); exogeneidad de autores de 45 % (8 de 17) y 62 % (16 de 26) respectivamente; exogeneidad de evaluadores de 98 % (31 de 32) y 80 % (32 de 40), de los cuales con escolaridad de doctorado 85 % (No. 1) y 93 % (No. 2); por último la tasa de aceptación de artículos se mantiene en 39 % (7 de 18 y 9 de 23, en cada caso).

Pues bien, en esta misma tónica de noticias positivas nos complace comunicarles a partir del presente número la inclusión de INGENIERÍA en el índice académico Google Scholar. Dicho índice es una base de datos bibliográfica que se estima cubre 160 millones de documentos académicos, que incluyen revistas científicas, monografías de grado, tesis de doctorado y maestría, patentes y reportes técnicos o manuscritos de trabajo depositados en librerías o repositorios digitales. La herramienta incluye un metabuscador donde nuestros autores y lectores podrán consultar y remitirse al contenido de todos los artículos publicados en la Revista desde el año 2000. Pueden visitarlo en cualquiera de los siguientes enlaces:

<https://scholar.google.com.co/citations?user=sUM9brMAAAAJ>

<http://tinyurl.com/scholar-ingenieria>

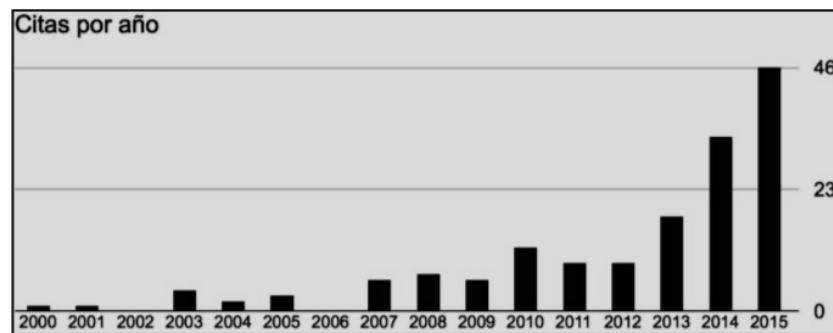
Open access



© The authors; licensee: Revista INGENIERÍA. ISSN 0121-750X. E-ISSN 2344-8393  
Cite this paper as: Sergio A. Rojas (2016). Señales Prometedoras en INGENIERÍA. En: Ingeniería, Vol. 21, No. 2, pp. 117:120. En línea DOI: <http://dx.doi.org/10.14483/udistrital.jour.reveng.2016.2.ne01>

Allí encontrarán el listado de artículos organizado en orden cronológico (empezando por los más recientes, es decir, desde el Vol. 21, No. 1, 2016), o por cantidad de citas. El número de citas es calculado automáticamente con los algoritmos de barrido de Google; por tal razón no puede considerarse un índice exacto, pues no es moderado por curadores humanos, pero sí brinda un estimativo razonable de información valiosa sobre el uso, la audiencia y cobertura de la Revista.

A modo de ilustración, la Figura 1 muestra el histograma de citas en el periodo 2000-2015, como lo reporta este índice. La gráfica presenta una tendencia relativamente estable hasta el año 2010, momento en el cual inicia un crecimiento vertiginoso hasta el año 2015: de un total de 165 citas, 128 se han realizado en dicho periodo (casi el 80 %). Un 28 % del total se han dado tan solo en el año 2015 (46 citas), cifra que sube a un 48 % al sumar los años 2014 y 2015 (79 citas); es decir, prácticamente la mitad de las citas históricas de la Revista han ocurrido en los dos últimos años.



**Figura 1:** Cantidad de citas de la Revista INGENIERÍA tomado de Google Scholar (Total=165).  
Fecha de consulta: 25-05-2016.

Contemplemos ahora el listado ordenado por citas, un fragmento del cual aparece en la instantánea mostrada en la Figura 2. La columna etiquetada como “Citado por” tiene enlaces asociados a sendos listados de los trabajos citantes. Una inspección más detallada revela datos interesantes. Por ejemplo, se observa que el artículo con más citas “*Propuesta de congresor basado en relaciones booleanas*” (Vol 6, No. 2, 2001), tiene quince en total, trece de las cuales fueron realizadas después al año 2010, todas ellas desde artículos en revistas y/o memorias de congresos internacionales.

Le sigue el artículo “*Una revisión al estado del arte del problema de ruteo de vehículos: Evolución histórica y métodos de solución*” (Vol 16, No. 2, 2011), con ocho citas (obviamente sucesivas al 2010), todos ellos de autoría exógena: una desde un artículo publicado en revista científica, dos desde artículos consignados en repositorios institucionales y cinco desde tesis de maestría y trabajos de grado, provenientes de universidades colombianas y chilenas. Continúa en la lista, “*Uso de la transformada wavelet para el estudio de tráfico fractal en redes de comunicaciones*”, que también presenta 8 citas, cuatro posteriores al 2010, tres de estas exógenas de las cuales dos son desde otras revistas y una desde una tesis de maestría de una universidad argentina.



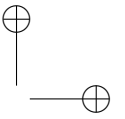
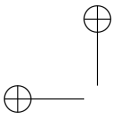
The image shows a screenshot of a Google Scholar search result for the journal 'Revista INGENIERÍA'. The journal is published by the Universidad Distrital Francisco José de Caldas. The search results are sorted by citation count. The table below represents the data extracted from the screenshot.

Title	1-20	Cited by	Year
Propuesta de congresor basado en relaciones booleanas JJS Méndez, OLG Melo, FVM Fontecha, AAR Acosta Ingeniería 6 (2), 42-50		15	2001
Una revisión al estado del arte del problema de ruteo de vehículos: Evolución histórica y métodos de solución LBR Medina, ECG La Rotta, JAO Castro Ingeniería 16 (2), 35-55		8	2011
Uso de la transformada wavelet para el estudio de tráfico fractal en redes de comunicaciones MAA Monroy Ingeniería 7 (1), 11-24		8	2002
Técnicas de simulación y filtrado de ruido en señales de espectroscopia RMN mediante transformadas wavelets HFC De Greiff, JVL Ginori Ingeniería 6 (1), 73-76		8	2001
Centroid of an interval type-2 fuzzy set: continuous vs. discrete OS Morales, JHS Devia, JJS Mendez Ingeniería 16 (2), 67-78		6	2011

Figura 2: Fragmento del listado de artículos ordenado por citaciones en Google Scholar.  
Fecha de consulta: 25-05-2016.

Encontramos en la cuarta posición el artículo “*Técnicas de simulación y filtrado de ruido en señales de espectroscopia RMN mediante transformadas wavelets*”, que curiosamente aparece allí porque está incluido como ejemplo de referencia bibliográfica en las plantillas de instrucciones para los autores de varias revistas electrónicas de la universidad, que suman siete de sus ocho citaciones en total; solo una proviene de otro artículo publicado en un repositorio digital (evidentemente un caso que se beneficiaría de una depuración humana, pues todavía los algoritmos automáticos de Google no están en capacidad de comprender). Y de este modo podríamos continuar con el resto del listado.

Estos ejemplos son asomo de la potencialidad de este índice como herramienta de consulta bibliográfica. Así aún los volúmenes de citaciones para INGENIERÍA no sean enormes, de estos indicadores surgen grandes interrogantes en relación a la función de las investigaciones que estamos divulgando: ¿a qué público están dirigidos?, ¿qué temas o problemáticas suscitan interés en la actualidad?, ¿cuáles están siendo olvidados o descuidados?, ¿contribuyen a motivar trabajos de grado, tesis de maestría, proyectos de investigación?, ¿tienen despliegue local o universal?, ¿importa si están escritos en español o en inglés?, ¿son relevantes solo para la Universidad Distrital o trascienden a ámbitos nacionales e internacionales?. Similarmente, respecto a la Revista como tal: ¿qué índices bibliográficos proporcionan mediciones más apropiadas para los propósitos y posturas de INGENIERÍA?, ¿qué estrategias permitirían seguir promoviendo su visibilidad y utilización?, ¿se están reflejando las medidas editoriales novedosas recientemente adoptadas, como la aplicación del indicador de similitud de Turnitin, el resumen estructurado, la agrupación de artículos por secciones o el boletín periódico de estadísticas?

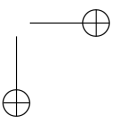
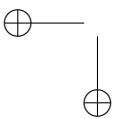


Al margen de estas cuestiones, interpretamos los cambios, los logros y las tendencias que hemos reseñado en esta nota, como señales promisorias del camino fructífero que emprendió la Revista con su transformación cinco años atrás. Que vale la pena resaltar, ha contado con el acompañamiento de nuestros editores, autores, investigadores y funcionarios, y que para que continúe exitosamente por la misma senda, requerirá de esfuerzos redoblados y apoyos más decididos. Por lo anterior, a todos nuestros lectores, a nuestra audiencia endógena y exógena, nacional e internacional, queremos agradecerles su confianza, e invitarlos con mayor ímpetu a apropiarse de nuestras páginas, a incorporarlas a sus aulas, laboratorios, oficinas e industrias, a construir sobre las propuestas allí plasmadas, a proponer nuevas y a divulgarlas en las mismas.

En este sentido recomendaremos como punto de partida las contribuciones publicadas en este nuevo número y a cuyos autores, evaluadores, editores, correctores y diagramadores, dicho sea de paso, aprovechamos para congratular y agradecer. Tales artículos contienen propuestas relacionadas con métodos de inferencia difusa, un estudio de impacto de la carga de vehículos eléctricos en la red de suministro y un análisis de tratamiento de aguas residuales, así como una selección especial de los mejores trabajos (artículos extendidos) del IEEE Workshop on Engineering Applications - 2015, organizado por la Facultad de Ingeniería de la Universidad Distrital y llevado a cabo en Bogotá, en el mes de octubre del año pasado. Como siempre, esperamos sean de su agrado.

**Sergio A. Rojas, PhD.**

Editor General Revista INGENIERÍA



Artículo de reflexión

# Metodología para el Diseño de Conjuntos Difusos Tipo-2 a partir de Opiniones de Expertos

*Methodology for Designing Type-2 Fuzzy sets from Experts Opinions*

**Mónica Rodríguez<sup>1</sup>, Yeniffer Huertas<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Correo electrónico: moniklra\_132@hotmail.com; yeniffer-21@hotmail.com

Recibido: 08-10-2015. Modificado: 27-01-2016. Aceptado: 10-02-2016

## Resumen

**Contexto:** Existe una creciente necesidad de procesar la información proveniente del lenguaje humano, la cual incluye incertidumbre, con el fin solucionar problemas definidos en un determinado contexto.

**Método:** Empleamos conjuntos difusos Tipo-2 a fin de representar y cuantificar el lenguaje humano, para lo cual presentamos una serie de aspectos metodológicos para su diseño. La propuesta se compone de tres actividades clave: (1) determinar la etiqueta lingüística (palabra), (2) definir su función de pertenencia y (3) recolectar la información desde los expertos.

**Resultados:** Se aplica y valida la propuesta en un escenario real basado en conjuntos triangulares a través de la comparación de dos grupos de expertos. Se modela, procesa y analiza la información de entrada permitiendo hacer un manejo adecuado a la incertidumbre implícita en sus opiniones.

**Conclusiones:** La metodología propuesta es aplicable a diferentes situaciones, donde múltiples sujetos expresan su opinión o percepción que manifiestan al rededor de determinado problema.

**Palabras clave:** conjuntos difusos Tipo-2, incertidumbre, percepción, información, lenguaje.

**Lenguaje:** español.

### Open access



© The authors; licensee: Revista INGENIERÍA. ISSN 0121-750X, E-ISSN 2344-8393. Cite this paper as: Rodríguez, M., Huertas, Y.: Metodología para el Diseño de Conjuntos Difusos Tipo-2 a partir de Opiniones de Expertos. En ingeniería: Vol. 21, Num. 2, 2016 121:137. En línea DOI: <http://dx.doi.org/10.14483/udistrital.jour.reveng.2016.2.a01>



### Abstract

**Context:** There is a need for processing information coming from human like language that includes uncertainty in order to solve problems defined in that context.

**Method:** We use Type-2 fuzzy sets for defining and measuring human like language, so we propose a methodology for designing them. The proposal is composed by three key steps: (1) defining a linguistic label (word), (2) defining its membership function, and (3) collecting information from experts.

**Results:** The proposal is applied and validated in a real scenario based on triangular fuzzy sets through two different groups of experts. We present a proposal to model, process and analyze input information coming from experts that allows to do an appropriate handling of uncertainty present in people perceptions.

**Conclusions:** The proposed methodology is applicable to different problems where different people express their opinions and/or perceptions about a specific problem.

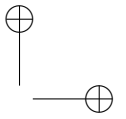
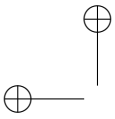
**Keywords:** uncertainty, perception, information, language, Type-2 fuzzy sets.

## 1. Introducción

El ser humano se enfrenta a diario a situaciones que involucran incertidumbre asociada a información ambigua e imprecisa, por lo que emplea el lenguaje natural de su elección para comunicar opiniones o juicios relacionados a una situación particular. A pesar de que la raza humana puede hablar más de 6000 lenguas diferentes [1], siempre existe un medio de comunicación el cual dos o más individuos utilizan un mismo lenguaje para comunicarse. La información transmitida a través de dicho lenguaje no se puede representar directamente con valores numéricos exactos, lo que genera un grado de incertidumbre que surge de la percepción de cada individuo frente al tema tratado y del significado que tienen las palabras que usa para explicarlo.

En la descripción real de un problema generalmente se recurre a expertos que proporcionan datos cuya precisión numérica puede ser demasiado costosa e insustancial, dado que el pensamiento humano no trabaja de esa manera [2]. A partir de este supuesto nace la necesidad de dar respuesta a esta situación en términos numéricos, pero de una manera más natural a cada caso, a través de *descripciones lingüísticas* que tienen connotaciones difusas en las que frecuentemente no es clarificado donde comienza y finaliza su significado.

Con el propósito de analizar todas las percepciones de un grupo de expertos (inter-incertidumbre) se emplean conjuntos difusos Tipo-2 (IT2 FSs), dado que modelan



la imprecisión inmersa en el lenguaje emitido por cada uno de ellos [3] y ofrecen una solución capaz de manejar la incertidumbre que propende al riesgo. La información de entrada que proporciona el conjunto de expertos debe tener unas características especiales que se establecen a la hora de la recolección, seguida de un proceso de ordenamiento que lleva finalmente a la computación perceptual.

Así pues, aunque el problema de construcción de funciones de pertenencia que capturen adecuadamente los significados de las descripciones lingüísticas ya ha sido abordado por varios autores [3], [4], se considera necesario profundizar en el proceso de recolección de la información de entrada detallando los pasos para la construcción del conjunto difuso.

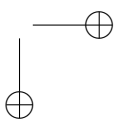
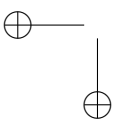
Los conjuntos difusos Tipo-2 han tenido exitosas aplicaciones en diferentes escenarios, como el diagnóstico médico [5], selección de personal [6], evaluación de desempeño [7], [8], confort térmico [9], toma de decisiones [10] y otros [11]–[13]. En dichas aplicaciones se propone una metodología que detalla el procedimiento a seguir para el diseño de conjuntos difusos con función de pertenencia triangular, partiendo de la recolección de información de entrada hasta llegar a la construcción e interpretación mediante el análisis estadístico del mismo.

A continuación se presentan conceptos básicos acerca de conjuntos difusos Tipo-1 y Tipo-2 así como diferentes medidas que nos proporcionan información sobre el comportamiento del problema; seguido de la descripción de la metodología propuesta basada en una encuesta, el tratamiento estadístico de la información obtenida y el análisis de dichos resultados para la construcción de la función de pertenencia asociada, se expone una aplicación de la metodología a un caso real basado en conjuntos triangulares de manera que se pueda analizar y validar, para finalizar con algunas conclusiones del trabajo.

## 2. Conjuntos difusos

La teoría de conjuntos difusos surge de la necesidad de tratar y procesar información afectada por la incertidumbre no probabilística del entorno. El término es introducido por Lofti A. Zadeh [14] en 1965 y se utiliza para representar matemáticamente la imprecisión o ambigüedad inmersa en distintos campos de la vida cotidiana, proporcionando herramientas para manejarla.

El modelamiento de la realidad de manera estática genera pérdida de información importante en el análisis de muchos problemas, debido a las opiniones y juicios vagos e



imprecisos generados por el *lenguaje natural* utilizado por las personas que se involucran en el problema, así como sus relaciones. Los conjuntos difusos permiten describir y caracterizar la realidad usando modelos flexibles que proceden de *descripciones lingüísticas* a través de funciones de pertenencia. Un conjunto difuso  $A$  es definido como un par ordenado [15]:

$$A = \{(x, \mu_A(x))\}, x \in X \quad (1)$$

donde  $\mu_A(x)$  es el grado de pertenencia de  $x$  en  $A$  y  $\mu_A$  es la función de pertenencia asociada a la palabra  $A$ , que define el grado en el cual cada elemento del universo de discurso  $X$  pertenece al conjunto difuso. El universo de discurso  $x \in X$  es un conjunto clásico que toma valores en  $\mathfrak{R}$ .

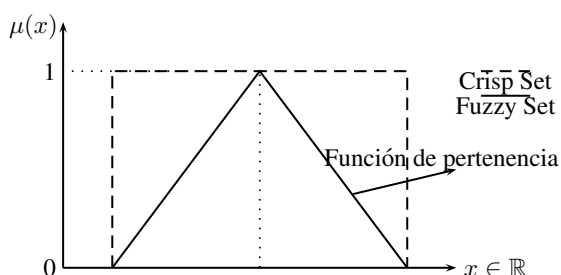


Figura 1. Conjunto difuso Tipo-1

En conjuntos difusos de este tipo cada elemento del conjunto tiene un grado de pertenencia asociado, representado por un número en el intervalo unitario  $[0, 1]$  y son llamados *conjuntos difusos clásicos* o *conjuntos difusos Tipo-1*. Sus funciones de pertenencia son precisas y requieren que a cada elemento del universo de discurso le sea asignado un número real particular.

En la figura 1 se representa un conjunto difuso donde en el eje de abscisas se indican los elementos del conjunto universo  $X$  y en el de las ordenadas los grados de pertenencia, definiendo así la función de pertenencia  $\mu(x)$ . De la misma manera se realiza el contraste con un conjunto clásico donde la pertenencia es total.

### 3. Conjuntos difusos Tipo-2 de intervalo

En algunos contextos es posible identificar fuentes de incertidumbre asociadas al lenguaje natural, donde se puede ponderar dicha incertidumbre con grados de pertenencia a su vez difusos, considerándolos de esta manera como incertidumbre difusa Tipo-2. En general, un conjunto difuso Tipo-2 es una generalización de un conjunto difuso en cuanto se asocia una fuente secundaria de incertidumbre relacionada con la definición de una palabra o conjunto  $A$ . Dicha fuente adicional de incertidumbre se representa como una función de pertenencia secundaria asociada a cada valor de  $x \in X$  (o universo de discurso), en otras palabras:

$$\tilde{A} : X \longrightarrow F([0, 1]) \quad (2)$$

donde  $F([0, 1])$  es el conjunto de todos los conjuntos difusos Tipo-1 que pueden ser definidos dentro del universo de discurso  $x \in X$ .

Los conjuntos difusos Tipo-2, cuya función de pertenencia secundaria es un intervalo (es decir que la incertidumbre asociada al lenguaje es tratada de manera equitativa), son llamados *conjuntos difusos de intervalo* o IT2FSs (por sus siglas en inglés) [4] o también *conjuntos difusos Tipo-2 de intervalo (IT2FSs)*, ya que los grados de pertenencia asignados a los elementos del universo de discurso son un intervalo.

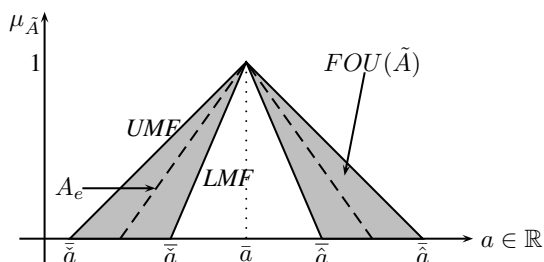
Lofti A. Zadeh [14] explica que un IT2FS es expresado por dos funciones de pertenencia, donde una representa el grado de pertenencia en  $X$  y la otra da una ponderación a cada uno de los conjuntos difusos Tipo-1. Así, un IT2FS es definido como:

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X\} \tag{3}$$

Por otra parte, el conjunto difuso primario  $J_x$  está ponderado por el conjunto difuso  $f_x(u)$  como una función de pertenencia secundaria:

$$\tilde{A} = \{(x, u), J_x, f_x(u) \mid x \in X; u \in [0, 1]\} \iff f_x(u) = 1 \tag{4}$$

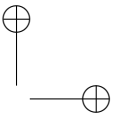
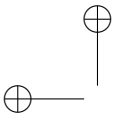
donde  $x$  es la variable primaria,  $J_x$  es un intervalo  $[0, 1]$  que representa la pertenencia primaria de  $x$ ,  $u$  es la variable secundaria y  $f_x(u)$  es la función de pertenencia secundaria de  $x$ .



La *Huella de Incertidumbre* (FOU, Footprint of Uncertainty, por sus siglas en inglés) de los conjuntos difusos Tipo-2 [17] define la incertidumbre de  $\tilde{A}$  como la unión de todas las pertenencias primarias,

$$FOU(\tilde{A}) = \bigcup_{x \in X} J_x \tag{5}$$

**Figura 2.** Conjunto difuso Tipo-2 de intervalo  $\tilde{A}$  [16] la cual está limitada por dos funciones de pertenencia: una función de pertenencia superior (UMF, *Upper membership function*, por sus siglas en inglés)  $\bar{\mu}_{\tilde{A}}(x)$  y una función de pertenencia inferior (LMF, *Lower membership function*, por sus siglas en inglés)  $\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x)$  donde son conjuntos difusos Tipo-1 y tienen  $e$  conjuntos empotrados  $A_e$ ; en consecuencia el grado de pertenencia de cada elemento de un IT2FS es un intervalo  $[\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x), \bar{\mu}_{\tilde{A}}(x)]$  [18].



El conjunto tiene un valor esperado obtenido mediante una reducción de tipo [19] que nos proporciona información acerca del posible comportamiento del problema. Dicha medida es el centroide que corresponde a un intervalo cerrado formado por todos los centroides de los conjuntos difusos Tipo-1 empotrados contenidos en la huella de incertidumbre (FOU) de  $\tilde{A}$  [20],

$$C(\tilde{A}) = 1/[C_l(\tilde{A}); C_u(\tilde{A})] = 1/[C_l, C_u] \quad (6)$$

donde  $C_l(\tilde{A})$  y  $C_u(\tilde{A})$  son la cota inferior y superior del centroide. Los conjuntos difusos Tipo-2 de intervalo tienen una cantidad infinita de centroides incrustados en su FOU, siendo su cálculo un proceso iterativo donde las ecuaciones generales para el cálculo de las cotas son:

$$C_l(\tilde{A}) = \left( \sum_{i=1}^L A_i \bar{\mu}_{\tilde{A}}(x_i) + \sum_{i=L+1}^N A_i \underline{\mu}_{\tilde{A}}(x_i) \right) / \left( \sum_{i=1}^L \bar{\mu}_{\tilde{A}}(x_i) + \sum_{i=L+1}^N \underline{\mu}_{\tilde{A}}(x_i) \right) \quad (7)$$

$$C_u(\tilde{A}) = \left( \sum_{i=1}^U A_i \bar{\mu}_{\tilde{A}}(x_i) + \sum_{i=U+1}^N A_i \underline{\mu}_{\tilde{A}}(x_i) \right) / \left( \sum_{i=1}^U \bar{\mu}_{\tilde{A}}(x_i) + \sum_{i=L+1}^N \underline{\mu}_{\tilde{A}}(x_i) \right) \quad (8)$$

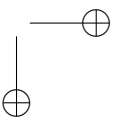
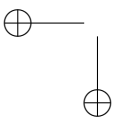
donde  $\bar{\mu}_{\tilde{A}}(x_i)$  y  $\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x_i)$  son los valores superior e inferior de la función de pertenencia,  $L$  el punto que marca el cambio de  $\bar{\mu}_{\tilde{A}}(x_i)$  a  $\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x_i)$ , y  $R$  el punto que marca el cambio de  $\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x_i)$  a  $\bar{\mu}_{\tilde{A}}(x_i)$ .

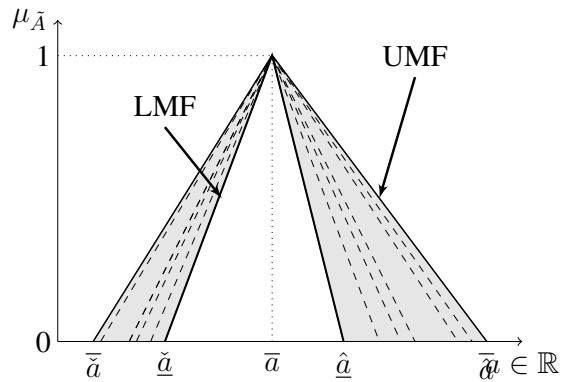
## 4. Metodología propuesta para la obtención de conjuntos difusos Tipo-2

Las descripciones lingüísticas asociadas al juicio de los expertos acerca de una situación particular contienen incertidumbre donde no se presenta claramente el inicio y el fin del significado, por lo cual es necesario identificar la manera de diseñar IT2FSs, con el propósito de manejar este tipo de información. La metodología propuesta no requiere sujetos con conocimiento sobre conjuntos difusos, permite recolectar información de un grupo de expertos y tener en cuenta todas las percepciones que componen la huella de incertidumbre (FOU). El enfoque propuesto se basa en tres pasos:

1. Determinar la palabra que se desea representar.
2. Definir la función de pertenencia que se desea obtener.

La figura 3 muestra una FOU sencilla donde las funciones de pertenencia inferior (LMF) y superior (UMF) son triangulares. Esta es la función esperada en el





**Figura 3.** Función de pertenencia no simétrica triangular Tipo-2

desarrollo del enfoque propuesto. La función de pertenencia inferior se define como sigue:

$$\mu_{\bar{A}} = \begin{cases} 0, & \text{if } x \leq \underline{a} \\ (x - \underline{a})/(\bar{a} - \underline{a}), & \text{if } x \in (\underline{a}, \bar{a}] \\ (\hat{a} - x)/(\hat{a} - \bar{a}), & \text{if } x \in (\bar{a}, \hat{a}) \\ 0, & \text{if } x \geq \hat{a} \end{cases} \quad (9)$$

La función de pertenencia superior se define como sigue:

$$\bar{\mu}_{\bar{A}} = \begin{cases} 0, & \text{if } x \leq \bar{a} \\ (x - \bar{a})/(\bar{a} - \underline{a}), & \text{if } x \in (\bar{a}, \bar{a}] \\ (\bar{a} - x)/(\bar{a} - \underline{a}), & \text{if } x \in (\bar{a}, \hat{a}) \\ 0, & \text{if } x \geq \hat{a} \end{cases} \quad (10)$$

Es importante tener en cuenta que para obtener una función de pertenencia como la mostrada en la figura 3, debe asignarse un valor esperado, porque si este valor queda a discreción de los múltiples expertos, se obtendrían muchos valores diferentes que seguramente modificarían su forma.

Luego de la selección, viene el diseño del método para la recolección de información, que permitirá obtener una función de pertenencia triangular.

3. Utilizar la percepción de múltiples expertos en la recolección de información. El procedimiento a seguir para alcanzar el objetivo se compone de tres actividades principales: (1) *Llevar a cabo una encuesta*, (2) *Tratamiento estadístico de la información* y (3) *Análisis de resultados*.

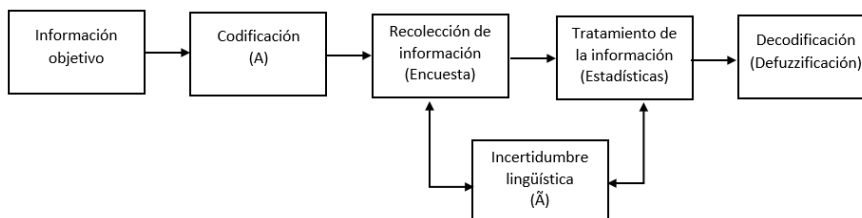
## 4.1. La encuesta

El enfoque desarrollado tiene como fin obtener la información esperada, entendiéndola como el resultado de un correcto entendimiento de lo que se requiere, para lo que se propone llevar a cabo una encuesta que capture la opinión de un experto acerca de una variable específica.

Es necesario que el contenido del material utilizado para la recolección de información sea lo suficientemente claro para cualquier sujeto, considerando que la metodología se diseña para ser aplicada a personas que no conocen la teoría de conjuntos difusos. El cuestionario debe incluir:

- **Un encabezado:** que permite al experto encuestado comprender qué información es la que debe proveer para asegurar el éxito de la encuesta. El objetivo es obtener valores numéricos sencillos que representen la percepción que una persona tiene acerca de la palabra.
- **Preguntas sencillas y eficientes:** se le pide al encuestado que proporcione su percepción sobre los parámetros requeridos, previamente definidos por la función de pertenencia que se quiere obtener, descrita en un universo de discurso establecido. Los expertos deben ubicar los puntos límite del intervalo que individualmente asocian con la palabra dentro de un rango, de acuerdo con tres escenarios: el primero representa una opinión **optimista**, el segundo el valor **esperado** y el tercero la posición **pesimista**. Es importante considerar que la información obtenida como resultado de la encuesta debe ser computable.

La figura 4 representa la metodología propuesta como un proceso cuya entrada de información es codificada, seguida de una transformación que parte de la recolección de información a través de la encuesta, generando resultados que poseen incertidumbre lingüística; y finalmente una salida en la cual la información es defuzzificada mediante el tratamiento estadístico.



**Figura 4.** Proceso propuesto para el diseño de conjuntos difusos Tipo-2 de intervalo

## 4.2. Tratamiento estadístico

Según Mendel [3] cada sujeto proporciona los puntos límite de un intervalo asociado con una palabra sobre una escala predeterminada. La figura 3 muestra como el IT2Fs es descrito completamente por la FOU, la cual es expresada por la unión de las opiniones de expertos representadas por conjuntos difusos Tipo-1 empotrados  $A_e$ .

Para realizar el tratamiento estadístico de los datos es necesario determinar los puntos límite del intervalo en el universo discurso  $X$ , usando los operadores máximos y mínimos que conforman la función de pertenencia superior (UMF) y la función de pertenencia inferior (LMF). Se procede a determinar los parámetros dados por las siguientes ecuaciones:

$$\bar{a} \triangleq \min_e \{\check{a}_e\} \quad (11)$$

$$\check{a} \triangleq \max_e \{\check{a}_e\} \quad (12)$$

$$\hat{a} \triangleq \min_e \{\hat{a}_e\} \quad (13)$$

$$\bar{a} \triangleq \max_e \{\hat{a}_e\} \quad (14)$$

$$\check{a}_c \triangleq \min_e \{\bar{a}_e\} \quad (15)$$

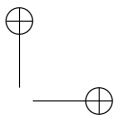
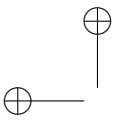
$$\hat{a}_c \triangleq \max_e \{\bar{a}_e\} \quad (16)$$

### 4.2.1. Tamaño muestral

Dado que los procesos de inferencia difusa no pretenden hacer inferencia estadística desde un punto de vista probabilístico, no se plantea la necesidad de contar con tamaños de muestras adecuados para inferir la población de interés. Por otra parte, los sistemas difusos no buscan generalizar medidas probabilísticas en el sentido amplio de la palabra, sino representar incertidumbre de tipo lingüístico utilizando la información disponible, lo cual corresponde a un *muestreo de conveniencia* o *por selección intencionada*.

Recomendamos entonces el uso de la totalidad de los expertos pertinentes disponibles. En casos donde exista posibilidad de realizar muestreos con el fin de reducir la cantidad de encuestas a realizar, podría esto complementar los resultados obtenidos. Sin embargo y como en muchas aplicaciones prácticas se observa, únicamente se puede trabajar con una cantidad de información limitada por diferentes factores como disponibilidad de expertos, costos asociados a las encuestas, pertinencia y grado de experticia de las





personas encuestadas, etc. por lo que no siempre es factible aplicar técnicas de muestreo probabilístico.

### 4.3. Análisis de resultados

Un análisis descriptivo del comportamiento de la variable en cuestión (la palabra definida inicialmente) es presentado y seguido a este, los conjuntos obtenidos de diferentes grupos de expertos son comparados, identificando el tamaño de la variación entre los mismos. Así pues, se utilizan las ecuaciones 11 - 16 con el fin de parametrizar completamente la palabra que es objeto de pregunta a los expertos. Algunas medidas de interés que se pueden computar a través de lo obtenido son:

1. Centroide (valor esperado)
2. Varianza (dispersión)
3. Ordenamiento entre palabras (orden)

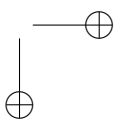
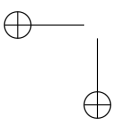
Dichas medidas se utilizan dado que la teoría existente acerca de medidas de incertidumbre sobre conjuntos difusos Tipo-2 están aún en desarrollo [11], [18], [21]. Otras medidas de desempeño podrán ser utilizadas en el futuro, a medida que la teoría de conjuntos difusos Tipo-2 avance.

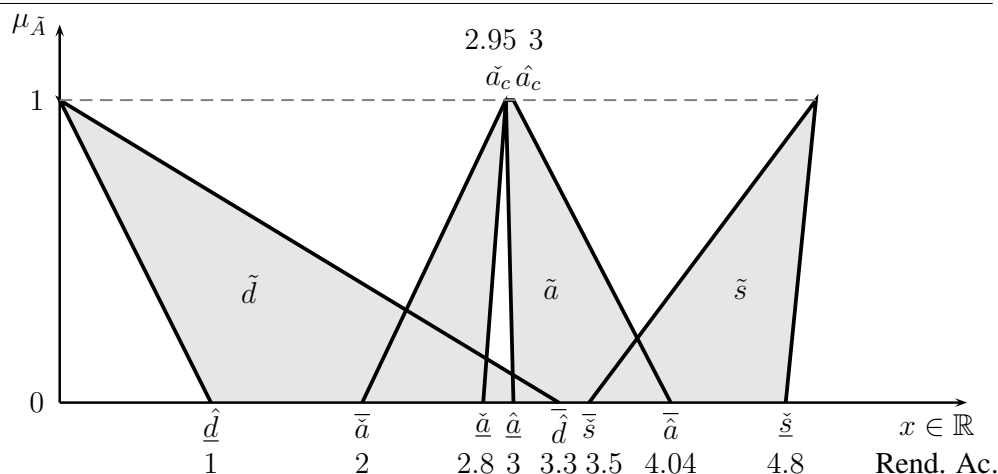
## 5. Ejemplo de aplicación

La metodología presentada es de carácter general y puede ser utilizada para obtener diferentes tipos de conjuntos difusos, dependiendo de las necesidades del usuario. A continuación presentamos un ejemplo obtenido de información real de cómo obtener conjuntos difusos triangulares, y aun cuando existe una amplia gama de conjuntos difusos que se pueden obtener mediante la metodología propuesta, no es el objetivo general de este artículo el ejemplificar dicha gama de conjuntos difusos sino la de aplicarla a una situación real.

### 5.1. Percepciones de los docentes acerca de “rendimiento académico”

La siguiente aplicación está basada en la percepción de veinticinco docentes de último semestre de ingeniería industrial de una universidad pública acerca de la expresión “rendimiento académico”. Cabe anotar que se usaron las encuestas que fueron respondidas, ya que aunque se envió la encuesta a toda la población de docentes de último semestre de ingeniería industrial de dicha universidad, no todos la contestaron, por tanto se utilizó la información disponible. Los docentes contestaron una encuesta la





**Figura 5.** Función de pertenencia de las percepciones de los docentes acerca de “rendimiento académico”

cual incluye las siguientes preguntas relacionadas con las notas numéricas asociadas con un rendimiento académico deficiente, aceptable y sobresaliente:

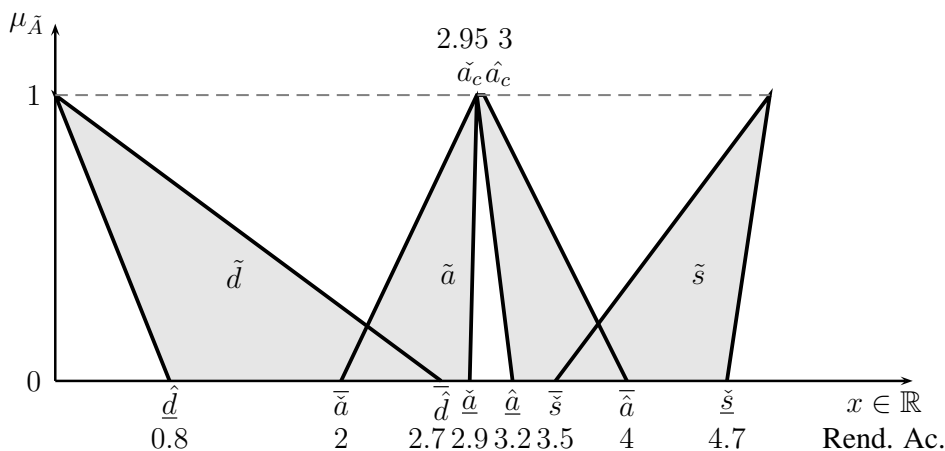
1. Sabemos que cero (0) corresponde a un rendimiento académico deficiente. ¿Hasta qué calificación considera que un estudiante continúa con un rendimiento académico deficiente?
2. Sabemos que cinco (5) corresponde a un rendimiento académico sobresaliente. ¿Desde qué calificación considera que un estudiante comienza a tener un rendimiento académico sobresaliente?
3. Para que un estudiante apruebe una asignatura debe obtener una calificación de 2.95, siendo esta asociada con un rendimiento académico aceptable. ¿En qué rango considera que un estudiante mantiene un rendimiento académico aceptable? (Note que un rendimiento aceptable no implica que se apruebe o no una asignatura en particular, ya que el estudiante puede obtener una nota menor o mayor al valor al requerido por diferentes externalidades que interfieren con su desempeño).

La tabla V muestra las respuestas obtenidas en la encuesta (ver apéndice).

Conjunto $\tilde{d}$		
	$C_l$	$C_u$
$C(\tilde{d})$	1.18	0.29
$\delta^2$	0.73	0.25
Conjunto $\tilde{a}$		
	$C_l$	$C_u$
$C(\tilde{a})$	3.41	2.61
$\delta^2$	0.17	6.65E-05
Conjunto $\tilde{s}$		
	$C_l$	$C_u$
$C(\tilde{s})$	4.7	4.18
$\delta^2$	0.14	0.99

**Tabla I.** Centroides y sus varianzas de las percepciones de los docentes acerca de “rendimiento académico”

Después de realizar el tratamiento estadístico de las respuestas, los intervalos de puntos finales son determinados en el conjunto difuso asociado con cada uno de los rendimientos académicos, obteniendo los parámetros:  $\hat{d} = 1, \tilde{d} = 3.3, \bar{a} = 2, \underline{a} = 2.8, \hat{a} = 3, \tilde{a} = 4.04, \check{a}_c = 2.95, \hat{a}_c = 3, \bar{s} = 3.5, \underline{s} = 4.8$ . La tabla I muestra los centroides y sus varianzas para las percepciones de los docentes asociadas con cada uno de los rendimientos académicos considerados: En este caso, cuando analizamos los centroides (tabla I) para obtener información acerca del comportamiento del problema, se observa lo siguiente:  $0.29 \leq 3.41, 1.18 \leq 2.61, 2.61 \leq 4.7$  y  $3.41 \leq 4.18$



**Figura 6.** Función de pertenencia de las percepciones de los estudiantes acerca de “rendimiento académico”

## 5.2. Percepción de los estudiantes acerca de “rendimiento académico”

En la misma forma, la encuesta fue realizada a un grupo de diecisiete estudiantes de último semestre de ingeniería industrial de una universidad pública para determinar su percepción acerca de rendimiento académico. Los resultados obtenidos se muestran en la

Tabla VI (Apéndice). La figura 6 representa la percepción de los estudiantes acerca de “rendimiento académico”. Al realizar el tratamiento estadístico de las respuestas, los intervalos de puntos finales son determinados

Conjunto $\tilde{d}$		
	$C_l$	$C_u$
$C(\tilde{d})$	0.96	0.23
$\delta^2$	0.49	0.17
Conjunto $\tilde{a}$		
	$C_l$	$C_u$
$C(\tilde{a})$	3.34	2.68
$\delta^2$	0.17	0.003
Conjunto $\tilde{s}$		
	$C_l$	$C_u$
$C(\tilde{s})$	4.7	4.25
$\delta^2$	0.14	0.87

**Tabla II.** Centroides y sus varianzas de las percepciones de los estudiantes acerca de “rendimiento académico”

en los conjuntos difusos asociados con cada uno de los rendimientos académicos, obteniendo los parámetros:  $\hat{d} = 0.8, \bar{d} = 2.7, \bar{a} = 2, \bar{\alpha} = 2.9, \hat{a} = 3.2, \bar{a} = 4, \bar{\alpha}_c = 2.95, \hat{a}_c = 3, \bar{s} = 3.5, \bar{\xi} = 4.7$ .

La tabla II muestra los centroides y sus varianzas para las percepciones de los estudiantes asociadas con cada uno de los rendimientos académicos considerados:

En este caso, cuando analizamos los centroides (tabla II) para obtener información acerca del comportamiento del problema, se observa lo siguiente:  $0.23 \leq 3.34, 0.96 \leq 2.68, 2.68 \leq 4.7$  y  $3.34 \leq 4.25$

### 5.3. Análisis de los resultados de la aplicación

Media ( $\mu$ )				
	Deficiente (optimista)	Sobresaliente (pesimista)	Aceptable (pesimista)	Aceptable (optimista)
Docentes	2.47	4.03	2.69	3.54
Estudiantes	1.75	4.16	2.66	3.52

**Tabla III.** Promedios de las percepciones de los estudiantes acerca de “rendimiento académico”

Varianza ( $\delta^2$ )				
	Deficiente (optimista)	Sobresaliente (pesimista)	Aceptable (pesimista)	Aceptable (optimista)
Docentes	0.26	0.09	0.08	0.64
Estudiantes	0.34	0.08	0.06	0.04

**Tabla IV.** Varianza de las percepciones de los estudiantes acerca de “rendimiento académico”

Basados en los resultados se puede observar la similitud en la percepción de rendimiento académico aceptable y sobresaliente para estudiantes y docentes, pero una diferencia significativa en la percepción de rendimiento académico deficiente, lo que nos indica que el intervalo asociado a la *etiqueta lingüística* según el juicio de los docentes es exigente.

De acuerdo con [21] se puede afirmar que efectivamente se usa el orden parcial de intervalos de los centroides en ambos cumpliendo con lo siguiente:

$C(\tilde{d}) \leq C(\tilde{a}) \leq C(\tilde{s})$ , lo cual implica que  $C_u(\tilde{d}) \leq C_l(\tilde{a})$ ,  $C_l(\tilde{d}) \leq C_u(\tilde{a})$ ,  $C_u(\tilde{a}) \leq C_l(\tilde{s})$  y  $C_l(\tilde{a}) \leq C_u(\tilde{s})$

Entonces, el orden de las palabras en ambos casos es el siguiente:

deficiente  $\leq$  aceptable  $\leq$  sobresaliente

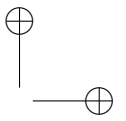
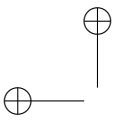
En un análisis descriptivo de la varianza de las percepciones se puede observar que hay una mayor dispersión en la opinión respecto al rendimiento académico deficiente (optimista) con  $\delta^2 = 0.26$  en la percepción de los docentes (tabla IV) y  $\delta^2 = 0.34$  en la percepción de los estudiantes (tabla IV). De igual forma la variabilidad es considerable en la percepción del rendimiento académico sobresaliente (pesimista) para los docentes con  $\delta^2 = 0.64$  (tabla IV).

El análisis realizado con las medidas de interés descritas y calculadas anteriormente como lo son el centroide, la varianza y el ordenamiento de palabras, nos permiten concluir que las opiniones de los dos grupos de expertos son similares, contrario a lo que se podría pensar, dado que estos se encuentran en condiciones muy diferentes.

## 6. Conclusiones

Se propone una metodología sencilla de implementar para obtener información de expertos con el fin de diseñar conjuntos difusos Tipo-2 con función de pertenencia triangular. Nuestra propuesta es una alternativa que ayuda a las personas a comprender la incertidumbre asociada al lenguaje, la cual es aplicable a diferentes campos a través del diseño de una encuesta.

El caso de estudio permite observar cómo la metodología propuesta provee una alternativa sencilla y muy útil para el diseño de IT2FSs triangulares asimétricos a través de información procedente de una encuesta aplicada a dos grupos de expertos. Su aplicabilidad en diferentes situaciones, donde múltiples expertos tienen diferentes percepciones y comprensiones de un mismo problema, es alta y ofrece una alternativa para el tratamiento de información que proviene de conceptos y palabras, pero no de



números y cuantificaciones clásicas.

Es interesante comparar las respuestas de diferentes grupos de personas con diferentes características, pero percepciones similares. El diseño de un conjunto difuso Tipo-2 de intervalo nos permite modelar la incertidumbre generada en el lenguaje natural que elige emplear el ser humano para expresar sus opiniones sobre una variable. A través de la metodología presentada se asegura que la información de entrada permita ser procesada, tratada y analizada de forma adecuada, con el fin de facilitar un posterior proceso de toma de decisiones.

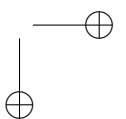
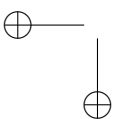
Para finalizar, es importante tener en cuenta que diversos factores pueden afectar la confiabilidad de la metodología propuesta, tales como el nivel verdadero de experticia de las personas encuestadas, la disponibilidad de personas a encuestar y la complejidad de los conjuntos difusos que se pretenden parametrizar. Recomendamos realizar preguntas sencillas y fáciles de entender con el fin de no agregar incertidumbre adicional al análisis.

## Trabajo futuro

En futuros trabajos se pretende experimentar con varios tipos de funciones de pertenencia para validar la generalidad de la metodología. Recalamos la importancia del proceso de formulación de las preguntas de la encuesta, ya que de ellas depende la forma de la función de pertenencia que se obtendrá.

## Referencias

- [1] S. R. Anderson, “How many languages are there in the world?,” disponible en <http://www.linguisticsociety.org/content/how-many-languages-are-there-world>, 2010.
- [2] Y. Jiang and Y. Tang, “An interval type-2 fuzzy model of computing with words,” *Information Sciences*, 2014.
- [3] J. Mendel and D. Wu, *Perceptual computing: aiding people in making subjective judgments*, vol. 13. John Wiley & Sons, 2010.
- [4] G. Klir and B. Yuan, *Fuzzy sets and fuzzy logic*, vol. 4. Prentice Hall New Jersey, 1995.
- [5] L. Di Lascio, A. Gisolfi, and A. Nappi, “Medical differential diagnosis through type-2 fuzzy sets,” in *Fuzzy Systems, 2005. FUZZ’05. The 14th IEEE International Conference on*, pp. 371–376, IEEE, 2005.
- [6] F. Doctor, H. Hagra, D. Roberts, and V. Callaghan, “A type-2 fuzzy based system for handling the uncertainties in group decisions for ranking job applicants within human resources systems,” in *Fuzzy Systems, 2008. FUZZ-IEEE 2008. (IEEE World Congress on Computational Intelligence). IEEE International Conference on*, pp. 481–488, IEEE, 2008.
- [7] R. Chen, P. Liu, and S. Tang, “An evaluation method for enterprise knowledge management performance based on linguistic variable,” in *Business and Information Management, 2008. ISBIM’08. International Seminar on*, vol. 1, pp. 510–513, IEEE, 2008.



- [8] S.-Y. Wang, "Applying 2-tuple multigranularity linguistic variables to determine the supply performance in dynamic environment based on product-oriented strategy," *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, vol. 16, no. 1, pp. 29–39, 2008.
- [9] C. Li, G. Zhang, J. Yi, and M. Wang, "Uncertainty degree and modeling of interval type-2 fuzzy sets: definition, method and application," *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 66, no. 10, pp. 1822–1835, 2013.
- [10] J. Qin and X. Liu, "Interval type-2 relational analysis and its application to multiple attribute decision making," in *Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE), 2014 IEEE International Conference on*, pp. 306–313, IEEE, 2014.
- [11] D. Wu and J. M. Mendel, "A comparative study of ranking methods, similarity measures and uncertainty measures for interval type-2 fuzzy sets," *Information Sciences*, vol. 179, no. 8, pp. 1169–1192, 2009.
- [12] J. M. Mendel and D. Wu, "Determining interval type-2 fuzzy set models for words using data collected from one subject: Person fous," in *Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE), 2014 IEEE International Conference on*, pp. 768–775, IEEE, 2014.
- [13] C. Desimpelaere and T. Marchant, "An empirical test of some measurement-theoretic axioms for fuzzy sets," *Fuzzy sets and systems*, vol. 158, no. 12, pp. 1348–1359, 2007.
- [14] L. A. Zadeh, "Fuzzy sets," *Information and control*, vol. 8, no. 3, pp. 338–353, 1965.
- [15] R. E. Bellman and L. A. Zadeh, "Decision-making in a fuzzy environment," *Management science*, vol. 17, no. 4, p. 141, 1970.
- [16] J. C. Figueroa-García and G. Hernández, "A multiple means transportation model with type-2 fuzzy uncertainty," in *Supply Chain Management Under Fuzziness*, pp. 449–468, Springer, 2014.
- [17] J. C. Figueroa-García, E. J. Medina-Pinzón, and J. D. Rubio-Espinosa, "Non-cooperative games involving type-2 fuzzy uncertainty: An approach," in *Computer Information Systems and Industrial Management*, pp. 387–396, Springer, 2014.
- [18] D. Wu and J. M. Mendel, "Uncertainty measures for interval type-2 fuzzy sets," *Information Sciences*, vol. 177, no. 23, pp. 5378–5393, 2007.
- [19] J. M. Mendel, "Uncertain rule-based fuzzy logic system: introduction and new directions," 2001.
- [20] J. M. Mendel and F. Liu, "Super-exponential convergence of the karnik–mendel algorithms for computing the centroid of an interval type-2 fuzzy set," *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, vol. 15, no. 2, pp. 309–320, 2007.
- [21] J. C. Figueroa-García, Y. Chalco-Cano, and H. Román-Flores, "Distance measures for interval type-2 fuzzy numbers," *Discrete Applied Mathematics*, 2014.

---

### Mónica Rodríguez

Ingeniera Industrial, Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Sus temas de interes se relacionan con planeación de la producción y lógica difusa. Correo electrónico: monikra132@gmail.com

---

### Yeniffer Huertas

Ingeniera Industrial, Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Sus temas de interes se relacionan con logística y lógica difusa. Correo electrónico: yeniffer-21@hotmail.com

## Apéndice

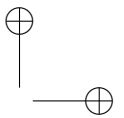
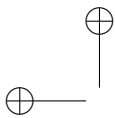
Deficiente	Sobresaliente	Aceptable
2	4	2.5 - 3.5
2.9	4	3.2
3	4	2
2	3.5	2.75
2	4	3
3	4	3.5
3	4	3 - 4
3	4.8	3 - 3.8
3	4	3.5
2	4	2.5 - 3.5
2.54	4.05	2.55 - 4.04
2	4	3.5
2.4	4	2.5 - 3.4
2.75	4	2.75 - 3.95
2.5	4	2.5 - 4
2	4	2.8
2.5	4	3 - 3.5
2.5	4	3.25
1	3.8	3.3
3	3.5	3.5
3.3	3.5	3.1
2.9	4.5	3.5
3	4	3 - 3.5
2.5	4.6	2.5 - 3.5
2.5	4.5	3 - 3.5

**Tabla V.** Percepción de los docentes acerca del “rendimiento académico”

Deficiente	Sobresaliente	Aceptable
2.5	4	2.8 - 4
1	4	2.5 - 3.3
2.7	4	2.8 - 3.8
1.5	4.2	2.9 - 3.4
1.5	4.3	2.8 - 3.3
2	4	2.8 - 3.5
1.5	4.7	2.7 - 3.5
2	4.2	2.5 - 3.2
1	4	2.8 - 3.5
1.5	4.3	2.8 - 3.5
2	4.5	2.9 - 3.5
2.5	3.8	2.5 - 3.8
0.8	4.4	2.4 - 3.4
2.2	4.4	3 - 3.6
1	4.2	2.5 - 3.5
2	3.5	2 - 3.5
2	4.2	2.6 - 3.5

**Tabla VI.** Percepción de los estudiantes acerca del “rendimiento académico”





Research paper

## Nie-Tan Method and its Improved Version: A Counterexample

*Método Nie-Tan y su Versión Mejorada: Un contraejemplo*

**Juan D. Rojas<sup>1</sup>, Omar Salazar<sup>1</sup>, Humberto Serrano<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Correspondence email: osalazarm@correo.udistrital.edu.co

Received: 13-10-2016. Modified: 18-01-2016. Accepted: 30-03-2016

### Abstract

**Context:** The bottleneck on interval type-2 fuzzy logic systems is the output processing when using Centroid Type-Reduction + Defuzzification (CTR+D method). Nie and Tan proposed an approximation to CTR+D (NT method). Recently, Mendel and Liu improved the NT method (INT method). Numerical examples (due to Mendel and Liu) exhibit the NT and INT methods as good approximations to CTR+D.

**Method:** Normalization to the unit interval of membership function domains (examples and counterexample) and variables involved in the calculations for the three methods. Examples (due to Mendel and Liu) taken from the literature. Counterexample with piecewise linear membership functions. Comparison by means of error and percentage relative error.

**Results:** NT vs. CTR+D: Our counterexample showed an error of 0.1014 and a percentage relative error of 30.53%. This is respectively 23 and 32 times higher than the worst case obtained in the examples. INT vs. CTR+D: Our counterexample showed an error of 0.0725 and a percentage relative error of 21.83%. This is respectively 363 and 546 times higher than the worst case obtained in the examples.

**Conclusions:** NT and INT methods are not necessarily good approximations to the CTR+D method.

**Keywords:** Type-2 fuzzy logic system, type-reduction, defuzzification, Nie-Tan method.

**Language:** English.

### Resumen

**Contexto:** El cuello de botella en sistemas de lógica difusa tipo-2 de intervalo es el procesamiento de salida que usa reducción de tipo centroide + defusificación (método CTR+D). Nie y Tan propusieron una aproximación a CTR+D (método NT). Recientemente, Mendel y Liu mejoraron la propuesta (método INT). Ejemplos debidos a Mendel y Liu exhiben a NT e INT como buenas aproximaciones a CTR+D.

**Método:** Normalización al intervalo unitario de los dominios de las funciones de pertenencia (para ejemplos y contraejemplo) y de las variables que intervienen en los cálculos de los tres métodos. Ejemplos tomados de la literatura (debidos a Mendel y Liu). Contraejemplo con funciones de pertenencia lineales por tramos. Comparación por medio de métricas de error y porcentaje de error relativo.

**Resultados:** NT vs. CTR+D: El contraejemplo mostró un error de 0.1014 y error relativo porcentual de 30.53%. Esto es respectivamente 23 y 32 veces mayor que el peor caso obtenido en los ejemplos. INT vs. CTR+D: El contraejemplo mostró un error de 0.0725 y error relativo porcentual de 21.83%. Esto es respectivamente 363 y 546 veces mayor que el peor caso obtenido en los ejemplos.

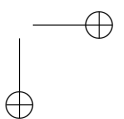
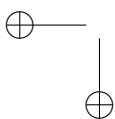
**Conclusiones:** NT e INT no son necesariamente buenas aproximaciones al método CTR+D.

**Palabras clave:** Sistema de lógica difusa tipo-2, reducción de tipo, defusificación, método Nie-Tan.

### Open access



© The authors; licensee: Revista INGENIERÍA. ISSN 0121-750X, E-ISSN 2344-8393. Cite this paper as: Rojas, J. D., Salazar, O., Serrano, H.: Nie-Tan Method and its Improved Version: A Counterexample. INGENIERÍA, Vol. 21, Num. 2, 2016 138:153. En línea DOI: <http://dx.doi.org/10.14483/udistrital.jour.reveng.2016.2.a02>



# 1. Introduction

Type-2 Fuzzy Logic Systems (T2FLS) (Figure 1) are used in several applications because Type-2 Fuzzy Sets (T2FS) provide greater flexibility than Type-1 Fuzzy Sets (T1FS) [1], [2]. In a T2FLS a crisp numerical input goes through three stages: fuzzification, inferencing, and the output processing. During the output processing a T2FS is converted into a crisp number. This last stage consists of two parts: type-reduction and defuzzification. Type-reduction is the procedure by which a T2FS is converted to a T1FS (called the type-reduced set). This set is then defuzzified to give a crisp number.

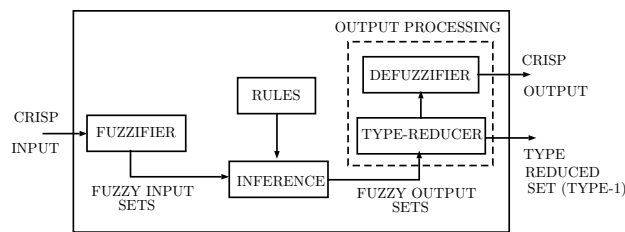


Figure 1. Type-2 Fuzzy Logic System. Taken from [3], [4].

In order to facilitate operations on T2FLSs, Interval Type-2 Fuzzy Sets (IT2FS) were introduced (Figure 2). IT2FSs are a simplified version of general T2FSs. IT2FSs are defined by two membership functions (MF): the Lower Membership Function (LMF) and the Upper Membership Function (UMF). Any MF between LMF and UMF is called an Embedded Membership Function (EMF). The region bounded by LMF and UMF is called Footprint of Uncertainty (FOU). The corresponding FLSs are called Interval Type-2 Fuzzy Logic Systems (IT2FLS) [4].

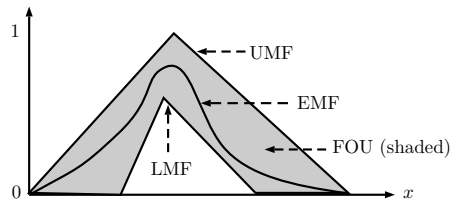


Figure 2. Interval Type-2 Fuzzy Set. LMF = Lower Membership Function. UMF = Upper Membership Function. EMF = Embedded Membership Function. FOU = Footprint of Uncertainty (shaded). Adapted from [4].

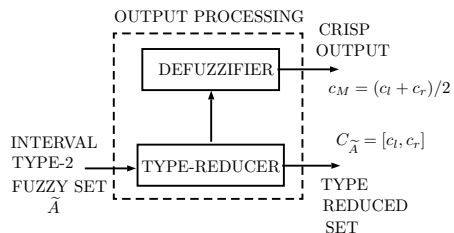


Figure 3. The CTR+D method. Adapted from [3], [4].

Since IT2FLSs were proposed, centroid type-reduction<sup>1</sup> (Figure 3) has been one of the main areas of study, mainly due to its high computational cost [3], [6]–[9]. If  $\tilde{A}$  is an IT2FS, the main problem

<sup>1</sup>Centroid type-reduction is classified into two forms: discrete and continuous [5]. From a discretization of the MFs it is possible to switch from continuous to discrete. This paper discusses the continuous version, but several results are applied to the discrete case.

consists in finding the type-reduced set<sup>2</sup>  $C_{\bar{A}} = [c_l, c_r]$ , where  $c_l$  and  $c_r$  are the endpoints of  $C_{\bar{A}}$ . The interval  $[c_l, c_r]$  contains the centroids of all EMFs in the FOU. Defuzzification, which consists in averaging  $c_l$  and  $c_r$  to get  $c_M = (c_l + c_r)/2$ , is a relatively simple step in IT2FLSs. Figure 3 is what we shall refer to as the Centroid Type-Reduction + Defuzzification (CTR+D) method<sup>3</sup>.

Nie and Tan [13] proposed an approximation to the CTR+D method. It is known as the Nie-Tan (NT) method. It consists in averaging LMF and UMF to get an average MF (AMF). The defuzzified value  $c_{NT}$  is the centroid of this AMF (Figure 4(a)). Mendel and Liu [11], [12] improved the NT method. Their improvement is still an approximation. It is known as the Improved Nie-Tan (INT) method. It consists in adding to  $c_{NT}$  a correction factor  $\delta$ , i.e.,  $c_{INT} = c_{NT} + \delta$  (Figure 4(b)).

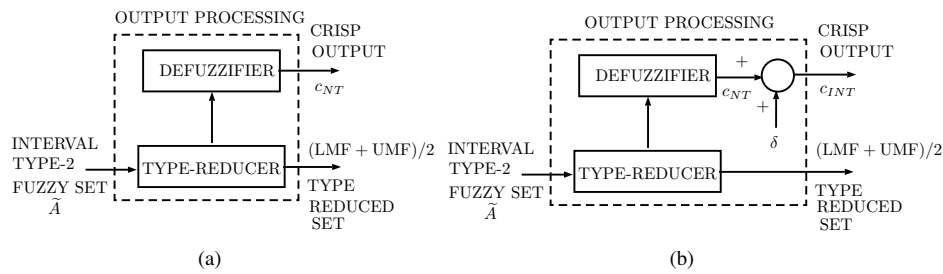


Figure 4. (a) The NT method. (b) The INT method.

Mendel and Liu showed four numerical examples in order to illustrate their theoretical results. These authors claimed that  $c_{NT}$  is a first-order approximation to  $c_M = (c_l + c_r)/2$ , and  $c_{INT}$  is a better third-order approximation to  $c_M$ . Their examples included IT2FSs defined over different domains, and they used the following metrics for comparison:

1. Absolute error:  $E_{NT} = |c_{NT} - c_M|$  and  $E_{INT} = |c_{INT} - c_M|$ ,
2. Percentage relative error:  $RE_{NT} = \left(\frac{E_{NT}}{|c_M|}\right) \times 100\%$  and  $RE_{INT} = \left(\frac{E_{INT}}{|c_M|}\right) \times 100\%$ ,
3. Difference of absolute errors:  $E_{NT} - E_{INT}$ , and
4. Absolute error ratio:  $\frac{E_{NT}}{E_{INT}} = \frac{RE_{NT}}{RE_{INT}}$ .

Their numerical results showed  $0 \leq E_{NT} \leq 0.0844$ ,  $0 \leq E_{INT} \leq 0.0014$ ,  $0\% \leq RE_{NT} \leq 2.22\%$ , and  $0\% \leq RE_{INT} \leq 0.04\%$ . In terms of error comparison, their results showed  $0 \leq E_{NT} - E_{INT} \leq 0.0829$  and  $4.29 \leq E_{NT}/E_{INT} \leq 58.93$ . Although these results seem to exhibit the NT and INT methods as a good approximation to the CTR+D method, in this paper we will show this is not necessarily true.

The metrics shown above depend on two things: (1) the domain where LMF and UMF are defined and (2) the images of these two MFs. Let us explain this point in general terms. Let  $\bar{A}$  be an IT2FS

<sup>2</sup>An alternative notation as interval set is  $C_{\bar{A}} = 1/[c_l, c_r]$ . In this paper we use standard mathematical notation [10].

<sup>3</sup>It is called the “KM + Defuzzification” method in [11], [12].

defined over a domain  $X$ . If  $\mu_{A_e} : X \mapsto [0, 1] : x \mapsto \mu_{A_e}(x)$  is an EMF then its centroid is given by

$$C_{A_e} = \frac{\int_X x \mu_{A_e}(x) dx}{\int_X \mu_{A_e}(x) dx}.$$

Therefore,  $C_{A_e}$  depends on two things for its calculation: (1) the domain  $X$  and (2) the image<sup>4</sup> of  $\mu_{A_e}$ , denoted as  $\text{Im}(\mu_{A_e})$ . As a consequence, if  $M$  is a metric calculated from  $C_{A_{e1}}$  and  $C_{A_{e2}}$  (centroids of two EMFs),  $M$  depends on  $X$ ,  $\text{Im}(\mu_{A_{e1}})$  and  $\text{Im}(\mu_{A_{e2}})$ . As we will see in next sections:  $c_M$ ,  $c_{NT}$  and  $c_{INT}$  are calculated from  $X$ , LMF and UMF (two particular EMFs). Therefore,  $E_{NT}$ ,  $E_{INT}$ ,  $RE_{NT}$ ,  $RE_{INT}$ ,  $E_{NT} - E_{INT}$ , and  $E_{NT}/E_{INT} = RE_{NT}/RE_{INT}$  depend on the domain where LMF and UMF are defined and the images of these two MFs.

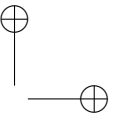
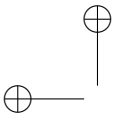
The aim of this paper is to show a counterexample that exhibits higher errors than the corresponding errors in examples reported in the literature when comparing CTR+D method versus NT and INT methods<sup>5</sup>. We chose an IT2FS with piecewise linear MFs, mainly due to its simplicity. In order to reduce the effect of different domains on the metrics (as we explained above), all the domains (for examples and counterexample) were taken to a common domain: the unit interval  $[0, 1]$ . This has a consequence: a change on a metric is due mainly to the change in the LMFs and UMFs (the shape of the FOU). Additionally, all the variables involved in the CTR+D, NT and INT methods were normalized to the unit interval.

After normalizing Mendel and Liu's results, their four numerical examples showed  $0 \leq E_{NT}^* \leq 0.0044$ ,  $0 \leq E_{INT}^* \leq 0.0002$ ,  $0\% \leq RE_{NT}^* \leq 0.96\%$ , and  $0\% \leq RE_{INT}^* \leq 0.04\%$ . In terms of error comparison, their examples showed  $0 \leq E_{NT}^* - E_{INT}^* \leq 0.0044$  and  $4.42 \leq E_{NT}^*/E_{INT}^* \leq 60.21$ . Our counterexample showed  $E_{NT}^* = 0.1014$  (23 times higher than  $E_{NT}^* = 0.0044$ ),  $E_{INT}^* = 0.0725$  (363 times higher than  $E_{INT}^* = 0.0002$ ),  $RE_{NT}^* = 30.53\%$  (32 times higher than  $RE_{NT}^* = 0.96\%$ ), and  $RE_{INT}^* = 21.83\%$  (546 times higher than  $RE_{INT}^* = 0.04\%$ ). In terms of error comparison, our counterexample showed  $E_{NT}^* - E_{INT}^* = 0.0289$  and  $E_{NT}^*/E_{INT}^* = 1.3986$ . We concluded, based on our results, that the NT and INT methods are not necessarily good approximations to the CTR+D method.

This paper is organized as follows: In Section 2 some preliminaries related to the CTR+D, NT and INT methods are presented. In Section 3, our normalization to the unit interval is described. In Section 4, the main results are shown. Finally, discussion and conclusions are presented in Section 5 and Section 6.

<sup>4</sup>The image of  $\mu_{A_e}$  is  $\text{Im}(\mu_{A_e}) = \{\mu_{A_e}(x) \mid x \in X\}$ .

<sup>5</sup>A comparative study (by means of statistical analysis) was carried out in [14] in order to compare accuracy and complexity for the Exhaustive Defuzzification method [15] versus the Karnik-Mendel iterative procedure [7] (EIASC algorithm [16, section III]), the Wu-Mendel approximation (WM algorithm [17, appendix III, pp. 635]), the Greenfield-Chicla Collapsing Defuzzifier (collapsing algorithm [18]), and the NT method [13].



## 2. Preliminaries

### 2.1. The CTR+D method

Let  $\tilde{A}$  be an IT2FS, which is determined by two MFs<sup>6</sup>  $\underline{\mu} : X \mapsto [0, 1]$  and  $\bar{\mu} : X \mapsto [0, 1]$ , defined over a nonempty set  $X \subset \mathbb{R}$ , such that  $\underline{\mu}(x) \leq \bar{\mu}(x)$  for all  $x \in X$ .  $\underline{\mu}$  is called Lower Membership Function (LMF) and  $\bar{\mu}$  is called Upper Membership Function (UMF). In many applications  $X$  is a closed interval<sup>7</sup>, therefore from now on we will suppose  $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ , with  $a < b$ . The centroid (type-reduced set) of  $\tilde{A}$ , denoted by  $C_{\tilde{A}}$ , is  $C_{\tilde{A}} = [c_l, c_r] \subseteq X$ , where  $c_l$  and  $c_r$  are

$$c_l = \min_{\underline{\mu} \leq \theta \leq \bar{\mu}} \frac{\int_a^b x\theta(x)dx}{\int_a^b \theta(x)dx}, \quad \text{and} \quad c_r = \max_{\underline{\mu} \leq \theta \leq \bar{\mu}} \frac{\int_a^b x\theta(x)dx}{\int_a^b \theta(x)dx}, \quad (1)$$

and where  $\theta : X \mapsto [0, 1]$  is a MF such that

$$\underline{\mu}(x) \leq \theta(x) \leq \bar{\mu}(x) \quad (2)$$

for all  $x \in X$ . The defuzzified value of  $\tilde{A}$  is

$$c_M = \frac{c_l + c_r}{2}. \quad (3)$$

It was shown [19], [20] that the  $\theta$  functions to minimize and maximize (1) are respectively

$$\theta_l(x) = \begin{cases} \bar{\mu}(x), & x \leq x_l, \\ \underline{\mu}(x), & x > x_l, \end{cases} \quad \text{and} \quad \theta_r(x) = \begin{cases} \underline{\mu}(x), & x \leq x_r, \\ \bar{\mu}(x), & x > x_r, \end{cases} \quad (4)$$

where  $x_l, x_r \in X$  are unknown (a priori) switch points between  $\underline{\mu}$  and  $\bar{\mu}$ . The switch points  $x_l$  and  $x_r$  need to be found by means of iterative procedures in order to optimize (1).

Convex combination [21]–[23] was used to characterize all the  $\theta$  functions that satisfy (2). It is known that for any  $\theta$  which satisfies (2), there is at least one MF  $\mu_\Lambda : X \mapsto [0, 1]$  such that

$$\theta(x) = \underline{\mu}(x) + \mu_\Lambda(x)(\bar{\mu}(x) - \underline{\mu}(x)) \quad (5)$$

for all  $x \in X$ . If  $\mu_\Lambda$  is taken in (5) as

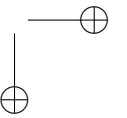
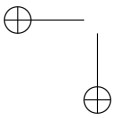
$$\mu_{\Lambda_l}(x) = \begin{cases} 1, & x \leq x_l, \\ 0, & x > x_l, \end{cases} \quad \text{and} \quad \mu_{\Lambda_r}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_r, \\ 1, & x > x_r, \end{cases} \quad (6)$$

then (4) is achieved. Therefore,  $c_l = \min_{t \in X} \alpha(t)$  and  $c_r = \max_{t \in X} \beta(t)$ , where

$$\alpha(t) = \frac{\int_a^t x\bar{\mu}(x)dx + \int_t^b x\underline{\mu}(x)dx}{\int_a^t \bar{\mu}(x)dx + \int_t^b \underline{\mu}(x)dx}, \quad \text{and} \quad \beta(t) = \frac{\int_a^t x\underline{\mu}(x)dx + \int_t^b x\bar{\mu}(x)dx}{\int_a^t \underline{\mu}(x)dx + \int_t^b \bar{\mu}(x)dx}, \quad (7)$$

<sup>6</sup>In this paper all the MFs are supposed to be Riemann-Integrable.

<sup>7</sup>In several papers on the centroid,  $X$  is taken as  $(-\infty, \infty)$  with the assumption that all integrals are convergent. However, over this domain the centroid of an IT2FS could not exist. See [5, sec. 2.1] for an example.



for all  $t \in X$ .

It was also shown [19], [20], [24] that  $\alpha(c_l) = c_l$  and  $\beta(c_r) = c_r$  ( $c_l$  and  $c_r$  are fixed points of  $\alpha$  and  $\beta$ ), i.e.,

$$c_l = \frac{\int_a^{c_l} x\bar{\mu}(x)dx + \int_{c_l}^b x\underline{\mu}(x)dx}{\int_a^{c_l} \bar{\mu}(x)dx + \int_{c_l}^b \underline{\mu}(x)dx}, \quad \text{and} \quad c_r = \frac{\int_a^{c_r} x\underline{\mu}(x)dx + \int_{c_r}^b x\bar{\mu}(x)dx}{\int_a^{c_r} \underline{\mu}(x)dx + \int_{c_r}^b \bar{\mu}(x)dx}. \quad (8)$$

From (8) it was shown [11], [12], [25] that the problem of finding  $c_l$  and  $c_r$  is equivalent to find the roots in  $[a, b]$  of

$$\varphi(t) = \int_a^t (t-x)\bar{\mu}(x)dx + \int_t^b (t-x)\underline{\mu}(x)dx, \quad (9)$$

$$\omega(t) = \int_a^t (t-x)\underline{\mu}(x)dx + \int_t^b (t-x)\bar{\mu}(x)dx, \quad (10)$$

which are defined for all  $t \in X$ , and where  $\varphi(c_l) = 0$  and  $\omega(c_r) = 0$ . It was also shown [25] that the Karnik-Mendel algorithm is equivalent to applying the Newton-Raphson method to find the roots of  $\varphi$  and  $\omega$ .

## 2.2. The NT method

In the Nie and Tan's original method [13], the MF obtained after type-reducing is the average of  $\bar{\mu}$  and  $\underline{\mu}$ , i.e.,  $\mu_{NT}(x) = (\bar{\mu}(x) + \underline{\mu}(x))/2$  for all  $x \in X$ . Therefore, its defuzzified value is

$$c_{NT} = \frac{\int_a^b x\mu_{NT}(x)dx}{\int_a^b \mu_{NT}(x)dx}. \quad (11)$$

Mendel and Liu [11], [12] claimed that  $c_{NT}$  is a first-order approximation to  $c_M = (c_l + c_r)/2$ .

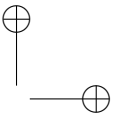
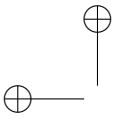
## 2.3. The INT method

Mendel and Liu [11], [12] proposed the improved Nie-Tan method, which is

$$c_{INT} = c_{NT} + \delta, \quad (12)$$

where  $c_{NT}$  is given in Section 2.2, and  $\delta$  is given by

$$\delta = \frac{2 \left( \int_a^{c_{NT}} (c_{NT} - x)\bar{\mu}(x)dx + \int_{c_{NT}}^b (c_{NT} - x)\underline{\mu}(x)dx \right)}{\left( \int_a^b (\bar{\mu}(x) + \underline{\mu}(x))dx \right)^2} \times \left( \int_a^{c_{NT}} (\bar{\mu}(x) - \underline{\mu}(x))dx - \int_{c_{NT}}^b (\bar{\mu}(x) - \underline{\mu}(x))dx \right). \quad (13)$$



These authors claimed that  $c_{INT}$  is a better third-order approximation to  $c_M = (c_l + c_r)/2$ .

### 3. Normalization to the unit interval

Since the domain of  $\underline{\mu}$  and  $\bar{\mu}$  is  $X = [a, b]$ , with  $a < b$ , a bijective function is established  $[a, b] \mapsto [0, 1] : x \mapsto y$  which is given by

$$y = \frac{x - a}{b - a}. \quad (14)$$

Its inverse function  $[0, 1] \mapsto [a, b] : y \mapsto x$  (also a bijection) is given by

$$x = a + y(b - a). \quad (15)$$

By means of (15) we define MFs with normalized domain (to the unit interval)  $\underline{\mu}^* : [0, 1] \mapsto [0, 1]$  and  $\bar{\mu}^* : [0, 1] \mapsto [0, 1]$  given by

$$\bar{\mu}^*(y) = \bar{\mu}(a + y(b - a)), \quad (16)$$

$$\underline{\mu}^*(y) = \underline{\mu}(a + y(b - a)), \quad (17)$$

for all  $y \in [0, 1]$ , and where  $\underline{\mu}^*(y) \leq \bar{\mu}^*(y)$  holds for all  $y \in [0, 1]$ .

#### 3.1. Normalized CTR+D method

By means of (14)–(17), the normalized version of (7) is (after some algebra<sup>8</sup>):

$$\alpha^*(z) = \frac{\int_0^z y \bar{\mu}^*(y) dy + \int_z^1 y \underline{\mu}^*(y) dy}{\int_0^z \bar{\mu}^*(y) dy + \int_z^1 \underline{\mu}^*(y) dy}, \text{ and } \beta^*(z) = \frac{\int_0^z y \underline{\mu}^*(y) dy + \int_z^1 y \bar{\mu}^*(y) dy}{\int_0^z \underline{\mu}^*(y) dy + \int_z^1 \bar{\mu}^*(y) dy}, \quad (18)$$

where  $z = (t - a)/(b - a)$ ,  $\alpha^*(z) = (\alpha(t) - a)/(b - a)$ , and  $\beta^*(z) = (\beta(t) - a)/(b - a)$ . Therefore  $c_l^* = \min_{z \in [0,1]} \alpha^*(z)$ ,  $c_r^* = \max_{z \in [0,1]} \beta^*(z)$  and  $c_M^* = (c_l^* + c_r^*)/2$  where

$$c_l^* = \frac{c_l - a}{b - a}, \quad c_r^* = \frac{c_r - a}{b - a} \quad \text{and} \quad c_M^* = \frac{c_M - a}{b - a}. \quad (19)$$

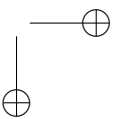
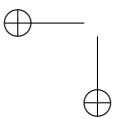
It should be noted that from (14) we have  $z, \alpha^*, \beta^*, c_l^*, c_r^*, c_M^* \in [0, 1]$ . Similarly (9)–(10) are reduced to

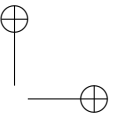
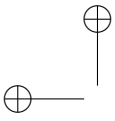
$$\varphi^*(z) = \int_0^z (z - y) \bar{\mu}^*(y) dy + \int_z^1 (z - y) \underline{\mu}^*(y) dy, \quad (20)$$

$$\omega^*(z) = \int_0^z (z - y) \underline{\mu}^*(y) dy + \int_z^1 (z - y) \bar{\mu}^*(y) dy, \quad (21)$$

where  $\varphi^*(z) = \varphi(t)/(b - a)^2$  and  $\omega^*(z) = \omega(t)/(b - a)^2$ . Since  $\varphi(c_l) = 0$  and  $\omega(c_r) = 0$  then  $\varphi^*(c_l^*) = 0$  and  $\omega^*(c_r^*) = 0$ . Therefore  $c_l^*$  and  $c_r^*$  are roots in  $[0, 1]$  of  $\varphi^*$  and  $\omega^*$ . It is not difficult

<sup>8</sup>The substitution  $x = a + y(b - a)$  yields  $dx = (b - a)dy$ , which is the required substitution for  $dx$ . The other variables are obtained by performing the corresponding substitutions.





to verify that  $\varphi^*, \omega^* \in [-1/2, 1/2]$ . Although  $\varphi^*$  and  $\omega^*$  are not in the unit interval, we only need their roots in  $[0, 1]$ . Additionally, there is a relation among  $\varphi^*$  and  $\omega^*$ :

$$\varphi^*(z) + \omega^*(z) = z(B + D) - (A + C), \tag{22}$$

for all  $z \in [0, 1]$ , where

$$A = \int_0^1 y\bar{\mu}^*(y)dy, B = \int_0^1 \bar{\mu}^*(y)dy, C = \int_0^1 y\underline{\mu}^*(y)dy, \text{ and } D = \int_0^1 \underline{\mu}^*(y)dy. \tag{23}$$

### 3.2. Normalized NT method

By means of (14)–(17) the normalized version of (11) is (after some algebra):

$$c_{NT}^* = \frac{\int_0^1 y\mu_{NT}^*(y)dy}{\int_0^1 \mu_{NT}^*(y)dy}, \tag{24}$$

where  $\mu_{NT}^*(y) = (\bar{\mu}^*(y) + \underline{\mu}^*(y))/2$  for all  $y \in [0, 1]$ , and

$$c_{NT}^* = \frac{c_{NT} - a}{b - a}. \tag{25}$$

From (14) we have that  $c_{NT}^* \in [0, 1]$ .

### 3.3. Normalized INT method

By means of (14)–(17), the normalized version of (12) is (after some algebra):

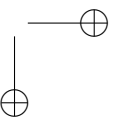
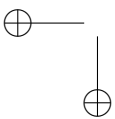
$$c_{INT}^* = c_{NT}^* + \delta^*, \tag{26}$$

where

$$c_{INT}^* = \frac{c_{INT} - a}{b - a}, \text{ and } \delta^* = \frac{\delta}{b - a}. \tag{27}$$

From (14) we have that  $c_{INT}^* \in [0, 1]$ .  $c_{NT}^*$  is given in Section 3.2, and  $\delta^*$  is given by

$$\delta^* = \frac{2 \left( \int_0^{c_{NT}^*} (c_{NT}^* - y)\bar{\mu}^*(y)dy + \int_{c_{NT}^*}^1 (c_{NT}^* - y)\underline{\mu}^*(y)dy \right)}{\left( \int_0^1 (\bar{\mu}^*(y) + \underline{\mu}^*(y))dy \right)^2} \times \left( \int_0^{c_{NT}^*} (\bar{\mu}^*(y) - \underline{\mu}^*(y))dy - \int_{c_{NT}^*}^1 (\bar{\mu}^*(y) - \underline{\mu}^*(y))dy \right). \tag{28}$$





## 4. Results

### 4.1. Original Mendel and Liu's numerical examples

Mendel and Liu [11], [12] showed the following four numerical examples.

1. Symmetric Gaussian MFs with uncertain deviation defined for all  $x \in X = [0, 10]$ :

$$\underline{\mu}_{\tilde{A}_1}(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-5}{0.25}\right)^2\right), \quad (29)$$

$$\bar{\mu}_{\tilde{A}_1}(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-5}{1.75}\right)^2\right). \quad (30)$$

2. Triangular LMF and Gaussian UMF defined for all  $x \in X = [-5, 14]$ :

$$\underline{\mu}_{\tilde{A}_2}(x) = \begin{cases} 0.6(x+5)/19, & x < 2.6, \\ 0.4(14-x)/19, & x \geq 2.6. \end{cases} \quad (31)$$

$$\bar{\mu}_{\tilde{A}_2}(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{5}\right)^2\right), & x < 7.185, \\ \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-9}{1.75}\right)^2\right), & x \geq 7.185. \end{cases} \quad (32)$$

3. Piecewise Gaussian MFs defined for all  $x \in X = [0, 10]$ :

$$\underline{\mu}_{\tilde{A}_3}(x) = \max\left\{0.5 \exp\left(-\frac{(x-3)^2}{2}\right), 0.4 \exp\left(-\frac{(x-6)^2}{2}\right)\right\}. \quad (33)$$

$$\bar{\mu}_{\tilde{A}_3}(x) = \max\left\{\exp\left(-\frac{(x-3)^2}{8}\right), 0.8 \exp\left(-\frac{(x-6)^2}{8}\right)\right\}. \quad (34)$$

4. Piecewise Linear MFs defined for all  $x \in X = [1, 8]$ :

$$\underline{\mu}_{\tilde{A}_4}(x) = \max\left\{\left[\begin{array}{l} (x-1)/6, \quad 1 \leq x \leq 4, \\ (7-x)/6, \quad 4 \leq x \leq 7, \\ 0, \quad \text{otherwise.} \end{array}\right], \left[\begin{array}{l} (x-3)/6, \quad 3 \leq x \leq 5, \\ (8-x)/9, \quad 5 \leq x \leq 8, \\ 0, \quad \text{otherwise.} \end{array}\right]\right\}. \quad (35)$$

$$\bar{\mu}_{\tilde{A}_4}(x) = \max\left\{\left[\begin{array}{l} (x-1)/2, \quad 1 \leq x \leq 3, \\ (7-x)/4, \quad 3 \leq x \leq 7, \\ 0, \quad \text{otherwise.} \end{array}\right], \left[\begin{array}{l} (x-2)/5, \quad 2 \leq x \leq 6, \\ (16-2x)/5, \quad 6 \leq x \leq 8, \\ 0, \quad \text{otherwise.} \end{array}\right]\right\}. \quad (36)$$

Their results are summarized in Table I. These authors used the following metrics for comparison:

1. Absolute error:  $E_{NT} = |c_{NT} - c_M|$  and  $E_{INT} = |c_{INT} - c_M|$ .
2. Percentage relative error:  $RE_{NT} = \frac{E_{NT}}{|c_M|} \times 100\%$  and  $RE_{INT} = \frac{E_{INT}}{|c_M|} \times 100\%$ .

3. Difference of absolute errors:  $E_{NT} - E_{INT}$ .

4. Absolute error ratio:  $\frac{E_{NT}}{E_{INT}} = \frac{RE_{NT}}{RE_{INT}}$ .

**Table I.** Computation results in the continuous case. Taken and adapted from [11], [12].

IT2FS	Domain [a, b]	$c_M = (c_l + c_r)/2$	NT method			INT method			Error comparison	
			$c_{NT}$	$E_{NT}$	$RE_{NT}$	$c_{INT}$	$E_{INT}$	$RE_{INT}$	$E_{NT} - E_{INT}$	$E_{NT}/E_{INT}$
$\tilde{A}_1$	[0, 10]	5.0	5.0	0	0	5.0	0	0	0	—
$\tilde{A}_2$	[-5, 14]	3.7984	3.7141	0.0844	2.22%	3.797	0.0014	0.04%	0.0829	58.93
$\tilde{A}_3$	[0, 10]	4.4152	4.3953	0.0200	0.45%	4.4158	0.0006	0.01%	0.0194	33.63
$\tilde{A}_4$	[1, 8]	4.3261	4.3208	0.0053	0.12%	4.3273	0.0012	0.03%	0.0041	4.29

## 4.2. Normalized results

The corresponding IT2FSs with a normalized domain (37)–(44) are found by means of (29)–(36) by substituting  $x \in X$  by  $a + y(b - a)$ , where  $y \in [0, 1]$ . The  $a$  and  $b$  values depend on the  $X$ -domain for each IT2FS. For example, for (35)–(36) we have  $a = 1$  and  $b = 8$ .

1. Symmetric Gaussian MFs with uncertain deviation (Figure 5(a)) defined for all  $y \in [0, 1]$ :

$$\underline{\mu}_{\tilde{A}_1}^*(y) = \exp\left(-\frac{1}{2}(40y - 20)^2\right), \quad (37)$$

$$\bar{\mu}_{\tilde{A}_1}^*(y) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{40y - 20}{7}\right)^2\right). \quad (38)$$

2. Triangular LMF and Gaussian UMF (Figure 5(b)) defined for all  $y \in [0, 1]$ :

$$\underline{\mu}_{\tilde{A}_2}^*(y) = \begin{cases} 3y/5, & y < 2/5, \\ 2(1 - y)/5, & y \geq 2/5. \end{cases} \quad (39)$$

$$\bar{\mu}_{\tilde{A}_2}^*(y) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{19y - 7}{5}\right)^2\right), & y < 624/973, \\ \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{76y - 56}{7}\right)^2\right), & y \geq 624/973. \end{cases} \quad (40)$$

3. Piecewise Gaussian MFs (Figure 5(c)) defined for all  $y \in [0, 1]$ :

$$\underline{\mu}_{\tilde{A}_3}^*(y) = \max\left\{0.5 \exp\left(-\frac{(10y - 3)^2}{2}\right), 0.4 \exp\left(-\frac{(10y - 6)^2}{2}\right)\right\}. \quad (41)$$

$$\bar{\mu}_{\tilde{A}_3}^*(y) = \max\left\{\exp\left(-\frac{(10y - 3)^2}{8}\right), 0.8 \exp\left(-\frac{(10y - 6)^2}{8}\right)\right\}. \quad (42)$$

4. Piecewise Linear MFs (Figure 5(d)) defined for all  $y \in [0, 1]$ :

$$\underline{\mu}_{\tilde{A}_4}^*(y) = \max \left\{ \left[ \begin{array}{ll} 7y/6, & 0 \leq y \leq 3/7, \\ (6-7y)/6, & 3/7 \leq y \leq 6/7, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{array} \right], \left[ \begin{array}{ll} (7y-2)/6, & 2/7 \leq y \leq 4/7, \\ 7(1-y)/9, & 4/7 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{array} \right] \right\}. \quad (43)$$

$$\bar{\mu}_{\tilde{A}_4}^*(y) = \max \left\{ \left[ \begin{array}{ll} 7y/2, & 0 \leq y \leq 2/7, \\ (6-7y)/4, & 2/7 \leq y \leq 6/7, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{array} \right], \left[ \begin{array}{ll} (7y-1)/5, & 1/7 \leq y \leq 5/7, \\ 14(1-y)/5, & 5/7 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{array} \right] \right\}. \quad (44)$$

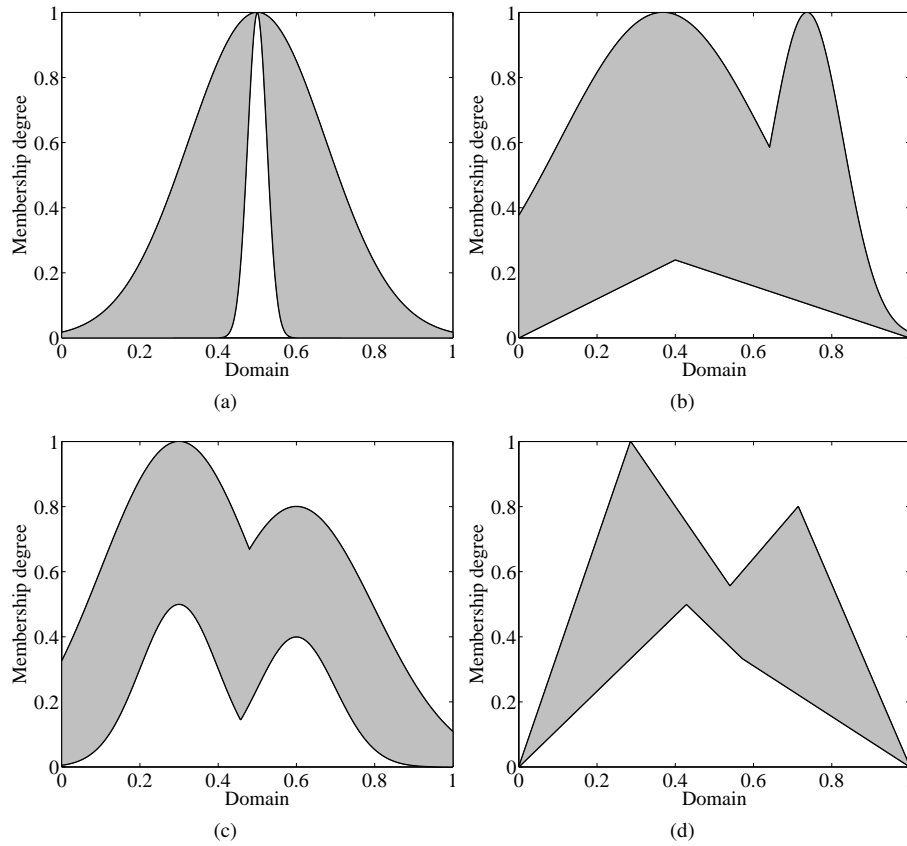


Figure 5. IT2FSs with normalized domain (37)–(44).

In Table II we show  $c_M^* = (c_M - a)/(b - a)$ ,  $c_{NT}^* = (c_{NT} - a)/(b - a)$  and  $c_{INT}^* = (c_{INT} - a)/(b - a)$ , which are the normalization to the unit interval of  $c_M$ ,  $c_{NT}$  and  $c_{INT}$  in Table I. We recalculated the following metrics:

1. Absolute error:  $E_{NT}^* = |c_{NT}^* - c_M^*|$  and  $E_{INT}^* = |c_{INT}^* - c_M^*|$ .
2. Percentage relative error:  $RE_{NT}^* = \frac{E_{NT}^*}{c_M^*} \times 100\%$  and  $RE_{INT}^* = \frac{E_{INT}^*}{c_M^*} \times 100\%$ .
3. Difference of absolute errors:  $E_{NT}^* - E_{INT}^*$ .
4. Absolute error ratio:  $\frac{E_{NT}^*}{E_{INT}^*} = \frac{RE_{NT}^*}{RE_{INT}^*}$ .

**Table II.** Normalization to the unit interval of the results in Table I.

IT2FS <sup>†</sup>	$c_M^* = (c_l^* + c_r^*)/2$	Normalized NT method			Normalized INT method			Error comparison	
		$c_{NT}^*$	$E_{NT}^*$	$RE_{NT}^*$	$c_{INT}^*$	$E_{INT}^*$	$RE_{INT}^*$	$E_{NT}^* - E_{INT}^*$	$E_{NT}^*/E_{INT}^*$
$\tilde{A}_1^*$	0.5	0.5	0	0	0.5	0	0	0	—
$\tilde{A}_2^*$	0.4631	0.4586	0.0044	0.96%	0.4630	0.0001	0.02%	0.0044	60.21
$\tilde{A}_3^*$	0.4415	0.4395	0.0020	0.45%	0.4416	0.0001	0.01%	0.0019	33.17
$\tilde{A}_4^*$	0.4752	0.4744	0.0008	0.16%	0.4753	0.0002	0.04%	0.0006	4.42

<sup>†</sup> IT2FSs with normalized domain (37)–(44).

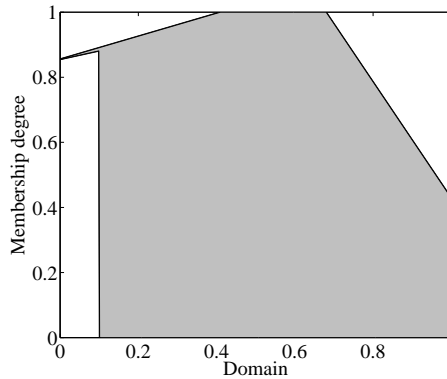
### 4.3. A counterexample

Let  $\tilde{A}^*$  be an IT2FS defined over  $[0, 1]$ , and determined by piecewise linear MFs (Figure 6):

$$\underline{\mu}^*(y) = \begin{cases} (y + 3.24)/3.79, & y \leq 0.1, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (45)$$

$$\overline{\mu}^*(y) = \begin{cases} (y + 2.43)/2.84, & y \leq 0.41, \\ 1, & 0.41 < y < 0.68, \\ (1.24 - y)/0.56, & y \geq 0.68. \end{cases} \quad (46)$$

for all  $y \in [0, 1]$ .



**Figure 6.** IT2FS with normalized domain (45)–(46).

After calculating<sup>9</sup>  $c_M^*$ ,  $c_{NT}^*$ ,  $c_{INT}^*$ , and the corresponding metrics for (45)–(46), we got the results in Table III.

**Table III.** Computation results for our counterexample.

IT2FS <sup>†</sup>	$c_M^* = (c_l^* + c_r^*)/2$	Normalized NT method			Normalized INT method			Error comparison	
		$c_{NT}^*$	$E_{NT}^*$	$RE_{NT}^*$	$c_{INT}^*$	$E_{INT}^*$	$RE_{INT}^*$	$E_{NT}^* - E_{INT}^*$	$E_{NT}^*/E_{INT}^*$
$\hat{A}^*$	0.3321	0.4335	0.1014	30.53%	0.4046	0.0725	21.83%	0.0289	1.3986

<sup>†</sup> IT2FS with normalized domain (45)–(46).

## 5. Discussion

As we can see in Table III, our counterexample showed the following:

1. An absolute error  $E_{NT}^* = 0.1014$ . This is almost 23 times higher than  $E_{NT}^* = 0.0044$  (worst case in Table II).
2. A percentage relative error  $RE_{NT}^* = 30.53\%$ . This is almost 32 times higher than  $RE_{NT}^* = 0.96\%$  (worst case in Table II).
3. An absolute error  $E_{INT}^* = 0.0725$ . This is almost 363 times higher than  $E_{INT}^* = 0.0002$  (worst case in Table II).
4. A percentage relative error  $RE_{INT}^* = 21.83\%$ . This is almost 546 times higher than  $RE_{INT}^* = 0.04\%$  (worst case in Table II).

In terms of error comparison  $E_{NT}^* - E_{INT}^* = 0.0289$  and  $E_{NT}^*/E_{INT}^* = 1.3986$ , our example showed that  $E_{NT}^*$  is comparable (in magnitude) with respect to  $E_{INT}^*$ , in contrast with the results in Table II.

## 6. Conclusions

This paper showed a counterexample that exhibits higher errors than the corresponding errors in examples reported in the literature when comparing the NT and INT methods versus the CTR+D method. We chose an IT2FS with piecewise linear MFs as our counterexample, mainly due to its simplicity. All the domains (for examples and counterexample) were taken to the unit interval  $[0, 1]$  in order to reduce the effect of different domains on the metrics that we used for comparison. Additionally, all the variables involved in the three methods were normalized to the unit interval. We concluded, based on our results, that the NT and INT methods are not necessarily good approximations to the CTR+D method.

### A. Source code for the counterexample in Section 4.3

The source code presented in this section was executed on MATLAB 7.14.0.739 (R2012a), on a laptop with Microsoft Windows XP Professional 32 bit, Intel(R) Atom(TM) CPU Z520 1.33 GHz,

<sup>9</sup>In Appendix A we present a source code for the numerical calculation

1014 MB of RAM. See the main text for a description of each variable in the following code.

```

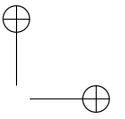
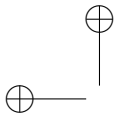
%-----
%      Definition of LMF and UMF.
%      LMF = Lower Membership Function
%      UMF = Upper Membership Function
%-----
clear all
syms y z % Symbolic variables
LMF = ((y + 3.24)/3.79) * heaviside(0.1 - y);
UMF = ((y + 2.43)/2.84) * heaviside(0.41 - y) + ...
      (heaviside(y - 0.41) - heaviside(y - 0.68)) + ...
      ((1.24 - y)/0.56) * heaviside(y - 0.68);
%-----
%      CTR+D method
%-----
A = int(y * UMF, y, 0, 1);
B = int(UMF, y, 0, 1);
C = int(y * LMF, y, 0, 1);
D = int(LMF, y, 0, 1);
phi = int((z-y) * UMF, y, 0, z) + int((z-y) * LMF, y, z, 1);
omega = z * (B + D) - (A + C) - phi;
sol = solve(phi, 'Real', true); % Solve phi = 0. Find real values
index = find(sol >= 0 & sol <= 1);
c_l = vpa(sol(index), 4) % We choose the root of phi in [0,1] as c_l
sol = solve(omega, 'Real', true); % Solve omega = 0. Find real values
index = find(sol >= 0 & sol <= 1);
c_r = vpa(sol(index), 4) % We choose the root of omega in [0,1] as c_r
c_M = vpa((c_l + c_r)/2, 4) % CTR+D method
%-----
%      NT method
%      AMF = Average Membership Function
%-----
AMF = (LMF + UMF) / 2;
c_NT = int(y * AMF, y, 0, 1) / int(AMF, y, 0, 1);
c_NT = vpa(c_NT, 4) % Nie-Tan method
%-----
%      INT method
%-----
num1_delta = int((c_NT-y)*UMF, y, 0, c_NT) + int((c_NT-y)*LMF, y, c_NT, 1);
num2_delta = int(UMF-LMF, y, 0, c_NT) - int(UMF-LMF, y, c_NT, 1);
den_delta = (int(UMF, y, 0, 1) + int(LMF, y, 0, 1)) ^ 2;
delta = 2 * num1_delta * num2_delta / den_delta;
c_INT = c_NT + delta;
c_INT = vpa(c_INT, 4) % Improved Nie-Tan method

```

## References

- [1] J. M. Mendel and R. I. John, "Type-2 fuzzy sets made simple," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 10, no. 2, pp. 117–127, 2002.
- [2] O. Castillo and P. Melin, *Type-2 Fuzzy Logic: Theory and Applications*, ser. Studies in Fuzziness and Soft Computing. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008, vol. 223.

- [3] N. N. Karnik and J. M. Mendel, "Type-2 fuzzy logic systems : Type-reduction," in *IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 2, San Diego, California, USA, Oct. 1998, pp. 2046–2051.
- [4] J. M. Mendel, R. I. John, and F. Liu, "Interval type-2 fuzzy logic systems made simple," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 4, no. 6, pp. 808–821, Dec. 2006.
- [5] O. Salazar, J. Soriano, and H. Serrano, "Centroid of an interval type-2 fuzzy set: Continuous vs. discrete," *Ingeniería*, vol. 16, no. 2, pp. 67–78, 2011, ISSN 0121-750X.
- [6] N. N. Karnik, J. M. Mendel, and Q. Liang, "Type-2 fuzzy logic systems," *IEEE Transactions On Fuzzy Systems*, vol. 7, no. 6, pp. 643–658, 1999.
- [7] N. N. Karnik and J. M. Mendel, "Centroid of a type-2 fuzzy set," *Information Sciences*, vol. 132, pp. 195–220, 2001.
- [8] S. Coupland and R. John, "An investigation into alternative methods for the defuzzification of an interval type-2 fuzzy set," in *Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, Vancouver, Canada, Jul. 2006, pp. 1425–1432.
- [9] J. M. Mendel, "Type-2 fuzzy sets and systems: An overview," *IEEE Computational Intelligence Magazine*, vol. 2, no. 1, pp. 20–29, Feb. 2007.
- [10] J. Aisbett, J. T. Rickard, and D. G. Morgenthaler, "Type-2 fuzzy sets as functions on spaces," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 18, no. 4, pp. 841–844, Aug. 2010.
- [11] J. M. Mendel and X. Liu, "New closed-form solutions for karnik-mendel algorithm+defuzzification of an interval type-2 fuzzy set," in *Proceedings of the 2012 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*, Brisbane, QLD, Jun. 2012, pp. 1–8.
- [12] —, "Simplified interval type-2 fuzzy logic systems," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 21, no. 6, pp. 1056–1069, 2013.
- [13] M. Nie and W. W. Tan, "Towards an efficient type-reduction method for interval type-2 fuzzy logic systems," in *Proceedings of the IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ 2008)*, 2008, pp. 1425–1432.
- [14] S. Greenfield and F. Chiclana, "Accuracy and complexity evaluation of defuzzification strategies for the discretised interval type-2 fuzzy set," *International Journal of Approximate Reasoning*, vol. 54, pp. 1013–1033, 2013.
- [15] J. M. Mendel, *Uncertainty Rule-Based Fuzzy Logic Systems: Introduction and New Directions*. Prentice-Hall PTR, 2001.
- [16] D. Wu and M. Nie, "Comparison and practical implementation of type-reduction algorithms for type-2 fuzzy sets and systems," in *Proceedings of the IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ 2011)*, 2011, pp. 2131–2138.
- [17] J. M. Mendel and H. Wu, "Uncertainty bounds and their use in the design of interval type-2 fuzzy logic systems," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 10, no. 5, pp. 622–639, 2002.
- [18] S. Greenfield, F. Chiclana, S. Coupland, and R. John, "The collapsing method of defuzzification for discretized interval type-2 fuzzy sets," *Information Sciences*, vol. 179, no. 13, pp. 2055–2069, 2009.
- [19] J. M. Mendel and H. Wu, "Properties of the centroid of an interval type-2 fuzzy set, including the centroid of a fuzzy granule," in *Proceedings of the 2005 International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE 2005)*, 2005, pp. 341–346.
- [20] —, "New results about the centroid of an interval type-2 fuzzy set, including the centroid of a fuzzy granule," *Information Sciences*, vol. 177, pp. 360–377, 2007.
- [21] O. Salazar and J. Soriano, "Generating embedded type-1 fuzzy sets by means of convex combination," in *Proceedings of the 2013 IFSA World Congress NAFIPS Annual Meeting*, Edmonton, Canada, Jun. 2013, pp. 51–56.
- [22] —, "Convex combination and its application to fuzzy sets and interval-valued fuzzy sets I," *Applied Mathematical Sciences*, vol. 9, no. 22, pp. 1061–1068, 2015, ISSN 1312-885X.
- [23] —, "Convex combination and its application to fuzzy sets and interval-valued fuzzy sets II," *Applied Mathematical Sciences*, vol. 9, no. 22, pp. 1069–1076, 2015, ISSN 1312-885X.
- [24] J. M. Mendel and F. Liu, "Super-exponential convergence of the Karnik-Mendel algorithms for computing the centroid of an interval type-2 fuzzy set," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 15, no. 2, pp. 309–320, Apr. 2007.
- [25] X. Liu and J. M. Mendel, "Connect karnik-mendel algorithms to root-finding for computing the centroid of an interval type-2 fuzzy set," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 19, no. 4, pp. 652–665, 2011.



---

Rojas, J. D., Salazar, O., Serrano, H.

---

**Juan Diego Rojas Zambrano**

Electronics Engineer, Universidad Distrital Francisco José de Caldas. His research interests include fuzzy systems, neural networks and mathematics. e-mail: jdrojasz@correo.udistrital.edu.co

---

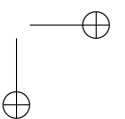
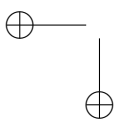
**Omar Salazar Morales**

Electronics Engineer, Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Master in Industrial Engineering, Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Master in Mathematics, Universidad Nacional de Colombia. His research interests include fuzzy systems, control theory and mathematics. e-mail: osalazarm@correo.udistrital.edu.co

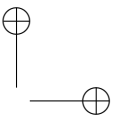
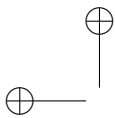
---

**Jose Humberto Serrano Devia**

Mathematician, Universidad Pedagógica Nacional. Master in Mathematics, Universidad Nacional de Colombia. His research interests include fuzzy systems and mathematics. e-mail: jhserrano@udistrital.edu.co







Research paper

## Una Propuesta Metodológica para Dimensionar el Impacto de los Vehículos Eléctricos sobre la Red Eléctrica

*A Methodological Proposal to Measure the Impact of Electric Vehicles on the Electric Grid*

**John Edward Ceballos Delgado<sup>1</sup>, Eduardo Caicedo Bravo<sup>2</sup>, Sandra Ospina Arango<sup>1</sup>**

<sup>1</sup> Empresa de Energía del Pacífico S.A EPSA E.S.P, Yumbo Colombia.

Correo electrónico: jeceballos@epsa.com.co; sospina@epsa.com.co,

<sup>2</sup> Universidad del Valle, Escuela de Ingeniería Eléctrica y Electrónica. Cali – Colombia.

Correo electrónico: eduardo.caicedo@correounivalle.edu.co

Recibido: 02-05-2015. Modificado: 05-10-2015. Aceptado: 03-03-2016

### Abstract

**Context:** Based on the projected trend of electric vehicles and charging stations, it is necessary to study how is the interaction between these new elements and the electrical network. For this, a review of literature on the impact of electric vehicles on the distribution networks, with reference to countries like Spain, Chile and Colombia was made.

**Method:** Possible circuits that can be impacted by electric vehicles and the impact of different modes of transport in the electrical power quality, by simulations in MATLAB tool was determined. The information used for this research was obtained from various systems of enterprise management, the official website of the secretariats of mobility and UPME, research of domestic and foreign universities, Internet pages manufacturers of electric vehicles and charging stations, and IEEE standards, among others.

**Results:** A series of stages, steps, activities, outputs and responsible was obtained, associated with electric models, for determining in an orderly manner, the impact of different modes of electrical transport in both the chargeability of the distribution system, and the quality of the energy at any point in the network. Also, a use case for a city in which enough information from their electrical circuits and location of possible installation sites of charging stations be taken validated.

**Conclusions:** From the perspective of the application of the methodology in a use case, these results will determine how to adapt and change the infrastructure of the power grid sector companies, where there is a massive incursion of different modes of electric transportation.

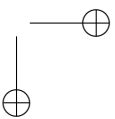
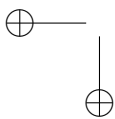
**Keywords:** Chargeability of lines and transformers, charging stations, electric vehicles.

**Acknowledgements:** Empresa de Energía del Pacífico - EPSA.

### Open access



© The authors; licensee: Revista INGENIERÍA. ISSN 0121-750X, E-ISSN 2344-8393. Cite this paper as: Ceballos, J. E., Caicedo, E. y Ospina, S. Una Propuesta Metodológica para Dimensionar el Impacto de los Vehículos Eléctricos sobre La Red Eléctrica. En: Ingeniería, Vol. 21, No. 2, 2016 pp. 154:175 En línea DOI: <http://dx.doi.org/10.14483/udistrital.jour.reveng.2016.2.a03>



### Resumen

**Contexto:** Partiendo de las expectativas de evolución del vehículo eléctrico y las estaciones de recarga, se hace necesario estudiar cómo será la interacción entre estos nuevos elementos y la red eléctrica. Con este propósito se realizó una revisión de literatura acerca del impacto de los vehículos eléctricos en las redes de distribución, tomando como referencia países como España, Chile y Colombia.

**Método:** Se establecieron los posibles circuitos susceptibles de ser impactados por los vehículos eléctricos y se determinó el impacto de los diferentes modos de transporte eléctrico en la calidad de la energía, mediante simulaciones realizadas en la herramienta MATLAB. La información que sirvió para hacer este trabajo de investigación se obtuvo de varios de los sistemas de gestión de la empresa, de las páginas oficiales de las secretarías de movilidad y de la UPME, trabajos de investigación de universidades nacionales y extranjeras, páginas de internet de fabricantes de vehículos eléctricos y de estaciones de carga y estándares de IEEE, entre otros.

**Resultados:** Se obtuvo una serie de etapas, pasos, actividades, salidas y responsables, asociados con modelos eléctricos, que permiten determinar de una manera ordenada el impacto de los diferentes modos de transporte eléctrico, tanto en la cargabilidad del sistema de distribución, como en la calidad de la energía en cualquier punto de la red. Asimismo, se validó un caso de uso para una ciudad en la que se tuviera información suficiente de sus circuitos eléctricos y de ubicación de posibles sitios de instalación de electrolineras.

**Conclusiones:** Desde la perspectiva de la aplicación de la metodología en un caso de uso, estos resultados permitirán determinar cómo debe adaptarse y cambiar la infraestructura de la red eléctrica de las empresas del sector, cuando haya una incursión masiva de los diferentes modos de transporte eléctrico.

**Palabras clave:** Cargabilidad de líneas y transformadores, estaciones de recarga, vehículos eléctricos.

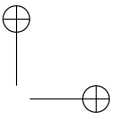
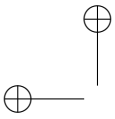
**Agradecimientos:** A la Empresa de Energía del Pacífico – EPSA.

## 1. Introducción

En este artículo se describe una propuesta metodológica para determinar el impacto de los vehículos eléctricos en la cargabilidad y en la calidad de la energía de una red de distribución. Partiendo de las expectativas de evolución del vehículo eléctrico y las estaciones de recarga, se deduce que será necesario estudiar cómo será la interacción entre este nuevo elemento y la red eléctrica.

En primera instancia, se determina la información técnica y comercial del caso de análisis, la cual servirá de insumo para medir la cargabilidad en las líneas y en los transformadores de distribución de toda una ciudad. El análisis a este nivel macro permite determinar si bajo las condiciones de penetración de los vehículos eléctricos, capacidad de las líneas y de los transformadores de distribución, el sistema eléctrico en general está en capacidad de soportar el consumo de todos los modos de transporte eléctrico. Asimismo, permite establecer las diferentes relaciones que serán necesarias para el caso del análisis del impacto en un circuito, tal como la relación “cantidad de vehículos/transformador”.

En segunda instancia, se definen los pasos para determinar el impacto de los vehículos eléctricos en la cargabilidad de un circuito determinado, el cual es escogido partiendo de criterios donde cargarían potenciales clientes (universidades, centros comerciales, parqueaderos públicos, residencias



de estrato 4, 5 y 6) o circuitos con mayor demanda actual de energía. En este nivel es necesario detallar la cantidad, capacidad y cargabilidad actual de los transformadores de todo el circuito.

Finalmente, se determinan los pasos que permitirán conocer el impacto de los diferentes modos de transporte en la calidad de la energía eléctrica de un circuito. Para esto, primero se definen los parámetros eléctricos y sus rangos de aceptación por la norma internacional; asimismo, se establecen los modelos eléctricos de los diferentes equipos que harán parte de la simulación y por último se comparan los resultados obtenidos de los parámetros eléctricos con respecto de la norma.

El aporte fundamental de esta metodología para una empresa del sector eléctrico, se enfoca en facilitar la determinación de los circuitos que requerirán inversiones en su infraestructura de líneas, transformadores y equipos que mejoren la calidad de la energía, cuando haya una incursión masiva de V.E; de igual manera, sirve como referencia para dar a conocer las señales de ampliación de la generación de energía en el país y de la normativa que se debe elaborar para minimizar el impacto de los vehículos eléctricos en la calidad de la energía del Sistema Interconectado Nacional.

## **2. Proyectos desarrollados a nivel nacional e internacional sobre el impacto de los vehículos eléctricos en las redes de distribución de energía.**

A continuación se describen algunos proyectos y estudios encaminados a determinar el impacto en la infraestructura y en la calidad de la energía de las redes de distribución, en países como España, Chile, Inglaterra y Colombia, aunque no consideran el desarrollo de una metodología.

### **Caso 1: Zona costera del Mediterráneo español [1]:**

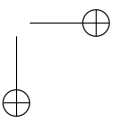
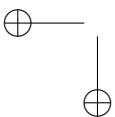
El objetivo de este caso fue cuantificar el impacto que distintas estrategias de recarga del vehículo eléctrico (cuándo y dónde se recargan) tienen en las inversiones de las redes de distribución eléctrica. Se consideraron distintos tipos de VE con sus características, como la capacidad de las baterías, el consumo medio y el recorrido diario.

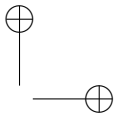
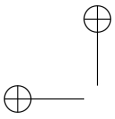
### **Caso 2: Aplicación en la región metropolitana de Santiago de Chile [2]:**

Se presentan los resultados de la investigación y análisis del estudio: Tendencias mundiales en el uso de la electricidad en el transporte (tecnologías, costos, perspectivas). Opciones para la Región Metropolitana (RM).

### **Caso 3: Proyecto MOVELE [3]:**

Este proyecto consistió en la introducción en un plazo de dos años (2009-2010), dentro de entornos urbanos, de un mínimo de 2000 vehículos eléctricos de diversas categorías, prestaciones y tecnologías, en un colectivo amplio de empresas, instituciones y particulares, así como en la instalación de al menos 500 puntos de recarga para estos vehículos en las ciudades de Sevilla, Madrid y Barcelona en España, con el fin principal de demostrar la viabilidad técnica y energética de la movilidad eléctrica.





#### **Caso 4: Evaluación del impacto de los vehículos eléctricos en las redes de distribución (España) [4]:**

En este proyecto se estudió el impacto de los coches eléctricos en las redes eléctricas de distribución con diferentes casuísticas de comportamiento de los usuarios en la recarga de los vehículos. El modelo desarrollado permitió seleccionar varios instantes de recarga, incluso con diferentes proporciones entre ellos. También se pudieron seleccionar varios niveles de acumulación en puntos de recarga concentrada, de nuevo también con diferentes proporciones entre ellos y además respecto a la recarga distribuida.

#### **Caso 5: Pruebas de eficiencia, desempeño y calidad de energía de cargadores AC domiciliarios de vehículos eléctricos (EVs) [5]:**

El objetivo de este proyecto fue evaluar la eficiencia, desempeño y calidad de energía del sistema de recarga AC tipo I de vehículos eléctricos (EVs). En este estudio se presentaron los resultados de la simulación para los valores de V, I, THDv y THDi en el lado de baja del transformador de distribución con mayor carga asociada y bajo diferentes niveles de penetración de vehículos eléctricos.

### **3. Propuesta metodológica**

La metodología propuesta en este artículo, la cual se muestra en la figura 1, contiene los pasos básicos para determinar el impacto de la conexión de los vehículos eléctricos en la cargabilidad y en la calidad de la energía de cualquier red de distribución de energía y está constituida por tres etapas fundamentales:

- Etapa 1. Impacto en la cargabilidad e infraestructura eléctrica de una ciudad.
- Etapa 2. Impacto en la cargabilidad e infraestructura eléctrica de un circuito.
- Etapa 3. Impacto en la calidad de energía de un circuito.

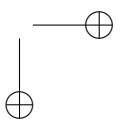
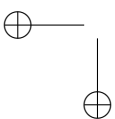
#### **3.1. Etapa 1: Impacto en la cargabilidad e infraestructura eléctrica de una ciudad**

Para determinar el impacto en una ciudad, se consideran todos los elementos que hacen parte del análisis, tales como la red de distribución base para el análisis, la caracterización del perfil de consumo de los clientes, la caracterización de los datos del vehículo eléctrico y la determinación de la carga total y cargabilidad de la red.

##### **3.1.1. Paso 1: Información de la red de distribución**

Las actividades asociadas a esta etapa son:

- Adquirir la información técnica básica y georreferenciada de circuitos, ramales, transformadores de distribución y capacidad de los conductores de media tensión. Asimismo, la ubicación de gasolineras, centros comerciales, parqueaderos públicos, universidades, controles de buses, entre otros.
- Determinar la cantidad de clientes y su potencia media contratada.



- Identificar los parámetros eléctricos de la tensión y el coeficiente de simultaneidad.

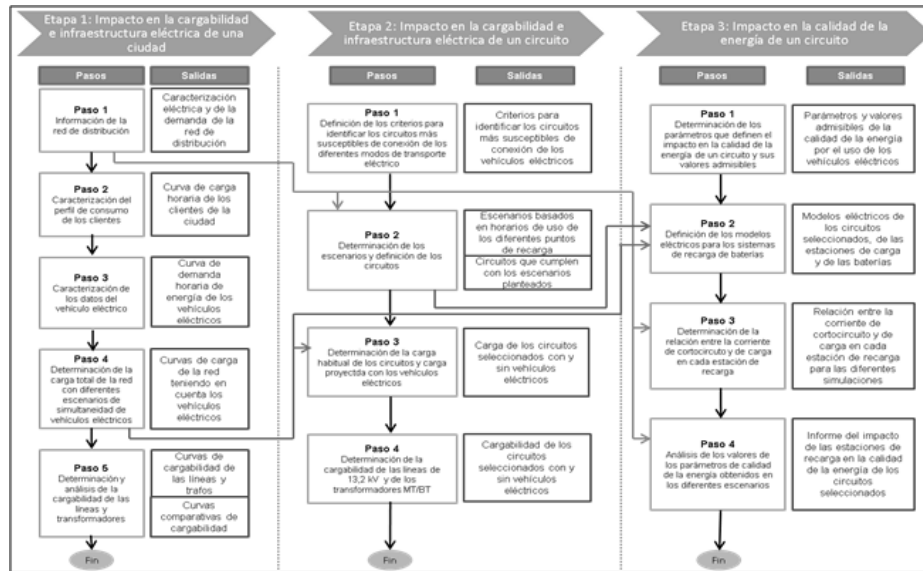


Figura 1. Diagrama de bloques de la metodología propuesta.

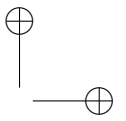
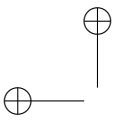
### 3.1.2. Paso 2: Caracterización del perfil de consumo de los clientes

La actividad a realizar es determinar la curva de carga representativa hora a hora, para modelar el perfil de consumo de la ciudad del caso de análisis.

### 3.1.3. Paso 3: Caracterización de los datos del vehículo eléctrico

Las actividades asociadas a esta etapa son:

- Determinar los hábitos de uso de los vehículos convencionales por parte de los usuarios.
- Establecer la probable curva de demanda de energía de los vehículos.
- Determinar el consumo de energía por kilómetro recorrido (kWh/km) de los vehículos eléctricos.
- Determinar la distancia promedio diaria recorrida por los vehículos eléctricos.
- Estimar la densidad de población por transformador de distribución.
- Determinar los valores de consumo energético (en kWh) medio y de alta utilización de las baterías.
- Determinar el tipo, la potencia y el tiempo de recarga de los vehículos eléctricos.
- Determinar el uso de recarga distribuida y/o concentrada.



### 3.1.4. Paso 4: Determinación de la carga total de la red con diferentes escenarios de simultaneidad de vehículos eléctricos

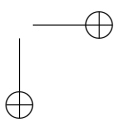
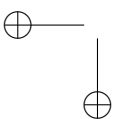
Las actividades asociadas a esta etapa son:

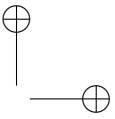
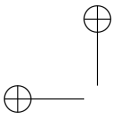
- Definir el intervalo temporal que abarcará el análisis.
- Determinar el grado de penetración de los vehículos eléctricos.
- Determinar el grado de desarrollo de la tecnología de las baterías.
- Identificar el caso base de evolución del sistema eléctrico sin vehículos eléctricos.
- Caracterizar las posibles ocurrencias de recarga simultánea en el Sistema.

### 3.1.5. Paso 5: Determinación y análisis de la cargabilidad de las líneas y transformadores.

En este paso se determina la cargabilidad de las líneas de media tensión y transformadores de distribución, antes y después del uso de los vehículos eléctricos. El grado de cargabilidad definirá las inversiones necesarias en la infraestructura eléctrica de la red de distribución para poder suministrar adecuadamente la energía a los vehículos eléctricos.

- Comparar los resultados de cargabilidad en los escenarios de igual distancia recorrida y potencia promedio.
- Analizar una situación de elevada demanda, correspondiente a un recorrido mayor.
- Comparar la cargabilidad para la recarga en punta a recorrido promedio, con el recorrido de elevada demanda.
- Analizar la cargabilidad de la red para potencias de recarga un nivel más bajo y un nivel más alto de la potencia de recarga promedio.
- Analizar la cargabilidad de la red para recargas en punta a 1 kW y 7,4 kW.
- Analizar una situación de recarga solo con electrolinerías, teniendo en cuenta el recorrido promedio diario, la potencia de recarga, el grado de penetración de los vehículos y el instante (periodos) de recarga.
- Analizar una situación de recarga en valle con varias potencias.
- Analizar una situación de recarga en punta con varias potencias, considerando las variables de control.
- Analizar una situación de recarga de motocicletas eléctricas, teniendo en cuenta el recorrido promedio diario, la potencia de recarga, el grado de penetración de los vehículos y el instante (periodos) de recarga.
- Analizar una situación de recarga de buses eléctricos, considerando las variables de control.
- Analizar la influencia de la ubicación de las electrolinerías en determinados puntos de la ciudad.





### **3.2. Etapa 2: Impacto en la cargabilidad e infraestructura eléctrica de un circuito**

#### **3.2.1. Paso 1: Definición de los criterios para identificar los circuitos más susceptibles de conexión de los diferentes modos de transporte eléctrico**

En este paso se definen los criterios para identificar los circuitos más susceptibles de conexión de los diferentes modos de transporte eléctrico.

#### **3.2.2. Paso 2: Determinación de los escenarios y definición de los circuitos**

En este paso se determinan los escenarios propuestos para el estudio, que están basados en los posibles horarios de uso de los puntos de recarga disponibles para los diferentes tipos de vehículos. Se deben identificar los circuitos que cumplen con los escenarios para los diferentes puntos de recarga.

#### **3.2.3. Paso 3: Determinación de la carga habitual de los circuitos y carga proyectada con los vehículos eléctricos**

Las actividades asociadas a esta etapa son:

- Revisar la carga que han tenido estos circuitos, según las estadísticas de carga hora a hora.
- Identificar la cantidad de transformadores de distribución que tiene el circuito.
- Determinar la carga que tendrían los vehículos eléctricos en los posibles períodos de uso.

Del análisis que dio de todos los circuitos en la etapa 1, se conoce la relación “cantidad de vehículos eléctricos/trafo de distribución”. Este dato se puede multiplicar por el consumo de potencia de los vehículos para determinar la carga.

#### **3.2.4. Paso 4: Determinación de la cargabilidad de las líneas de 13,2 kV y de los trafos MT/BT**

En este paso se determina la cargabilidad de las líneas de distribución de 13,2 kV y de los transformadores MT/BT de dicho circuito. La forma de la gráfica de la curva de carga, dependerá del escenario que se esté analizando.

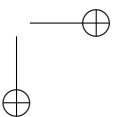
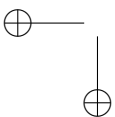
### **3.3. Etapa 3: Impacto en la calidad de la energía de un circuito**

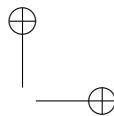
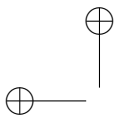
En esta etapa se definen las actividades que permiten determinar si las variables de voltaje, corriente, distorsión armónica de voltaje y de corriente, así como el factor de potencia, se encuentran dentro de los valores admisibles del estándar de calidad de la energía.

#### **3.3.1. Paso 1: Determinación de los parámetros que definen el impacto en la calidad de la energía de un circuito y sus valores admisibles**

Las actividades asociadas a esta etapa son:

- Definir los parámetros que determinarán el impacto en la calidad de energía de un circuito.





- Determinar el nivel admisible de armónicos de corriente y tensión, originado por la conexión de las estaciones de carga a la red eléctrica.

### **3.3.2. Paso 2: Definición de los modelos eléctricos para los sistemas de recarga de baterías**

Para ejecutar las simulaciones de cada escenario de carga de los vehículos eléctricos en una herramienta informática, se deben definir los modelos eléctricos y electrónicos de cada uno de los componentes. Algunas de las herramientas de modelamiento son los softwares comerciales para correr flujos de carga como NEPLAN, DigSilent y Matlab. Las actividades asociadas a esta etapa son:

- Determinar el número de baterías a recargar.
- Determinar el modelo de las baterías.
- Determinar el modelo de los cargadores de baterías.
- Determinar el modelo de los componentes de la red eléctrica.

### **3.3.3. Paso 3: Determinación de la relación entre la corriente de cortocircuito y de carga en cada estación de recarga**

En este paso se determina la relación entre la corriente de cortocircuito y de carga en cada estación de recarga, para establecer si los armónicos de corriente individuales y totales se hallan dentro de los valores admisibles por la norma. Para realizar esto, se debe sacar la relación entre la corriente de cortocircuito y la corriente de carga en el punto común de acoplamiento, es decir, en el punto de conexión de la estación de recarga.

### **3.3.4. Paso 4: Análisis de los valores de los parámetros de calidad de la energía obtenidos en los diferentes escenarios**

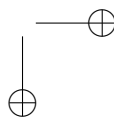
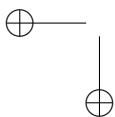
Las actividades asociadas a esta etapa son:

- Correr la simulación de los probables escenarios de carga de los vehículos eléctricos en la herramienta de simulación.
- Obtener las curvas y gráficas para las tensiones y corrientes en el lado de alta y baja del transformador y determinar si los valores obtenidos de los parámetros de calidad de la energía se encuentran dentro de los rangos admisibles por la norma.

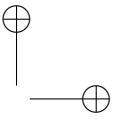
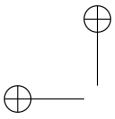
Para mayor información sobre el detalle de cada paso, así como sus relaciones con los pasos de las demás etapas, se sugiere consultar [6].

## **4. Resultados de la aplicación de la metodología en un caso de uso**

A continuación se presentan algunos resultados de la aplicación de la metodología planteada, en donde se busca confirmar que cada una de las etapas, pasos y actividades sugeridas en forma genérica, son aplicables para determinar el impacto de los diferentes modos de transporte eléctrico,







bajo cualquier escenario de penetración, en la infraestructura eléctrica, cargabilidad y calidad de la energía en la red de distribución de una zona y circuito determinados.

El caso de uso planteado es sobre una ciudad del Valle del Cauca, la cual tiene aproximadamente 320 mil habitantes, cuenta con más de once circuitos de distribución, repartidos en varias subestaciones y contiene más de 2000 transformadores de distribución. El número de vehículos particulares, así como la cantidad de taxis, buses y motos convencionales son representativos para sacar las diferentes relaciones requeridas para el análisis.

Adicionalmente, hay diferentes espacios potenciales para instalar las estaciones de carga, tales como unidades residenciales, parqueaderos, centros comerciales y controles de buses, en donde es posible desarrollar el escenario de recarga en extremo superior, el cual considera la carga de los vehículos en la punta de la curva de la demanda, que normalmente corresponde a los periodos 19, 20 y 21 de un día de semana.

#### **4.1. Etapa 1: Impacto en la demanda e infraestructura eléctrica de una ciudad**

Para determinar el impacto en una ciudad se consideran todos los elementos que hacen parte de los análisis, tales como la información de la red de distribución, la caracterización del perfil de consumo de los clientes, la caracterización de los datos del vehículo eléctrico y la determinación de la carga total y cargabilidad de la red.

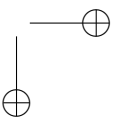
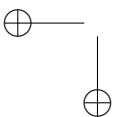
Los siguientes criterios y pasos buscan determinar la carga total de los vehículos eléctricos para los posibles escenarios de recarga simultánea en el sistema eléctrico.

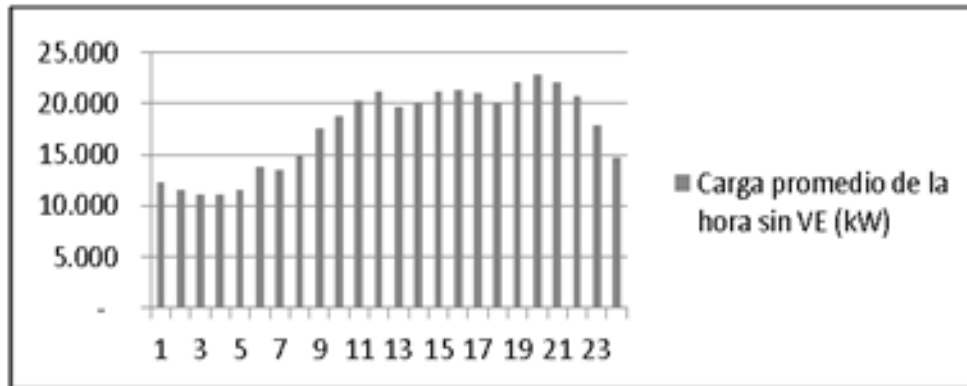
Los escenarios de recarga se definen teniendo en cuenta:

- Los hábitos de uso y conducción de los vehículos convencionales. Esto determina el recorrido promedio diario (en km).
- La curva de carga diaria, en los diferentes periodos de punta, valle, horas de trabajo diurno de las personas y en horas donde las personas llegan a la casa después de su trabajo.
- El grado de penetración proyectado de los vehículos eléctricos.
- La potencia de recarga disponible actualmente para el promedio de los vehículos eléctricos existentes en el mercado. Estos son 0.5 kW, 1 kW, 3.7 kW, 7.4 kW, 50 kW y 145 kW.

Es por esto que se definen los siguientes escenarios:

- Recarga en punta. Corresponde a los periodos 19, 20 y 21.
- Recarga en valle: Corresponde a los periodos 1 al 7.
- Recarga nocturna en casa. Corresponde a los periodos 17 a 23.
- Recarga en el hogar y al llegar al trabajo. Corresponde a los periodos 7 a 12 y 17 a 23 de un día de semana promedio.





**Figura 2.** Curva de carga promedio de los clientes para una ciudad del Valle del Cauca.

Para modelar el perfil de consumo de la ciudad del caso de análisis, se tomó como referencia una curva de carga representativa hora a hora.

Esta gráfica proporciona en valor de potencia activa, los consumos típicos de energía para consumo residencial, industrial y comercial, como se muestra en la figura 2. Se observan los picos de consumo en los periodos 10, 11 y 12 y 19, 20 y 21.

En este apartado se comenta el escenario más importante que se va a ensayar y que servirá de referencia en el apartado de resultados. Para comprender adecuadamente cada una de las situaciones del sistema que se van a ensayar, se muestra al menos una gráfica de curva agregada de todos los consumos de los vehículos (gráfico de barras a la izquierda) y otra gráfica del incremento en la curva de carga (gráfica de curvas a la derecha) debido a los vehículos eléctricos.

Este escenario permitirá caracterizar la posible ocurrencia que puede darse en el sistema y la consecuencia respectiva. Para seleccionar este escenario se tuvieron en cuenta las curvas de carga que se esperan en la recarga de los vehículos. Además, se tuvieron en cuenta los siguientes datos:

■ **Tipo y cantidad de vehículos convencionales actuales:**

Automóviles particulares	Taxis	Buses	Motocicletas
19.000	4.000	250	11.000

■ **Variables de control:**

- Recorrido promedio diario: **35km.**
- Potencia de recarga: **3.7kW.**
- Grado de penetración de los vehículos: 20 % para automóviles particulares y 100 % para taxis.

- **Tipo y cantidad de vehículos eléctricos proyectados, dependiendo del Grado de Penetración (GDP) de cada tecnología:**

Automóviles particulares	Taxis	Microbuses /Busetas	Buses	Camiones	Motocicletas
3.800	4.000	-	-	-	-

- **Electrolineras (puntos de recarga rápida) proyectadas:**

Cantidad de electrolineras en la ciudad	Cantidad de vehículos eléctricos para recargar en una hora
32	2

- **Energía necesaria de los vehículos eléctricos para el recorrido promedio diario:**

Consumo promedio de los vehículos eléctricos (kWh/km)	Recorrido diario promedio (km)	Consumo de energía para el recorrido diario promedio (kWh)
0,2	35	7

**Escenario extremo superior:** Todos los vehículos recargan en punta. Esta situación permitirá delimitar para las diferentes posibilidades de recarga (concentrada y distribuida), un tope máximo de requerimientos de inversión que serán necesarios para abastecer adecuadamente al vehículo eléctrico.

#### Variable de control de la curva de carga:

- Instante de recarga: Periodos 19, 20 y 21 de un día promedio.  
Para elaborar la curva de carga con la incursión de los vehículos eléctricos, se tuvieron en cuenta las variables anteriores y los siguientes parámetros:
- **Potencia de recarga de los vehículos eléctricos en una hora:**

0,5 kW	1 kW	3,7 kW	7,4 kW	50 kW	145 kW	Potencia total (kW)
-	-	28.742	-	1.600	-	30.342

- **Carga total de las líneas de 13,2 kV, teniendo en cuenta los vehículos eléctricos:**

Carga promedio de la hora en la ciudad sin tener en cuenta los V.E (kW)	Carga total de la red (kW)
22.054	52.396

Con la información anterior, la curva resultante tiene la forma de la figura 3. La forma de esta curva está determinada por la potencia de recarga seleccionada.

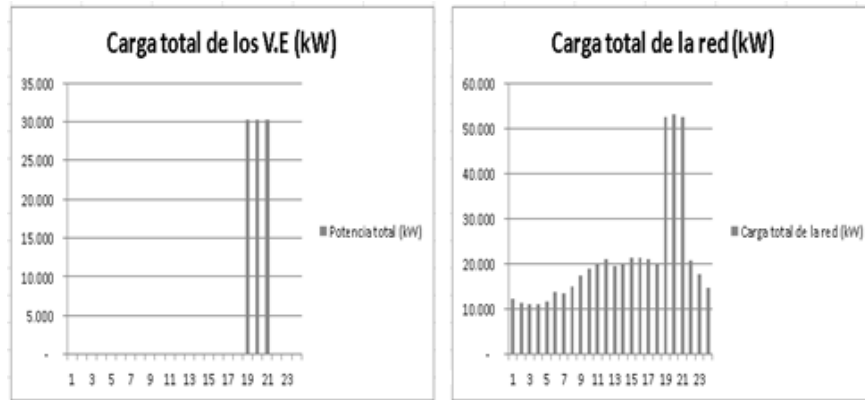


Figura 3. Carga total de los V.E y de todos los circuitos de la red para recarga en punta a 3.7 kW

#### 4.2. Etapa 2: Impacto en la demanda e infraestructura eléctrica de un circuito

Para determinar el impacto de la incursión de los vehículos eléctricos en la demanda y en la infraestructura de un circuito, se proponen los siguientes criterios que servirán para identificar los circuitos más susceptibles de conexión de los diferentes modos de transporte eléctrico.

- Circuito(s) que alimente(n) por lo menos:
  - Universidades, centros comerciales, parqueaderos públicos y de empresas
  - Control de buses de servicio público
  - Residencias de estrato socioeconómico 4, 5 o 6 (con o sin bloques de apartamentos)
  - Gasolineras
- Circuito(s) con mayor demanda de energía.

Para definir estos criterios, primero se tuvo en cuenta los tipos de recarga posibles (1, 3.7 kW, etc.) que se pueden instalar en los puntos de recarga (residencias, centros comerciales, etc.) para las diferentes categorías de vehículos (motos, taxis, etc.). En las tablas I, II y III se muestran las matrices de relación correspondientes a cada nivel de carga (lenta, semilenta y rápida).

Tabla I. Puntos de recarga posibles de los diferentes tipos de V.E para carga lenta

Tipo de Vehículo	Puntos de recarga lenta (1-3,7 kW)						
	Estrato socioeconómico (residencial)						
	1	2	3	4	5	6	Rural
Bicicletas eléctricas				x	x	x	x
Motocicletas eléctricas				x	x	x	x
Automóviles particulares				x	x	x	x
Taxis eléctricos							
Vehículos de carga							
Buses, busetas y microbuses particulares							
Buses eléctricos de servicio público							

A continuación se definen los escenarios, que se basan en los posibles horarios de uso de los puntos de recarga disponibles para los diferentes tipos de vehículos, como se muestran en las tablas IV, V y VI.

**Tabla II.** Puntos de recarga posibles de los diferentes tipos de V.E para carga semilenta

Tipo de Vehículo	Puntos de recarga semilenta (7,4 kW)				
	Centros comerciales	Parqueaderos Públicos	Parqueaderos de empresas	Parqueaderos de universidades	Conjunto de apartamentos
Bicicletas eléctricas		x	x	x	x
Motocicletas eléctricas	x	x	x	x	x
Automóviles particulares	x	x	x	x	x
Taxis eléctricos					x
Vehículos de carga					
Buses, busetas y microbuses particulares					
Buses eléctricos de servicio público					

**Tabla III.** Puntos de recarga posibles de los diferentes tipos de vehículos eléctricos para carga rápida

Tipo de Vehículo	Puntos de recarga rápida (50 kW)						
	Gasolineras	Centros comerciales	Parqueaderos Públicos	Parqueaderos de empresas	Parqueaderos de universidades	Conjunto de apartamentos	Control de buses
Bicicletas eléctricas							
Motocicletas eléctricas							
Automóviles particulares	x	x	x	x	x	x	
Taxis eléctricos	x	x	x			x	
Vehículos de carga	x	x	x	x		x	
Buses, busetas y microbuses particulares	x			x	x	x	
Buses eléctricos de servicio público	x			x			x

**Tabla IV.** Escenarios para puntos de recarga lenta

Escenario por horario	Horario de carga	Puntos de recarga lenta (1-3,7 kW)						
		Estrato socioeconómico (residencial)						
		1	2	3	4	5	6	
1	Recarga en la casa	6 pm a 7 am			1	1	1	
2	Recarga en horario nocturno	9 pm a 6 am			2	2	2	
3	Recarga en horario laboral	7 am a 5 pm						3
4	Recarga en la punta de la noche	7 pm a 9 pm			4	4	4	
5	Sábados	7 am a 5 pm						5
6	Domingos y festivos	7 am a 5 pm						6

**Tabla V.** Escenarios para puntos de recarga semilenta

Escenario por horario	Horario de carga	Puntos de recarga semilenta (7,4 kW)				
		Centros Comerciales	Parqueaderos públicos	Parqueaderos de empresas	Parqueaderos universidades	Conjuntos de apartamentos
1	Recarga en la casa	6 pm a 7 am				1
2	Recarga en horario nocturno	9 pm a 6 am				2
3	Recarga en horario laboral	7 am a 5 pm	3	3	3	3
4	Recarga en la punta de la noche	7 pm a 9 pm	4			4
5	Sábados	7 am a 5 pm	5	5		5
6	Domingos y festivos	7 am a 5 pm	6			

**Tabla VI.** Escenarios para puntos de recarga rápida

Escenario por horario	Horario de carga	Puntos de recarga rápida (50 kW)						
		Gasolineras	Centros Comerciales	Parqueaderos públicos	Parqueaderos de empresas	Parqueaderos universidades	Conjuntos de apartamentos	Control de buses
1	Recarga en la casa						1	
2	Recarga en horario nocturno	2					2	2
3	Recarga en horario laboral	3	3	3	3	3	3	3
4	Recarga en la punta de la noche	4	4			4	4	4
5	Sábados	5	5	5		5	5	5
6	Domingos y festivos	6	6				6	6

De acuerdo con esto, los circuitos que cumplen con los criterios nombrados anteriormente, son:

- Circuito 3 de la Subestación 1:
  - Control de buses
  - Universidad
  - Gasolinera ESSO
- Circuito 5 de la Subestación 2:
  - Viviendas de Estrato 5. Este es el circuito de mayor consumo de energía, representado principalmente en casas independientes y bloques de apartamentos
  - Viviendas de Estrato 3
- Circuito Industrial de la Subestación 3: Contiene tres (3) centros comerciales representativos. Para el circuito con el criterio de mayor demanda de energía, los cálculos se pueden resumir en la tabla VII.

**Tabla VII.** Datos básicos para calcular la cargabilidad de las líneas de 13.2 kV y de los trafos MT/BT

Cantidad de trafos de distribución del circuito	Cantidad de vehículos eléctricos/trafo de distribución	Potencia de carga de los vehículos eléctricos (según caso) (kW)	Carga máxima del circuito en el periodo sin V.E (kW)	Capacidad de la troncal del circuito (kW) (Depende del calibre del conductor)	Capacidad total de todos los trafos del circuito(kVA)	Capacidad nominal promedio de los trafos(kVA)
334	4	3,7	4627	4686	18958	50

En la tabla VIII se muestra el cálculo de la carga total de las líneas de 13.2 kV del circuito:

**Tabla VIII.** Cálculo de la carga total de las líneas de 13,2 kV

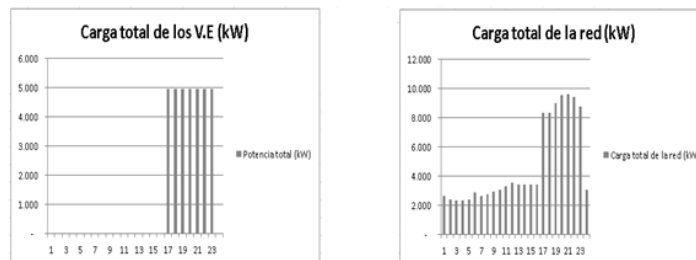
Cantidad de trafos de distribución del circuito	Cantidad de vehículos eléctricos/trafo de distribución	Potencia de carga de los vehículos eléctricos (según caso) (kW)	Carga de los vehículos eléctricos (kW)	Carga máxima del circuito en el periodo sin V.E (kW)	Carga total del circuito teniendo en cuenta los V.E (kW)
334	4	3,7	=334X4X3,7=	4627	=4943+4627=9570

En la tabla IX se muestra el cálculo de la carga total de los trafos MT/BT del circuito:

**Tabla IX.** Cálculo de la carga total de los trafos MT/BT

Cantidad de vehículos eléctricos /trafo de distribución	Potencia de carga de los vehículos eléctricos (según caso) (kW)	Carga total de los vehículos eléctricos por trafa (kW)
4	3,7	4X3,7=14,8

Para el caso de la recarga en punta, se obtiene la gráfica mostrada en la figura 4.



**Figura 4.** Recarga en punta a 3,7 kW para el circuito analizado.

### 4.3. Etapa 3. Impacto en la calidad de la energía de un circuito

Normalmente, los parámetros considerados para cualquier estudio de calidad de energía, se resumen:

- Distorsión armónica de tensión (THDv)
- Distorsión armónica de corriente (THDi)
- Armónicos individuales de tensión
- Armónicos individuales de corriente
- Factor de potencia (F.P)
- Tensión eficaz (VRMS)
- Corriente eficaz (IRMS)

Para determinar el nivel admisible de armónicos de corriente y tensión, originado por la conexión de estos cargadores a la red eléctrica, se toma como referencia los límites de armónicos individuales y totales de estos dos parámetros eléctricos dados por la tabla tomada de la norma IEEE 519/92 “Requerimientos y Prácticas recomendadas para Control de armónicos en sistemas de potencia”, las cuales se presentan a continuación en las tablas X y XI.

**Tabla X.** Límites de armónicos de corriente individuales y totales tomados de la norma IEEE 519/92

Límites de corriente armónica para cargas no-lineales en el punto de acomplamiento común con otras cargas para voltajes entre 120 a 69.000 voltios						
Máxima distorsión de corriente armónica impar en porcentaje del armónico fundamental						
ISC/IL	<11	11<17	17<23	23<35	35	TDD
<20	4	2	1,5	0,6	0,3	5
20<50	7	3,5	2,5	1	0,5	8
50<100	10	4,5	4	1,5	0,7	12
100<1000	12	5,5	5	2	1	15
>1000	15	7	6	2,5	1,4	20

**Tabla XI.** Límites de armónicos de voltaje individuales y totales tomados de la norma IEEE 519/92

Voltaje del barraje en el punto de acoplamiento común	Distorsión individual de voltaje (%)	Distorsión total de voltaje (THD) (%)
Debajo de 69 kV	3	5
69 kV a 137,9 kV	1,5	2,5
Por encima de 138 kV	1	1,5

Los parámetros resultantes de las simulaciones se comparan con los límites mostrados en las tablas anteriores, para el lado de alta y baja tensión de los transformadores de distribución.

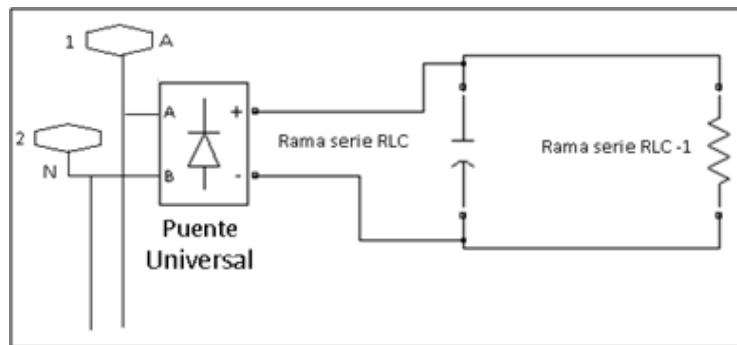
Para ejecutar las simulaciones de cada escenario de carga de los vehículos eléctricos en una herramienta informática, se deben definir los modelos eléctricos y electrónicos de cada uno de los componentes. Algunas de las herramientas de modelamiento son los softwares comerciales para

correr flujos de carga como NEPLAN, DigSilent y Matlab.

Para determinar la cantidad y tipo de vehículos eléctricos que se tendrán en cuenta en cada una de las simulaciones, así como la potencia de los puntos de recarga, se recurre a la información obtenida en el apartado “4.1 Etapa 1: Impacto en la demanda e infraestructura eléctrica de una ciudad”, visto anteriormente.

Adicionalmente, en el apartado “4.2 Etapa 2: Impacto en la demanda e infraestructura eléctrica de un circuito”, se definieron los criterios para llevar a cabo las simulaciones objeto de este estudio. Asimismo, se definió la manera de conocer la cantidad de vehículos eléctricos que se estarían cargando por cada trazo de distribución y la capacidad nominal promedio de los transformadores en el circuito.

Para el caso de las baterías cuyo cargador tenga una potencia igual o inferior a 7.4 kW, esta se puede simular como una resistencia y el cargador como un puente universal, tal como se muestra en la figura 5.



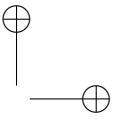
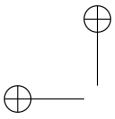
**Figura 5.** Modelo de un cargador de potencia inferior a 7.4 kW, conectado a una batería. Fuente: Elaboración propia en el software MatLab.

Para este modelamiento debe definirse el esquema de cada componente del circuito de distribución. Entre los más relevantes se encuentran:

- Modelo equivalente de la red en la subestación
- Modelo de la línea de media tensión
- Modelo del transformador MT/BT
- Modelo de los armónicos presentes en la línea de media tensión
- Modelo de las cargas domiciliarias
- Modelo de las cargas industriales

Por otra parte, para determinar la relación entre la corriente de cortocircuito y de carga en cada estación de recarga, para establecer si los armónicos de corriente individuales y totales están dentro





de los valores admisibles por la norma, se debe sacar la relación entre la corriente de cortocircuito y la corriente de carga en el punto común de acoplamiento, es decir, en el punto de conexión de la estación de recarga.

Con el fin de establecer dicha relación, se debe considerar la tensión nominal de la línea, la corriente de cortocircuito del barraje y el grupo de conexión del transformador. Con esta información se calculan los siguientes parámetros:

- Impedancia de la fuente
- Impedancia de la línea de 13,2 kV
- Corriente de cortocircuito en el lado de alta del transformador
- Corriente de cortocircuito en el lado de baja del transformador. Para el cálculo de la impedancia, se debe tener en cuenta que la capacidad del transformador y la tensión en el lado secundario, en **cada escenario**, pueden variar.

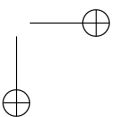
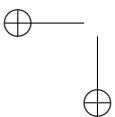
La parametrización de cada modelo cambia dependiendo de las condiciones planteadas en los escenarios, los cuales pueden considerar casos de recarga individual o integrada simultánea de motos, automóviles particulares, taxis y autobuses eléctricos.

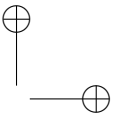
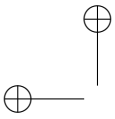
En cada configuración se debe conocer y determinar:

- Tipo de barraje
- Capacidad, grupo de conexión, impedancia de cortocircuito y nivel de tensión del transformador
- Frecuencia de la red
- Cantidad y potencia de las cargas conectadas, las cuales serán los puntos de alimentación de un automóvil eléctrico
- Cargas domiciliarias en paralelo a los puntos de recarga

Las curvas y gráficas que se obtienen normalmente de las herramientas informáticas son:

- Tensión en el lado de baja del transformador
- Corriente en el lado de baja del transformador
- Tensión en el lado de alta del transformador
- Corriente en el lado de alta del transformador
- Factor de potencia del sistema
- Distorsión armónica de tensión en el lado de baja del transformador
- Distorsión armónica de tensión en el lado de alta del transformador





- Distorsión armónica de corriente en el lado de baja del transformador
- Distorsión armónica de corriente en el lado de alta del transformador

Uno de los escenarios que se pueden desarrollar es el de conexión simultánea de cargadores de baterías para todas las potencias de recarga.

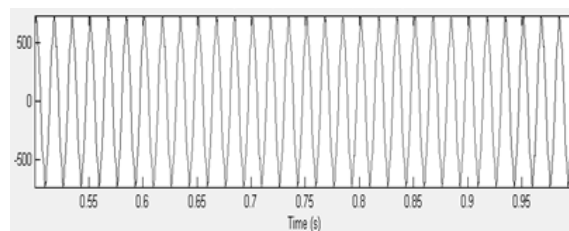
Los tipos y cantidad de puntos de recarga que se asumen como ejemplo para conectar en cada transformador, son los siguientes:

- Para el transformador de 50 kVA se conectan puntos de recarga lenta de las siguientes potencias:
  - 5 puntos de 500 W (para motocicletas eléctricas)
  - 2 puntos de 1 kW (para automóviles particulares)
  - 1 punto de 3,7 kW (para taxis)
  - 1 punto de 7,4 kW (para automóviles y transporte de carga liviana)
  - Cargas domiciliarias
- Se conecta un punto de recarga rápida de 50 kW para cada transformador de 400 kVA, ubicado en los siguientes sitios:
  - Un conjunto de apartamentos
  - Una gasolinera
  - Una universidad
  - Un centro comercial
- Para el transformador de 2 MVA:
  - 2 puntos de recarga rápida de 145 kW (para buses)

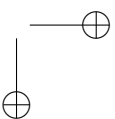
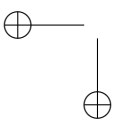
El horario de recarga simultáneo sería el de la punta de la curva de demanda, dado en los periodos 19 al 21 de un día promedio.

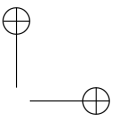
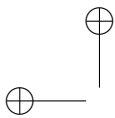
Después de correr la simulación de este escenario en MATLAB, se obtienen curvas para las tensiones y corrientes en el lado de alta y baja de los transformadores de distribución. Algunas de ellas se presentan a continuación.

*Tensión en el lado de baja de los transformadores de 400 kVA:*



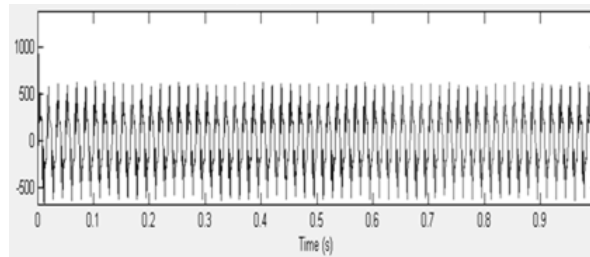
**Figura 6.** Tensión en el lado de baja de los transformadores de 400 kVA





En esta gráfica se puede observar una onda de tensión de magnitud 674,3 V<sub>peak</sub> (476,8 V<sub>rms</sub>) y frecuencia de 60 Hz. La tensión nominal se afectó levemente.

La gráfica resultante es la siguiente:

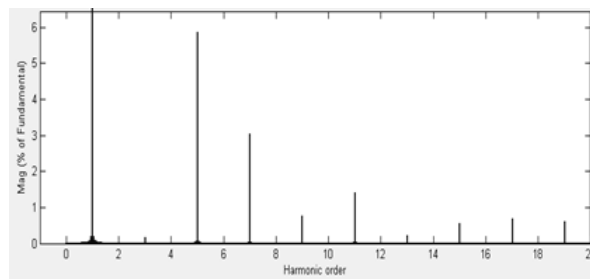


**Figura 7.** Corriente en el lado de baja de los transformadores de 400 kVA

En esta gráfica se puede observar una onda de corriente de magnitud 377,5 A<sub>peak</sub> (266,9 A<sub>rms</sub>) y frecuencia de 60 Hz.

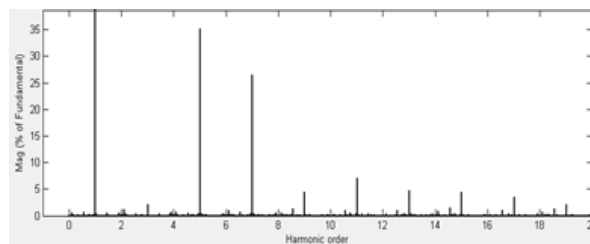
La gráfica resultante es la mostrada en la figura 8.

Los valores obtenidos para los armónicos individuales de tensión y la distorsión armónica total (en %) se pueden observar en la tabla XII

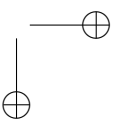
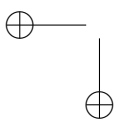


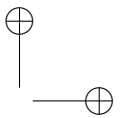
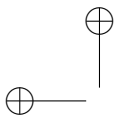
**Figura 8.** Distorsión armónica de tensión en el lado de baja de los transformadores de 400 kVA

La gráfica resultante es la mostrada en la figura 9:



**Figura 9.** Distorsión armónica de corriente en el lado de baja de los transformadores de 400 kVA



**Tabla XII.** THDv y armónicos individuales de tensión en el lado de baja de los transformadores de 400 kVA

Fundamental	HD3	HD5	HD7	HD9	HD11	HD13	HD15	THDv
674,3 Vpeak(100 %)	0,16	5,86	3,04	0,77	1,42	0,22	0,56	7,01

Como se puede observar, la mayor componente armónica registrada es el 5° armónico.

Los valores obtenidos para los armónicos individuales de corriente y la distorsión armónica total (en %) se pueden observar en la tabla XIII:

**Tabla XIII.** THDi y armónicos individuales de corriente en el lado de baja de los transformadores de 400 kVA

Fundamental	HD3	HD5	HD7	HD9	HD11	HD13	HD15	HD17	HD19	THDi
377,5 Apeak (100 %)	2,11	35,18	26,52	4,37	7,14	4,7	4,39	3,50	2,15	45,76

Como se puede observar, la mayor componente armónica registrada es el 5° armónico.

Para el dato de corriente fundamental y, teniendo en cuenta el cálculo de la corriente de cortocircuito del apartado anterior, en el lado de 480 V del transformador, se tiene la ecuación 1:

$$\frac{I_{sbaja}}{I_{lbaja}} = \frac{10807A}{267A} = 40,5 \quad (1)$$

Con esta relación, la norma establece los siguientes valores admisibles de armónicos:

$I_{SC}/I_L$	HD<11	11<HD<17	17<HD<23	THDi
20<50	7	3,5	2,5	8

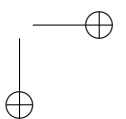
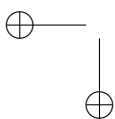
## 5. Conclusiones

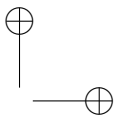
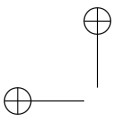
La elaboración de unas etapas, pasos y actividades, permitieron determinar en forma ordenada y sustentable una propuesta metodológica, que podría servir de referencia para identificar el impacto de los vehículos eléctricos en las redes de distribución.

Por otra parte, en cuanto avanza el tema de los vehículos eléctricos, es importante considerar paralelamente el tema de sistemas de recarga, dadas las implicaciones que tiene en la red eléctrica que soporta dicho sistema. Es por ello que cada modalidad de carga debe considerarse y estudiarse tanto económica, como tecnológicamente.

Lo anterior implica que la penetración de un elevado número de VE, correspondiente a previsiones de largo plazo, podría dar lugar a numerosos refuerzos en la red de distribución para permitir su recarga. Por lo tanto, la adopción de una estrategia de gestión temporal de la recarga podría minimizar los refuerzos necesarios.

Es por esto que las entidades de regulación y control del sistema de distribución de energía deben considerar la inclusión de estos sistemas de recarga (cargas no lineales) y sus potenciales impactos en los armónicos. Igualmente, revisar los niveles permitidos de THD de tensión y de corriente permitidos en los sistemas de recarga de EVs, que garanticen el correcto funcionamiento de las demás cargas conectadas al punto común de conexión.





Por otro lado, las recomendaciones para minimizar el impacto en la cargabilidad, están orientadas a realizar inversiones a nivel de la línea de media tensión, mas no en los transformadores de distribución, para los escenarios de recarga en punta a 35 km y 160 km.

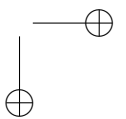
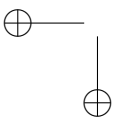
Así como las recomendaciones para minimizar el impacto en la calidad de la energía están enfocadas a los componentes de distorsión armónica, pues la tensión y el factor de potencia, aparentemente no se ven afectados.

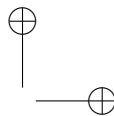
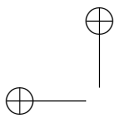
Teniendo en cuenta lo anterior, como posibles trabajos futuros se recomienda elaborar una herramienta de modelado para evaluar el impacto de los vehículos eléctricos en la red de distribución, así como elaborar una herramienta informática que permita conocer en tiempo real, el impacto de las estaciones de carga de vehículos eléctricos en la calidad de la energía y asimismo determinar por medio de un algoritmo, la propuesta de filtros pasivos, activos e híbridos que se podrían implementar para minimizar la magnitud de los armónicos de voltaje y corriente. Asimismo, se propone definir, diseñar e implementar una estrategia de gestión de la recarga de las baterías de los vehículos eléctricos, en los períodos del día más adecuados, con el fin de minimizar los refuerzos necesarios en las redes de distribución.

Adicionalmente, cabe mencionar que se encuentran numerosos estudios que analizan el impacto y que probablemente deben tener relación con alguna o varias de las etapas propuestas de la metodología. Entre ellos se encuentran: “The impact of charging plug-in hybrid electric vehicles on a residential distribution grid” [7], “Controlled electric vehicle charging for mitigating impacts on distribution assets” [8], “Impact analysis of vehicle-to-grid technology and charging strategies of electric vehicles on distribution networks A review” [9], “Assessment of the impact of plug-in electric vehicles on distribution networks” [10]. Estos estudios pueden servir como tema para un futuro trabajo de grado.

## Referencias

- [1] P. Frías, C. Mateo y J.I. Pérez-Arriaga, “Evaluación del impacto en la integración del coche eléctrico en las redes de distribución”. LYCHNOS, volumen 6, número 1, disponible en [http://www.fgcsic.es/lychnos/es.es/articulos/evaluacion\\_impacto\\_integracion\\_coche\\_electrico](http://www.fgcsic.es/lychnos/es.es/articulos/evaluacion_impacto_integracion_coche_electrico), 2011, octubre.
- [2] Impacto en la red eléctrica, disponible en [http://web.ing.puc.cl/\\_power/mercados/transportelec/pagina\\_web\\_transporte\\_electrico\\_022.htm](http://web.ing.puc.cl/_power/mercados/transportelec/pagina_web_transporte_electrico_022.htm), S.f.
- [3] F. García, F.J. Alonso y J.P. Juárez, “Impacto del vehículo eléctrico en la red de distribución”. Guía del vehículo eléctrico, capítulo 9. Fundación de la energía de la comunidad de Madrid, disponible en <http://www.cleanvehicle.eu/fileadmin/downloads/Spain/Guida%20del%20vehiculo%20Electrico.pdf>
- [4] A. Rosso Mateo, Evaluación del impacto de los vehículos eléctricos en las redes de distribución. Madrid, 2010.
- [5] J.A. Caballero P. y J.C. Chinchilla G., “Pruebas de eficiencia, desempeño y calidad de energía de cargadores AC domiciliarios de vehículos eléctricos (EVs)”, en Conferencia del seminario de la Universidad Nacional de Colombia “Smart Grid on Electric Mobility”, Bogotá D.C., 2014.
- [6] J.E. Ceballos, “Propuesta metodológica para dimensionar el cambio en la infraestructura eléctrica de la red de distribución de EPSA ante la llegada del transporte eléctrico”, Tesis de maestría de profundización, Facultad de Ingeniería, Universidad del Valle, Cali, Colombia, 2015.
- [7] K Clement-Nyns, E Haesen - Power Systems, IEEE , 2010 - [ieeexplore.ieee.org](http://ieeexplore.ieee.org)
- [8] V Aravinthan, W Jewell - Smart Grid, IEEE Transactions on, 2015 - [ieeexplore.ieee.org](http://ieeexplore.ieee.org)
- [9] S Habib, M Kamran, U Rashid - Journal of Power Sources, 2015 – Elsevier
- [10] LP Fernandez, TGS Román, R Cossent - Power Systems, , 2011 - [ieeexplore.ieee.org](http://ieeexplore.ieee.org), disponible en [https://scholar.google.com.co/scholar?cites=1951443268686077067&as\\_sdt=2005&sciodt=0,5&hl=es](https://scholar.google.com.co/scholar?cites=1951443268686077067&as_sdt=2005&sciodt=0,5&hl=es)





---

### **John Edward Ceballos Delgado**

Ingeniero electricista de la Universidad del Valle, Colombia. Obtuvo su título de Magíster en Ingeniería en la Universidad del Valle. Se desempeñó como Jefe de Proyectos e Innovación en la Empresa de Energía del Pacífico – EPSA, a partir del año 2010, en la cual desarrolló el proyecto del estudio de las tecnologías innovadoras asociadas a la modernización de la red de distribución. Actualmente se desempeña como Director de la Unidad de Aplicación y Ejecución de la Innovación, en la Empresa de Energía del Pacífico – EPSA, desde el año 2015.

Correo electrónico: jeceballos@epsa.com.co

---

### **Sandra Ospina Arango**

Ingeniera electricista y Matemática-Física de la Universidad del Valle, Colombia. Obtuvo su título de Maestría en generación de energía eléctrica en la Universidad del Valle. Se desempeñó como Gerente de Proyectos, Calidad e Innovación en la Empresa de Energía del Pacífico – EPSA, a partir del año 2009, en la cual se desarrolló el proyecto del estudio de las tecnologías innovadoras asociadas a la modernización de la red de distribución. Actualmente se desempeña como Gerente de Gestión de la Vicepresidencia de Transmisión y Distribución, en la Empresa de Energía del Pacífico – EPSA.

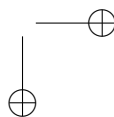
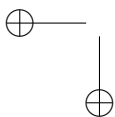
Correo electrónico: sospina@epsa.com.co

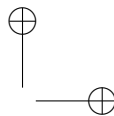
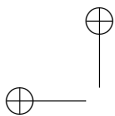
---

### **Eduardo Francisco Caicedo Bravo**

Ingeniero electricista de la Universidad del Valle, Cali – Colombia. Obtuvo su título de Magíster en Tecnologías de la Información de la Universidad Politécnica de Madrid - España y Doctor en Informática Industrial en la misma Universidad. Actualmente se desempeña como profesor titular de la Escuela de Ingeniería Eléctrica y Electrónica de la Universidad del Valle. Es Investigador Senior Colciencias y Director del Grupo Percepción y Sistemas Inteligentes.

Correo electrónico: eduardo.caicedo@correounivalle.edu.co





Short paper

## Desempeño de la Planta de Tratamiento de Aguas Residuales de São João de Iracema (Brasil)

*Performance of the Sewage Treatment Plant of São João de Iracema (Brazil)*

**Tsunao Matsumoto<sup>1</sup>, Iván Andrés Sánchez Ortiz<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Profesor Facultad de Ingeniería, Departamento de Ingeniería Civil UNESP, Campus de Ilha Solteira (São Paulo-Brasil),

<sup>2</sup>Profesor Facultad de Ciencias Pecuarias, Departamento de Recursos Hidrobiológicos, Universidad de Nariño (Pasto-Colombia). Correo electrónico: ivansaor@hotmail.com

Recibido: 13-01-2016. Modificado: 31-03-2016. Aceptado: 22-04-2016

### Resumen

**Contexto:** Algunos de los más importantes parámetros medidos en las plantas de tratamiento de aguas residuales –PTAR– son: materia orgánica, sólidos y organismos fecales. El objetivo de este trabajo fue realizar el diagnóstico del desempeño de la PTAR de São João de Iracema en la remoción de dichos parámetros.

**Método:** Se realizó un estudio batimétrico de las lagunas anaerobia y facultativa; se monitorearon el afluente y efluente de la PTAR en tres temporadas climáticas diferentes, cada una con duración de tres meses, por medio de la medición de oxígeno disuelto, pH, temperatura, DBO, DBO filtrada, DQO, sólidos y coliformes.

**Resultados:** Se registraron acumulaciones de lodos del 1,3 y 6,5 % del volumen de las lagunas anaerobia y facultativa; la remoción media de DBO fue del 73,6 %, inferior al 80 % recomendado por la legislación brasilera; la cantidad media de coliformes fecales en el efluente final fue de 9,55\*10<sup>6</sup>/100mL, que superó el máximo permitido de 1000/100mL.

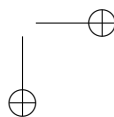
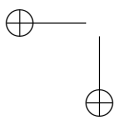
**Conclusiones:** La PTAR necesita implementar un sistema de pos-tratamiento que garantice remoción adicional de materia orgánica y coliformes para ajustar el efluente a la normatividad ambiental.

**Palabras clave:** Aguas residuales urbanas, lagunas anaerobias y facultativas, monitoreo.



©The authors; licensee: Revista INGENIERÍA. ISSN 0121-750X, E-ISSN 2344-8393

Cite this paper as: Matsumoto, T., Sánchez, I.: Desempeño de la Planta de Tratamiento de Aguas Residuales de São João de Iracema (Brasil). INGENIERÍA, Vol. 21, Num. 2, 2016 176:186. En línea DOI: <http://dx.doi.org/10.14483/udistrital.jour.reveng.2016.2.a04>.



### Abstract

**Context:** Some of the most important parameters measured in the sewage treatment plant –STP- are: organic matter, solids and faecal organisms. The objective of this work was to diagnose the performance of São João de Iracema STP for those parameters removal.

**Method:** A batimetric survey of the anaerobic and facultative lagoons; the STP influent and effluent monitoring in three different climate seasons of 3-month long each were conducted by dissolved oxygen, pH, temperature, BOD, filtered BOD, COD, solids and coliforms measuring.

**Results:** Sludge accumulations of 1.3 and 6.5 % in the anaerobic and facultative lagoons were registered; average BOD removal was of 73.6 %, smaller than the 80 % recommended by Brazilian legislation; the average faecal coliform number on final effluent was of  $9.55 \cdot 10^6/100\text{mL}$ , above the per-missible limit of 1000/100mL.

**Conclusions:** The STP needs to set-up a post treatment system that guarantees additional organic matter removal and fecal coliforms in order to adjust the effluent quality to the environmental legislation standards.

**Keywords:** Urban wastewater, anaerobic and facultative lagoons, monitoring

## 1. Introducción

A medida que la especie humana se propagó en la Tierra, organizándose en clanes y sociedades, desarrolló y produjo bienes y servicios destinados a atender necesidades cada vez más complejas. El hombre, con miras a su sobrevivencia y bienestar, en busca de lo que se convino llamar “progreso”, transforma constantemente el medio en el que vive, lo que en una escala mayor corresponde al propio Planeta Tierra. El cual, por otro lado, está también en constante transformación, reestructurando y reequilibrando sus aspectos físicos, químicos y biológicos, en una especie de equilibrio dinámico. En las últimas décadas, las acciones humanas han acelerado dicha transformación, haciendo el equilibrio del planeta cada vez más frágil y difícil. [1]

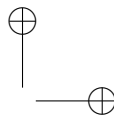
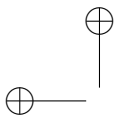
La “explosiva” urbanización del mundo y los problemas que trae aparejada esta situación en los grandes conglomerados urbanos constituye una de las temáticas más importantes de nuestro tiempo. La universalización de la urbanización es un fenómeno reciente en la historia del planeta. El proceso de urbanización observado en los países en desarrollo presenta gran concentración poblacional en pequeñas áreas, con deficiencias en los sistemas de transporte, de abastecimiento y saneamiento, problemas de contaminación del aire y el agua e inundaciones [2].

La expansión de la urbanización, del desarrollo industrial y de la producción agrícola sin una visión ambiental ejercen un significativo impacto en los recursos hídricos en términos cuantitativos y cualitativos. La sobreexplotación de los cuerpos de agua y el deterioro en la calidad del agua son tendencias globales [3] [4].

La extracción del líquido de las fuentes hídricas y la degradación de su calidad por fuentes puntuales y no puntuales, sumada a la falta de infraestructura y servicios de saneamiento en las comunidades conducen a la contaminación del agua [5]. Para reducir la contaminación del agua, y de esta manera también disminuir los impactos ambientales, se hace necesario el tratamiento de los efluentes; para ello se puede recurrir al tratamiento en el lugar de su generación, o fuera del local donde se originan las aguas residuales. Según UNEP [6], los sistemas de tratamiento de efluentes fuera del local de generación precisan de un sistema de alcantarillado que los transporta hacia una planta de tratamiento; el sistema convencional a gran escala más comúnmente implementado es el tratamiento por lodos activados. También existen sistemas como los filtros percoladores y los sistemas anaerobios, además de otros métodos simples, pero efectivos, entre los que se encuentran las lagunas de estabilización, el tratamiento de aguas residuales en el suelo y la acuicultura.

Las lagunas de estabilización son grandes cuerpos de agua ingenierilmente construidos, los cuales pueden ser usados individualmente o en una serie de unidades. Existen tres tipos de lagunas: anaerobias, facultativas y aerobias (o de maduración), cada una de ellas con diferentes características de diseño y de tratamiento. Para maximizar la eficiencia en el tratamiento, las lagunas de estabilización deben disponerse en serie de tres o más unidades, cuyos efluentes fluirán





de la laguna anaerobia hacia la facultativa y finalmente hacia la laguna aerobia [7].

Los principales parámetros de diseño de las lagunas de estabilización y que definen en buena medida su desempeño son: su geometría, el tiempo de retención hidráulica, la profundidad, la tasa de aplicación volumétrica (para lagunas anaerobias) y la tasa de aplicación superficial (para lagunas facultativas) [8].

Además de la geometría de las lagunas, la posición, orientación y profundidad de las estructuras de entrada y salida pueden incidir en el desempeño de este tipo de unidades de tratamiento debido a su efecto sobre la eficiencia hidráulica de las lagunas [9].

El objetivo principal de la presente investigación fue diagnosticar la eficiencia de la PTAR de la ciudad São João de Iracema bajo las diferentes condiciones climáticas anuales. Para ello se monitorearon por medio de diversos parámetros físicos, químicos y microbiológicos el afluente y efluente de las lagunas de estabilización durante tres temporadas climáticas diferentes, con una duración de tres meses cada una; se efectuó el levantamiento batimétrico de las unidades de tratamiento y se realizó el aforo del afluente a la planta durante 24 horas consecutivas.

Con base en los resultados obtenidos se determinó la eficiencia de remoción de algunos parámetros de calidad del agua a la luz de la legislación brasilera y se formularon las recomendaciones del caso para mejorar el desempeño de la PTAR.

## 2. Materiales y métodos

### 2.1. Descripción del municipio y de la PTAR

La investigación se desarrolló en la planta de tratamiento de aguas residuales del municipio de São João de Iracema, localizado en la región centro oeste del estado de São Paulo (Brasil), cuya población, a partir de los resultados del censo de 2010, es del orden de 1780 habitantes [10]. Las aguas residuales del área urbana municipal son colectadas y transportadas por una red de alcantarillado sanitario hacia la PTAR, localizada en las coordenadas 20°30'25,43" S y 50°21'07,23" W, que está conformada por una laguna anaerobia y una facultativa secundaria.

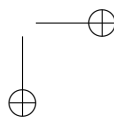
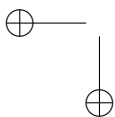
La PTAR está constituida por dos lagunas de estabilización con formato rectangular, así: una laguna anaerobia de 40 m de largo, 16,5 m (área superficial de 660 m<sup>2</sup>) y 3,36 m de profundidad máxima; una laguna facultativa secundaria de 80 m de largo, 18 m de ancho (área superficial de 1.440 m<sup>2</sup>) y profundidad máxima de 1,96 m. Para la retención de los sólidos de mayor tamaño del afluente bruto, antes del ingreso a la primera unidad, PTAR disponía de una rejilla de barrotes horizontales. Los tubos de entrada y salida del líquido de las lagunas corresponden a tubos localizados en la parte central del lado respectivo. La entrada y salida de la laguna anaerobia, así como la entrada de la laguna facultativa trabajaban en condición sumergida, la salida de esta última se realiza mediante sistema *stop log*.

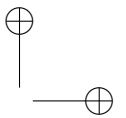
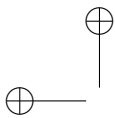
### 2.2. Aforo del caudal afluente y batimetría de las lagunas

En una experiencia previa, para efectos de conocer la variabilidad del caudal afluente a la PTAR se realizó el aforo del líquido afluente durante 24 horas consecutivas; adicionalmente se realizó un levantamiento batimétrico de las dos lagunas para así estimar la cantidad de lodo acumulado en las lagunas y el volumen útil disponible en cada unidad; las metodologías adoptadas para tal fin se encuentran descritas en [11].

### 2.3. Monitoreo del afluente bruto y efluentes de las unidades de tratamiento

Se realizó el monitoreo de las características de calidad del agua del afluente crudo (Af) –que a su vez fue el afluente a la laguna anaerobia-, del efluente de la laguna anaerobia (Ef An) y del efluente de la laguna facultativa (Ef Fac). El estudio se ejecutó por medio de tres etapas de colecta; la primera de ellas entre los meses de diciembre y febrero del primer año de monitoreo –periodo de verano lluvioso–; la segunda entre mayo y julio del segundo año, periodo de invierno seco; la última entre agosto y octubre del tercer año del estudio, periodo de primavera, incluyendo el inicio de la estación de lluvias. En la primera etapa se practicaron seis muestreos, mientras que tanto en la segunda como en la tercera etapa se realizaron siete muestreos; cada colecta consistió en la toma de muestras compuestas del líquido afluente a la PTAR y de los efluentes de las unidades de tratamiento.





La medición de los parámetros de calidad del agua se realizó siguiendo las metodologías descritas en Standard Methods for the Examination of Water and Wastewater [12], según los códigos que se describirán a continuación. Se midieron en campo, por medio de instrumentos portátiles los parámetros: pH (método electrométrico, 4500-H<sup>+</sup>B), oxígeno disuelto –OD- (membrana con electrodo, 4500-O G) y temperatura (método termo-eléctrico, 2550 B). Las muestras se dispusieron en frascos apropiados para tal fin, se almacenaron en cajas refrigeradas y se transportaron al laboratorio de Hidráulica y Saneamiento de la Universidade Estadual Paulista –UNESP–, campus de Ilha Solteira, donde se realizaron las mediciones correspondientes a los parámetros: demanda bioquímica de oxígeno –DBO– y DBO filtrada (Ensayo al 5° día, 5210 B), demanda química de oxígeno –DQO- (método de reflujó abierto, 5220 B), sólidos totales, fijos y volátiles –ST, STF, STV– (métodos gravimétricos 2540 B y 2540 E), sólidos suspendidos, fijos y volátiles –SS, SSF, SSV- (métodos gravimétricos 2540 D y 2540 E), coliformes totales y fecales –CT y CF– (técnica de diluciones en tubo múltiple, 9221).

## 2.4. Determinación del caudal crítico en el cuerpo receptor

El cuerpo de agua que recibe el efluente de la PTAR y que posteriormente vierte sus aguas en el río São José dos Dourados consiste en un arroyo que durante la época de sequía presenta un bajo flujo; por tal motivo se calculó el caudal para condiciones críticas para compararlo con el caudal medio de la planta de tratamiento y estimar de manera preliminar su capacidad de dilución. Para tal fin se calculó, con base en informaciones topográficas y fotografía satelital, el área de la microcuenca en la cual se encuentra ubicada la PTAR; con esa información y la localización del punto de vertimiento del efluente, se ingresaron los datos pertinentes a la regionalización hidrológica del estado de São Paulo, que el Departamento de Aguas y Energía Eléctrica de dicho estado ha dispuesto online [13]; y a partir de los datos históricos registrados para la cuenca del río São José dos Dourados se calculó el caudal medio mínimo durante siete días consecutivos con probabilidad de retorno de diez años.

## 2.5. Análisis de los datos

Para analizar de manera más rigurosa los datos asociados a los parámetros de calidad del agua se realizaron análisis estadísticos que permitieron identificar si hubo diferencias significativas entre los puntos monitoreados. Para ello, por medio del software Minitab R16 se ejecutaron análisis de varianza; cuando al menos uno de los tratamientos reportó diferencias estadísticamente significativas para un nivel de significancia de  $P < 0,05$  se aplicó la prueba de comparaciones múltiples de Tukey, para de esa manera determinar cuáles tratamientos fueron diferentes.

# 3. Resultados y discusiones

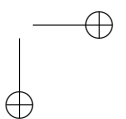
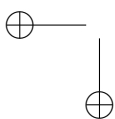
## 3.1. Variación del caudal afluente y batimetría de la PTAR

A partir del monitoreo de 24 horas del líquido afluente a la planta de tratamiento se determinó que el caudal osciló entre 0,02 y 2,54 L/s; el caudal medio calculado fue de 1,11 L/s, equivalente a 93,904 m<sup>3</sup>/d. Los valores máximos se registraron al inicio de la mañana, al medio día y al inicio de la noche.

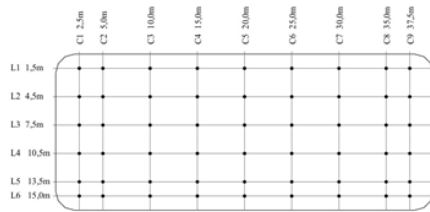
El levantamiento batimétrico indicó que las profundidades medias de las lagunas anaerobia y facultativa fueron de 2,42 y 1,67 m; por ello, sus volúmenes teóricos útiles respectivos fueron de aproximadamente 1.600 y 2.400 m<sup>3</sup>.

El volumen de lodo acumulado en la laguna anaerobia fue de 20,7 m<sup>3</sup>; que al ser restado al volumen teórico útil y considerando el caudal medio afluente representa un tiempo de retención hidráulica (TRH) útil de 16,4 días. La figura 1 ilustra una vista en planta de la disposición de los ejes longitudinales y transversales utilizados, así como ejemplos de los perfiles longitudinales obtenidos en la laguna anaerobia.

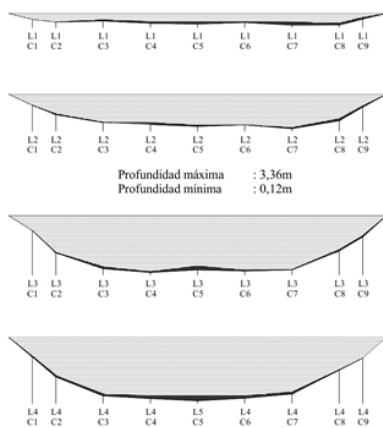
La sedimentación de los lodos se dio de manera uniforme, sin presentar zonas de acumulación críticas. El bajo volumen de lodos acumulado únicamente redujo el TRH teórico en un 1,26 %, lo que no genera alteraciones significativas en el desempeño hidráulico del sistema (como caminos de flujo preferencial o cortos circuitos); y por ende, puede considerarse que no afectó la eficiencia de la PTAR por tal concepto. El tiempo de retención útil calculado para la laguna anaerobia presentó valor muy superior a los recomendados por von Sperling [8] y por la Compañía de Saneamiento Básico del Estado de São Paulo [14], de tres a seis días para dicho tipo de lagunas.



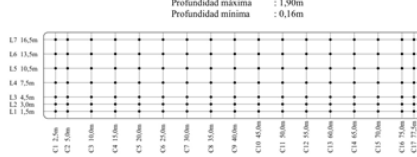
Disposición de los ejes para el levantamiento batimétrico de la laguna anaerobia



Ejemplos de perfiles longitudinales laguna anaerobia



Disposición de los ejes para el levantamiento batimétrico de la laguna facultativa



Ejemplos de perfiles longitudinales laguna facultativa

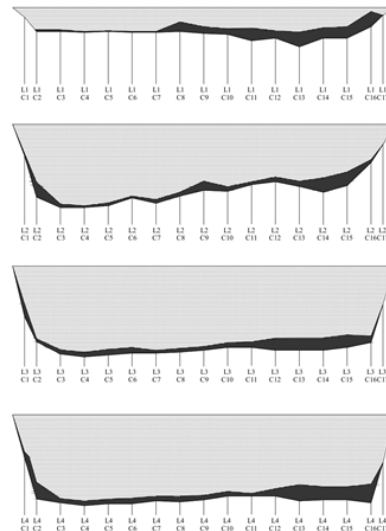


Figura 1. Vista en Planta y perfiles longitudinales y transversales de la laguna anaerobia.

Figura 2. Vista en planta y perfiles longitudinales de la laguna facultativa.

El volumen de lodo acumulado en la laguna facultativa fue de 155,52 m<sup>3</sup>, que representaría una altura media del orden de 0,108 m. Al restar el volumen de lodos al valor del volumen teórico, y al considerar el caudal medio afluente a la PTAR se determinó que el TRH útil de la unidad de tratamiento fue de 23,3 días.

En la figura 2 se ilustra la vista en planta de la laguna facultativa, la disposición de los ejes longitudinales y transversales utilizados para efectuar el levantamiento batimétrico, y algunos de los perfiles longitudinales obtenidos. En dicha figura se puede observar que la acumulación de lodos sedimentados se concentró fundamentalmente en las zonas cercanas a los puntos de ingreso del afluente (sentido de flujo de derecha a izquierda), lo que evidenció las labores de remoción de sólidos que escapan de la laguna anaerobia.

El tiempo de retención útil calculado para la laguna superó el valor mínimo de 4 días recomendado por Peña y Mara [15]; así mismo, estuvo por encima del rango de valores recomendado por von Sperling [8] 7,5 a 22,5 días para lagunas facultativas.

La mayor acumulación de lodos en la laguna facultativa, principalmente en su tercio inicial indica la remoción de sólidos que no lograron sedimentar en la laguna anaerobia; la presencia de una capa de lodos relativamente homogénea en el resto de esta unidad, puede indicar la sedimentación de parte de la biomasa que perece –principalmente algas– después de cumplir su ciclo vital.

### 3.2. Caudal crítico del arroyo

El punto de vertimiento de los efluentes de la PTAR sobre el arroyo receptor se localiza en las coordenadas 20°30'25,43" de latitud Sur y 50°30'21'07,23" de longitud Oeste. El área tributaria de la microcuenca que aportaría escurrimiento

superficial directo sobre el cuerpo receptor es del orden de  $5'666.500\text{m}^2$ , con un perímetro de 9242 metros lineales. Para tales datos, y con base en la regionalización hidrológica del estado de São Paulo se determinó que para una precipitación media de 1203,6 mm el caudal mínimo anual estimado para 7 días consecutivos y un período de retoro de 10 años ( $Q_{7,10}$ ) es de  $0,009\text{ m}^3/\text{s}$ .

### 3.3. Monitoreo de los afluentes y efluentes de las lagunas

Se presentan a continuación los resultados obtenidos para los parámetros analizados sobre muestras simples tomadas entre 9:00 y 10:00 de la mañana durante las tres fases del monitoreo de la PTAR.

#### 3.3.1. Oxígeno disuelto

Las concentraciones medias de OD registradas a lo largo del estudio fueron de  $0,1\text{ mg/L}$  tanto para el afluente crudo, como para el efluente de la laguna anaerobia, y de  $1,9\text{ mg/L}$  para el efluente de la laguna facultativa (efluente final de la PTAR). Dicha situación fue corroborada por el análisis estadístico por medio de ANOVA, que reportó diferencias estadísticamente significativas entre las concentraciones de oxígeno disuelto en los puntos de monitoreo; según la prueba de Tukey el OD del afluente bruto presentó valores semejantes a los registrados en el efluente de la laguna anaerobia y que éstos fueron diferentes a los del efluente de la laguna facultativa. Las mayores concentraciones se registraron en la primera etapa, correspondiente al periodo de lluvias, con un valor medio en el efluente de la laguna facultativa de  $6,2\text{ mg/L}$ , donde muy probablemente las precipitaciones ayudaron a incrementar la transferencia del oxígeno atmosférico a la masa líquida.

#### 3.3.2. Temperatura

El ANOVA indicó que hubo diferencias estadísticamente significativas entre las temperaturas del líquido en los tres puntos de muestreo; con la prueba de Tukey se identificaron dos grupos con comportamientos semejantes: uno determinado por la temperatura del afluente a la PTAR y el otro por las temperaturas de los efluentes de las lagunas anaerobias y de la facultativa; las temperaturas medias calculadas fueron de  $26,5^\circ\text{C}$  para el afluente crudo,  $24,1^\circ\text{C}$  para el efluente de la laguna anaerobia y  $23,4^\circ\text{C}$  en la laguna facultativa. La reducción de la temperatura se pudo deber al enfriamiento de la masa líquida contenida en las lagunas, especialmente en horas de la madrugada; por su parte, el afluente bruto mantuvo una temperatura más elevada y con menor variación debido a que los tubos del alcantarillado sanitario se encuentran enterrados en el suelo, donde la temperatura es más uniforme.

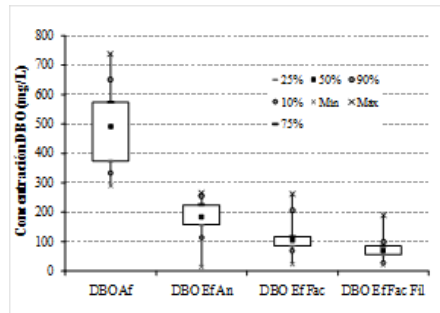
#### 3.3.3. pH

Durante las tres fases de la investigación se apreció que hubo una disminución en los valores de pH en el efluente de la unidad anaerobia (valor medio de 6,9) con respecto a su afluente (valor medio de 7,2), lo cual se podría atribuir a la fase acidogénica de la degradación anaerobia, según lo comenta Chernicharo [16]. De igual manera, se observó que el efluente de la laguna facultativa, cuyo valor medio fue de 7,5 siempre registró valores superiores a los de su afluente, lo que se explica por los intensos procesos fotosintéticos, propios de las lagunas facultativas Mara [17]. Tales situaciones fueron ratificadas por medio del análisis de varianza y la prueba de Tukey, que reportaron diferencias significativas entre los tres puntos de muestreo.

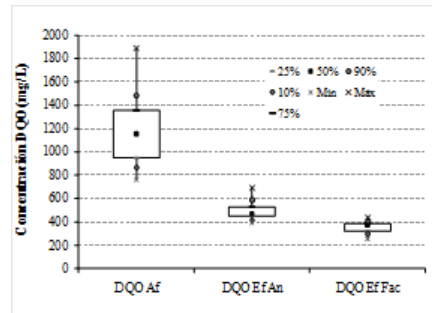
#### 3.3.4. DBO, DBO Filtrada y DQO

La DBO del afluente crudo varió entre 290 y 738  $\text{mg/L}$ , con valor medio de 496  $\text{mg/L}$ , mientras que la DQO osciló entre 764 y 1890  $\text{mg/L}$ , con promedio de 1186  $\text{mg/L}$ . Con tales valores se tiene que la relación DQO/DBO varió entre 1,27 y 4,70, con un promedio de 2,61, ligeramente superior a las relaciones típicas reportadas por Metcalf & Eddy [18], lo que sugiere que las aguas residuales domésticas reciben efluentes que afectan la biodegradabilidad de la materia orgánica al hacer que la relación DQO/DBO adquiera valores superiores a 2,5 [19]. El tipo de efluentes que pueden producir esas condiciones en el municipio estudiado es el generado en la producción casera de derivados lácteos, característica de São João de Iracema. A continuación, las figuras 3 y 4 esquematizan la variación de las concentraciones de DBO y DQO, medidas en los tres puntos de monitoreo durante todo el periodo de investigación.

El análisis estadístico por medio de ANOVA reportó que hubo diferencias estadísticamente significativas entre las concentraciones de DBO medidas en los puntos de monitoreo; por su parte, la prueba de Tukey indicó que la DBO bruta afluente a la PTAR presentó valores diferentes a los registrados en las otras unidades de tratamiento, que formaron otros dos grupos,



**Figura 3.** Diagramas de cajas y bigotes para concentraciones de DBO registradas en la PTAR.



**Figura 4.** Diagramas de cajas y bigotes para concentraciones de DQO registradas en la PTAR.

donde las concentraciones efluentes de la laguna anaerobia presentaron similitud con las del efluente de la laguna facultativa; y las DBO efluente y filtrada de esta última unidad de tratamiento también presentaron comportamiento estadísticamente semejante.

En lo que concierne a la DQO, según el ANOVA hubo diferencias significativas para las concentraciones registradas en los tres puntos de muestreo; a partir de la prueba de Tukey se observó que las diferencias se mantuvieron para todos y cada uno de dichos puntos.

Con base en la concentración media de DBO y el caudal medio afluente se estimó que la carga orgánica media aplicada a la planta fue de 47,6 kgDBO/d; a partir de dicha carga y el volumen efectivo de la laguna anaerobia se estimó que la carga volumétrica media que ingresó a la PTAR fue del orden de 0,030 kg DBO/m<sup>3</sup>/d. Tal valor es inferior a los rangos recomendados por Oakley [20], de 0,1 a 0,4 kg DBO/m<sup>3</sup>/d; tal situación pudo obedecer a un sobredimensionamiento de la unidad de tratamiento, como resultado de una sobre-estimación de la población futura del municipio de São João de Iracema. El efluente de la laguna anaerobia (afluente de la unidad facultativa) registró una concentración promedio de 181 mg/L de DBO, con variación entre 14 y 267 mg/L. Con los valores medios de DBO afluente y efluente de la laguna anaerobia se determinó que su eficiencia media de remoción fue del 63,5 %.

Al calcular la carga orgánica superficial que recibió la laguna facultativa nuevamente se utilizó el caudal medio anteriormente calculado, ya que dicho valor puede representar el efecto regulador de las variaciones de los caudales efluentes de la laguna anaerobia. La carga diaria calculada para un área superficial de 1440 m<sup>2</sup> fue de 118 kilogramos de DBO/hectárea/día (kgDBO/ha/d); mayor a las cargas de 15 a 80 kgDBO/ha/d recomendadas por USEPA [21] para poblaciones en latitudes con inviernos bastante fríos, y bastante inferior al rango entre 240 y 300 kgDBO/ha/d recomendado por von Sperling [8], para zonas con invierno caliente y alta insolación. Nuevamente, dicha situación pudo deberse al sobredimensionamiento de la laguna facultativa, resultado de una sobre-estimación de la población municipal proyectada.

La DBO en el efluente de la laguna facultativa registró valores entre 24 y 263 mg/L, con una concentración media de 115 mg/L, lo que representó una eficiencia de remoción media de 76,8 %. La eficiencia promedio final se encontró por debajo del mínimo porcentaje exigido en el Decreto 8464 de 1976 [22]; de igual manera, la concentración media superó a la máxima recomendada de 60 mg/L. Por su parte, la concentración media de la DBO filtrada fue de 73 mg/L, representando una eficiencia de remoción del 85 % de la DBO; dicha situación pone de manifiesto la necesidad de implementar un postratamiento en la PTAR con el fin de lograr remociones adicionales de materia orgánica, reducir el impacto ambiental sobre el cuerpo receptor y enmarcar el desempeño de la PTAR en lo estipulado por las directrices ambientales.

La insuficiente remoción de la materia orgánica puede explicarse principalmente por la relativamente baja biodegradabilidad del afluente; como complemento a ello podría justificarse por la baja carga orgánica volumétrica que ingresó a la laguna anaerobia, y la baja tasa de aplicación superficial que recibió la laguna facultativa. Probablemente

el dimensionamiento de la PTAR haya obedecido al análisis de un crecimiento poblacional estimado mayor al que efectivamente ha experimentado el municipio, lo que reflejaría las aparentes condiciones de sobre-dimensionamiento de la planta.

Las anteriores consideraciones cobran mayor peso al comparar el desempeño de la PTAR con el de estudios similares en otras plantas de tratamiento localizadas también en la cuenca hidrográfica del Río São José dos Dourados, tales como la PTAR de Santa Fé do Sul [23], constituida por una laguna anaerobia con baffle divisor, seguida de una laguna facultativa secundaria, y cuya eficiencia media de remoción de la DBO estuvo en torno del 89%; y la PTAR de Ilha Solteira [24], conformada por dos lagunas facultativas primarias operando en paralelo, cuya remoción media de la DBO superó ligeramente el 80%. Los afluentes a las plantas de tratamiento en mención registraron concentraciones medias de DBO y DQO menores a las medidas en São João de Iracema; adicionalmente, las correspondientes relaciones DQO/DBO indicaron valores que sugieren alta biodegradabilidad de las aguas residuales domésticas.

Al considerar el valor del  $Q_{7,10}$  junto con el caudal medio calculado durante el periodo del monitoreo, se evidencia un alto riesgo de impacto ambiental negativo sobre el cuerpo receptor, pues el bajo flujo disponible en el arroyo en los periodos secos solamente garantizaría una capacidad de dilución del orden de 8 a 1.

### 3.3.5. Sólidos totales y suspendidos

Las concentraciones medias de ST, STF y STV en el afluente crudo fueron de 1522, 573 y 949 mg/L respectivamente; en el efluente de la laguna anaerobia los valores medios fueron: 842, 438 y 404 mg/L para ST, STF y STV respectivamente; en el efluente de la laguna facultativa las concentraciones correspondientes fueron de 1045, 475 y 570 mg/L. Los valores promedio de SST, SSF y SSV del afluente crudo fueron respectivamente de 436, 112 y 324 mg/L; en el efluente de la laguna anaerobia tales valores fueron en el mismo orden: 187, 57 y 131 mg/L; dichas concentraciones en el efluente final fueron de 192, 65 y 127 mg/L respectivamente. Los resultados obtenidos representaron remociones medias de los sólidos totales del orden de 31,3% y de los sólidos suspendidos totales de 55,9%.

Los análisis por medio del ANOVA reportaron diferencias estadísticamente significativas entre las concentraciones de sólidos totales y sólidos suspendidos medidas en los puntos de monitoreo. Con las pruebas de Tukey se observó que los sólidos totales del afluente y del efluente final de la PTAR presentaron comportamientos similares, ello se explica debido a la alta productividad primaria de la última unidad de tratamiento, que se traduce en una generación de biomasa sólida; para los sólidos suspendidos, los efluentes de la laguna anaerobia y los de la laguna facultativa también presentaron similitudes.

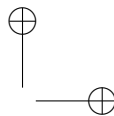
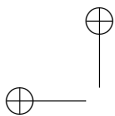
La concentración de sólidos en el efluente final es relativamente alta, probablemente debido a la elevada presencia de algas en la laguna facultativa y al tipo de dispositivo de salida de dicha unidad, conformado por un sistema *stop-log*, que capta el efluente de la parte superficial de la laguna, facilitando el arrastre de sólidos flotantes como el fitoplancton. En el efluente final podría disminuirse la migración de sólidos suspendidos por medio de dispositivos de salida sumergidos, que privilegien la salida del líquido y restrinjan el arrastre del material flotante.

### 3.3.6. Coliformes totales y fecales

El número más probable (NMP) de CT/100mL en el afluente crudo osciló entre  $4,20 \times 10^5$  y  $3,33 \times 10^8$ ; en el efluente de la laguna anaerobia entre  $4,80 \times 10^4$  y  $9,90 \times 10^8$  y en el efluente final varió desde  $8,10 \times 10^3$  hasta  $3,33 \times 10^8$ . Los valores medios del NMP en dichos puntos fueron de  $6,50 \times 10^7$ ,  $7,96 \times 10^7$  y  $5,01 \times 10^7$  CT/100 mL, respectivamente.

En el afluente crudo el NMP de CF/100mL registrado osciló entre  $1,34 \times 10^5$  y  $1,12 \times 10^8$ , con un valor promedio de  $2,13 \times 10^7$ ; en el efluente de la laguna anaerobia osciló entre  $2,80 \times 10^4$  y  $7,80 \times 10^7$ , con un valor medio de  $1,40 \times 10^7$ ; en el efluente de la laguna facultativa varió entre  $4,80 \times 10^3$  y  $6,48 \times 10^7$ , con un promedio de  $1,06 \times 10^7$ . Los resultados del ANOVA para CT y CF evidenciaron que no hubo diferencias estadísticamente significativas entre la cantidad de microorganismos medidas en los puntos de monitoreo, situación que se hace evidente como resultado del bajo desempeño de las unidades de tratamiento en la remoción o inactivación de los coliformes.

La legislación ambiental vigente para el estado de São Paulo exige que para cuerpos de agua Clase 2 –en el cual se enmarca el arroyo– el NMP de coliformes fecales sea menor a 1000 CF/100mL; como se puede observar, la can-



tividad registrada en el efluente de la laguna facultativa es excesivamente alta para la disposición final en la corriente receptora, lo que sugiere la necesidad de un tratamiento adicional al agua residual.

Las elevadas concentraciones de SS en lagunas de estabilización es un aspecto que pudo incidir en la baja eficiencia de fotoinactivación de microorganismos observada en la PTAR en cuanto a CF, tal como lo reportan Bolton et al. [25]. La permanente presencia de altas cantidades de CF en el efluente de la laguna facultativa indicó la necesidad de implementar un sistema de postratamiento del efluente final, por ejemplo, por medio de una laguna de maduración.

La baja capacidad de dilución del arroyo en condiciones críticas sugiere la contaminación del agua, el daño a la biota acuática y un riesgo para la salud humana por la eventual transmisión de enfermedades relacionadas con las excretas humanas. Mara [14] afirma que el tratamiento de las aguas residuales puede omitirse cuando la capacidad de dilución del cuerpo receptor sea superior a 500, ya que el impacto producido puede considerarse como despreciable.

Por los motivos anteriormente citados y reafirmando lo expresado en el análisis de remoción de MO, la PTAR requiere de un pos-tratamiento que reduzca de manera significativa el número de microorganismos en el efluente final; opciones para ello pueden ser la implantación de sistemas de tratamiento naturales como lagunas de maduración –que sacaría provecho de la alta insolación predominante en la región estudiada–, humedales construidos de flujo superficial o subsuperficial, o sistemas de tratamiento más sofisticados, basados en procesos físicoquímicos. Dadas las condiciones tecnológicas, económicas y sociales propias del municipio, así como la disponibilidad de área para ampliar la PTAR, cobra importancia la realización de estudios que permitan determinar la mejor opción de pos-tratamiento que al mismo tiempo garantice altas eficiencias y bajo costo de implantación, operación y mantenimiento.

## 4. Conclusiones

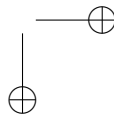
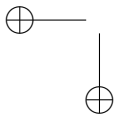
Las bajas tasas de carga orgánica aplicadas a las lagunas anaerobia y facultativa explicaron el bajo desempeño de la planta de tratamiento en términos de la remoción de la DBO.

El NMP de coliformes fecales registrado en el efluente final sobrepasó en gran medida el máximo valor permitido por la legislación federal y establece riesgos biológicos por eventual contacto humano con el líquido del cuerpo receptor, dada su baja capacidad de dilución.

La alta insolación predominante en la zona de la PTAR y las características económicas, sociales y tecnológicas de la región justifican la evaluación de opciones de pos-tratamiento naturales para enmarcar la calidad del efluente final en los requisitos establecidos por la legislación ambiental vigente.

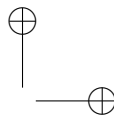
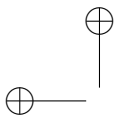
## Referencias

- [1] Brasil, Ministério da Saúde - Fundação Nacional de Saúde. Manual de Saneamento, 4. ed. Brasília: Ministério da Saúde, FUNASA, 2015.
- [2] J. Bertoni and C. Tucci, "Urbanización", in *Inundações Urbanas na América do Sul*, C. Tucci and J. Bertoni, Org. Porto Alegre: Associação Brasileira de Recursos Hídricos, 2003, pp. 1-9.
- [3] B. Gutterer, L. Sasse, T. Panzerbieter and T. Reckerzügel, *Decentralised Wastewater Treatment Systems (DE-WATS) and Sanitation in Developing Countries: A Practical Guide*. Germany: Water, Engineering and Development Centre, Loughborough University and Bremen Overseas Research and Development Association, 2009.
- [4] C. Tucci, "Aguas urbanas", in: *Inundações Urbanas na América do Sul*, C. Tucci and J. Bertoni, Org. Porto Alegre: Associação Brasileira de Recursos Hídricos, 2003, pp. 11-44.
- [5] United Nations Environment Programme and Global Environment Centre Foundation, *Water and Wastewater Reuse: An Environmentally Sound Approach for Sustainable Urban Water Management*. Osaka, Japan: UNEP-GEC, 2004.
- [6] United Nations Environment Programme (UNEP), Division of Technology, Industry and Economics (DTIE) and International Environmental Technology Centre (IETC). *Environmentally sound technologies in wastewater treatment for the implementation of the UNEP Global Programme of Action (GPA) "Guidance on municipal wastewater"*, 2000. [Online]. Available: [http://www.unep.or.jp/ietc/Publications/Freshwater/SB\\_summary/index.asp](http://www.unep.or.jp/ietc/Publications/Freshwater/SB_summary/index.asp)



- [7] E. Tilley, L. Ulrich, C. Lüthi, P. Reymond and C. Zurbrügg, *Compendium of Sanitation Systems and Technologies*. 2nd Ed. Dübendorf, Switzerland: Swiss Federal Institute of Aquatic Science and Technology (Eawag), Department Water and Sanitation in Developing Countries (Sandec), 2014.
- [8] M. von Sperling, *Lagoas de Estabilização - Princípios do Tratamento Biológico de Águas Residuárias*, v.3. 2nd Ed. Belo Horizonte: Departamento de Engenharia Sanitária e Ambiental da Universidade Federal de Minas Gerais (DESA/UFMG), 2009.
- [9] R. Oliveira, H. Pearson, J.V.N. Silva, J. Sousa, V. Leite and W. Lopes, "Baffled primary facultative ponds with inlets and outlets set at different levels treating domestic wastewater in northeast Brazil", presented at 8th IWA specialist group conference on waste stabilization ponds - 2nd Latin-American conference on waste stabilization ponds, Belo Horizonte, Brazil, 2009.
- [10] Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE, "População por município censo 2010", dez. 2015. [Online]. Available: <http://www.ibge.gov.br/home/estatistica/populacao/censo2010/resultados.dou/SP2010.pdf>.
- [11] I. Sánchez and T. Matsumoto, "Estudio de batimetría y eficiencia de un sistema de lagunas de estabilización", *Revista de ciencias agrícolas*, vol. 29, no. 1, pp. 65-78, Jan./June 2013.
- [12] American Public Health Association (APHA), American Water Works Association (AWWA) and Water Environment Federation (WEF). *Standard Methods for the Examination of Water and Wastewater*, 20 Ed. Washington, D.C.; APHA, AWWA & WPCF, 1998.
- [13] Departamento de Águas e Energia Elétrica do Estado de São Paulo DAEE, "Regionalização Hidrológica do Estado de São Paulo", fev. 2016. [Online]. Available: <http://143.107.108.83/cgi-bin/regnet.exe?lig=podfp>
- [14] Companhia de Saneamento Básico do Estado de São Paulo (SABESP), "Norma Técnica Sabesp NTS 230: Projeto de lagoas de estabilização e seu tratamento complementar para esgoto sanitário", São Paulo, Junho 2009.
- [15] M. Peña and D. Mara, *Waste Stabilisation Ponds*. The Netherlands: IRC International Water and Sanitation Centre, 2004.
- [16] C. Chernicharo, *Reactores anaerobios- Principios del Tratamiento Biológico de Aguas Residuales*, v.5. San Juan de Pasto: Editorial Universitaria, Universidad de Nariño, 2013.
- [17] D. Mara, *Domestic Wastewater Treatment in Developing Countries*. London: Earthscan Ed, 2004.
- [18] Metcalf and Eddy, *Wastewater Engineering: Treatment, Disposal and Reuse* 4th Ed. New York: Metcalf & Eddy Inc., 2003.
- [19] M. von Sperling, *Introducción a la calidad del agua y al tratamiento de aguas residuales - Principios del Tratamiento Biológico de Aguas Residuales*, v.1. San Juan de Pasto: Editorial Universitaria, Universidad de Nariño, 2012.
- [20] S. M. Oakley, *Lagoas de estabilización en Honduras: Manual de diseño, construcción, operación y mantenimiento, monitoreo y sostenibilidad*. California: United States Agency for International Development (USAID), 2005.
- [21] United States Environmental Protection Agency (USEPA), "Wastewater Technology Fact Sheet Facultative Lagoons", Municipal Technology Branch, Washington, 2002.
- [22] São Paulo, Decreto Estadual nº 8.468, de 8 de setembro de 1976. Aprova o Regulamento da Lei nº 997, de 31 de maio de 1976, que dispõe sobre a Prevenção e o Controle da Poluição do Meio Ambiente. [Online]. Available: <http://www.cetesb.sp.gov.br/Institucional/documentos/Dec8468.pdf>.
- [23] T. Matsumoto and I. Sánchez, "Desempeño de una laguna anaerobia con baffle divisor seguida de una laguna facultativa, posible afectación de la salud pública", *Revista universidad y salud*, vol. 13, no. 1, pp. 46-60, Jan./June 2011.
- [24] I. Sánchez and T. Matsumoto, "Evaluación del desempeño de la planta de tratamiento de aguas residuales urbanas de Ilha Solteira (SP) por lagunas facultativas primarias", *Revista ingeniería y desarrollo*, vol. 30, no. 2, pp. 199-222, Jul./Dec. 2012.
- [25] N. Bolton, N. Cromar, N. Buchanan and H. Fallowfield, "Variations in sunlight attenuation in waste stabilisation ponds and environmental waters", presented at 8th IWA specialist group conference on waste stabilisation ponds, Adelaide, Australia, 2011.





## Desempeño de la Planta de Tratamiento de Aguas Residuales de São João de Iracema (Brasil)

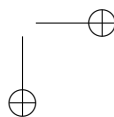
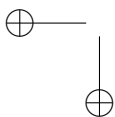
---

### **Tsunao Matsumoto.**

Brasileño, Ingeniero Civil de la Fundação Valeparaibana de Ensino (Brasil); Especialista en Technical Trainee Pollution Control del Pollution Control Center de Japón; M.Sc. y Ph.D. en Ingeniería Hidráulica y Saneamiento de la Universidade de São Paulo, USP, Brasil y Livre Docente de la Universidade Estadual Paulista (UNESP) Júlio de Mesquita Filho, Campus de Ilha Solteira, São Paulo, Brasil. Trabaja desde 1982 como Profesor del Departamento de Ingeniería Civil, Facultad de Ingeniería de la UNESP, Campus de Ilha Solteira. e-mail: [tsunao@feis.unesp.br](mailto:tsunao@feis.unesp.br)

### **Iván Andrés Sánchez Ortiz.**

Colombiano, Ingeniero Civil y Especialista en Docencia Universitaria y en Alta Gerencia de la Universidad de Nariño (Colombia); M.Sc. en Ingeniería Ambiental y Recursos Hídricos de la UNESP, Campus de Ilha Solteira, Estudiante de Doctorado en Ingeniería Civil de la Universidade Federal de Viçosa (Brasil). Trabaja desde 2003 como profesor del Departamento de Recursos Hidrobiológicos, Facultad de Ciencias Pecuarias de la Universidad de Nariño. e-mail: [iaso@udenar.edu.co](mailto:iaso@udenar.edu.co)



## Nota Editorial

### Workshop on Engineering Applications 2015: On the Road to Build a Space for Better Engineers

Applied science is an important part of the human interaction with real world, and applications of different sciences in engineering have become a key aspect of modern life. Engineering applications have different sides to be analyzed including ethics, economical, ecological, relevance, and innovation issues, specially in a world in which human survival is committed to our own capability to make a sustainable, balanced, and better world. While in the 1800's and before, human beings never had the capability to end the world, in the 1900's that possibility has been opened and evolved in different ways, all of them related to the role of engineering in applied sciences. The importance of engineering for the future of the world is undisputed, and also our future needs engineering. This way, the Workshop on Engineering Applications (WEA) was born in 2012 as an academic initiative of the IEEE Universidad Distrital Student Branch and the LAMIC (Laboratory for Automation and Computational Intelligence) of the Engineering Faculty of the Universidad Distrital Francisco José de Caldas intended to be a space for discussing recent advances in engineering applications of different theories and sciences.

In 2015, WEA re-opened the doors to different engineering and science topics including statistics, geosciences, operations research, uncertainty analysis, DSP, computational intelligence, IoT, etc., in a successful space organized by the IEEE Universidad Distrital Student Branch, the IIE Universidad Distrital Student Chapter, the Ph.D. Program on Engineering, and the Grupo Semana of the Engineering Faculty of the Universidad Distrital.

On behalf of the Program and the Organizing Committees of the 2015 Workshop on Engineering Applications - International Congress on Engineering (WEA 2015), it is our pleasure to thank all attendants and authors for coming to our congress held in Bogotá – Colombia in Oct. 28-30, 2015. In this edition, we have accepted more than 30 papers from different countries in different topics of engineering applications organized in twelve sessions, three tutorials, a panel discussion, and six remarkable plenary speakers.

As a result of a selection process of the best papers done by our PC members, based on their quality, technical contents and performance of its presentation in the congress, we present the best results of WEA 2015 materialized in this special section of the Revista Ingeniería of the Universidad Distrital Francisco José de Caldas. We hope to keep on the road of offering WEA to the academic community... See you in WEA 2016, enjoy!

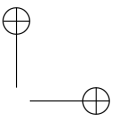
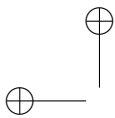
**Juan Carlos Figueroa-García, PhD.**  
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Open access



© The authors; licensee: Revista INGENIERÍA. ISSN 0121-750X, E-ISSN 2344-8393

Cite this paper as: J. Figueroa-García (2016). Workshop on Engineering Applications 2015: On the Road to Build a Space for Better Engineers. En: Ingeniería, Vol. 21, No. 2, pp. 187. En línea DOI: <http://dx.doi.org/10.14483/udistrital.jour.reveng.2016.2.ne02>



Research paper

REVISTA  
Ingeniería

## Local and Global Path Generation for Autonomous Vehicles Using Splines

*Generación Local y Global de trayectorias para Vehículos Autónomos Usando Splines*

**Randerson Lemos<sup>1</sup>, Olmer Garcia<sup>2</sup>, Janito V. Ferreira<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Autonomous Mobility Laboratory - LMA, Faculty of Mechanical Engineering UNICAMP, Campinas Brazil,

<sup>2</sup>School of Engineering, Jorge Tadeo Lozano University, Bogota, Colombia

Received: 06-11-2015. Modified: 01-03-2016. Accepted: 05-04-2016

### Abstract

**Context:** Before autonomous vehicles being a reality in daily situations, outstanding issues regarding the techniques of autonomous mobility must be solved. Hence, relevant aspects of a path planning for terrestrial vehicles are shown.

**Method:** The approached path planning technique uses splines to generate the global route. For this goal, waypoints obtained from online map services are used. With the global route parametrized in the arc-length, candidate local paths are computed and the optimal one is selected by cost functions.

**Results:** Different routes are used to show that the number and distribution of waypoints are highly correlated to a satisfactory arc-length parameterization of the global route, which is essential to the proper behavior of the path planning technique.

**Conclusions:** The cubic splines approach to the path planning problem successfully generates the global and local paths. Nevertheless, the use of raw data from the online map services showed to be unfeasible due the consistency of the data. Hence, a preprocessing stage of the raw data is proposed to guarantee the well behavior and robustness of the technique.

**Keywords:** Path planning, Spline, Arc-length, Curvilinear space.

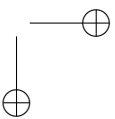
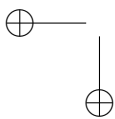
**Acknowledgements:** This work has been cofounded by CNPq and CAPES Brazil.

**Language:** English.

### Open access



© The authors; licensee: Revista INGENIERÍA. ISSN 0121-750X, E-ISSN 2344-8393. Cite this paper as: Lemos, R., Garcia, O., Ferreira, J.V: Local and Global Path Generation for Autonomous Vehicles Using Splines. INGENIERÍA, Vol. 21, Num. 2, 2016 188:200. En Inea DOI: <http://dx.doi.org/10.14483/udistrital.jour.revving.2016.2.a05>



### Resumen

**Contexto:** Antes que los vehículos autónomos sean una realidad en situaciones cotidianas temas pendientes de las técnicas de movilidad autónoma deben ser resueltos. Por eso, en este artículo es presentado una técnica de planeamiento de trayectorias para vehículos terrestres.

**Método:** La técnica de planeamiento de trayectorias utiliza splines para generar la ruta global. Para eso, se utilizan puntos obtenidos por servicios en línea de mapas digitales. Sobre esta ruta global, parametrizada por el arco de la distancia, son generadas rutas locales y seleccionada una trayectoria óptima por diferentes funciones de costo.

**Resultados:** Diferentes rutas de pruebas se utilizan para mostrar que el número y la distribución de los puntos de la ruta global están altamente correlacionados con una parametrización exitosa en el arco de la distancia de las splines, lo cual es esencial para un correcto funcionamiento de la técnica de planeamiento de trayectorias.

**Conclusiones:** El enfoque splines cúbicas al problema de planificación de trayectoria generó correctamente las trayectorias globales y locales. Sin embargo, el uso de los datos en bruto de los servicios de mapas en línea demostró ser inviable debido a inconsistencia de algunos datos. Por lo tanto, se propone una etapa de preprocesamiento de los datos en bruto para garantizar la robustez de la técnica.

**Palabras clave:** Planeamiento de Trayectorias, splines, arco de la distancia, espacio curvilíneo.

**Agradecimientos:** Este trabajo ha sido cofinanciado por las agencias de CAPES y CNPq Brasil.

## 1. Introduction

Recent technological advances have allowed the implementation of autonomous vehicles and complex driver assistance systems (ADAS) at academy and industry. Although those advances improved the safety and robustness of the autonomous vehicles and systems, there are still several problems, mainly related with safety and liability, far to be completely solved.

The cognition aspects of a mobile vehicle is intrinsic related to its mobility capabilities, which are studied by the robotics navigation field ([13]). The navigation field organizes its techniques into two groups, which are planning and reacting. The techniques from the planning group are known as global path planning and are concerned with the generation of the global route that guides the vehicle toward a goal position. The techniques from the reacting group are known as local path planning and are concerned with the generation of several local paths that allow the vehicle to avoid obstacles ([3], [6]–[8], [18]).

The design of the autonomous vehicles of the Autonomous Mobility Laboratory (LMA) from the Mechanical Engineering Faculty at Unicamp is developed on a FIAT-PUNTO platform called *Veículo Inteligente do LMA*<sup>1</sup> (VILMA). The architecture of VILMA follows the model described by [13], i. e., it has the blocks of perception, planning and control. The VILMA's architecture is shown in figure 1 and, in gray color, it stands out the planning block tackle on this paper. We remark that this is an extended version of a short paper recently published in the Workshop on Engineering Applications - WEA2015 - that was held in Bogota, September 2015 ([4]).

<sup>1</sup>English translation: LMA's Smart Vehicle

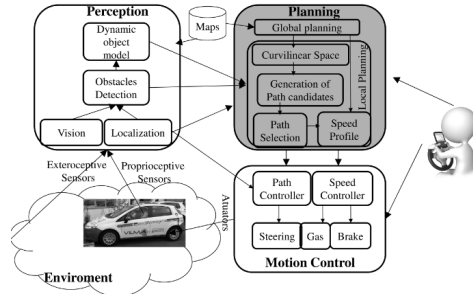


Figure 1. Architecture of the autonomous vehicle

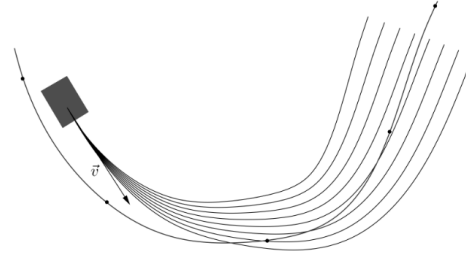


Figure 2. Global route and candidate paths

This paper is organized into three sections. The first section exposes the path planning algorithm for terrestrial vehicles adopted by LMA, the second section explains the techniques employed for the generation of the global route from off-the-shelf software and the solutions adopted to solve problems with the arc length parameterization of the curve of the global route, and the third section presents conclusions.

## 2. Planning algorithm

The main goal of the implemented algorithm is to generate smooth paths free of obstacles, that start from an initial position and extend themselves oriented by the global route in direction of a goal position. Figure 2 shows an example of a global route and a set of candidate paths.

The technique presented [3] is didactically divided into four stages, which are: construction, localization, generation and selection.

### 2.1. Construction

The construction stage, which belongs to the global planning, is responsible to construct the curve of the global route. This curve extends itself over the center of the road from an initial position until a target one. The curve of the global route is parameterized in the arc length distance  $s$  and it is constructed by cubic splines from the waypoints of the road. The parameterization process is divided into two stages, which are: the parameterization of the curve of the global route with respect to any parameter; and its reparameterization to the arc length distance  $s$ . For convenience, the parameter used in the parameterization of the curve of the global route is the cumulative distance between the waypoints  $d$ .

#### 2.1.1. Parametrization of the curve of the global route with respect to the cumulative distance between the waypoints

Since the cumulative arc length distance  $s$  is an information not available in the existing databases, parameterized curves with respect to the arc length  $(x(s), y(s))$  can not be obtained by spline interpolation of the waypoints of the road at the first moment. In the literature there are several

approaches that propose solutions for this problem ([10], [16], [11]).

The strategy adopted to handle the arc length parameterization problem was parameterize the curve of the global route with respect to the cumulative distance  $d$  between the waypoints and after reparameterize it to the arc length distance  $s$ . Figure 3 shows, in red, the cumulative distance parameter  $d$ , from which  $d_n = \sum_{i=1}^n d_i$ .

The equations of the curve of the global route parameterized with respect to the cumulative distance between the waypoints  $d$  are:

$$\begin{aligned} x_i(d) &= m_{x,i}(d-d_i)^3 + n_{x,i}(d-d_i)^2 + o_{x,i}(d-d_i) + p_{x,i} \\ y_i(d) &= m_{y,i}(d-d_i)^3 + n_{y,i}(d-d_i)^2 + o_{y,i}(d-d_i) + p_{y,i}, \end{aligned} \tag{1}$$

where  $x_i(d)$  and  $y_i(d)$  are the Cartesian coordinates of the curve of the global route parameterized with respect to the cumulative distance  $d$ , and  $m, n, o, p$  are the coefficients of the cubic spline obtained by spline interpolation.

The global route curve parameterized with respect to the cumulative distance  $d$  is illustrated by the blue line in figure 3. This curve was constructed by spline interpolation using the Cartesian position  $(x, y)$  and cumulative distance  $d$  associated to each waypoint.

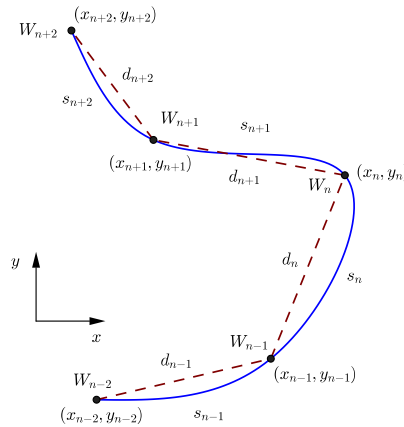


Figure 3. Global route in blue, cumulative distance parameters  $d$  in red and arc length parameter  $s$

### 2.1.2. Global route curve reparameterization with respect to the arc length distance

Constructed the curve of the global route parameterized with respect to the cumulative distance  $d$ , it is performed its reparameterization to the arc length distance  $s$ . To perform the reparameterization it is necessary a function that maps from the space of the cumulative distance  $d$  to the space of the

arc length distance  $s$ . This function is obtained by the integration below <sup>2</sup> ([2]).

$$s(t) = \int_0^d \dot{s}(t) dt = \int_0^d \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt, \quad (2)$$

where  $\dot{s}$  is the derivative of the arc length distance in terms of the parameter  $t$ , and  $\frac{dx}{dt}$  and  $\frac{dy}{dt}$  are the geometric decomposition of  $\dot{s}$  in the  $x$  and  $y$  directions.

Using the function present above it is possible to obtain for each cumulative distance  $d_i$  the associated arc length distance  $s_i$ . The table I shows an example of the process of the arc length obtainment.

**Table I.** Example of arc length obtainment process

waypoints	parameter $d$	arc length $s$
$W_1$	0	0
$W_2$	$d_1$	$s_1$
$W_3$	$d_2$	$s_2$
...	...	...
$W_n$	$d_{n-1}$	$s_{n-1}$

With the waypoints and their associated arc length distance  $s$  another cubic spline interpolation is performed to obtain the curve of the global route parameterized in the arc length  $s$ . The dataset organization is presented in table II, in which one spline interpolation is performed upon the  $x$  dataset to generate  $x(s)$  and another is performed upon the  $y$  dataset to generate  $y(s)$ .

**Table II.** Example of arc length obtainment process

waypoints	$x$ dataset	$y$ dataset
$(x_1, y_1)$	$(0, x_1)$	$(0, y_1)$
$(x_2, y_2)$	$(s_1, x_2)$	$(s_1, y_2)$
$(x_3, y_3)$	$(s_2, x_3)$	$(s_2, y_3)$
...	...	...
$(x_n, y_n)$	$(s_{n-1}, x_n)$	$(s_{n-1}, y_n)$

In the example presented for the parameterization of the curve of the global route with respect to the arc length  $s$ , it was used the original waypoints - the ones used in the construction of the curve of the global route parameterized with respect to  $d$  - and their arc lengths  $s$ . However, since the equations of the curve of the global route parameterized with respect to  $d$ ,  $(x(d), y(d))$ , are known, it is possible to obtain the arc length of any cumulative distance  $d$  and then perform the arc length parameterization for any set of cumulative distances. For example, one global route curve constructed with 100 waypoints can be reparameterized to the arc length with 200 waypoints or with any quantity that is judge adequate. A discussion about the reparameterization resolution is performed in Global Route section. The final equations of the global route arc length parameterized

<sup>2</sup>For clarity and to avoid misunderstood the letter  $d$  was replaced by the letter  $t$  in the representation of the cumulative distance in equation 2

is shown below.

$$\begin{aligned} x_i(s) &= m_{x,i}(s - s_i)^3 + n_{x,i}(s - s_i)^2 + o_{x,i}(s - s_i) + p_{x,i} \\ y_i(s) &= m_{y,i}(s - s_i)^3 + n_{y,i}(s - s_i)^2 + o_{y,i}(s - s_i) + p_{y,i}, \end{aligned} \quad (3)$$

where  $x_i(s)$  and  $y_i(s)$  are the Cartesian coordinates of the curve of the global route parameterized with respect to the arc length distance  $s$ , and  $m$ ,  $n$ ,  $o$ ,  $p$  are the coefficients of the cubic spline obtained by spline interpolation.

## 2.2. Localization

Dedicated to localize the vehicle with respect to the curve of the global route, the localization stage computes the distance traveled  $s_c$  by the vehicle and its lateral offset  $q_c$ . The parameters  $s_c$  and  $q_c$  are illustrated in Figure 4.

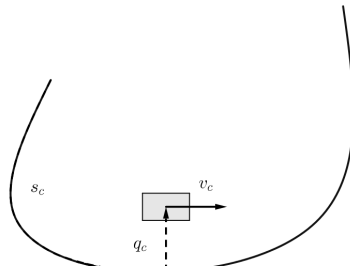


Figure 4. Vehicle localization

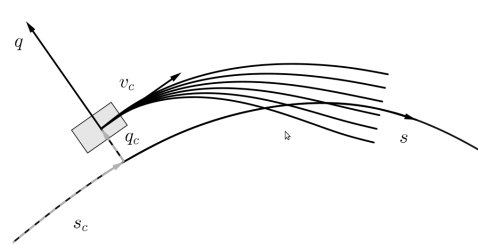


Figure 5. Curvilinear coordinate system, global route and candidates paths represented in the Cartesian coordinate system

To calculate the values of the parameters  $s_c$  and  $q_c$  it is performed the following minimization:

$$\begin{aligned} &\underset{s}{\text{minimize}} \quad \sqrt{(x_c - x(s))^2 + (y_c - y(s))^2} \\ &\text{subject to} \quad 0 \leq s \leq s_f, \end{aligned} \quad (4)$$

where the parameters  $x_c$  and  $y_c$  are the position of the car in Cartesian coordinates, and the parameters  $x(s)$  and  $y(s)$  are a point on the curve of the global route in Cartesian coordinates. From the minimization it is determined the arc length  $s$  of the closest point on the curve of the global route to the vehicle and with it the parameters  $s_c$  and  $q_c$  are calculated ([17]).

## 2.3. Generation

Constructed the curve of the global route parameterized with respect to the arc length  $s$  and localized the vehicle, it is performed the generation of the candidate paths. The candidate paths generation is executed in real-time and it is known as local planning. The candidate paths are initially generated in a curvilinear coordinate system defined by the parameters  $s_c$  and  $q_c$  and subsequently mapped to the Cartesian coordinate system of the global route. The curvilinear coordinate system  $s0q$  and a set of candidates paths represented in the Cartesian coordinate system are shown in Figure 5.



### 2.3.1. Path candidates generation in the curvilinear coordinate system

The set of equations used to generate the candidates paths in the curvilinear coordinate system are shown below:

$$\begin{aligned} q(s) &= \begin{cases} a\Delta s^3 + b\Delta s^2 + c\Delta s + d & s_i \leq s < s_f \\ q_f & s_f \leq s \end{cases} \\ \frac{dq}{ds}(s) &= \begin{cases} 3a\Delta s^2 + 2b\Delta s + c & s_i \leq s < s_f \\ 0 & s_f \leq s \end{cases} \\ \frac{d^2q}{ds^2}(s) &= \begin{cases} 6a\Delta s + 2b & s_i \leq s < s_f \\ 0 & s_f \leq s, \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

with  $\Delta s = s - s_i$ ,

where function  $q(s)$  models the lateral offset  $q$  of the candidate paths with a cubic polynomial that is function of the arc-length distance  $s$ . The parameters  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , and  $d$  are the coefficients of the cubic polynomial. This equation is designed to provide smooth candidates paths. The boundary conditions necessary to determine the coefficients  $a$ ,  $b$ ,  $c$  and  $d$  are shown below:

$$\begin{aligned} q(s_i = s_c) &= q_c & \frac{dq}{ds}(s_i = s_c) &= \tan \theta_c \\ q(s_f) &= q_f & \frac{dq}{ds}(s_f) &= \tan \theta_f = \tan(0) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

The angle  $\theta_c$  is defined as the difference between the vehicle orientation and the global route curve orientation at the position specified by the arc length  $s_i = s_c$ , ([12], [15]).

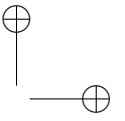
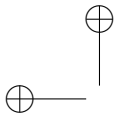
### 2.3.2. Mapping the candidate paths from the curvilinear coordinate system to the Cartesian coordinate system

The mapping approach is divided into two stages. Firstly, it is determined the curvature  $k$  of each candidate path in the Cartesian coordinate system. Subsequently, with the information of the curvature  $k$  and the equations of the vehicle model, the position of the candidates paths in the Cartesian system of the curve of the global route is computed. The curvature  $k$  of the candidates paths in the Cartesian system of the curve of the global route is determined by the equations below ([1], [18]).

$$k = \frac{S}{Q} \left( k_b + \frac{(1 - qk_b) \frac{d^2q}{ds^2} + k_b \frac{dq^2}{ds}}{Q^2} \right) ; \quad S = \operatorname{sgn}(1 - qk_b) \quad Q = \sqrt{\left( \frac{dq}{ds} \right)^2 + (1 - qk_b)^2}, \quad (7)$$

where the parameter  $k_b^3$  is the curvature of the curve of the global route, and  $q$  is the lateral offset of the candidate path. Both parameter are functions of the arc length distance  $s$ .

<sup>3</sup>The curvature of the curve of the the global route is easily obtained by  $\frac{x_b' y_b'' - x_b'' y_b'}{(x_b'^2 + y_b'^2)^{\frac{3}{2}}}$ .



With the curvatures  $k$  of the candidate paths and using the differential equations of the bicycle model ([1], [14]), it is possible to determine the positions of the candidate paths in the Cartesian coordinate system of the curve of the global route. The integration of the differential equations bellow provides the positions of the candidate paths in the Cartesian system of the curve of the global route ([3]).

$$\frac{dx}{ds} = Q \cos \theta \quad \frac{dy}{ds} = Q \sin \theta \quad \frac{d\theta}{ds} = Qk. \quad (8)$$

## 2.4. Selection

From the set of candidate paths one is selected to be followed by the autonomous vehicle. The candidate path selected is the one that minimizes the linear combination of the three cost functions show bellow. Theses equations attempt to represent the intrinsic and extrinsic safety of the vehicle when following a candidate path.

$$J[i] = w_s C_s[i] + w_k C_k[i] + w_c C_c[i]. \quad (9)$$

The cost function  $J[i]$  holds the final cost assigned to the  $i$ th candidate path. This cost is result of the linear combination of the three cost functions  $C_s[i]$ ,  $C_k[i]$ , and  $C_c[i]$ . Each of the three cost functions attempt to quantify the safety of the  $i$ th candidate path according specific criteria. The parameters  $w_s$ ,  $w_k$ , and  $w_c$  are the weights given to the values of the cost functions in the linear combination. These values are design parameters and must me tuned according project necessities.

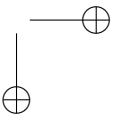
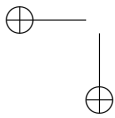
The cost function  $C_s[i]$  is responsible to quantify the safety of the candidate paths. It verifies each candidate path to check each ones are free of obstacle collision and each ones are not. For the candidate paths that are free collision, the safety cost function  $C_s[i]$  assigned to each of them a value related to how near or how far theses paths are from the obstacles. To compute the safety cost of the candidate paths it is used a discrete Gaussian convolution shown bellow ([3]):

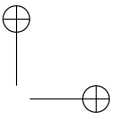
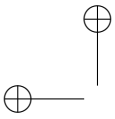
$$C_s[i] = \sum_{k=0}^N c[k] g[i-k] \quad ; \quad g[i] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(\Delta q \cdot i)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (10)$$

where  $C_s[i]$  is the safety cost of the  $i$ th candidate path,  $N$  is the number of candidate paths,  $c[k]$  is the collision detection of the  $k$ th candidate path,  $g[i]$  is a Gaussian with mean zero and standard deviation of the risk of collision  $\sigma$ , and  $\Delta q$  is the resolution of the lateral offset of the candidate paths. The collision detection parameter  $c[k]$  is one for collision paths and zero otherwise. The standard deviation  $\sigma$  is a design parameter and it will determine the effective range of the collision detection for each path.

The cost function  $C_k[i]$  is responsible to quantify the smoothness of the candidate paths. It assigns high values to paths that suddenly change their direction and low values otherwise. The equation used to compute the cost associated to the smoothness of the paths are shown bellow ([3]):

$$C_k[i] = \int k_i^2(s) ds_p = \int k_i^2(s) Q(s) ds, \quad (11)$$





where  $s_p$  is arc length along the path,  $s$  is the arc length of the base frame,  $k_i$  is the curvature of a path  $i$ th.

The cost function  $C_c[i]$  is responsible to quantify the consistency of the candidate paths. It evaluates how different the current generated candidate paths are from the previous candidate path generated/selected and it assigns high values to candidate paths that are significantly different from the previous one. The equation used to compute the cost associate to the consistency of the candidate paths are show bellow ([3]):

$$C_c[i] = \frac{1}{s_2 - s_1} \int_{s_1}^{s_2} l_i ds, \quad (12)$$

where  $l_i$  is the Euclidean distance between a point in the  $i$ th candidate path and a point in the selected candidate path of the previous step with the same arc length of the base frame. With the linearly combination of these three cost function one candidate path is selected to be followed by the vehicle.

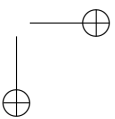
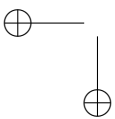
### 3. Results

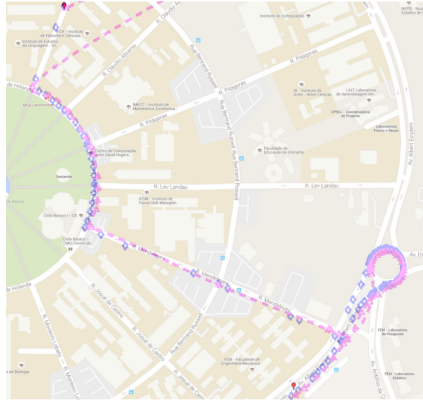
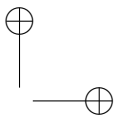
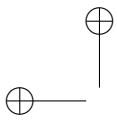
For the proper performance of the technique presented by [3] it is essential to obtain a curve of the global route that is both representative of the real route and properly parameterized with respect to the arc length distance  $s$ . The construction of a representative curve of the global route from cubic splines is strongly correlated with the number and the distribution of the waypoints used. Likewise, an appropriate reparameterization to the arc-length distance of the curve of the global route is also strongly related with the number and distribution of the points used in the process, which does not need to be the same number of the waypoints used in the construction stage.

#### 3.1. Construction of the Curve of the Global Route

In a market scenario of autonomous vehicles commercialization to the general public, it is coherent to assume that the waypoints utilized in the construction of the curve of the global route will be obtained from off-the-shelf platforms that will integrate maps and route planning systems, as Google Maps ([5]) and Open Street Maps ([9]) do. Unfortunately, the current characteristics of the waypoints provided by those platforms do not allow their direct usage in the construction of the curve of the global route, making necessary a processing stage. The processing stage seeks to eliminate too close waypoints that will contribute to the generation of splines segments with high curvature and to add new waypoints in regions that lack of them, because in these regions the cubics splines will unwanted distance themselves from the real route. The processing stage analyses the euclidean distance between the waypoints, removing or adding waypoints according to the design criterion of maximum and minimum distance. A set of waypoints obtained from the platforms cited are shown in Figure 6.

In Figure 6, the blue markers represent the waypoints obtained from Google Maps and the magenta markers represent the one obtained from Open Street Maps. The dashed line represents the curve of the global route constructed from the Open Street Maps waypoints. In Figure 7, in black were represented the original waypoints provided by Open Street Maps and the associated curve of



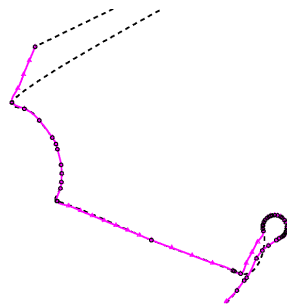


**Figure 6.** In magenta original waypoints provided by Open Street Maps and in blue waypoints provided by Google Maps. Global route curve constructed with Open Street Maps original waypoints in dashed line

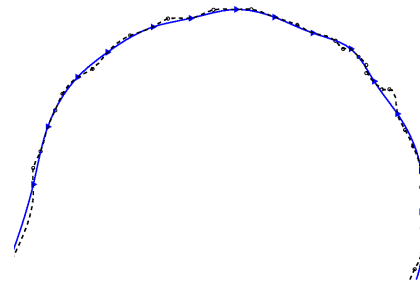
the global route constructed and in magenta were represented the processed waypoints and associated curve. In Figure 8, it is illustrated in details the first roundabout of the real route. In black, the original waypoints provided by Google Maps and associated curve of the global route constructed and in blue the waypoints processed and associate curve.

From Figures 7 and 8 it is observed a significant improvement in the curve of the global route constructed with the processed waypoints, magenta and blue colors, when compared to the ones constructed with the original set of waypoints provided, black colors. The new waypoints added to the original set of waypoints provided by Open Street Maps allowed the construction of a representative curve of the global route of the real route, Figure 7. The remotion of some waypoints from the original set provided by Google Maps allowed the construction of a smoother curve in the roundabout, Figure 8.

construction of a representative curve of the global route of the real route, Figure 7. The remotion of some waypoints from the original set provided by Google Maps allowed the construction of a smoother curve in the roundabout, Figure 8.



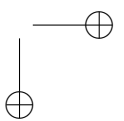
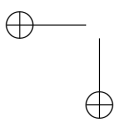
**Figure 7.** In black, original waypoints provided by Open Street Maps and associated global route curve constructed, and, in magenta, processed waypoints and associated global route curve constructed



**Figure 8.** In black, original waypoints provided by Google Maps and associated global route curve constructed, and, in blue, processed waypoints and associated global route curve constructed

### 3.2. Arc length distance reparameterization problem

Once constructed a representative curve of the global route of the real route, the reparameterization to the arc length distance  $s$  is performed. An adequate reparameterization, as well as the representative construction discussed above, is essential to the well performance of the technique discussed by [3] because its equating was developed considering a curve of the global route parameterized in the arc length distance  $s$ . To analyze the reparameterization quality it will be used the first derivative of the curve of the global route, known as unit velocity or Frnet tangent vector. The equation 13 shows

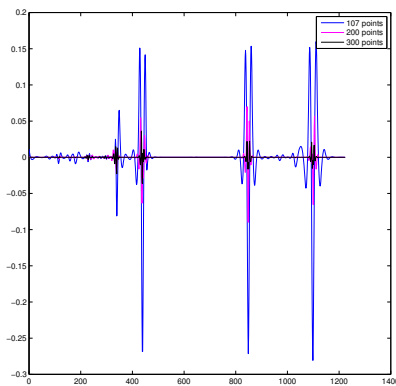


the unit velocity vector.

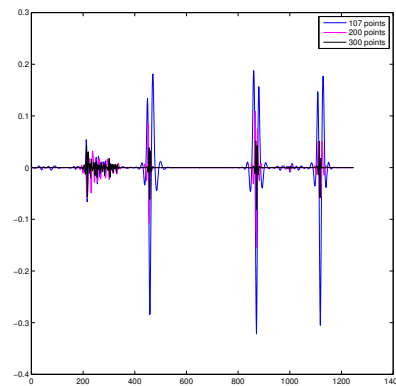
$$\vec{T}(s) = \left( \frac{dx_b(s)}{ds}, \frac{dy_b(s)}{ds} \right) \quad (13)$$

For a perfect arc length parameterized curve the norm of the vector  $\vec{T}$  is always unitary, distancing itself from the unit value according to the reparameterization quality. The following graphics show the results of the norm of the vector  $\vec{T}$  subtracted by one as function of the arc length distance  $s$ .

Figure 9 shows the values of the norm of the vector  $\vec{T}$  subtracted by one of three different reparameterizations performed upon a curve of a global route constructed by the waypoints from Open Street Maps. The blue curve represents the reparameterization quality performed with the 107 processed waypoints. In magenta, the quality of the reparameterization performed with 200 points upon the curve of the global route constructed and in blue the quality of the reparameterization performed with 300 points.



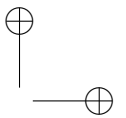
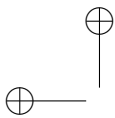
**Figure 9.** The norm of the vector  $\vec{T}$  subtracted by one as function of the arc length distance  $s$  of the global route curve constructed with the waypoints provided by Open Street Maps



**Figure 10.** The norm of the vector  $\vec{T}$  subtracted by one as function of the arc length distance  $s$  of the global route curve constructed with the waypoints provided by Google Maps

Figure 10 shows the values of the unity velocity vector norm subtracted by one of three different reparameterization performed upon the curve of the global route constructed by Google Maps waypoints. In blue, the behavior of the norm of the vector  $\vec{T}$  subtracted by one of the performed reparameterization using the google's processed waypoints. In magenta, the quality of the reparameterization performed with 200 points on the curve of the global route constructed and in blue the quality of the reparameterization performed with 300 points.

From the graphics above, it is possible to note a significant approximation of the values of the norm of the vector  $\vec{T}$  subtracted by one to the number zero, which is the expected result for a perfect parameterized curve, as the number of points used in the reparameterization increase. These



approximation indicates that the reparameterization quality was improved.

From the results shown in Figures 9 and 10 it is clear the necessity of find a good trade off between the arc length reparameterization quality sought and the number of waypoints used to do it. If, for one side, a curve of the global route badly arc length parameterized is an instability source, decreasing the robustness of the local path planning presented by ([3]), for other side, the use of high waypoints number can overload the communications between planning algorithm and the *real time* control system process.

## 4. Conclusions

By the presented in this article, it is possible to conclude that is necessary a prior processing of the original waypoints provided by the on-line maps and route planning Open Street Maps and Google Maps in order to achieve a representative curve of the global route and to perform a satisfactory reparameterization to the arc length  $s$  of the constructed curve. The prior processing stage consists in adding, removing and redistributing the original waypoints. In specific to the arc length  $s$  reparameterization process, it was shown that perform it with the same waypoints used in the construction stage of the global route curve is likely an inappropriate approach because it generates a curve of the global route badly arc length parameterized. This condition makes necessary an engineering study to reach a good balance between the points utilized in the reparameterization process and the necessary quality of the arc length  $s$  parameterized global route curve. It is worth noting that a global route curve badly parameterized in the arc length  $s$  will inevitably lead the presented technique or any other based in arc length parameterized curves to a potentially dangerous failure. The arc length  $s$  parameterization quality problem can be softened by reducing the size of the paths' lengths, which will lead to smaller integration steps and, consequently, smaller errors.

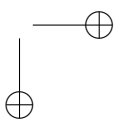
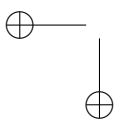
The presented technique has two main interesting features. First, it works in the arc length space  $s$  instead the time space  $t$ , which allows the generation of the candidate paths without the profile velocity. Second, it works in the curvilinear coordinate system instead of the Cartesian system, which allows generate the candidates paths with simple cubic polynomials, what would just be possible in the Cartesian system with more complex equation.

## Acknowledgment

This work has been cofounded by CNPq and CAPES. Garcia O. was sponsored by a Scholarship PEC/PG CAPES/CNPq-Brazil.

## References

- [1] Tim D Barfoot and Christopher M Clark. Motion planning for formations of mobile robots. *Robotics and Autonomous Systems*, 46(2):65–78, 2004.
- [2] Ilía Nikolaevich Bronshtein, Konstantin A Semendyayev, Gerhard Musiol, and Heiner Muehlig. *Handbook of mathematics*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [3] Keonyup Chu, Minchae Lee, and Myoungcho Sunwoo. Local path planning for off-road autonomous driving with avoidance of static obstacles. *Intelligent Transportation Systems, IEEE Transactions on*, 13(4):1599–1616, 2012.



- [4] Randerson Araujo de Lemos, Olmer Garcia, and Janito Vaqueiro Ferreira. Local and global path generation for autonomous vehicles using splines. In *Engineering Applications-International Congress on Engineering (WEA), 2015 Workshop on*, pages 1–6. IEEE, 2015.
- [5] GoogleMaps. Google company. <https://www.google.com.br/maps/@-22.8195851,-47.0631774,15z>, 2015.
- [6] Thomas M Howard and Alonzo Kelly. Optimal rough terrain trajectory generation for wheeled mobile robots. *The International Journal of Robotics Research*, 26(2):141–166, 2007.
- [7] Unghui Lee, Sangyol Yoon, HyunChul Shim, P. Vasseur, and C. Démonceaux. Local path planning in a complex environment for self-driving car. In *Cyber Technology in Automation, Control, and Intelligent Systems (CYBER), 2014 IEEE 4th Annual International Conference on*, pages 445–450, June 2014.
- [8] Xiaohui Li, Zhenping Sun, Qi Zhu, and Daxue Liu. A unified approach to local trajectory planning and control for autonomous driving along a reference path. In *Mechatronics and Automation (ICMA), 2014 IEEE International Conference on*, pages 1716–1721, Aug 2014.
- [9] OpenStreetMap. The free wiki world map. <http://www.openstreetmap.org>, 2015.
- [10] John W Peterson. Arc length parameterization of spline curves. *Journal of Computer Aided Design*, 2006.
- [11] Richard J Sharpe and Richard W Thorne. Numerical method for extracting an arc length parameterization from parametric curves. *Computer-aided design*, 14(2):79–81, 1982.
- [12] Bruno Siciliano, Lorenzo Sciacivco, Luigi Villani, and Giuseppe Oriolo. *Robotics: modelling, planning and control*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [13] Roland Siegwart, Illah R Nourbakhsh, and Davide Scaramuzza. *Introduction to autonomous mobile robots*. The MIT Press, second edition, February 2011.
- [14] Jarrod M Snider. Automatic steering methods for autonomous automobile path tracking. *Robotics Institute, Pittsburgh, PA, Tech. Rep. CMU-RITR-09-08*, 2009.
- [15] Mark W Spong, Seth Hutchinson, and Mathukumalli Vidyasagar. *Robot modeling and control*, volume 3. Wiley New York, 2006.
- [16] Hongling Wang, Joseph Kearney, and Kendall Atkinson. Arc-length parameterized spline curves for real-time simulation. In *Proceedings of the 5th international conference on Curves and Surfaces*, 2002.
- [17] Hongling Wang, Joseph Kearney, and Kendall Atkinson. Robust and efficient computation of the closest point on a spline curve. In *Proceedings of the 5th International Conference on Curves and Surfaces*, pages 397–406, 2002.
- [18] Werling, J. Ziegler, S. Kammel, and S. Thrun. Optimal trajectory generation for dynamic street scenarios in a frenét frame. In *Robotics and Automation (ICRA), 2010 IEEE International Conference on*, pages 987–993, 2010.

---

### Randerson Lemos

Master student of mechanical engineering at the Mechanical Engineering Faculty of the Campinas State University - Brazil. His main interests are: path planning, motion planning and autonomous vehicles. **e-mail: [randerson.lemos@gmail.com](mailto:randerson.lemos@gmail.com)**

---

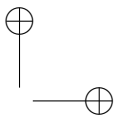
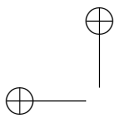
### Olmer Garcia

He is associate professor at the school of Engineering of the Jorge Tadeo Lozano University in Colombia. He obtained his degree on Mechatronics Engineering in 2005 at Universidad Militar Nueva Granada - Colombia, a Master degree on Electronics Engineering in 2010 at the Universidad de los Andes - Bogota, Colombia, and he obtain his doctor degree on mechanical engineering at the Campinas State University - Brazil in 2016. **e-mail: [olmer.garciab@utadeo.edu.co](mailto:olmer.garciab@utadeo.edu.co)**

---

### Janito Vaqueiro Ferreira

He is assistant professor at the Mechanical Engineering Faculty of the Campinas State University - Brazil. He obtained his bachelor degree on Mechanical Engineering in 1983 and his Master degree on Mechanical Engineering in 1989 at the same university. He obtained his doctor degree in Dynamics in 1998 at Imperial College Of Science Technology Medicine, IC, England. His main interests are: autonomous vehicles, combustion engine motors, dynamics control and vibrations. **e-mail: [janito@fem.unicamp.br](mailto:janito@fem.unicamp.br)**



Research paper

## A Compressive System Matrix Design in Spectral Imaging by a Homogenization Algorithm

*Diseño de la Matriz de un Sistema Compresivo en Imágenes Espectrales por Medio de un Algoritmo de Homogeneización*

Camilo Noriega<sup>1</sup>, Yuri Mejía<sup>1</sup>, Henry Arguello<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidad Industrial de Santander.  
Correspondence email: henarfu@uis.edu.co

Received: 07-11-2015. Modified: 08-04-2016. Accepted: 22-04-2016.

### Abstract

**Context:** Compressive spectral imaging systems (CSI) use a focal plane array (FPA) to measure two-dimensional (2D) coded projections of a three-dimensional (3D) spatio-spectral scene. A reconstruction algorithm based on compressive sensing theory exploits the projections to retrieve the underlying 3D scene. Compressive sensing relies on two principles: Sparsity and incoherence. Higher incoherence drives to better-reconstructed image quality. In CSI systems, a random design of the coded apertures elements guarantees a high incoherence between the sensing matrix and the representation basis. However, when a coded aperture is designed completely random, it is possible that some voxels not be sensed at all or they be sensed more than once.

**Method:** This paper presents a random algorithm for a colored coded apertures design by homogenizing defined parameters of the colored coded aperture snapshot spectral imaging system (C-CASSI) representative matrix. Homogenization parameters guarantee that all voxels are sensed at least once. The homogenization is achieved by weighting the selected parameters of the matrix, in this case, the average of unblocking elements per column and the average of unblocking elements per row.

**Results/Conclusions:** Simulations show a higher performance in the PSNR of the reconstructed images by using the proposed approach, as compared to traditional random coded apertures.

**Keywords:** Colored coded apertures, C-CASSI, spectral images, random algorithms.

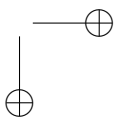
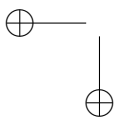
**Acknowledgements:** The authors gratefully acknowledge the Vicerrectoría de Investigación y Extensión of the Universidad Industrial de Santander for supporting this research registered under the project title: Diseño y simulación de una arquitectura de tomografía computarizada para el sensado compresivo de imágenes de Rayos X, (VIE 1803 code).

**Language:** English.

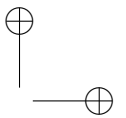
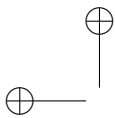
### Open access



© The authors; licensee: Revista INGENIERÍA. ISSN 0121-750X, E-ISSN 2344-8393  
Cite this paper as: Noriega, C., Mejía, Y. y Arguello, H. (2016). A Compressive System Matrix Design in Spectral Imaging by a Homogenization Algorithm. En: Ingeniería, Vol. 21, No. 2, pp. 201:213.  
En línea DOI: <http://dx.doi.org/10.14483/udistrital.jour.reveng.2016.2.a06>







### Resumen

**Contexto:** Los sistemas de muestreo compresivo de imágenes espectrales (CSI, por su sigla en inglés) cuentan con una matriz de plano focal (FPA) para medir proyecciones codificadas bidimensionales (2D) de una escena espacio-espectral de tres dimensiones. Un algoritmo de reconstrucción basado en la teoría de muestreo compresivo aprovecha las proyecciones para recuperar la escena 3D. La teoría de muestreo compresivo se basa en dos principios: dispersión e incoherencia. Un alto grado de incoherencia conduce a mayor calidad en las reconstrucciones. En los sistemas CSI, un diseño aleatorio de las aperturas codificadas asegura una alta incoherencia entre la matriz de muestreo y la base de representación dispersa. Sin embargo, si un código de apertura se diseña completamente aleatorio es probable que algunos voxeles no sean muestreados en absoluto, o, por el contrario, que la información sea muestreada redundantemente.

**Método:** Este artículo presenta un algoritmo aleatorio para el diseño de las aperturas codificadas de color por medio de la homogeneización de los parámetros de la matriz representativa del sistema de muestreo de imágenes espectrales basado en aperturas codificadas de color (C-CASSI, por su sigla en inglés). Los parámetros de homogeneización garantizan que todos los voxeles sean muestreados al menos una vez. La homogeneización se logra mediante la ponderación de algunos parámetros de la matriz representativa, en este caso, el promedio de elementos de paso por columnas y por filas.

**Resultados/Conclusiones:** Las simulaciones muestran que usando el método propuesto se obtiene una mejora en la calidad en términos de PSNR con las imágenes reconstruidas en comparación con las aperturas aleatorias tradicionales. Palabras clave: Aperturas codificadas de color, C-CASSI, imágenes espectrales, algoritmos aleatorios.

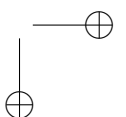
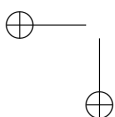
**Agradecimientos:** Los autores agradecen a la Vicerrectoría de Investigación y Extensión de la Universidad Industrial de Santander por apoyar esta investigación registrada bajo el título del proyecto: Diseño y simulación de una arquitectura de tomografía computarizada para el sensado compresivo de imágenes de Rayos X, (Código VIE 1803).

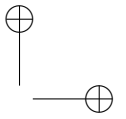
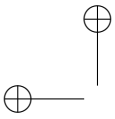
## 1. Introduction

Imaging spectroscopy requires sensing the spectral signatures of a scene. A spectral image is represented as a three-dimensional (3D) array called data cube (2D-spatial x 1D-spectral). Constructing the spectral data cube using traditional imaging spectroscopy has the disadvantage of scanning a number of zones that grows linearly in proportion to the desired spatial or spectral resolution. In contrast, compressive spectral imaging systems (CSI) capture the 3D spatio-spectral information of a scene by measuring 2D coded projections on a focal plane array (FPA). The amount of information required in CSI is much lower than in the linear scanning case [1], [2] Finally, an algorithm based on  $l_1 - l_2$  norms reconstructs the data cube [3].

Some CSI systems apply the compressive sensing theory (CS) for reconstructing the data cube. CS relies on two principles: Sparsity and incoherence. Sparsity indicates that spectral images found in nature can be concisely represented in some basis  $\Psi$  with just a small number of coefficients. Incoherence refers to the structure of the sampling waveforms used in CS that have a dense representation in the basis  $\Psi$  [4], [5]. Randomness can be an effective sensing mechanism inasmuch as random matrices are widely incoherent with any fixed basis  $\Psi$ . Higher incoherence drives to better-reconstructed image quality [3].

The colored coded aperture snapshot spectral imager (C-CASSI) is one example of CSI sensor



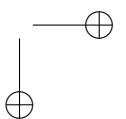
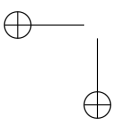


with two main components, a colored coded aperture and a dispersive element [2], [6]. The projections measured in C-CASSI are given by  $\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{f}$  where  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{N \cdot N \cdot L}$  is the vector representation of a hyperspectral signal  $\mathcal{F} \in \mathbb{R}^{N \times N \times L}$  with  $L$  and  $N \times N$  representing the spectral and spatial resolution, respectively, and  $H$  is a  $N \cdot (N + L - 1) \times (N \cdot N \cdot L)$  matrix where the colored coded aperture entries and the dispersive element determine its structure;  $\mathbf{H}$  is the C-CASSI representative system matrix.

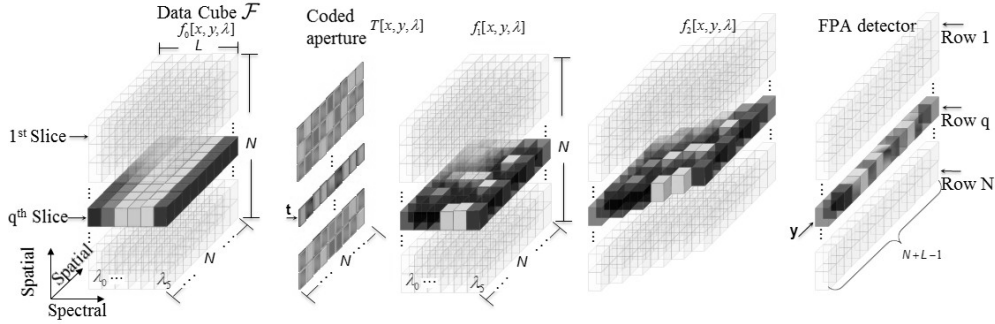
The traditional CASSI systems use completely random blocking-unblocking coded apertures. The traditional approaches may cause multiple or null sensing of a voxel information. In traditional CASSI, the blocking-unblocking coded aperture elements are fabricated with opaque or transparent materials, modulating the light from the scene spatially [6], [7]. Microlithography and coating advances allow constructing multi-patterned arrays of optical filters. These filter arrays have been recently used as colored coded apertures in applications such as multi-focusing, depth estimation [8], deblurring, and matting [9]. The colored coded apertures module the scene spatially and spectrally. The spectral modulation over each detector pixel consists of the pass off some wavelengths. A random colored coded aperture reaches better-reconstructed image quality than a traditional blocking-unblocking coded aperture [2].

Previous works have based their research on the direct design of colored coded apertures based on a hard understanding optimization problem which requires high computation processing, then it is necessary the use of genetic algorithms [2], [10], [11]. However, there are not studies that design the apertures through the representative system matrix  $\mathbf{H}$ . This work develops a random algorithm that designs  $\mathbf{H}$ , and then constructs a set of colored coded apertures using a simpler algorithm than the algorithms in the literature. First, the proposed algorithm homogenizes  $\mathbf{H}$  such that all columns have the same sum, i.e. the standard deviation of the average of unblocking elements per column is zero. Second, the algorithm distributes the unblocking elements per row, reducing the standard deviation of the average of unblocking elements per row, after the homogenization of the unblocking elements in columns. With this aim, the algorithm creates a set of auxiliary matrices  $\mathbf{W}^i$  with the information of  $\mathbf{H}$  that directly affects the total sum of a column and the sum of a row on the  $i^{th}$  iteration, this construction is detailed later in this paper. Then  $\mathbf{W}^i$  is first homogenized by columns and then by rows. Finally, the information taken in  $\mathbf{H}$  is replaced by the new one in  $\mathbf{W}^i$ . This design guarantees that all voxels are sensed equally. Simulations show the improvement attained by the proposed approach regarding reconstruction peak signal-to-noise ratio (PSNR). We remark that this is an extended version of a short paper recently published in the Workshop on Engineering Applications -WEA2015- that was held in Bogotá, September 2015 [12].

This article is organized as follows: Section 2 explains the C-CASSI architecture and the disadvantages of the traditional coded apertures. In section 3, the algorithm that designs the representative system matrix ( $\mathbf{H}$ ) is introduced. Simulations and results are presented in section 4. Finally, conclusions are drawn in section 5.



## 2. Colored Coded Apertures in C-CASSI



**Figure 1.** Physical phenomenon of a data cube  $f_0[x, y, \lambda]$  in a C-CASSI system is presented. The  $q^{th}$  slice of the data cube is coded by a  $t$  row of the colored coded aperture  $T[x, y, \lambda]$ . The coded field is presented as  $f_1[x, y, \lambda]$ . The  $f_1$  field is dispersed by the prism and shown as field  $f_2[x, y, \lambda]$ . The FPA detector captures the intensity  $y$  by integrating the coded light (source [2])

The physical sensing phenomenon in the C-CASSI system for  $L = 6$  spectral bands is depicted in Figure 1 where a colored coded aperture replaces the traditional blocking-unblocking mask, and the optical elements are represented by their effect on the discretized data cube [6], [7]. Each pixel of the colored coded aperture has a band-pass filter. The physical sensing phenomenon is described as follows: the discrete data cube  $f_0[x, y, \lambda]$ , where  $[x, y]$  are the spatial coordinates and  $\lambda$  is the wavelength, is coded spatially and spectrally by the colored coded aperture  $T[x, y, \lambda]$  resulting in the coded field  $f_1[x, y, \lambda]$ . The coded field is spectrally dispersed by a dispersive element before it impinges on the focal plane array as  $f_2[x, y, \lambda]$ . Briefly, every spectral slice of where the data cube is spatially and spectrally modulated by the coded aperture and dispersed by the dispersive element [6], [7]. The integration of the field  $f_2[x, y, \lambda]$  over the spectral range sensitivity of the detector realizes the compressive measurements across the FPA.  $f_0[x, y, \lambda]$  can be written in index form as  $\mathcal{F}_{i,j,l}$  where  $i$  and  $j$  are the spatial coordinates, and  $l$  determines the  $l^{th}$  spectral plane. Let  $T^k[x, y, \lambda]$  be the  $k^{th}$  coded aperture used in the  $k^{th}$  measurement. The indexation of  $T^k[x, y, \lambda]$  is  $T^k_{i,j,l} \in \{0, 1\}$ , where 0 represents the blocking elements and 1 the unblocking elements. The colored coded aperture is a tridimensional matrix whereas the traditional blocking-unblocking coded aperture is a two-dimensional matrix. The indexed  $k^{th}$  FPA measurement also called shot, can be expressed as

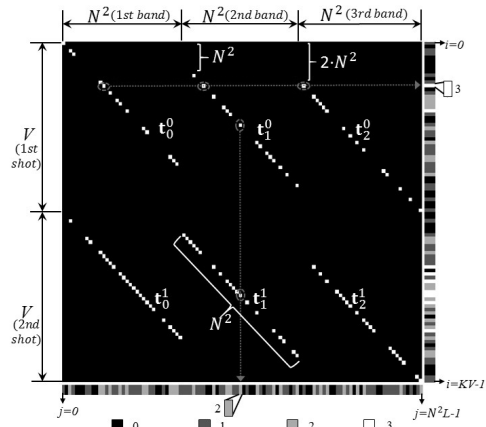
$$Y_{i,j}^k = \sum_{l=0}^{L-1} \mathcal{F}_{i,(j-l),l} T^k_{i,(i-l),l} + \omega_{i,j}, \quad (1)$$

where  $Y_{i,j}^k$  is the intensity at the  $(i, j)^{th}$  position of the detector in the  $k^{th}$  measurement whose dimension is  $N \times (N + L - 1)$ .  $\mathcal{F}$  is a  $N \times N \times L$  spectral data cube and  $\omega_{i,j}$  is the white noise of the sensing system. It is possible to rewrite Equation 1 in matrix notation as  $\mathbf{y}^k = \mathbf{H}^k \mathbf{f} + \boldsymbol{\omega}$ , and its expansion as

$$\mathbf{y}^k = \begin{bmatrix} \text{diag}(\mathbf{t}_0^k) & \mathbf{0}_{N \cdot (1) \times N^2} & \dots & \mathbf{0}_{N \cdot (l) \times N^2} & \dots & \mathbf{0}_{N \cdot (L-1) \times N^2} \\ & \text{diag}(\mathbf{t}_1^k) & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \text{diag}(\mathbf{t}_l^k) & & \\ & & & & \ddots & \\ \mathbf{0}_{N \cdot (L-1) \times N^2} & \mathbf{0}_{N \cdot (L-2) \times N^2} & \dots & \mathbf{0}_{N \cdot (L-l-1) \times N^2} & \dots & \text{diag}(\mathbf{t}_{L-1}^k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_0 \\ \mathbf{f}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_l \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{L-1} \end{bmatrix} + \omega \quad (2)$$

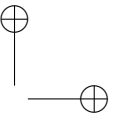
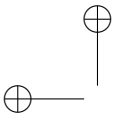
where  $\mathbf{y}^k$  is a  $V$ -long vector representation of  $Y_{i,j}^k$  with  $V = N \cdot (N + L - 1)$ .  $\mathbf{t}_l^k$  is the vectorization of the 3D colored coded aperture  $T_{i,j,l}^k$  at the 2D  $l^{th}$  spectral plane through the lexicographical order as  $(\mathbf{t}_l^k)_j = T_{(j-r \cdot N),r,l}^k$ , for  $j = 0, \dots, N^2 - 1$  and  $r = \lfloor \frac{j}{N} \rfloor$ .  $\text{diag}(\mathbf{t}_l^k)$  is an  $N^2 \times N^2$  diagonal matrix whose entries are the  $\mathbf{t}_l^k$  vectors.  $\mathbf{f}$  is a vector representation of the data cube as  $\mathbf{f} = \text{vec}([\mathbf{f}_0, \dots, \mathbf{f}_{L-1}])$ .  $\mathbf{f}_l$  is the vectorization of the  $l^{th}$  spectral band.  $\mathbf{f}_l$  and  $\mathbf{y}^k$  are also ordered lexicographically [2].

The set of  $K$  shots is then assembled as  $\mathbf{y} = [(y^0)^T, \dots, (y^{K-1})^T]^T$ , where  $T$  represents the transpose matrix. The projections in C-CASSI can be alternatively expressed as  $\mathbf{y} = \mathbf{H}\Psi\theta = \mathbf{A}\theta$  where the matrix  $\mathbf{A} = \mathbf{H}\Psi$  is the sensing matrix and  $\theta$  is an  $S$ -sparse representation of  $\mathbf{f}$  on the basis  $\Psi$ . The underlying data cube is reconstructed as  $\hat{f} = \Psi(\text{argmin} \|y - H\Psi\theta\|_2 + \tau \|\theta\|_1)$  where  $\tau$  is a regularization constant and  $\mathbf{H} = [(\mathbf{H}^0)^T, \dots, (\mathbf{H}^{K-1})^T]^T$  [11].



**Figure 2.** A particular  $\mathbf{H}$  matrix is showed where  $K = 2$ ,  $N = 6$  and  $L = 3$ . White squares represent ones (unblocking light element). Right bar represents the sum of the unblocking elements per row. Bottom bar represents the sum of the unblocking elements per column. Lower squares presents color convention for the bars.

The colored coded apertures lead to a richer structure of the matrices  $\mathbf{H}^k$  inasmuch as their entries are less correlated. Figure 2 shows a random colored coded aperture-based  $\mathbf{H}$  matrix for  $K = 2$ ,  $N = 6$  and  $L = 3$ . Ones (unblocking elements) are shown as white squares elements. Each row represents the coded aperture modulation effect and the prism dispersion on every spectral band of the data cube. Columns represent the times a particular voxel on a specific band is sensed. The right bar is a gray-scale indicator of the unblocking elements on every row. For this particular case, the bar has four different values, black, dark gray, light gray and white, meaning zero, one, two and three unblocking elements in such row respectively. For instance, Figure 2 depicts the case where a row has three unblocking elements. Bottom bar symbolizes the sum of the unblocking elements per column, having the same color convention as the right bar. The figure highlights the case where there are two unblocking elements in a column.



As will be shown later in this paper, the main contribution is to homogenize the unblocking elements in  $\mathbf{H}$  i.e. to reduce the standard deviation to zero of the average of unblocking elements per column by adding or erasing unblocking elements in  $\mathbf{H}$  if it is necessary, guaranteeing that all voxels be sensed equally. Then, minimize the standard deviation of the average of unblocking elements per row but without adding or erasing more unblocking elements.

### 3. Proposed Algorithm for Homogenization of Representative System Matrix

It is possible to construct the coded aperture set from the system measurement  $\mathbf{H}$  matrix. In this work a design of the set of colored coded apertures through the homogenization of the  $\mathbf{H}$  matrix is presented for data cubes with dimensions  $N \times N \times L$  and  $N > L$ . Homogenization is based on two statistical parameters of  $\mathbf{H}$ , the average of unblocking elements per column ( $M_y$ ) and the average of unblocking elements per row ( $M_x$ ).

#### 3.1. Column and Row Homogenization of $\mathbf{H}$

Let  $c = [c_0, \dots, c_{L \cdot N^2 - 1}]$  be a vector such that

$$c_j = \sum_{i=0}^{K \cdot V - 1} H_{i,j}, \quad (3)$$

where  $j = 0, \dots, L \cdot N^2 - 1$  and  $H_{i,j}$  is the  $\mathbf{H}$  element of the  $i^{th}$  row and  $j^{th}$  column with  $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{K \cdot V \times N^2 \cdot L}$ . Let the average of unblocking elements per column be defined as

$$M_y = \frac{\sum_{j=0}^{L \cdot N^2 - 1} (c_j)}{L \cdot N^2} \quad (4)$$

$M_y$  is the average of times a particular voxel on a specific band is sensed through the  $K$  shots. It will be required that all the voxel be sensed equally.

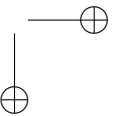
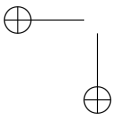
Like the columns, the average of unblocking elements per row follows the same structure. Let  $\mathbf{d} = [d_0, \dots, d_{K \cdot V - 1}]$  be a vector such that

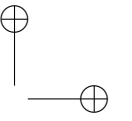
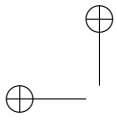
$$d_i = \sum_{j=0}^{L \cdot N^2 - 1} H_{i,j}, \quad (5)$$

where  $i = 0, \dots, K \cdot V - 1$ . Let the average of unblocking elements per row be defined as

$$M_x = \frac{\sum_{i=0}^{K \cdot V - 1} (d_i)}{K \cdot V} \quad (6)$$

However, since  $\mathbf{H}$  structure allows at most  $K$  unblocking elements per row and  $L$  per column,  $M_y$  and  $M_x$  are not independent, in fact, they are related as





$$M_x = \frac{M_y \cdot L}{K} \quad (7)$$

The homogenization of the representative C-CASSI system matrix is solved with the proposed random algorithm which receives as parameters the  $\mathbf{H}$  matrix, the number of shots  $K$  and a user-defined amount of unblocking elements per column  $M'_y$ . Hence, the algorithm achieves that  $c_j = M'_y$  for all  $j$ , where  $j = 0, \dots, L \cdot N^2 - 1$ . As a consequence  $M_y = M'_y$ . Then, the standard deviation of the average unblocking elements in columns is

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{1}{L \cdot N^2} \sum_{j=0}^{L \cdot N^2 - 1} (c_j - M_y)^2} = 0 \quad (8)$$

The prism effect is modeled in  $\mathbf{H}$  by the shifting of the diagonals on each band; this helps to differentiate three zones in the  $\mathbf{H}$  matrix. The zones are defined according to the first shot. The  $V$  rows are partitioned into the three zones as follows: since  $0$  to  $N \cdot (L - 1) - 1$ , since  $N \cdot (L - 1)$  to  $N^2 - 1$  and since  $N^2$  to  $V - 1$  for the first, second and third zone respectively. Figure 3 depicts the three zones. Taking into account the zones of  $\mathbf{H}$ , the problem is reduced to homogenize auxiliary matrices  $\mathbf{W}^i$  that vary in size with at most  $K \times L$  dimension and  $i = 0, \dots, V - 1$  instead of  $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{K \cdot V \times N^2 \cdot L}$ . Every zone is related to a case in the main algorithm because the zones determine dimension and elements of the  $\mathbf{W}^i$  matrices; the main algorithm makes  $V$  iterations, and on each iteration the algorithm constructs  $\mathbf{W}^i$  as follows:

- Case 1: for  $0 \leq i \leq N \cdot (L - 1)$

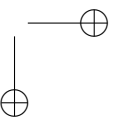
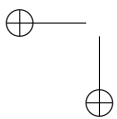
$$\mathbf{W}^i = \begin{bmatrix} (t_0^0)_i & (t_1^0)_{i-N} & \dots & (t_{s_i}^0)_{i-s_i \cdot N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (t_0^{k-1})_i & (t_1^{k-1})_{i-N} & \dots & (t_{s_i}^{k-1})_{i-s_i \cdot N} \end{bmatrix} \quad (9)$$

- Case 2: for  $N \cdot (L - 1) \leq i \leq N^2$

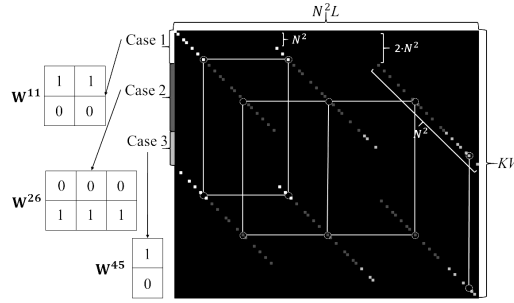
$$\mathbf{W}^i = \begin{bmatrix} (t_0^0)_i & (t_1^0)_{i-N} & \dots & (t_{L-1}^0)_{i-(L-1) \cdot N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (t_0^{k-1})_i & (t_1^{k-1})_{i-N} & \dots & (t_{L-1}^{k-1})_{i-(L-1) \cdot N} \end{bmatrix} \quad (10)$$

- Case 3: for  $N^2 \leq i \leq V$

$$\mathbf{W}^i = \begin{bmatrix} (t_{g_i}^0)_{i-g_i \cdot N} & (t_{g_i+1}^0)_{i-(g_i+1) \cdot N} & \dots & (t_{L-1}^0)_{i-(L-1) \cdot N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (t_{g_i}^{k-1})_{i-g_i \cdot N} & (t_{g_i+1}^{k-1})_{i-(g_i+1) \cdot N} & \dots & (t_{L-1}^{k-1})_{i-(L-1) \cdot N} \end{bmatrix} \quad (11)$$



where  $s_i = \lfloor i/N \rfloor$ ,  $s_i \in \{0, \dots, L-1\}$  and  $g_i = s_i - N + 1$ . If  $i - s_i < 0$  or  $i - (g_i + k) \cdot N < 0$ , with  $k = 0, \dots, L-1$ , then such column does not exist in  $\mathbf{W}^i$ , i.e. the matrix  $\mathbf{W}^i$  has a variable width depending on the  $i^{th}$  row, getting at maximum  $L$  columns.



**Figure 3.**  $\mathbf{H}$  matrix with  $K = 2$ ,  $N = 6$  and  $L = 3$ . The zones where each case takes place are illustrated, also three  $\mathbf{W}^i$  matrices are presented. Each zone represents a different case.  $\mathbf{W}^i$  is constructed taking  $diag(t_k^i)$  elements that are in same column and row of  $\mathbf{H}$ .

Figure 3 shows where each case takes place. The  $\mathbf{H}$  matrix presented in Figure 3 is another example for  $K = 2$ ,  $N = 6$  and  $L = 3$ . Visually a  $\mathbf{W}^i$  matrix is constructed taking  $diag(t_k^i)$  elements that are in same column and row of  $\mathbf{H}$  according to the case. In particular Figure 3 presents the matrices for  $i = 11$  (case 1), 26 (case 2) and 45 (case 3), where it depicts how the row length of  $\mathbf{W}^i$  changes in cases 1 and 3, but in case 2 it is constant having  $L$  columns. The number of rows is always  $K$ .

The main algorithm constructs the  $\mathbf{W}^i$  matrices from  $\mathbf{H}$  and sends them to the Algorithm 1 *WHomogenization*, which will be the algorithm that makes the homogenization of  $\mathbf{W}^i$ . Then, *WHomogenization* receives as parameters  $\mathbf{W}^i$ , the number of shots  $K$  and the amount of unblocking elements per column  $M'_y$ . It uses the relation in the Equation 7 to find  $M_x$  in rows of  $\mathbf{W}^i$  once it has homogenized the columns. Nevertheless Equation 7 outputs a rational number not always integer, for this reason, to reduce the standard deviation of the average of unblocking elements per row on every  $\mathbf{W}^i$  matrix the algorithm recalculates  $M_x$  as

$$M_x = \frac{M'_y \cdot Y}{K} \quad (12)$$

where  $Y$  is the number of the columns of  $\mathbf{W}^i$ . Then, to guarantee the average does not change as it has been calculated in Equation 7 it is necessary that some rows have an extra unblocking element. The number of rows that will have the extra element is calculated as:

$$P_x = M'_y \cdot Y - M_x \cdot K \quad (13)$$

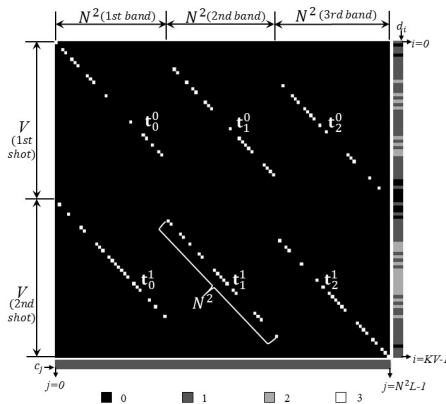
The Algorithm 1 has these considerations into account.

The procedure of Algorithm 1 is as follows: If  $S$  is negative, the function *SetRandOnesCol* randomly changes  $|S|$  blocking elements for unblocking elements. On the contrary, if  $S$  is positive the function *SetRandOnesCol* randomly removes  $S$  unblocking elements turning them into blocking until there are  $M'_y$  unblocking elements on the  $j^{th}$  column. The function *zeros* creates a vector of zeros, and the function *SetRandOnesColRow* randomly selects an unblocking element on the  $i^{th}$  row and turns it into a blocking element, then relocates that unblocking element randomly on the same column only being restricted by the rows where  $S > 0$ .

---

**Algorithm 1** Whomogenization  
**Input:**  $W, M'_y, K$   
**Output:**  $W$   
 $Y \leftarrow \text{columnsize}(W)$   
**for**  $j = 0$  **to**  $Y - 1$  **do**  
     $m \leftarrow \sum_{i=0}^{K-1} W_{i,j}$   
     $S \leftarrow M'_y - m$   
     $W \leftarrow \text{setRandOnesCol}(W, j, S)$   
**end for**  
 $M_x \leftarrow \left\lfloor \frac{M'_y \cdot Y}{K} \right\rfloor$   
 $P_x \leftarrow M'_y \cdot Y - M_x \cdot K$   
 $\mathbf{r} \leftarrow \text{zeros}(K)$   
 $\mathbf{r} \leftarrow \text{setRandOnesCol}(\mathbf{r}, 1, P_x)$   
**for**  $i = 0$  **to**  $K - 1$  **do**  
     $m \leftarrow \sum_{j=0}^{Y-1} W_{i,j}$   
     $S \leftarrow M_x + \mathbf{r}(i) - m$   
    **if**  $S < 0$  **then**  
        **for**  $k = 1$  **to**  $|S|$  **do**  
             $W \leftarrow \text{setRandOnesCol}(W, i, M_x, \mathbf{r})$   
        **end for**  
    **end if**  
**end for**

---



**Figure 4.** Homogenized matrix  $\mathbf{H}$  based on the matrix  $\mathbf{H}$  of Figure 2 with  $M'_y = 1$  using Algorithm 1. The uniform dark gray color in the bottom bar indicates that  $\mathbf{H}$  has been homogenized with just one unblocking element per column.

The Algorithm 1 returns a  $\mathbf{W}^i$  matrix with  $i = 0, \dots, V - 1$  where all its columns have the same number of unblocking elements and where the amount of unblocking element per row only differs between them with at best  $\pm 1$ . Finally, the homogenized  $\mathbf{W}^i$  is reinserted in  $\mathbf{H}$  by the main algorithm.

Figure 4 shows the homogenization of the  $\mathbf{H}$  matrix in Figure 2 using Algorithm 1 with  $M_y = 1$ . Indeed, the uniform dark gray color in bottom bar indicates that  $\mathbf{H}$  has been homogenized with one unblocking element per column. This way the homogenized  $\mathbf{H}$  matrix has  $\sigma_c = 0$ .



## 4. Simulations and Results

### 4.1. Experimental Design

To verify the C-CASSI colored coded aperture designs, a set of compressive measurements is simulated using the model in Equation 1. These measurements are constructed employing a test spectral data cube acquired by a monochromator using wavelength steps of 1 nm, a bandpass filter (transmission window 450-670nm), and a CCD camera AVT Marlin F033B, pixel pitch of  $9.9\mu\text{m}$ , and 14 bits pixel depth. The resulting test data  $\mathcal{F}$  has  $256 \times 256$  pixels of spatial resolution and  $L = 16$  spectral bands in the range 461nm to 596nm.

Given the designed colored coded apertures, the compressive sensing GPSR (Gradient Projection for Sparse Re-construction) algorithm is used to recover the data cube [13]. The basis representation  $\Psi$  is set as the Kronecker product of two bases  $\Psi = \mathbf{V} \otimes \Psi^{2D}$ , where  $\mathbf{V}$  is the 1D-DCT basis and  $\Psi^{2D}$  is the 2D-Wavelet Symmlet 8 basis.

The Algorithm 1 is used to homogenize the representative system  $\mathbf{H}$  matrix with  $M'_y = 1$ . The designed colored coded aperture sets, derived from the homogenized  $\mathbf{H}$  matrix, are used in capturing the C-CASSI compressive measurements and in the corresponding image reconstruction. The performance of the designed apertures set is compared with a random colored coded apertures set that has the same transmittance as the designed and with a 50% transmittance blocking-unblocking coded apertures set, where the percentage of ones and zeros of the coded aperture is determined by the transmittance [14].

### 4.2. General Results

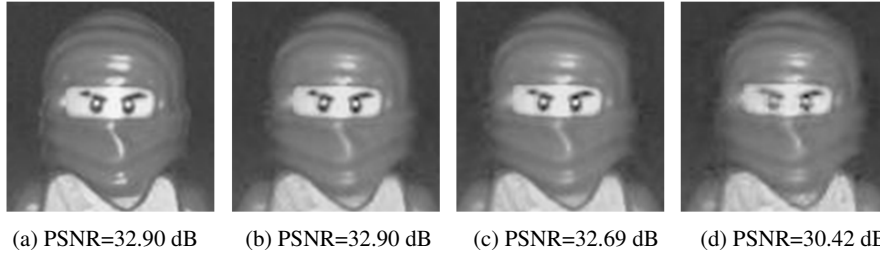
Three different sets of experiments were done. The sets of tests were: consistency in reconstructions related to the homogenization algorithm, noise in the measurements and the sparsity effect of the scene. The noise added to the measurements was Gaussian with zero mean. Assuming  $\mu_y$  as the average value of the measurement  $\mathbf{y}$  and  $\sigma_{noise}$  as the standard deviation of the noise signal, the Signal to Noise Ratio (SNR) is giving by  $\text{SNR} = 10 \log_{10}(\mu_y / \sigma_{noise})$ . The sparsity ratios are calculated as  $S/N^2L$  where  $S$  is the number of non-zero elements of the underlying data cubes. The reconstructions quality of the three different coded apertures sets are compared for 3, 4, 8, and 12 shots (K) with SNR values of 5dB, 10dB, and 40dB and using the data cube with 5%, 10% 30% and 100% as the sparsity levels. The quality of reconstructions of simulated experiments is compared using the peak-signal-to-noise ratio (PSNR) [15].

#### 4.2.1. Consistency in reconstructions

Table I. PSNR of the reconstruction in dB

Number of shots	3	4	8	12
Blocking-Unblocking <b>mean (std)</b>	29.09 (0.07)	30.44(0.03)	33.35(0.04)	35.67(0.014)
Random Colored <b>mean (std)</b>	31.86(0.03)	32.70(0.01)	34.31(0.02)	35.03(0.01)
Homogenized <b>mean (std)</b>	31.72(0.04)	32.90(0.02)	35.27(0.01)	38.14(0.01)

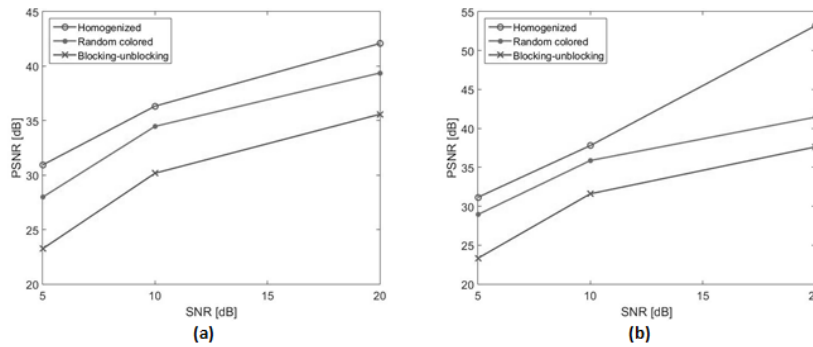
The table I indicates the mean PSNR of the reconstructed images and their standard deviation, in parenthesis, having a direct variation with the mean value



**Figure 5.** Comparison between original zoomed data cube and its zoomed reconstructions by taking 4 shots. (a) Original data cube. Reconstructions by (b) Homogenized aperture, (c) Random Colored coded aperture with same transmittance as homogenized aperture, (d) Blocking-Unblocking coded aperture.

Different homogenized coded apertures are generated by the Athgorithm 1 because it uses stochastic methods. The consistency in reconstruction was evaluating the standard deviation of the reconstruction quality produced by the different apertures. Table I presents the summary of ten experiments that were performed by the filter ensembles: blocking-unblocking filter, random colored filter, and homogenized filter, for 3, 4, 8 and 12 shots, with 100% of sparsity level and with SNR of 0dB. Table I indicates the mean PSNR of the reconstructed images and their standard deviation having a direct variation with the mean value. The PSNR values obtained with the homogenized coded apertures are higher than those achieved with the random colored coded apertures. The blocking-unblocking coded apertures obtained the lowest values of PSNR. The reconstructions of original data cubes zoomed versions, as it would be viewed by a Stingray F-033C CCD Color Camera, are depicted in Figure 5. Figure 5b shows the zoomed reconstructions of the data cube by taking four shots using the designed colored coded aperture set, Figure 5c using the random colored coded aperture set and Figure 5d using Blocking-Unblocking coded aperture set.

#### 4.2.2. Noise in measurements

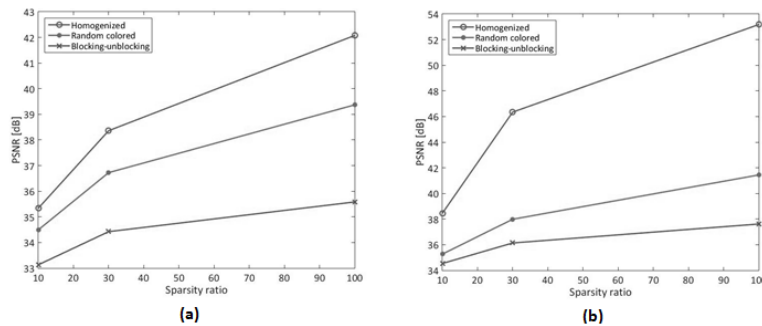


**Figure 6.** Mean PSNR of the  $256 \times 256 \times 16$  reconstructed data cube as a function of the SNR level (a) for 8 shots, (b) for 12 shots.

The SNR values added to the measurements were 5dB, 10dB and 40dB. Ten experiments were performed for every set of tests. A set of tests was comprised with the three filter ensembles, a noise level and an amount

of shots. Figure 6 shows the mean PSNR of the reconstruction for the different coded aperture sets as a function of the noise levels in measurements for 8 shots (a) and 12 shots (b). Figure 6 depicts that even for the noisy input signal with SNR of 5dB, the PSNR attained to the homogenized coded apertures is higher than the PSNR attained to the blocking-unblocking apertures and the random colored coded apertures.

#### 4.2.3. Sparsity Analysis

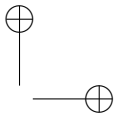
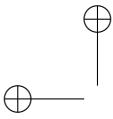


**Figure 7.** Mean PSNR of the  $256 \times 256 \times 16$  reconstructed data cube as a function of the sparsity ratio (a) for 8 shots, (b) for 12 shots.

The sparsity ratios used are 0.05, 0.1, 0.3 and 1. Figure 7 determines the effect of the sparsity in the random and homogenized designs. Figure 7 presents the PSNR attained to the three filter ensembles as a function of the sparsity ratio. The reconstruction quality obtained with homogenized coded apertures outperforms up to 11.74dB compared with the random colored coded aperture and up to 15.56 compared with the blocking-unblocking apertures.

## 5. Conclusions

It has been proposed a random algorithm for a design of the representative system matrix. The proposed algorithm gets the standard deviation of the average of unblocking elements per column reaches zero. The algorithm also minimizes the standard deviations of the average of unblocking elements per row without losing the randomness of the design. This method is important because it proposes a different approach to optimize coded apertures. Although the proposed algorithm is a stochastic method for the design of colored coded apertures, the quality of reconstructions with the homogenized apertures varies  $\pm 0.05$  dB. The PSNR increases rapidly for the homogenized colored coded apertures with the number of measurement shots and the sparsity ratio. In particular, the improvement in PSNR obtained with the homogenized coded apertures is up to 11.74dB compared to the obtained with the random colored coded aperture and up to 15.56 compared with the obtained using blocking-unblocking apertures. In general, the homogenized coded apertures sets achieve a higher image reconstruction quality even when the measurements have additive noise. Three shots or less, make the homogenized apertures less efficient to get good reconstructions than random apertures with the same transmittance, this because the homogenization method does not count with too much freedom to replace the unblocking elements making that the new apertures have big kernels of unblocking elements, and as a consequence lowering the incoherence. Four or more shots make that the homogenized apertures be superior to the non-designed coded apertures. As future work, it is expected to develop incoherence theoretical actions to prove the effectiveness of the homogenization in the representative system matrices.



## References

- [1] D. Kittle, K. Choi, A. Wagadarikar, and D. J. Brady, "Multiframe image estimation for coded aperture snapshot spectral imagers," *Appl. Opt.*, vol. 49, no. 36, p. 6824, Dec. 2010.
- [2] H. Arguello and G. R. Arce, "Colored Coded Aperture Design by Concentration of Measure in Compressive Spectral Imaging," *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 23, no. 4, pp. 1896–1908, Apr. 2014.
- [3] E. J. Candès and M. B. Wakin, "An Introduction To Compressive Sampling," *IEEE Signal Process. Mag.*, vol. 25, no. 2, pp. 21–30, Mar. 2008.
- [4] D. L. Donoho, "Compressed sensing," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 52, no. 4, pp. 1289–1306, Apr. 2006.
- [5] G. R. Arce, D. J. Brady, L. Carin, H. Arguello, and D. S. Kittle, "Compressive Coded Aperture Spectral Imaging: An Introduction," *IEEE Signal Process. Mag.*, vol. 31, no. 1, pp. 105–115, Jan. 2014.
- [6] A. Wagadarikar, R. John, R. Willett, and D. Brady, "Single disperser design for coded aperture snapshot spectral imaging," *Appl. Opt.*, vol. 47, no. 10, pp. B44–B51, 2008.
- [7] H. Arguello, H. Rueda, Y. Wu, D. W. Prather, and G. R. Arce, "Higher-order computational model for coded aperture spectral imaging," *Appl. Opt.*, vol. 52, no. 10, p. D12, Apr. 2013.
- [8] S. Kim, E. Lee, M. H. Hayes, and J. Paik, "Multifocusing and Depth Estimation Using a Color Shift Model-Based Computational Camera," *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 21, no. 9, pp. 4152–4166, Sep. 2012.
- [9] Y. Bando, B.-Y. Chen, and T. Nishita, "Extracting Depth and Matte Using a Color-filtered Aperture," in *ACM SIGGRAPH Asia 2008 Papers*, New York, NY, USA, 2008, pp. 134:1–134:9.
- [10] H. Arguello and G. R. Arce, "Code aperture optimization for spectrally agile compressive imaging," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 28, no. 11, p. 2400, Nov. 2011.
- [11] H. Arguello and G. R. Arce, "Rank Minimization Code Aperture Design for Spectrally Selective Compressive Imaging," *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 22, no. 3, pp. 941–954, Mar. 2013.
- [12] C. Noriega, Y. Mejía, and H. Arguello, "A random algorithm for designing the system matrix in compressive spectral imaging by homogenizing its structure," in *2015 Workshop on Engineering Applications - International Congress on Engineering (WEA)*, 2015, pp. 1–6.
- [13] M. A. T. Figueiredo, R. D. Nowak, and S. J. Wright, "Gradient Projection for Sparse Reconstruction: Application to Compressed Sensing and Other Inverse Problems," *IEEE J. Sel. Top. Signal Process.*, vol. 1, no. 4, pp. 586–597, Dec. 2007.
- [14] D. F. Galvis-Carreño, Y. H. Mejía-Melgarejo, and H. Arguello-Fuentes, "Efficient reconstruction of Raman spectroscopy imaging based on compressive sensing," *DYNA*, vol. 81, no. 188, pp. 116–124, Dec. 2014.
- [15] H. F. R. Chacon, C. A. V. García, and H. A. Fuentes, "Single-pixel optical sensing architecture for compressive hyperspectral imaging," *Rev. Fac. Ing.*, vol. 0, no. 73, pp. 134–143, Nov. 2014.

---

### Camilo Noriega Wandurraga

Born in July 1992 in San Gil, Santander Colombia. He graduated as Bachelor of Computer Science in 2015 at the Universidad Industrial de Santander, Colombia. He is currently doing his Bachelor in Mathematics and his Master studies in Mathematics, both at the Universidad Industrial de Santander, Colombia. His main research areas are Spectral Imaging and Compressive Sensing. He is a member of the High Dimensional Research Group (HDSP).

E-Mail: camilo.noriega@correo.uis.edu.co

---

### Yuri Mejía Melgarejo

Graduated as Bachelor of Sciences in Electronic Engineering in 2011, and as Master of Sciences in Electronic Engineering in 2014 at the Universidad Industrial de Santander, Colombia. She is currently doing his Ph.D. studies in the Department of Electrical, Electronics, and Telecommunications Engineering at the Universidad Industrial de Santander, Colombia, sponsored by Colciencias. Her main research areas are Spectral Imaging, Computer Tomography, and Compressive Sensing.

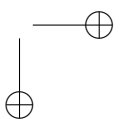
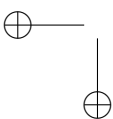
E-Mail: yuri.mejia@correo.uis.edu.co

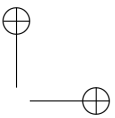
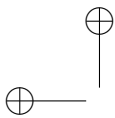
---

### Henry Arguello Fuentes

Born in July 1976 in Simacota, Santander Colombia. He graduated as an electrical engineer in 2000 at the Industrial University of Santander. Graduated with a Master's degree in electrical power in 2003 at the Universidad Industrial de Santander from Bucaramanga, Colombia. He obtained his Ph.D. degree from the University of Delaware from Newark, Unite States, in Electrical and Computer Engineering. He is an associate professor at the School of Engineering and Computer Systems of the Universidad Industrial de Santander from Bucaramanga, Colombia. His research interests include digital signal processing, artificial intelligence, and telecommunications.

E-Mail: henarfu@uis.edu.co





Research paper

## Adaptive Beamforming for Moving Targets Using Genetic Algorithms

*Formación de Haz Adaptativo para Objetos Móviles usando Algoritmos Genéticos*

**Diego Burgos<sup>1</sup>, Rodrigo Lemos<sup>1</sup>, Hugo Silva<sup>2</sup>, Jonas Kunzler<sup>1</sup>, Edna Flôres<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>Universidade Federal de Goiás, <sup>2</sup>Instituto Federal de Educ. Ciência e Tecnol. de Goiás, <sup>3</sup>Universidade Federal de Uberlândia.

Correspondence email: d.burgos88@hotmail.com

Received: 24-11-2015. Modified: 14-03-2016. Accepted: 06-04-2016.

### Abstract

**Context:** This work investigates the use of Genetic Algorithm (GA) for beamforming on a Code Division Multiple Access (CDMA) environment under different Signal-to-Noise Ratios (SNR), assuming a reference signal is known.

**Method:** The GA is a method inspired in evolutionary principles to optimize an objective function by choosing the best candidates of a population. The population is randomly generated to ensure high diversity and get a global optimization. On the other hand, the Least Means squares (LMS) algorithm is an adaptive algorithm with guaranteed convergence as long as a reference signal is known.

**Results:** The GA converged faster than the LMS in all tested scenarios. Besides, GA achieved best results in pointing the beam for uncorrelated static sources. Additionally, proper tuning of GA parameters allowed fast convergence and improved tracking of moving targets.

**Conclusions:** The simulation results confirm that the GA is able to obtain a convergent and accurate tool for beamforming and tracking of moving targets, given a reference signal. Hence, GA turns to be promising in replacing LMS on Smart Antenna Systems for increasing channel capacity.

**Keywords:** Smart Antenna, beamforming, moving targets, CDMA, genetic algorithms.

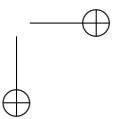
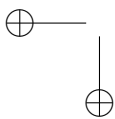
**Acknowledgements:** Organization of American States, Universidade Federal de Goiás.

### Open access



© The authors; licensee: Revista INGENIERÍA. ISSN 0121-750X, E-ISSN 2344-8393

Cite this paper as: Burgos, D., Lemos, R., Silva, H., Kunzler, J. y Flôres, E. (2016). Adaptive Beamforming for Moving Targets Using Genetic Algorithms. En: Ingeniería, Vol. 21, No. 2, pp. 214:224. En línea DOI: <http://dx.doi.org/10.14483/udistrital.jour.reveng.2016.2.a07>



### Resumen

**Contexto:** En este trabajo se investiga el uso de un Algoritmo Genético (GA) para la conformación del haz de un arreglo de antenas en ambientes de Acceso Múltiple por División de Código (CDMA) bajo diferentes relaciones Señal a Ruido, asumiendo que la señal de referencia es conocida.

**Método:** El Algoritmo Genético es un método inspirado en principios evolutivos, usado para optimizar una función objetivo seleccionando los mejores candidatos de una población. La población es generada aleatoriamente para asegurar alta diversidad y conseguir una optimización global. Por otro lado, el algoritmo LMS es un algoritmo que garantiza la convergencia siempre y cuando la señal de referencia sea conocida.

**Resultados:** El GA converge más rápidamente en que el algoritmo LMS en todos los escenarios probados. Además, el GA consiguió mejores resultados apuntando el haz para fuentes estáticas descorrelacionadas. Adicionalmente, una apropiada selección de los parámetros del GA permite una mayor velocidad de convergencia y un mejorado rastreamiento de fuentes en movimiento.

**Conclusiones:** Los resultados de las simulaciones confirman que el GA es una herramienta capaz de obtener una convergencia y precisión en la conformación del haz y el rastreamiento de fuentes en movimiento dada una señal de referencia. Por lo tanto, el GA resulta prometedor para sustituir el algoritmo LMS en sistemas de antenas inteligentes y aumentar la capacidad del canal.

**Palabras clave:** Antena Inteligente, beamforming, CDMA, algoritmos genéticos.

**Agradecimientos:** Organización de los Estados Americanos, Universidad Federal de Goiás.

## 1. Introduction

Smart Antennas are antenna arrays (sensors) scattered on a specific geometry that present as output a combination of the signals induced in its many elements. Actually, those sensors are omnidirectional antennas that allow changing their group radiation diagram through adaptive methods, pointing the main lobe to the main target, while positioning zeros towards the interfering sources. This way, using those arrays allows increasing the Signal-to-Interference-plus-Noise Ratio (SINR) and, consequently, the channel capacity to support the increasing demand for multimedia services in mobile cell phone networks.

Adaptive filters using least mean squares (LMS) [7] [8] have been successful on the beamforming task under several noise and multipath interference scenarios. They adjust a spatial filter on the array output in order to minimize the error between a reference signal and the filtered signal. Consequently, the main beam turns to be iteratively directed towards the target signal. This strategy is particularly interesting for tracking moving targets, due to its adaptability. However, under more severe conditions of signal reception, LMS fails to converge to suitable solutions and points the main lobe to wrong directions.

Genetic Algorithms have proven to be useful in global optimization tasks, like base-station planning in coverage maximization [16] and Direction of Arrival estimation [15]. So, in this paper we propose using Genetic Algorithms instead of LMS to direct the main beam of a linear antenna array towards a mobile source, synchronizing a space filter according to a reference signal. This reference is built under the assumption that DS-CDMA spreading code is known, as stated by Puttini [7].

We remark that this is an extended version of a short paper recently published in the Workshop

on Engineering Applications –WEA 2015– that was held in Bogotá, September 2015 [19].

## 2. Signal Model

According to [17], a Uniform Linear Array (ULA), composed of  $M$  half-wavelength spaced elements, suffers the incidence of  $K$  plane waves on directions  $\theta_k$  related to the signals  $x_k(t)$ ,  $k = 1, \dots, K$  [7]. The induced voltages on the array elements, sampled at times  $t = 1, \dots, N$  form a snapshot matrix, described as:

$$\begin{bmatrix} Z_1(1) & \dots & Z_1(N) \\ Z_2(1) & \dots & Z_2(N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_M(1) & \dots & Z_M(N) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1(1) & \dots & x_1(N) \\ x_2(1) & \dots & x_2(N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_k(1) & \dots & x_k(N) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1(1) & \dots & n_1(N) \\ n_2(1) & \dots & n_2(N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n_M(1) & \dots & n_M(N) \end{bmatrix} \quad (1)$$

where  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\varphi_1) \mathbf{a}(\varphi_2) \dots \mathbf{a}(\varphi_k)]$  is an  $M \times K$  Vandermonde matrix,  $\mathbf{a}(\varphi_k) = [1 e^{-j\varphi_k} \dots e^{-j(M-1)\varphi_k}]^T$  are the  $M \times 1$  steering vectors,  $\varphi_k = 2\pi d \cdot \sin(\theta_k/\lambda)$  are the electric angles corresponding to  $\theta_k$  and  $n_m(t)$  represents the additive white Gaussian noise samples on the  $m^{\text{th}}$  element of the array. This can be written in matrix notation as:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{N} \quad (2)$$

The array output  $\mathbf{y} = [y(1) \dots y(N)]$  is given by a linear combination of the induced voltages on the sensors, weighted by a vector  $\mathbf{w} = [w_1 \dots w_M]^T$  of a spatial filter coefficients:

$$\mathbf{y} = \mathbf{w}^H \mathbf{Z} = \sum_{m=1}^M w_m^* \cdot \mathbf{z}_m \quad (3)$$

where  $\mathbf{z}_m = [z_m(1) \dots z_m(N)]$  is the time sampled vector of the voltages on the  $m^{\text{th}}$  sensor.

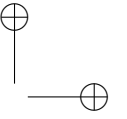
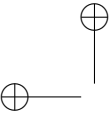
Considering a direct sequence code division multiple access system (DS-CDMA), signal  $\mathbf{x}_k = [x_k(1) \dots x_k(N)]$  from the  $k^{\text{th}}$  source results from spreading the spectrum of the information bits  $\mathbf{b}_k \in \{-1, 1\}$  associated to this source:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{b}_k \odot \mathbf{c}_k \quad (4)$$

where  $\mathbf{c}_k \in \{-1, 1\}$  is a spreading sequence containing a pseudo-noise code, and  $\odot$  stands for elementwise product. Considering we know the spreading sequence  $\mathbf{c}_k$  at the receiver and that it is synchronized with the target signal, we can recover  $\mathbf{b}_k$  by making:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{b}}_k &= \mathbf{z}_1 \odot \mathbf{c}_k = \sum_{i=1}^K e^{-j(m-1)\varphi_k} \mathbf{x}_i \odot \mathbf{c}_k |_{m=1} \\ &= \sum_{i=1}^K \mathbf{x}_i \odot \mathbf{c}_k = \sum_{i=1}^K \mathbf{b}_i \odot \mathbf{c}_i \odot \mathbf{c}_k = \mathbf{b}_k \end{aligned} \quad (5)$$

since orthonormality between  $\mathbf{c}_j$  and  $\mathbf{c}_k$  is considered.



In practice, each  $\mathbf{x}_i$  has a different phase shift and orthonormality is not guaranteed such that interfering signals corrupt the binary message. So, spatial filtering can be used to mitigate interfering signals at angles of arrival that are different from that of the target signal and improve the Bit-Error-Rate (BER).

In this work we adopted a 64 chips Walsh matrix [10] [11]. Then, considering  $f_s$  samples per chip and  $B$  message bits during the observation interval, the amount of samples on a snapshot is  $N = 64 \times f_s \times B$ .

### 3. Least Mean Squares Algorithm

The LMS algorithm iteratively updates the complex weights of a spatial filter on the array output by summing an estimate of the cross correlation between the received signal and the estimation error from the previous iteration [7], [17]. First, LMS initializes the weighting vector as  $\hat{\mathbf{w}}_0 = [1 \ 1 \dots 1]$  such that the array is pointed towards  $\theta = 0^\circ$ . Then, for each iteration  $i = 1, 2, \dots$ , it computes the filter output:

$$\mathbf{y}_N^i = \hat{\mathbf{w}}_i^H \cdot \mathbf{Z}_{NM}^i \quad (6)$$

From the error between the output and a reference signal:

$$\epsilon_i = \mathbf{y}_N^i - \mathbf{r}_i \quad (7)$$

the algorithm updates the weighting vector:

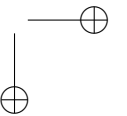
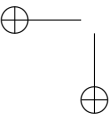
$$\hat{\mathbf{w}}_{i+1} = \hat{\mathbf{w}}_i + \mu \mathbf{Z}_{NM}^i \epsilon_i^H \quad (8)$$

Then, it returns to (6) and repeats the process until convergence is achieved. The positive factor  $\mu$ , related to convergence speed and accuracy, shall be less than  $1/\text{tr}(\mathbf{R}_{zz})$ , where  $\mathbf{R}_{zz}$  is the autocorrelation matrix of the voltages on the array sensors [7], [10], [17], [19].

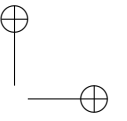
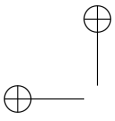
### 4. Genetic Algorithm

Genetic Algorithms (GA) have proven to be useful in designing conventional, static beamforming networks, like in positioning radio-base stations for maximizing a coverage area [16]. It is also quite useful as an adaptive algorithm for smart antennas [15]. A GA relies on the Darwinian principle of natural selection and evolution [15] to optimize a solution to a given problem. In the beamforming context, a set of  $S$  potential solutions (individuals),  $\hat{\mathbf{w}}_i$ ,  $i = 1, \dots, S$ , is randomly generated and iteratively combined with the aid of genetic operations like crossover and mutation.

Generally, each weight  $w_{i,m}$  of the antenna array is represented by a string of bits, such that half of the bits corresponds to the real part and the other half to the imaginary part of the array weight concerned [18]. Instead of doing so, we propose using complex weights  $w_{i,m} = \text{Re}(w_{i,m}) + j\text{Im}(w_{i,m})$ , where both  $\text{Re}(w_{i,m})$  and  $\text{Im}(w_{i,m})$  are uniformly distributed in  $[-1,1]$ . Then, each individual is represented by an  $M \times 1$  complex weight vector  $\hat{\mathbf{w}}_i = [w_{i,1} \dots w_{i,M}]^T$ .







In this work, genetic operations must be adapted to work on complex chromosomes. This was readily done for crossover using the Radcliff blending method, such that:

$$\hat{\mathbf{w}}_n = \beta \hat{\mathbf{w}}_i + (1 - \beta) \hat{\mathbf{w}}_k \quad (9)$$

where  $\beta$  is fixed throughout the process. Also, mutation is accomplished by a straightforward procedure in which a chromosome is randomly selected and then replaced by a randomly chosen complex value. On the other hand, the mutation process adopted consists in randomly altering a chromosome's gene according to (10).

$$w_{i,m} = -1 + 2 * rand(1) \quad (10)$$

Tournament and elitism selection were employed to pick out the individuals that minimize the error between the corresponding array output and a reference signal, according to (6) and (7).

The proposed GA stops as soon as the error falls below a convergence tolerance, and the best individual is chosen as the optimal solution.

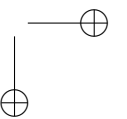
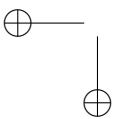
## 5. Results

In order to assess the beamforming performance, we started by calculating the pointing root mean square error (RMSE). A low RMSE is fundamental to the operation of smart antennas on environments with high background noise and many interfering sources. Initially the algorithms are tested with uncorrelated and correlated static sources to evaluate the performance and the convergence speed, and determine the applicability for moving sources. We employed a large initial population size aiming to better cover the space of solutions. However, the evolution process was performed only on a subset formed by the P2 best individuals of this population in order to speed up the algorithm. The tests were run on Windows 8, 8G RAM and Intel I7 processor. For the Genetic Algorithm, we used Elitism = 4.0; Crossing Probability = 95%; Mutation Probability = 1%; Radcliff Crossing with  $\beta = 0.3$ ; initial populations with P1 = 1000 individuals; populations between generations with P2 = 200 individuals and G = 100 generations. Those parameters were kept the same during all the simulations due to great results in previous experiments.

### 5.1. Uncorrelated Static Sources

Figure 1 presents the RMSE for three static uncorrelated sources, being the target source located at  $10^\circ$  and the interfering sources at  $40^\circ$  and  $60^\circ$ . A thousand experiments were performed for each SNR ranging from -35 up to 10 dB. Figure 1 shows that the LMS algorithm was capable of achieving null error rates above SNR = -9dB, while the GA performs visibly better, providing unitary error even at -12 dB. Consequently, both algorithms were able of precisely pointing to the target source position under relatively high noise conditions. However, GA revealed to be clearly more robust to the noise effects.

Figure 2 presents the histogram of the convergence times of both methods for static uncorrelated sources. The convergence times were analyzed based on the average times of convergence achieved by each algorithm for each SNR. After a thousand experiments for every SNR in the range -40dB



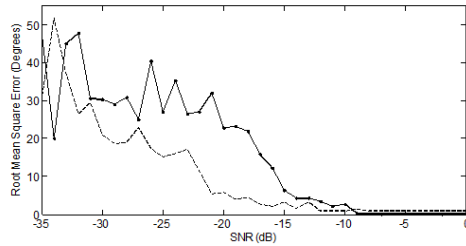
to 10dB, the histogram evidences that GA was faster with average time of 0.251 seconds against 0.820 seconds for LMS. Also, the variance was smaller for GA than LMS.

An analysis of the computational complexity shows that, since both LMS and GA require complex matrix products and additions, the orders of their computational costs in the worst case are respectively:

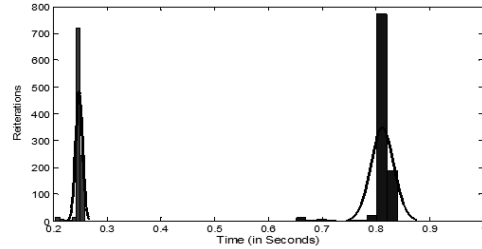
$$C_{LMS}(M, N) = \mathcal{O}\{M^2N + N^3\} \quad (11)$$

$$C_{GA}(P_1, P_2, G, M) = \mathcal{O}\{(P_1 + GP_2)(M^3 + MN)\} \quad (12)$$

Expressions (11) and (12) show that the computational cost of LMS grows cubically with the number of snapshots, while GA's cost grows cubically with the number of sensors. Since the number of sensors in the array is much less than the number of snapshots, GA performs less machine operations and converges faster than LMS as shown in Figure 2.



**Figure 1.** RMSE of the adaptive receiver for uncorrelated sources located at  $10^\circ$ ,  $40^\circ$  and  $60^\circ$ . (a) The continuous line represents the LMS algorithm. (b) The dashed line represents the GA.



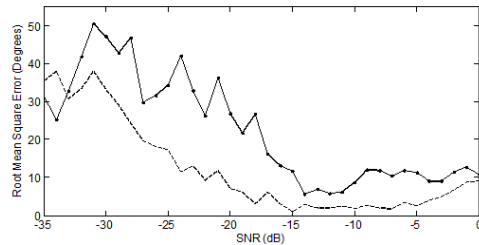
**Figure 2.** Histogram of convergence times of GA and LMS for uncorrelated sources located at  $10^\circ$ ,  $40^\circ$  and  $60^\circ$ . (a) The black histogram represents the LMS times. (b) The grey histogram represents the GA times.

## 5.2. Correlated Static Sources

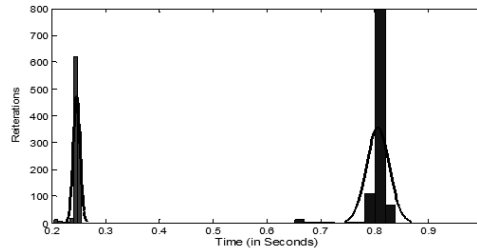
Figure 3 presents the performance for three completely correlated static sources, being the target located at  $10^\circ$  and the interfering sources at  $40^\circ$  and  $60^\circ$ . Again, a thousand experiments were performed for each SNR ranging from 35 up to 10 dB. In this case, since all signals arrive with the same power, the array pointed the beam to the source with the lowest delay. Instead of achieving null error. The LMS algorithm produced unstable errors rates even at high SNR. On the other hand, GA performed better with error rates lower than those of LMS.

Figure 4 shows that, also for correlated sources, GA was faster with an average time of 0.248 seconds against 0.820 seconds for LMS. For every SNR in the range -40 dB to 10 dB, a thousand simulations were performed, resulting in a total of 51 thousand experiments.

The amount of machine operations of both algorithms is not affected by correlation of the sources, so that the GA remains faster than the LMS in this case, as shown in Figure 4.



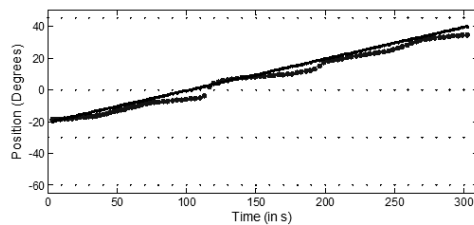
**Figure 3.** RMSE of the adaptive receiver for correlated sources located at  $10^\circ$ ,  $40^\circ$  and  $60^\circ$ . (a) The continuous line represents the LMS algorithm. (b) The dashed line represents the GA.



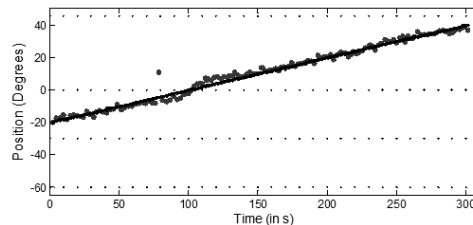
**Figure 4.** Histogram of convergence times of GA and LMS for correlated sources located at  $10^\circ$ ,  $40^\circ$  and  $60^\circ$ . (a) The black histogram represents the LMS times. (b) The grey histogram represents the GA times.

### 5.3. Moving Target Sources

In order to assess the performance of LMS and GA in tracking moving targets, Figures 5 and 6 depict the displacement of a target source over time at the constant velocity of 0.2 degrees/second from  $-20^\circ$  to  $40^\circ$ , at SNR = 10 dB. Four static interference sources are simulated at  $-60^\circ$ ,  $-30^\circ$ ,  $0^\circ$  and  $45^\circ$ . Doppler effect was taken into account on the moving source frequencies, but the frequency shift is virtually zero, so we can assume it is negligible.



**Figure 5.** LMS tracking of a moving target with uncorrelated interfering sources located at  $-60^\circ$ ,  $-30^\circ$ ,  $0^\circ$  and  $45^\circ$ . (a) The continuous line represents the route of the target. (b) The small dots represents the position of the interfering sources. (c) The big dots represents the positions estimations of the LMS algorithm.



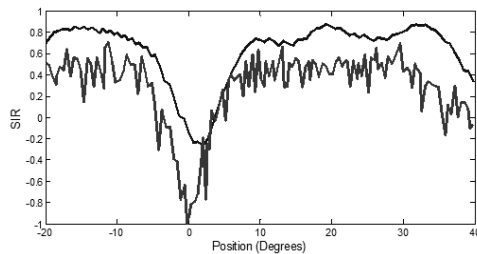
**Figure 6.** GA tracking of a moving target with uncorrelated interfering sources located at  $-60^\circ$ ,  $-30^\circ$ ,  $0^\circ$  and  $45^\circ$ . (a) The continuous line represents the route of the target. (b) The small dots represents the position of the interfering sources. (c) The big dots represents the positions estimations of the GA.

LMS clearly pursued the target but, most of the time, its slow convergence rate prevented LMS from reaching the target. The resulting Mean Square Error (MSE) between the target track and the LMS estimated angles was 10.455 degrees. On the other hand, the faster convergence of GA allowed tracking the target closely, but sometimes pointed a little ahead of it, sometimes a little behind. Particularly, GA had more difficulties in pointing to the target when it crossed the direction of an interfering source. Even less stable, GA achieved a MSE of 5.077 degrees, almost the half of LMS fitting.

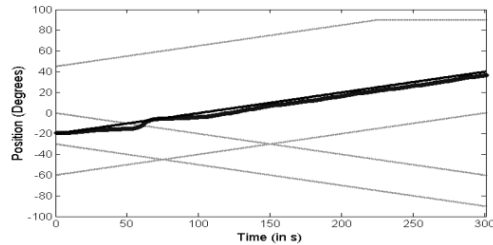
However, besides pointing the array on the right direction, beamforming is supposed to mitigate the interfering sources. Then, before giving the final word on the beamforming performance

of GA, we measured the output Signal to Interference Ratio (SIR) of both algorithms during the tracking of the target source. Figure 7 shows that LMS was more accurate than GA in filtering out the target from the interfering sources. Therefore, GA was not so good in mitigating interfering sources as LMS.

Considering the relevance of such a system for real time communications, we investigated the beamforming efficiency for tracking a moving target among multiple moving interfering sources. Figures 8 and 9 shows the displacement of a target source and four interfering sources over time at a constant velocity of 0.2 degrees/second, the target source moves from  $-20^\circ$  to  $40^\circ$ , at SNR=10 dB. The interfering sources start displacements at  $-60^\circ$ ,  $-30^\circ$ ,  $0^\circ$  and  $45^\circ$  with random initial directions.



**Figure 7.** Resulting output Signal to Interference Ratio (SIR) of LMS (blue) and GA (red) during tracking of the target source. (a) The black line represents the LMS algorithm. (b) The grey line represents the GA.

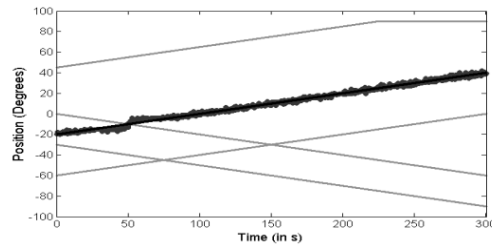


**Figure 8.** LMS tracking of a moving target with uncorrelated interfering moving sources. (a) The continuous line represents the route of the target. (b) The small dots represents the position of the interfering sources. (c) The big dots represents the positions estimations of the LMS algorithm.

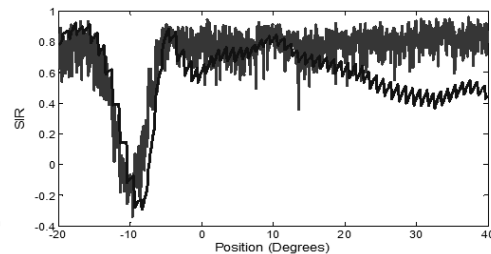
LMS pursued the target with a more stable behavior such that the Mean Square Error (MSE) between the real positions of the target source and the LMS estimated angles resulted in 11.3535 degrees. Furthermore, the low convergence speed prevented LMS from reaching the target. On the other hand, due to its faster convergence, GA was able to more closely track the target, resulting on a MSE of 2.3281 degrees, despite having a less stable behavior. Both algorithms had difficulties in pointing to the target when it crossed the path of an interfering source, but the LMS had more problems in these circumstances.

Another important measure of performance is the capacity of mitigating the interfering sources. Then, to assess the beamforming performance of the GA, we measured the output Signal to Interference Ratio (SIR) of both algorithms during the tracking of the target source [17].

Besides tracking the target, both algorithms were able to keep a positive SIR on the reception, except when the target crossed the path of an interfering source. However, Figure 10 shows that the low convergence speed of LMS algorithm also made it less efficient in mitigating the interfering sources. GA was more accurate in tracking the target out of interfering sources, despite presenting a less stable behavior.



**Figure 9.** GA tracking of a moving target with uncorrelated interfering moving sources. (a) The continuous line represents the route of the target. (b) The small dots represents the position of the interfering sources. (c) The big dots represents the positions estimations of the GA.



**Figure 10.** Resulting output Signal to interference Ratio (SIR) of LMS (blue) and GA (red) during tracking of the target source. (a) The black line represents the LMS algorithm. (b) The grey line represents the GA

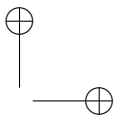
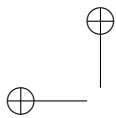
## 6. Conclusion

This paper discussed the applications of Genetic Algorithms (GA) on beamforming of static uncorrelated and correlated sources, especially for moving targets on CDMA systems considering the spreading code of the signal of interest is known. LMS algorithm reached zero error rates at Signal-to-Noise Ratios as low as -9 dB for static uncorrelated sources. For completely correlated sources LMS showed unstable performance, while GA showed better results in all cases of static sources achieving error rates lower than LMS. Additionally, in average, GA converged almost three times faster than LMS. This allowed GA to perform a close tracking while LMS makes fewer estimates, making tracking more difficult.

For future work, other algorithms will be tested and compared with the LMS and the GA algorithms in terms of accuracy, convergence speed and computing cost for different simulation environments. Also, it is considered implement the GA in real environments, in situations where the objective function change abruptly.

## References

- [1] A. Paulraj, R. Roy, and T. Kailath, "A subspace rotation approach to signal parameter estimation" Proceedings of the IEEE, vol. 74, no. 7, pp. 1044 – 1046, July 1986
- [2] Y. R. Ferreira, "Métodos de Estimação de Ângulos DOA", Tese de Mestrado, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2005.
- [3] R. O. Schmidt, Multiple emitter location and signal parameter estimation. In: Proc. RADCSpectral Estimation Workshop. [S.l.: s.n.], 1979. p. 243.258.A. J.
- [4] A. J. Barabell, "Improving the resolution performance of eigenstructure-based direction - finding algorithms. In: Proc. of the IEEE Int'l. Conf. on Acoustic, Speech, and Signal Processing-83. [S.l.: s.n.], pp. 336 – 339, 1983.
- [5] P. Stoica and K. Sharman, "Novel eigenanalysis method for direction estimation" In: PROCEEDINGS, I. (Ed.). IEE Proceedings. [S.l.: s.n.], v. 137, n. 1, 1990.
- [6] H. V. Leão e Silva "Redução da complexidade computacional do método de estimação de ângulos de incidência através da diferença entre os valores singulares da matriz de covariância espacial" Tese de Mestrado, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2009.
- [7] S. B. Puttini, "Emprego de Antenas Adaptativas para Estimação de Dados em Ambiente CDMA", Tese de Mestrado, Universidade Federal de Brasília, Brasília, Março 2006.



- [8] V. V. de Faria, "Antenas Adaptativas para Sistemas de Comunicações sem Fio" Tese de Mestrado, Instituto Nacional de telecomunicações, Santa Rita do Sapucaí, 2003.
- [9] W. L. Stutzman e G. A. Thiele, "Antenna Theory and Desing", John Wiley & Sons, Nova Iorque EUA, 1981.
- [10] C. Arévalo e J. Rojas, "Material Didáctico para el Estudio y Simulación de CDMA: Aplicación a Comunicaciones Móviles", Escuela Politécnica Nacional, Quito, 2012.
- [11] Zooghby, "Smart Antenna Engineering", Artech House, Norwood EUA, 2005.
- [12] Haykin, "Modern Filters", Macmillan Publ Company, Nova Iorque EUA, 1989.
- [13] G. Blanchet & M. Charbit, "Digital Signal and Image Processing Using MATLAB", ISTE Ltd, Londres UK, 2006.
- [14] J. C. Liberti e T.S. Rappaport, "Smart Antennas for Wireless Communications: IS-95 and Third Generation CDMA Applications", Prentice Hall, Nova Jersey EUA, 1999.
- [15] M. Vitale, G. Vesetini, N.N. Ahmad & L. Hanzo, "Genetic Algorithm Assisted Adaptive Beamforming", Vehicular Technology Conference, vol. 1, pp. 601 – 605, 2002.
- [16] A. S. Rocha, "Otimização Multiobjetivo e Multirestrição da Cobertura de Redes de Frequência Única", Tese de Doutorado, Universidade Federal de Brasília, Brasília, Agosto 2013.
- [17] D. Burgos, R. Lemos, J. Kunzler & H. Silva, "Adaptive Beamforming for Moving Target Using Genetics Algorithms and a CDMA Reference Signal", IEEE COLCOM, pp. 1-5, 2015.
- [18] R.L. Haupt, "Phase-only adaptive nulling with a GA", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 45, pp.1009- 1015, 1997.
- [19] D. Burgos, R. Lemos, J. Kunzler & H. Silva, "Adaptive Beamforming for Moving Target Using Genetics Algorithms", IEEE WEA, pp. 1-5, 2015.
- [20] J. Hung & A. Chang, "Combining genetic algorithm and iterative MUSIC searching DOA estimation for the CDMA system", Expert Systems with Applications, pp. 1895-1902, 2011.

---

### Diego Fernando Burgos Beltrán

Nació en Pitalito, Colombia. Es Ingeniero Electrónico de la Universidad Surcolombiana, de Neiva, Colombia. Obtuvo su título de Maestría en Ingeniería Eléctrica y de Computación en la Universidad Federal de Goiás de Goiânia, Brasil. Se desempeñó como Analista de Centro Gestión Datos Telefónica Movistar durante 1 año. Posteriormente, se desempeñó como Ingeniero Electrónico en la empresa G&R Ingeniería en la automatización del control de acceso del nuevo aeropuerto El Dorado. Luego laboró como Auditor de Servicios en la Universidad Nacional Abierta y a Distancia. Actualmente hace parte de la Fundación Universitaria Panamericana trabajando como docente de hora cátedra de cursos tanto presenciales como virtuales.

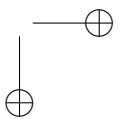
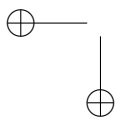
e-mail: d.burgos88@hotmail.com

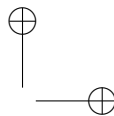
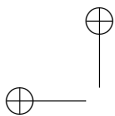
---

### Rodrigo Pinto Lemos

Nació en Cássia, Brasil. Es Ingeniero Eléctrico de la Universidad Federal de Goiás (UFG), de Goiânia, Brasil, en 1991. Maestro y Doctor en Ingeniería Eléctrica de la Universidad Estatal de Campinas (Unicamp), de Campinas, Brasil, en 1995 y 1997 respectivamente. Fue Profesor Titular de Universidade en el área de Informática en la Pontificia Universidad Católica de Goiás durante diez años. Actualmente se desempeña como Profesor Titular de Universidad en el área de Telecomunicaciones en la Universidad Federal de Goiás, que se incorporó en 1996 y fue Director de la Escuela de Ingeniería Eléctrica, Mecánica e Informática, Coordinador del Programa de Estudios de Posgrado y de Convención Internacional. Pertenece como investigador en el grupo InComm donde realiza estudios sobre Modelamiento Estocástico del Tráfico Multimedia, Comunicaciones Móviles, Procesamiento Estadístico de Señales, Estimación de Ángulos de Ondas Incidentes y Formación de Haz Electromagnético, Procesamiento de Señales Biológicas y Reconocimiento de Patrones.

e-mail: lemos@ufg.br





---

### **Hugo Vinícius Leão e Silva**

Nació en Goiânia, Brasil. Es Ingeniero Informático de la Pontificia Universidad Católica de Goiás, de Goiânia, Brasil. Obtuvo su título de Maestría en Ingeniería Eléctrica y Informática en la Universidad Federal de Goiás, de Goiânia, Brasil. Estudia para obtener su PhD en la Universidad Federal de Uberlândia, de Uberlândia, Brasil. Se desempeñó como Analista Informático en la Fundación de Apoyo a la Investigación de Goiás. Actualmente se desempeña como Profesor Agregado en el área de Informática en el Instituto Federal de Goiás de Anápolis, Brasil, y pertenece como investigador al grupo InComm donde realiza estudios sobre Estimación de Ángulos de Ondas Incidentes y Procesamiento de Señales.

e-mail: hugovinicius@ifg.edu.br

---

### **Jonas Augusto Kunzler**

Nació en Itajaí, Brasil. Es Matemático de la Universidad Federal de Goiás, de Goiânia, Brasil. Obtuvo su título de Maestría en Ingeniería Eléctrica e Informática en la Federal de Goiás, de Goiânia, Brasil. Estudia para obtener su PhD en la Universidad Federal de Goiás, de Goiânia, Brasil. Se desempeñó como Técnico de Laboratorio de Telecomunicaciones en Aeroradio durante 1 año. Posteriormente, se incorporó a la Universidad Federal de Goiás donde se desempeña el cargo de Técnico de Laboratorio de Telecomunicaciones. Actualmente se desempeña como Profesor en el área de Telecomunicaciones en la Universidad Objetivo de Goiânia, Brasil, y pertenece como investigador al grupo InComm donde realiza estudios sobre Estimación de Ángulos de Ondas Incidentes y Procesamiento de Señales.

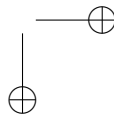
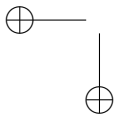
e-mail: k.jonsaugusto@ufg.br

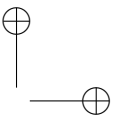
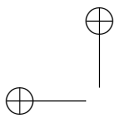
---

### **Edna Lúcia Flôres**

Graduada de pregrado y Magister en Ingeniería Eléctrica de la Universidad Federal de Uberlândia (UFU), Uberlândia, Minas Gerais, Brasil, en 1982 y 1988 respectivamente. Doctora en Ingeniería Eléctrica de la Universidad de Campinas, Campinas, São Paulo, Brasil, en 1997, con práctica posdoctoral en la Universidad Federal de Goiás (UFG) en 2015. Es profesora titular de la facultad de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Federal de Uberlândia desde 1991 y sus investigaciones están orientadas a las áreas de procesamiento digital de señales, procesamiento digital de imágenes, sistemas tutores inteligentes y tecnología de asistencia.

e-mail: edna@ufu.br





Research paper

REVISTA  
Ingeniería

## A Comparison Between the Centroid and the Yager Index Rank for Type Reduction of an Interval Type-2 Fuzzy Number

*Comparación entre el Índice de Yager y el Centroide para Reducción de tipo de un Número Difuso Tipo-2 de Intervalo*

**Diego Fernando Pachón-Neira<sup>1</sup>, Juan Carlos Figueroa-García<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Correspondence email: diego.pachon@outlook.es ; jcfigueroag@udistrital.edu.co

Received: 25-11-2015. Modified: 01-03-2016. Accepted: 13-04-2016.

### Abstract

**Context:** There is a need for ranking and defuzzification of Interval Type-2 fuzzy sets (IT2FS), in particular Interval Type-2 fuzzy numbers (IT2FN). To do so, we use the classical Yager Index Rank (YIR) for fuzzy sets to IT2FNs in order to find an alternative to the centroid of an IT2FN.

**Method:** We use a simulation strategy to compare the results of the centroid and the YIR of an IT2FN. This way, we simulate 1000 IT2FNs of the following three kinds: gaussian, triangular, and non symmetrical in order to compare their centroids and YIRs.

**Results:** After performing the simulations, we compute some statistics about its behavior such as the degree of subsethood, equality and the size of the Footprint of Uncertainty (FOU) of an IT2FN. A description of the obtained results shows that the YIR is less wide than centroid of an IT2FN.

**Conclusions:** In general, YIR is less complex to obtain than the centroid of an IT2FN, which is highly desirable in practical applications such as fuzzy decision making and control. Some other properties regarding its size and location are also discussed.

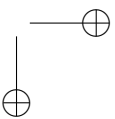
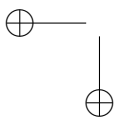
**Keywords:** Interval Type-2 Fuzzy numbers, Yager Index, Ranking.

**Language:** (english).

### Open access



© The authors; licensee: Revista INGENIERÍA. ISSN 0121-750X, E-ISSN 2344-8393. Cite this paper as: Pachón, D. F. y Figueroa, J. C. (2016). A Comparison Between the Centroid and the Yager Index Rank for Type Reduction of an Interval Type-2 Fuzzy Number. INGENIERÍA, Vol. 21, Num. 2, 2016 225:234. En línea DOI: <http://dx.doi.org/10.14483/udistrital.jour.reveng.2016.2.a08>





### Resumen

**Contexto:** Hay una necesidad por defuzzificar y rankear Conjuntos Difusos Tipo-2 de Intervalo (IT2FS), en particular Números Difusos Tipo-2 de Intervalo (IT2FN). Para ello, usamos el Índice de Yager (YIR) para conjuntos difusos aplicado a IT2FNs con el fin de encontrar una alternativa al centroide de un IT2FN.

**Método:** Usamos una estrategia de simulación para comparar los resultados del centroide y del YIR de un IT2FN. Así pues, simulamos 1000 IT2FNs de cada uno de los siguientes tres tipos: gaussianos, triangulares y asimétricos para comparar sus centroides y YIRs.

**Resultados:** Después de realizar las simulaciones, se calculan algunas estadísticas de su comportamiento como el grado de cobertura y de igualdad relativas del YIR respecto al centroide así como el tamaño de la Huella de Incertidumbre (FOU) de un IT2FN. La descripción de los resultados obtenidos muestra que el YIR es menos amplio que el centroide.

**Conclusiones:** En general, el YIR es menos complejo de obtener que el centroide de un IT2FN, lo cual es altamente deseable en aplicaciones prácticas como toma de decisiones y control. Otras propiedades relacionadas con su tamaño y ubicación también son discutidas.

**Palabras clave:** Números Difusos Tipo-2 de Intervalo, Índice de Yager, Ranking.

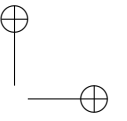
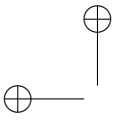
## 1. Introduction

The use of fuzzy sets in last decades have become an important tool to solve problems that involve non probabilistic uncertainty. One of the most important open problems when using fuzzy sets regards to the way to find a crisp measure that represents the behavior of the set. This process is known as *Type reduction*, and the case of an *Interval Type-2 Fuzzy Number (IT2FN)* is even more complex than classical fuzzy sets. Also the low availability of efficient Type reduction methods leads to analyze the properties of the most used ones, the *IASCO algorithm* (see Melgarejo [12]) which comes from the *Enhanced Karnik-Mendel algorithm (EKM)* (see Karnik & Mendel [22]) and the *Yager Index Rank (YIR)* for IT2FNs in this case.

Fuzzy sets are specially useful in engineering problems whose statistical information is unreliable or absent, and one of the possible ways to obtain information is via experts opinions and perceptions. Type-2 fuzzy sets cover uncertainty coming from multiple experts perceptions, and the way how they perceive the the problem, so its applicability in engineering is wide, specially in control and decision making problems where multiple experts are involved (see Hu et al [7], Kahraman et al [9], Melgarejo & Peña [13], and Mendel & Wu [19]).

Following the results presented in WEA 2015 (see Figueroa-García & Pachón-Neira [6]), this time we compare the centroid to Yager index for type reduction of IT2FNs in order to see their properties. To do so, we simulate 1000 IT2FNs of three shapes: triangular, gaussian, and non symmetric triangular membership functions and compute their centroids, Yager indexes, and other interesting measures to provide some useful information to readers who want to implement Type-2 fuzzy sets/systems.

The paper is organized into 6 sections; Section 1 introduces the main problem; Section 2 presents some basics about Type-2 fuzzy sets; Section 3 introduces the centroid and Yager index of an



IT2FN; Section 4 presents the methodology used for comparing both methods; In section 5, the results of the experiments are presented, and finally Section 6 presents some concluding remarks of the study.

## 2. Basics on Interval Type-2 fuzzy sets

In this paper, we do not make any distinction between definitions of IVFSs and Interval Type-2 fuzzy sets (IT2FSs) given by Mendel [15] since they are equivalent (see Mendel [17], Bustince [2], Bustince et al. [1], and Türksen [21]). A Type-2 fuzzy set is then:

$$\tilde{A} : X \rightarrow F([0, 1]) \quad (1)$$

$$\tilde{A} = \{((x, u), J_x, f_x(u)) \mid x \in X; u \in J_x \subseteq [0, 1]\} \quad (2)$$

$$\tilde{A} = \int_{x \in X} \int_{u \in J_x} f_x(u)/(x, u), J_x \subseteq [0, 1] \quad (3)$$

where  $\tilde{A}$  represents uncertainty around the word  $A$ ,  $J_x$  is the *primary membership* of  $x$ ,  $u$  is its *domain of uncertainty*, and  $\mathcal{F}_2(\mathbb{X})$  is the class of all Type-2 fuzzy sets (see Mendel [15], [19]).

This way,  $\tilde{A}$  is composed by an infinite amount of embedded Type-1 fuzzy sets namely  $A_e$ . Every element  $x$  has associated a set of primary memberships  $J_x$  weighted by a *Secondary* fuzzy set  $f_x(u)$  where  $u$  is the domain of uncertainty of  $x$ ,  $u \in J_x \subseteq [0, 1]$ . Now, an IT2FS is a simplification of a T2FS since its secondary membership function is assumed to be 1, as shown as follows.

$$\tilde{A} = \int_{x \in X} \int_{u \in J_x} 1/(x, u) = \int_{x \in X} \left[ \int_{u \in J_x} 1/u \right] / x, \quad (4)$$

where  $x, u$  are the primary and secondary variables, and  $f_x(u)/u = 1$  is the secondary membership function.

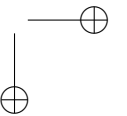
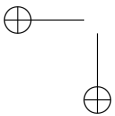
Uncertainty about the word  $A$  is conveyed by the union of all of  $J_x$  into the *Footprint Of Uncertainty* of  $\tilde{A}$ , namely  $\text{FOU}(\tilde{A})$ , which is bounded by two functions: An *Upper* membership function  $\text{UMF}(\tilde{A}) = \bar{\mu}_{\tilde{A}}(x) \equiv A^U$  and a *Lower* membership function  $\text{LMF}(\tilde{A}) = \underline{\mu}_{\tilde{A}}(x) \equiv A^L$ .  $\text{FOU}(\tilde{A})$  is shown in Figure 1.

In Figure 1,  $\tilde{A}$  is an IT2FS, the universe of discourse for the primary variable  $x$  is the set  $x \in X$ , the *support* of  $\tilde{A}$ ,  $\text{supp}(\tilde{A})$  is the interval  $x \in [\bar{x}, \hat{x}]$  and  $\mu_{\tilde{A}}$  is a triangular membership function with parameters  $\bar{x}, \hat{x}, \underline{x}, \hat{x}$  and  $\bar{x}$ .

**Definition 2.1 ( $\alpha$ -cut of an IT2FS)** *Figueroa-García, Chalco-Cano & Román-Flores [5] have defined the  $\alpha$ -cut of an IT2FS as follows:*

$${}^\alpha \tilde{A} = \left[ [\tilde{A}_\alpha^U, \tilde{A}_\alpha^L], [\hat{A}_\alpha^L, \hat{A}_\alpha^U] \right]. \quad (5)$$

where  ${}^\alpha A_e = \{x \mid \mu_{A_e}(x) \geq \alpha\}$  is an  $\alpha$ -cut done over an embedded set  $A_e \in \tilde{A}$ . The symbol  $\int$  denotes fuzzy union, so  ${}^\alpha \tilde{A}$  is the union of all  ${}^\alpha A_e$ .



A graphical representation of  ${}^\alpha\tilde{A}$  is provided in Figure 2.

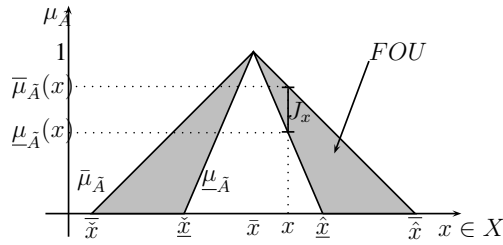


Figure 1. Interval Type-2 Fuzzy set  $\tilde{A}$

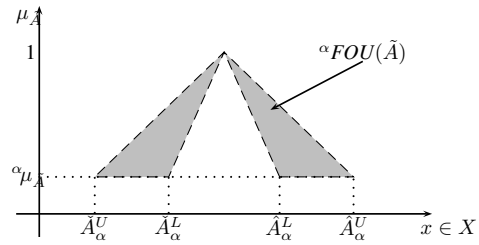


Figure 2.  ${}^\alpha\tilde{A}$  of the set  $\tilde{A}$

### 2.1. Type-2 fuzzy numbers

In this paper, a Type-2 fuzzy number (T2FN) is considered as the extension of a Type-1 fuzzy number. This means that  $\tilde{A}$  is an T2FS whose UMF and LMF are fuzzy numbers (e.g. normal and convex fuzzy subsets of  $\mathbb{R}$ , Zadeh [25]).  ${}^\alpha A$  is closed interval for all  $\alpha \in [0, 1]$ , and its support  $supp(A)$  is defined over  $\mathbb{R}$ . This also means that a fuzzy number is a normal and convex fuzzy set, as shown as follows.

**Definition 2.2 (Type-2 Fuzzy Number)** Let  $\tilde{A} \in \mathcal{F}_2(\mathbb{R})$ . Then,  $\tilde{A}$  is a Type-2 Fuzzy Number (T2FN) iff there exists a closed interval  $[a, b] \neq \emptyset$  for each UMF ( $\bar{\mu}_{\tilde{A}}$ ) and LMF ( $\underline{\mu}_{\tilde{A}}$ ) such that

$$\mu_{\tilde{A}}(x, u) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \in [a, b], \quad u \in J_x \subseteq [0, 1] \\ l(x, u) & \text{for } x \in [-\infty, a], \quad u \in J_x \subseteq [0, 1] \\ r(x, u) & \text{for } x \in [b, \infty], \quad u \in J_x \subseteq [0, 1] \end{cases} \quad (6)$$

where  $l : (-\infty, a) \rightarrow F([0, 1])$ ,  $u \in J_x \subseteq [0, 1]$  is monotonic non-decreasing, continuous from the right, and  $l(x, u) = 0$  for  $x < \omega_1$ , and  $r : (b, \infty) \rightarrow F([0, 1])$ ,  $u \in J_x \subseteq [0, 1]$  is monotonic non-increasing, continuous from the left, and  $r(x, u) = 0$  for  $x > \omega_2$ .

### 3. Type reduction of an IT2FS

Consider a crisp set  $S_A(x)$ , a classical fuzzy set  $A(x)$ , and an IT2FS  $\tilde{A}(x)$ , all of them related to the word  $A$ . The Type reduction process is simply the process of going from  $\tilde{A}(x)$  to  $S_A(x)$  using functions (or methods) namely  $f$ . This is:

$$\tilde{A}(x) \xrightarrow{f_1} A(x) \xrightarrow{f_2} S_A(x)$$

To do so, we introduce two methods: a centroid based method called the IASCO algorithm, and the YIR method as follows.

### 3.1. Centroid of an IT2FS

The IASCO algorithm proposed by Melgarejo in [12] is an improvement of the Enhanced Karnik-Mendel algorithm (See Karnik & Mendel in [22]) for Type-reduction of an Interval Type-2 fuzzy set. Given a set  $\tilde{A}$ , its centroid  $C(\tilde{A})$  is composed by an interval set of centroids bounded by two values  $\min\{C(\tilde{A})\} = C_l(\tilde{A})$  and  $\max\{C(\tilde{A})\} = C_r(\tilde{A})$ . Every point enclosed into  $C(\tilde{A}) = [C_l(\tilde{A}), C_u(\tilde{A})]$  is also a possible centroid of  $\tilde{A}$ , so there is an infinite amount of centroids enclosed into  $C(\tilde{A})$  (see Wu and Mendel [22], [23], Mendel and Liu [18], Karnik and Mendel [10], and Melgarejo [3]), as follows:

$$C(\tilde{A}) = 1/[c_l(\tilde{A}); c_r(\tilde{A})] \quad (7)$$

where  $\tilde{A}$  is an interval Type-2 fuzzy set,  $c_l(\tilde{A})$  and  $c_r(\tilde{A})$  are the upper and lower centroids. The main equations of the Enhanced Karnik-Mendel (EKM) algorithm for computing  $C(\tilde{A})$  (see Wu & Mendel [22]) are provided as follows:

$$c_l(\tilde{A}) = \frac{\sum_{i=1}^N x_i \underline{f}_i + \sum_{i=1}^k x_i (\bar{f}_i - \underline{f}_i)}{\sum_{i=1}^N \underline{f}_i + \sum_{i=1}^k (\bar{f}_i - \underline{f}_i)} \quad (8)$$

$$c_r(\tilde{A}) = \frac{\sum_{i=1}^N x_i \bar{f}_i - \sum_{i=1}^k x_i (\bar{f}_i - \underline{f}_i)}{\sum_{i=1}^N \bar{f}_i - \sum_{i=1}^k (\bar{f}_i - \underline{f}_i)} \quad (9)$$

where  $\bar{f}$  and  $\underline{f}$  are the UMF and LMF of  $\tilde{A}$ .

Other authors like Melgarejo [12] proposed the algorithm IASCO (Iterative Algorithm With Stop Condition) which improves the computation of  $C(\tilde{A})$ , as shown as follows:

$$D_0 = \sum_{i=1}^N x_i \underline{f}_i \quad (10)$$

$$P_0 = \sum_{i=1}^N \underline{f}_i \quad (11)$$

$$c_{min} = x_N \quad (12)$$

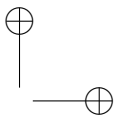
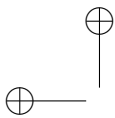
starting with  $k = 0$ , increasing  $k = k + 1$  and computing  $D_0$  and  $P_0$  for each increment, then we have

$$D_k = D_{k-1} + x_k [\bar{f}_k - \underline{f}_k] \quad (13)$$

$$P_k = P_{k-1} + [\bar{f}_k - \underline{f}_k] \quad (14)$$

$$c_l(k) = \frac{D_k}{P_k} \quad (15)$$

if  $c_l(k) \leq c_{min}$  then  $c_{min} = c_l(k)$  otherwise stop and do  $c_l = c_{min}$ .



In a similar way, to find  $c_r$  from (9) the recursions are:

$$D_0 = \sum_{i=1}^N x_i \bar{f}_i \tag{16}$$

$$P_0 = \sum_{i=1}^N \bar{f}_i \tag{17}$$

$$c_{max} = x_N \tag{18}$$

starting with  $k = 0$ , increasing  $k = k + 1$  and computing  $D_0$  and  $P_0$  for each increment, then we have

$$D_k = D_{k-1} - x_k [\bar{f}_k - \underline{f}_k] \tag{19}$$

$$P_k = P_{k-1} - [\bar{f}_k - \underline{f}_k] \tag{20}$$

$$c_r(k) = \frac{D_k}{P_k} \tag{21}$$

if  $c_r(k) \geq c_{max}$  then  $c_{max} = c_l(k)$  otherwise stop and do  $c_r = c_{max}$

If the above condition is satisfied at some point stops the iteration cycle; the latest results are those for  $c_l(\tilde{A})$  and  $c_r(\tilde{A})$ .

### 3.2. Yager Index rank for IT2FNs

Ronald Yager [24] has proposed one of the most important ranking methods for fuzzy sets. Based on the works of Figueroa-García & Pachón-Neira [6], Chaudhuri & Rosenfeld [4], and Hung & Yang [8] regarding  $\alpha$  levels for computing distances, we present the Yager Index for IT2FNs as follows:

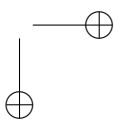
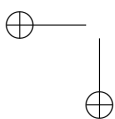
$$I(\tilde{A}) := \frac{1}{2} \int_{[0,1]} [\check{A}_\alpha^U + \hat{A}_\alpha^L, \check{A}_\alpha^L + \hat{A}_\alpha^U] d\alpha, \tag{22}$$

in the continuous case, and

$$I(\tilde{A}) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [(\check{A}_{\alpha_i}^U + \hat{A}_{\alpha_i}^L), (\check{A}_{\alpha_i}^L + \hat{A}_{\alpha_i}^U)/2] \Delta_{\alpha_i}, \tag{23}$$

in the discrete case, where  $\Delta_{\alpha_i} = \alpha_i - \alpha_{i-1}$  is the size of the partition (also known as the step size of the Riemann's integral).

YIR leads to an interval set defined as  $I(\tilde{A}) := [I_l(\tilde{A}) + I_r(\tilde{A})]$  which is easier to obtain than  $C(\tilde{A})$  in the sense that any IT2FN is  $\alpha$ -convex, so the computation of  $I(\tilde{A})$  leads in some cases to closed forms. There is a limitation when using YIR over discrete variables: there is no a guarantee of having convex  $\alpha$ -cuts, so we encourage readers to use any interpolation and/or approximation method in cases where  ${}^\alpha\tilde{A}$  leads to open intervals.



### 4. Methodology of comparison

The relation between  $C(\tilde{A})$  and  $I(\tilde{A})$  is measured via subsethood between sets (see Kosko [11], Nguyen & Kreinovich [20], and Figueroa-García, Chalco-Cano & Román-Flores [5]). Consider two sets  $C(\tilde{A}), I(\tilde{A})$  the set equality and subsethood between  $C(\tilde{A}), I(\tilde{A})$  are defined as follows:

$$d_{=} = \frac{|C(\tilde{A}) \cap I(\tilde{A})|}{|C(\tilde{A}) \cup I(\tilde{A})|}, \tag{24}$$

$$d_{\subseteq} = \frac{|C(\tilde{A}) \cap I(\tilde{A})|}{|C(\tilde{A})|} \tag{25}$$

To do so, we have defined the following measures to compare  $C(\tilde{A}_i)$  to  $I(\tilde{A}_i)$ :

- Center of centroid  $C_c(\tilde{A}) = (c_l(\tilde{A}) + c_r(\tilde{A}))/2$
- Length of centroid  $l_c(\tilde{A}) = c_r(\tilde{A}) - c_l(\tilde{A})$
- Center of YIR  $I_c(\tilde{A}) = (I_l(\tilde{A}) + I_r(\tilde{A}))/2$
- Length of YIR  $l_I(\tilde{A}) = I_r(\tilde{A}) - I_l(\tilde{A})$
- Footprint of Uncertainty  $FOU(\tilde{A}) = \int_x \bar{\mu}_{\tilde{A}} dx - \int_x \underline{\mu}_{\tilde{A}} dx$
- Set equality  $d_{=,i}$  and subsethood  $d_{\subseteq,i}$

Now, we have performed 1000 simulations of three different different IT2FNs:

- Triangular:  $T^U(\bar{a}, \bar{a}, \bar{a}), T^L(\underline{a}, \bar{a}, \hat{a}),$
- Gaussian:  $G^U(\bar{a}, \hat{a}), G^L(\bar{a}, \underline{a}),$
- Non symmetric triangular (see Figure 3).

We have selected those shapes due to applicability in control and decision making problems and its easiness to implement in real world applications (see Wu & Mendel [19], Mendel [14], [16]).

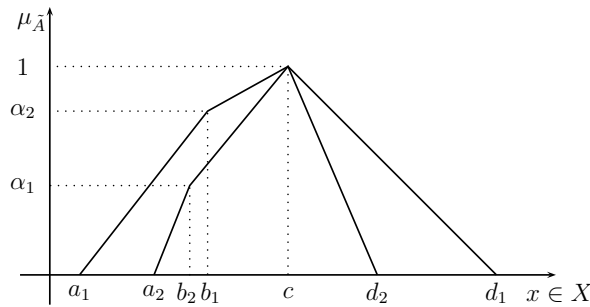


Figure 3. Non symmetric triangular IT2FN

A description of the procedure is shown in Procedure 1.

**Procedure 1** Simulation methodology

```

for i : 1 → 1000 do
    Simulate an IT2FN  $\tilde{A}_i$ 
    Compute  $C(\tilde{A}_i)$ ,  $I(\tilde{A}_i)$ ,  $C_c(\tilde{A}_i)$ ,  $I_c(\tilde{A}_i)$ , and  $FOU(\tilde{A}_i)$ 
    If  $C_l < I_l$ , set  $y_{l,i} = 1$ , 0 otherwise. If  $C_r > I_r$ , set  $y_{r,i} = 1$ , 0 otherwise
    Compute  $d_{=,i}$  and  $d_{\subseteq,i}$ , set  $D_{=,i} = d_{=,i} + d_{=,i-1}$  and  $D_{\subseteq,i} = d_{\subseteq,i} + d_{\subseteq,i-1}$ 
    Compute  $FOU_i = FOU(\tilde{A}_i) + FOU(\tilde{A}_{i-1})$ 
    Compute  $l_{C,i}$  and  $l_{I,i}$ , if  $l_{C,i} > l_{I,i}$  set  $L_i = 1$ , 0 otherwise
end for
Compute  $\overline{FOU}$ ,  $\bar{l}_C$ ,  $\bar{l}_I$ ,  $\bar{L}$ ,  $\bar{D}_{=}$ ,  $\bar{D}_{\subseteq}$ ,  $\bar{C}_c$ ,  $\bar{I}_c$ 
    
```

## 5. Results

After computing all measures shown in last section, we collect the results of the simulation procedure in Table I. This way, we present the average values for  $d_{=}$ ,  $d_{\subseteq}$  namely  $\bar{D}_{=}$ ,  $\bar{D}_{\subseteq}$  and the average values  $\overline{FOU}$ ,  $\bar{L}$ ,  $\bar{C}_c$ ,  $\bar{I}_c$  per type of IT2FN.

In Table I, *Center* is the average of all central parameters of all simulated IT2FNs. Note that  $\bar{I}_c(\tilde{A})$  and  $\bar{C}_c(\tilde{A})$  are very close to the central parameter of every set. This indicates that both methods are close to most possible granule of  $\tilde{A}$  which is somehow an expected property. Another interesting finding is that centroid is as wider as the support of  $\tilde{A}$  is, while YIR is as wider as the FOU is.

For triangular IT2FNs, a 71% of cases fulfill  $I(\tilde{A}) \subseteq C(\tilde{A})$ , a 83% of cases fulfill  $C_l(\tilde{A}) \leq I_l(\tilde{A})$ , a 88% of cases fulfill  $C_r(\tilde{A}) \geq I_r(\tilde{A})$ , and a 100% of cases  $l_c(\tilde{A}) \geq l_l(\tilde{A})$ .

For gaussian IT2FNs, a 100% of cases fulfill  $I(\tilde{A}) \subseteq C(\tilde{A})$ , a 100% of cases fulfill  $C_l(\tilde{A}) \leq I_l(\tilde{A})$ , a 100% of cases fulfill  $C_r(\tilde{A}) \geq I_r(\tilde{A})$ , and a 100% of cases  $l_c(\tilde{A}) \geq l_l(\tilde{A})$ . This happens due to the inherent symmetry of gaussian distribution which leads to centroid and YIR to converge to the same central value, and again YIR is less wide than centroid.

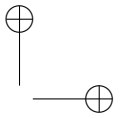
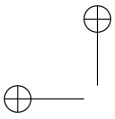
For non symmetric IT2FNs, a 57% of cases fulfill  $I(\tilde{A}) \subseteq C(\tilde{A})$ , a 98% of cases fulfill  $C_l(\tilde{A}) \leq I_l(\tilde{A})$ , a 59% of cases fulfill  $C_r(\tilde{A}) \geq I_r(\tilde{A})$ , and a 99% of cases  $l_c(\tilde{A}) \geq l_l(\tilde{A})$ . In this case YIR is still less wide than centroid, but due to the asymmetry of its left shape the YIR is greater than centroid.

**Table I.** Main results of the experiments over each set shape

Shape	Center	$\bar{C}_c(\tilde{A})$	$\bar{I}_c(\tilde{A})$	$\bar{l}_c(\tilde{A})$	$\bar{l}_l(\tilde{A})$	$\overline{FOU}(\tilde{A})$	$\bar{L}$	$\bar{D}_{=}$	$\bar{D}_{\subseteq}$
Triangular	29.87	30.10	30.04	6.99	5.11	10.21	0.56	0.685	0.699
Gaussian	75.17	75.17	75.17	5.74	3.06	6.12	0.07	0.602	0.602
Non-sym.	43.66	40.05	41.33	10.6	6.69	16.96	0.23	0.99	0.98

In Table I,  $\bar{L}$  is the average of times that  $C_c(\tilde{A}) > I_c(\tilde{A})$  which means that even when the centers of YIR and centroid are similar, there are small numerical differences. For instance, only a 7% of all gaussian simulations show this behavior (due to small numerical differences) even when all simulated gaussian IT2FNs were symmetric. It is also clear that this behavior changes in non symmetric IT2FNs.

In general, both centroid and YIR represent the central value of  $\tilde{A}$  in a good way with some



numerical differences. While YIR is a function of  $\alpha$ , the centroid is a function of the support of  $\tilde{A}$  which finally leads to different results.

## 6. Concluding Remarks

From a computational point of view, the IASCO and EKM algorithms use expensive routines whose results are wider measures than the YIR. In most of cases, the centroid is a wider measure than the YIR. For gaussian IT2FNs, a 100% of times the centroid contains the YIR, while for triangular IT2FNs only a 71% the centroid contains YIR. It seems that the FOU of  $\tilde{A}$  has a relationship to  $I(\tilde{A}), C(\tilde{A})$  since as large the FOU is, as large  $I(\tilde{A}), C(\tilde{A})$  are. Future works will corroborate those results.

In general, the YIR seems to be an easier way to compute the expected value of  $\tilde{A}$  than  $C(\tilde{A})$  due to its simplicity and good relationship to its FOU. Evidently, the shape of the set infers on the properties of  $I(\tilde{A}), C(\tilde{A})$ , so we recommend to keep in mind that  $C(\tilde{A})$  is wider than  $I(\tilde{A})$ . For gaussian shapes, both  $I(\tilde{A}), C(\tilde{A})$  obtains the same  $I_c(\tilde{A}), C_c(\tilde{A})$ , for non symmetric triangular shapes most of times  $I_c(\tilde{A}) > C_c(\tilde{A})$ , and for triangular shapes near a half of cases  $I(\tilde{A}) > C(\tilde{A})$ .

For practical applications, we recommend the use of YIR over centroid since YIR has closed equations while IASCO and EKM algorithms are iterative methods. Note that YIR has been designed for IT2FNs while IASCO and EKM algorithms have been designed for all kinds of IT2FSs.

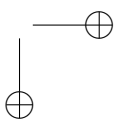
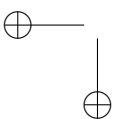
This way, YIR has a great potential in fuzzy optimization, resolution of fuzzy equations, hardware implementation of fuzzy controllers, and other applications where iterative computations are neither allowed nor feasible.

### Future work

Other experiments can be performed in the future to see other properties of  $I(\tilde{A}), C(\tilde{A})$  in other fields such computation of fuzzy functions, fuzzy optimization, fuzzy decision making, etc. Also, some theoretical differences between YIR and centroid could be interesting to be analyzed such as the relationship between  $I(\tilde{A})$  and  $FOU(\tilde{A})$  and the sizes of  $I(\tilde{A}), C(\tilde{A})$ .

## References

- [1] H. Bustince, E. Barrenechea, M. Pagola, and J. Fernandez. Interval-valued fuzzy sets constructed from matrices: Application to edge detection. *Fuzzy Sets and Systems*, 60(13):1819–1840, 2009.
- [2] Humberto Bustince. Interval-valued fuzzy sets in soft computing. *International J. of Computational Intelligence Systems*, 3(2):215–222, 2010.
- [3] Carlos Celemin and Miguel Melgarejo. A proposal to speed up the computation of the centroid of an interval Type-2 fuzzy set. *Advances in Fuzzy Systems*, 2013(Article ID 158969):17, 2013.
- [4] B.B. Chaudhuri and A. Rosenfeld. A modified hausdorff distance between fuzzy sets. *Information Sciences*, 118:159–171, 1999.
- [5] Juan Carlos Figueroa-García, Yurilev Chalco-Cano, and Heriberto Román-Flores. Distance measures for interval type-2 fuzzy numbers. *Discrete Applied Mathematics*, 197(1):93–102, 2015.





- [6] Juan Carlos Figueroa-García and Diego Fernando Pachón-Neira. On ordering words using the centroid and Yager index of an interval type-2 fuzzy number. In IEEE, editor, *Proceedings of the Workshop on Engineering Applications (WEA 2015)*, pages 1–6. IEEE, 2015.
- [7] Junhua Hu, Yan Zhang, Xiaohong Chen, and Yongmei Liu. Multi-criteria decision making method based on possibility degree of interval type-2 fuzzy number. *Knowledge-Based Systems.*, 23:21–29, 2013.
- [8] Wen-Liang Hung and Miin-Shen Yang. Similarity measures between type-2 fuzzy sets. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 12(6):827–841, 2004.
- [9] Cengiz Kahraman, Basar Öztaysi, İrem Uçal Sari, and Ebru Turanoğlu. Fuzzy analytic hierarchy process with interval type-2 fuzzy sets. *Knowledge-Based Systems.*, 59:48–57, 2014.
- [10] Nilesh N. Karnik and Jerry M. Mendel. Centroid of a type-2 fuzzy set. *Information Sciences*, 132(1):195–220, 2001.
- [11] Bart Kosko. Fuzziness vs. probability. *International Journal of General Systems*, 17(1):211–240, 1990.
- [12] M. Melgarejo, H. Bernal, and K. Duran. Improved iterative algorithm for computing the generalized centroid of an interval type-2 fuzzy set. In *2008 Annual Meeting of the North American Fuzzy Information Processing Society (NAFIPS)*, volume 27, pages 1–6. IEEE, 2008.
- [13] Miguel A. Melgarejo and Carlos Andrés Peña. Implementing interval type-2 fuzzy processors. *Computational Intelligence Magazine*, 2(1):63–71, 2007.
- [14] Jerry M. Mendel. The perceptual computer: an architecture for computing with words. *Proceedings of Modeling With Words Workshop – FUZZ-IEEE 2001*, 2001.
- [15] Jerry M. Mendel. *Uncertain Rule-Based Fuzzy Logic Systems: Introduction and New Directions*. Prentice Hall, 2001.
- [16] Jerry M. Mendel. An architecture for making judgments using computing with words. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, 12(3):325–335, 2002.
- [17] Jerry M. Mendel. Advances in Type-2 fuzzy sets and systems. *Information Sciences*, 177:84–110, 2007.
- [18] Jerry M. Mendel and Feilong Liu. Super-exponential convergence of the Karnik-Mendel algorithms for computing the centroid of an interval type-2 fuzzy set. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 15(2):309–320, 2007.
- [19] Jerry M. Mendel and D. Wu. *Perceptual Computing: Aiding People in Making Subjective Judgments*. John Wiley & Sons, 2010.
- [20] H. T. Nguyen and V. Kreinovich. Computing degrees of subsethood and similarity for interval-valued fuzzy sets: Fast algorithms. In *9th International Conference on Intelligent Technologies InTec08*, pages 47–55. IEEE, 2008.
- [21] I.B. Türksen. Interval-valued fuzzy sets and compensatory AND. *Fuzzy Sets and Systems*, 51:295–307, 1992.
- [22] Dongrui Wu and Jerry M. Mendel. Enhanced Karnik-Mendel algorithms for Interval Type-2 fuzzy sets and systems. In *Annual Meeting of the North American Fuzzy Information Processing Society (NAFIPS)*, volume 26, pages 184–189. IEEE, 2007.
- [23] Dongrui Wu and Jerry M. Mendel. Enhanced Karnik-Mendel Algorithms. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 17(4):923–934, 2009.
- [24] R. Yager. A procedure for ordering fuzzy subsets of the unit interval. *Information Sciences*, 24(1):143–161, 1981.
- [25] L. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-I. *Information Sciences*, 8:199–249, 1975.

---

### Diego Fernando Pachón-Neira

He was born in Zipaquirá - Colombia. He performs Industrial Engineering studies at the Universidad Distrital Francisco José de Caldas - Bogotá, Colombia. e-mail: diego.pachon@outlook.es

---

### Juan Carlos Figueroa-García

He is an Assistant Professor at the Engineering Faculty of the Universidad Distrital Francisco José de Caldas - Bogotá, Colombia. He obtained his bachelor degree on Industrial Engineering at the same university in 2002, a Master degree on Industrial Engineering at the same university in 2010, and a Ph.D. degree on Industry and Organizations at the Universidad Nacional de Colombia in 2014. His main interests are: fuzzy sets, fuzzy optimization, time series analysis and evolutionary optimization. e-mail: jcfigueroag@udistrital.edu.co

## Research paper

**A Hybrid Mixed-Integer Optimization and Clustering Approach to Selective Collection Services Problem of Domestic Solid Waste**

*Un Enfoque Híbrido de Agrupamiento y Optimización Entera Mixta para el Problema de Servicios de Recolección Selectiva de Residuos Sólidos Domésticos*

**Johana Andrea Patiño Chirva<sup>1</sup>, Yesica Xiomara Daza Cruz<sup>1</sup>, Eduyn Ramiro Lopez-Santana<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Universidad Distrital Francisco José de Caldas- Facultad de Ingeniería. email: erlopezs@udistrital.edu.co

Received: 06-11-2015. Modified:01-03-2016. Accepted: 05-04-2016.

**Abstract**

**Context:** Waste generation is causing profound negative impacts on our natural environment. Because of that, processes related to waste collection, transportation, transformation and final disposal have increased its importance and major efficiencies are desirable. We propose a Mixed Integer Programming model and clustering approach for waste collection and transportation process.

**Method:** An optimization model, inspired on Bogotá context is proposed, to maximize the amount of waste collected, considering real-life aspects of this activity in the city. For large instances in which there is a big computational cost, we proposed an alternative solution of two stages, firstly a clustering step and then a routing step.

**Results:** In small instances of up to 1453 collection sites grouped in 13 blocks and 51 corners, the model result in an overall collection covering of 100%. For large instances, there are variations between the results of each clustering method. The results suggests that the sweep algorithm is better to clustering the collection sites.

**Conclusions:** Our proposed model is able to find a solution the waste collection problem in Bogota case considering the vehicle capacity, maximum workday duration and the planning horizon of two days according with the collection process in Bogota. We test three clustering methods in order to group the collection sites and to reduce the complexity of the problem, and then we solve the model using a commercial solver. For the small instances, our model run very fast but in the large in-stances the computational time was increased. Future work will focus in the validation and search of solution methods improving the performance with the proposed model.

**Keywords:** clustering, optimization model, routing, scheduling, waste collection services.

**Acknowledgements:** We thank Fair Isaac Corporation (FICO) for providing us with Xpress-MP licenses under the Academic Partner Program and Centro de Investigaciones y Desarrollo Científico at Universidad Distrital Francisco José de Caldas (Colombia) by supporting partially under Grant No. 2-602-468-14. Last, but not least, the authors would like to thank the comments of the anonymous referees that significantly improved our paper.

**Language:** English.

**Open access**

© The authors; licensee: Revista INGENIERÍA. ISSN 0121-750X, E-ISSN 2344-8393

Cite this paper as: Patiño, J.A., Daza, Y.X. y Lopez-Santana, E.(2016). A Hybrid Mixed-Integer Optimization and Clustering Approach to Selective Collection Services Problem of Domestic Solid Waste. En: Ingeniería, Vol. 21, No. 2, pp. 235:247. En línea DOI: <http://dx.doi.org/10.14483/udistrital.jour.reveng.2016.2.a09>

### Resumen

**Contexto:** La generación de residuos está causando profundos y negativos impactos en nuestro ambiente. Por esto, procesos relacionados con la recolección, el transporte, la transformación y la disposición final de residuos han ganado importancia y se propende a su eficiencia. Un modelo de programación entera mixta y de agrupación es propuesto para los procesos de recolección y transporte de residuos.

**Método:** Se propone un modelo de optimización, inspirado en el contexto de Bogotá, cuyo objetivo es maximizar la cantidad de residuos recolectados teniendo en cuenta las características reales de esta actividad en la ciudad. Para instancias grandes en las que el costo computacional es muy alto, se proponen una alternativa de solución de dos etapas, clusterizar primero y rutear después.

**Resultados:** En pequeñas instancias de hasta 1453 puntos de recolección agrupados en 13 bloques y 51 esquinas, nuestro modelo logró el cubrimiento total de la recolección. Para grandes instancias, existen variaciones entre los resultados de cada método de agrupación.

**Conclusiones:** Nuestro modelo propuesto es capaz de encontrar una solución al problema de recolección de residuos en caso de Bogotá considerando la capacidad de los vehículos, la duración máxima de una jornada de trabajo y el horizonte de planificación de dos días de acuerdo con el proceso de recolección de Bogotá. Probamos tres métodos de agrupación para agrupar los sitios de recolección y para reducir la complejidad del problema, y luego se resuelve el modelo usando un paquete comercial. Para instancias pequeñas, nuestro modelo es rápido, pero en grandes instancias se aumenta el tiempo de cálculo. Los trabajos futuros se centrarán en la búsqueda y validación de métodos con el propósito de encontrar aquel que tenga un mejor desempeño con el modelo propuesto.

**Palabras clave:** clúster, modelo de optimización, ruteo, programación de tareas, recolección de residuos.

**Agradecimientos:** A Fair Isaac Corporation (FICO) por proveernos la licencia de Xpress-MP y al Centro de Investigaciones y Desarrollo Científico de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas (Colombia) por soportar este trabajo parcialmente bajo el proyecto No. 2-602-468-14. Por último, pero no menos importante, damos las gracias a los comentarios de los evaluadores anónimos que han ayudado a mejorar significativamente nuestro documento

## 1. Introduction

The transformation of cities and the increased of urban population have had several environmental impacts, one of them concern directly with consumption habits, talking about the waste generation and the practices around its last disposition. In this context, the government of Bogotá has done some programs in order to give better destination for waste. These programs not only involve environmental aspects but also there is a social point which is taking into account, the roll of waste pickers. The purpose is to have better practices for waste final disposal by its separation at source and also the participation of recyclers in its returning into the productive cycle. To make this possible waste pickers are being organized into legal organization with better conditions than they had before.

In the progress of recycler inclusion, there is a concern that has been considered, the fact that they have not any technical criterion in the selection of the route that they usually do, so it cannot be guaranteed 100% of recyclable solid waste return which is one of the principal objectives of Bogotá management programs. For this reason, we propose an optimization model inspired on Bogotá context to maximize the amount of waste recollected, considering the real features of this activity in the city.

Waste management includes the process of collection, transport, processing, recycling and final disposition. Within this process there have been taking into consideration several factors like environment, society, legislation, economic, technology and politic in order to have a framework to make decisions such as the opening of recycling centers, final disposition, acquisition of trucks and the development of efficient routes, among others.

Problems of waste collection have been studied for general materials as solid waste [1], urban solid waste [2], commercial waste [3], rural solid waste [4], and specific materials such as paper [5], glass [6], industrial waste [7], hazardous materials [8], cartridge [9] and vegetal oil [10]. The first publication about waste collection context was made in 1974 by Beltrami and Bodin who explored techniques to solve this kind of problem [11], since then numerous papers and investigations have been published. In the literature, there are different types of models that can be applied to solve this type of problem. In essence the collection of waste is a Vehicle Routing Problem (VRP) that consists in the assignment of routes to a set of vehicles to collect waste of the clients under certain constraints [12].

Among the type of models, there are: TSP (Travelling Salesman Problem) [13], CPP (Chinese Postman Problem) [14], CARP (Capacitated Arc Routing Problem) [14], PVRP (Periodic Vehicle Routing Problem) [13], VRPTW (Vehicle Routing Problem with Time Windows) [15], CVRP (Capacitated Vehicle Routing Problem) [7] [8], Day Assignment Problem, Vehicle Assignment Problem, Day and Vehicle Assignment Problem [13], Location – Routing [16], Closed-Loop Supply Chain [9], Multi-Depot Vehicle Routing Problem with Intermediate Facilities [17].

In terms of objective functions, the most common in the literature is the minimization of costs [7], minimize the total cost of shipping recyclables from zones to centers [18], minimize the travel cost [19], minimize the operation costs [13], minimize the time and the distance [17], minimize the costs of the routes and the cost of the use of a vehicle [15], but there are also objectives such as: maximize the recuperation of waste at source [5], minimize the number of vehicles or resources to use [3], minimize distance [1], minimize the risk of materials transportation [20], minimize the time of the routes [14], maximize the waste collection [21], maximize social and environmental profits [22] and maximize the compactness of the route [3].

Although there are numerous types of models for routing in waste management systems, most of them are NP-Hard which implies that its solution cannot be reached in a polynomial time. Around combinatorial models like those mentioned before there have been done several works on methods that could reduce the computational time with acceptable solution [23].

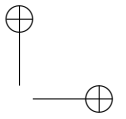
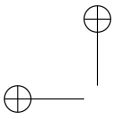
Those methods can be classified as exact methods, heuristics and metaheuristics. For exact methods, there are application of Branch and Bound, Dynamic programming and Column generation [24]. The principal limitation of these methods is its non-polynomial computational times to find solution.

Heuristics and Metaheuristics have less computational time for solving the problem. Heuristics are specific algorithm for a problem; those try to find good solutions, not necessary the optimal one. The principal types of heuristics are: Construction heuristic, that sequentially or parallel inserts new customers into the solution; two phases heuristics, these can be Cluster first-Route second or Route first- Cluster second; and local search heuristics that from an initial solution try to improve it looking in a neighborhood of solutions [23]. The principal limitation of heuristic procedures is that the solution could be a local optimum instead of a solution close to the optimal one.

Metaheuristics have the capacity of avoid local optimums as they have better exploration in solutions space. These are generic procedures, based on analogies of nature and human process. Some of the most common types of metaheuristics are: simulated annealing, tabu search, variable neighborhood search, large neighborhood search, evolutionary algorithms and ant colonies [25], [26].

We propose a hybrid approach of mixed integer programming model and clustering to solve the selective collection service scheduling and routing problem of domestic and recyclable solid waste in the Bogotá's context. We remark that this is an extended version of a short paper recently published in the Workshop on Engineering Applications - WEA2015- that was held in Bogotá, September 2015 (see [27]).

This paper is organized as follows: Section 2 shows the problem statement. In section 3, a MIP approach is stated. Section 4 presents the methods of solution of the model. Section 5 presents examples based on the information of a work zone of two organizations in an area of Bogotá, one of them is solve by the implementation of three different cluster methods. Finally, section 6 establish some conclusions and future work lines.



## 2. Problem statement

The current solid waste management in Bogotá has into account three different programs: The Master Plan for Solid Waste Integral Management (PMIRS), Bogotá Zero Waste and the Inclusion Plan for informal recyclers [28]. The first one is the PMIRS, which was established in 2006 in order to have a global view of general waste management where territorial-environmental, social-productive and economic-financial aspects have been considered. From PMIRS there was made a pilot program in which macro-routes were implemented in order to pick recyclable waste. Those routes were the same as ordinary collection routes of the principal waste operators in the city. With this strategy, 37% of the population was covered. Despite having had this cover and having influenced the segregation waste habit of this population, there was no evidence of social inclusion [29] which was a constitutional mandate. With this premise, in 2012 the program Bogotá Zero Waste and the Inclusion Plan for informal recyclers were presented.

Bogotá Zero Waste has six principal subjects: sustainable production strategy, culture of reduction and separation at source, recyclable model for Bogotá, final use and minimization of waste disposition in Doña Juana Landfill, zero debris and integral management of special and hazardous waste.

In the Inclusion Plan for informal recyclers, they have been organized into legal organizations called ORA (Organization of Authorized Recyclers), regulated by the Administrative Special Unit of Public Services (UAESP). The principal objective is to bring them better conditions so fundamental rights could be assure in order to reduce their level of vulnerability [30].

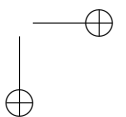
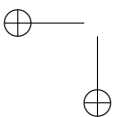
Each ORA has a number of partners who have the recycling labor in Bogotá. They make the collection following historical routes but they do not have any technical criterion in their normal itineraries so it cannot be guaranteed the maximization of recyclable waste collection.

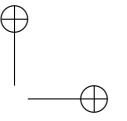
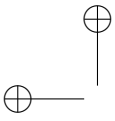
In this context it is proposed an optimization model for de design of selective routes, based on some assumptions which are listed below:

- Based on the program Bogotá Zero Waste, people in the city made separation at source. In this separation, ordinary waste is disposed in black bag and the recyclable one in white bag.
- Collection is made just for recyclable solid waste generated by residential users.
- The waste volume will not exceed the vehicle volume capacity. The constraint is the weight capacity.
- Users dispose their waste just one time per day.
- Ordinary waste operators make their route every two days, when this happens they collect every kind of waste so selective collection will be limited by this situation in two days. There are two consequences causes by this event; first, if recyclers do not recollect waste they will not be able to do so, as the total amount is collected by waste operators. Second, as all residues are collected the next day there is not accumulation and blocks have not waste at the beginning of the day.
- The ORA has eight-hour workday according to national legislation.
- When vehicles enter the area of collection have full capacity is available.

## 3. MIP Approach

We propose a mixed integer programming model for the collection services of recyclable waste in the Bogotá's context. This is based on the Vehicle Routing Problem (VRP) which is a generalization of TSP proposed by Dantzig and Ramser in 1959 [23]. In addition, there were made some modifications according to the real features of waste collection system in a city. In the next four sections, we describe the index sets, parameters, decision variables and mathematical formulation of the model.





### 3.1. Index sets

The index set are described as follows:

- $I : \{I_1, I_2, I_3, \dots, I_\alpha\}$  Set of blocks indexed by  $i$ .
- $J : \{J_0, J_1, J_2, J_3, \dots, J_{Deposit}\}$  Set of corners indexed by  $j$ .
- $J' : \{J_1, J_2, J_3, \dots, J_n\}$  Set of corners indexed by  $j$  from users of the service.
- $K : \{K_1, K_2, K_3, \dots, K_\sigma\}$  Set of vehicles indexed by  $k$ .
- $T : \{T_1, T_2\}$  Set of days indexed by  $t$ .
- $S : \{S_1, S_2\}$  Set of accumulation states indexed by  $s$ .

### 3.2. Parameters

The parameters are described as follows:

- $R_{jts}$ : Potential recyclable waste, dispose at corner  $j$  in the day  $t$ , with an accumulation state  $s$ ,  $j \in J'$ ,  $t \in T$ ,  $s \in S$ .
- $C_k$ : Capacity of the vehicle  $k$ ,  $k \in K$ .
- $v_k$ : Speed of the vehicle  $k$ ,  $k \in K$ .
- $T_{js}$ : Service time in corner  $j$  with an accumulation state  $s$ ,  $j \in J'$ ,  $s \in S$ .
- $d_{pq}$ : Distance of the  $arc(p, q)$ ,  $(p, q) \in J$ .
- $G$ : Hours of working day.
- $N$ : Number of blocks including origin and depot.
- $a_{ij}$ : 1 when the corner  $j$  belongs to the block  $i$ , 0 otherwise,  $i \in I$ ,  $j \in J$ .

### 3.3. Decision variables

The decision variables are described as follows:

- $\chi_{pqkt}$ : Take the value of 1 if an  $arc(p, q)$  is visit by the vehicle  $k$  in the day  $t$  and the value of 0 otherwise,  $p, q \in J | p \neq q$ ,  $k \in K$ ,  $t \in T$ .
- $w_{qkts}$ : Take the value of 1 if waste in the corner  $q$  are recollected by the vehicle  $k$ , the day  $t$  with an accumulation state  $s$  and the value of 0 otherwise,  $q \in J$ ,  $k \in K$ ,  $t \in T$ ,  $s \in S$ .
- $u_{jkt}$ : Auxiliary variable associated to the corner  $j$  visited by the vehicle  $k$  in the day  $t$ ,  $j \in J$ ,  $k \in K$ ,  $t \in T$ .

### 3.4. Model

The mathematical formulation of our MIP model is described as follows:

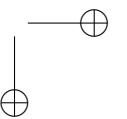
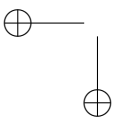
$$MaxZ = \sum_{q \in J'} \sum_{k \in K} \sum_{t \in T} \sum_{s \in S} R_{qts} w_{qkts} \quad (1)$$

Subject to:

$$\sum_{p \in J} \sum_{q \in J'} \sum_{k \in K} \sum_{t \in T} a_{iq} \chi_{pqkt} \geq 1 \quad \forall i \in I \quad (2)$$

$$\sum_{p \in J} \sum_{q \in J'} \sum_{k \in K} a_{iq} \chi_{pqkt} \leq 1 \quad \forall i \in I, t \in T \quad (3)$$

$$\sum_{p \in J/p \neq h} \chi_{phkt} - \sum_{q \in J/q \neq h} \chi_{hqkt} = 0 \quad \forall h \in J', k \in K, t \in T \quad (4)$$



$$\sum_{q \in J/q \neq J_0} \chi_{pqkt} = 1 \quad \forall p \in J/p = J_0, k \in K, t \in T \quad (5)$$

$$\sum_{p \in J/p \neq J_{Deposit}} \chi_{pqkt} = 1 \quad \forall q \in J/q = J_{Deposit}, k \in K, t \in T \quad (6)$$

$$\sum_{p \in J'} \sum_{q \in J} \sum_{s \in S} \left( \frac{d_{pq}}{v_k} + T_{qs} \right) (\chi_{pqkt}) \leq G \quad \forall k \in K, t \in T \quad (7)$$

$$\sum_{q \in J'} \sum_{s \in S} R_{qts} w_{qkts} \leq C_k \quad \forall k \in K, t \in T \quad (8)$$

$$u_{pkt} - u_{qkt} + N \chi_{pqkt} \leq N - 1 \quad \forall p \in J/p \neq J_{Depot}, q \in J/q \neq J_0 \wedge p \neq q, k \in K, t \in T \quad (9)$$

$$\sum_{q \in J'} \sum_{k \in K} a_{iq} w_{qkt_1 s_1} - \sum_{p \in J} \sum_{q \in J'} \sum_{k \in K} a_{iq} \chi_{pqkt_1} = 0 \quad \forall i \in I \quad (10)$$

$$\sum_{q \in J'} \sum_{k \in K} (a_{iq} w_{qkt_2 s_1} + a_{iq} w_{qkt_2 s_2}) - \sum_{p \in J} \sum_{q \in J'} \sum_{k \in K} a_{iq} \chi_{pqkt_2} = 0 \quad \forall i \in I \quad (11)$$

$$\sum_{q \in J'} \sum_{k \in K} (a_{iq} w_{qkt_1 s_1} + a_{iq} w_{qkt_2 s_2}) = 1 \quad \forall i \in I \quad (12)$$

$$\sum_{s \in S} w_{qkts} - \sum_{p \in J} \chi_{pqkt} = 0 \quad \forall q \in J', k \in K, t \in T \quad (13)$$

$$\chi_{pqkt} \in \{0, 1\} \quad \forall p, q \in J, k \in K, t \in T \quad (14)$$

$$w_{qkts} \in \{0, 1\} \quad \forall q \in J, k \in K, t \in T, s \in S \quad (15)$$

$$u_{jkt} \geq 0 \quad \forall j \in J, k \in K, t \in T \quad (16)$$

The objective function (1) maximizes the amount of waste recollected. Constraints (2) establish that Blocks must be visited at least one time in two days. Constraints (3) limit visits per day to one. Constraints (4) are the balance flow. Constraints (5) and (6) force vehicles must start at origin, along one unique route, and finish at depot. Constraints (7) limit the workday hours according to national legislation. Constraints (8) put the maximum capacity of each vehicle. Constraints (9) eliminate sub tours. Constraints (10) ensure that when an arc is activated there is waste recollection in day one. Constraints (11), as well as equation (10), ensure recollection and also these do not allow double accumulation state in day two. Constraints (12) control the state of day one and day two to prevent accumulation in day two when collection have been done in day one. Constraints (13) show the relation between the  $\chi_{pqkt}$  arc variable and the recollection variable  $w_{qkts}$ . Constraints (14) and (15) determine the nature of variables  $\chi_{pqkt}$  and  $w_{qkts}$  as binary. Constraints (16) establish the non-negativity of variable  $u_{jkt}$ .

## 4. Solution methods

To solve the model proposed in section 3.4, we proposed a method of *cluster-first route-second* in which capacity constraint of each vehicle assigned to a cluster must be respected. The strategy is to create clusters grouping blocks and then solve the proposed model. Moreover, there are applied three different methods of cluster. Its purpose is to evaluate which one brings better solutions.

### 4.1. A Centroid-based heuristic algorithm

This algorithm is based on the geometry of geometrical centers, around which the clusters are generated. This method is divided into two phases. In the first phase, clusters are constructed by selecting the farthest node from the origin, among the nodes that have not been assigned, and it is generated a first cluster; then the geometrical center of the cluster (17), in order to add the nodes closer to the GC, considering the defined capacity of each cluster [31], [32].

$$GC(l_i) = \left( \sum_{i=0}^m \frac{w_i^x}{m}, \sum_{i=0}^m \frac{w_i^y}{m} \right) \quad (17)$$

Where  $w_i^x$  and  $w_i^y$  are the coordinates in x, y of the nodes that belong to the cluster. Table I shows the pseudocode of the first phase. After of generating clusters, it is necessary to adjust them in a second phase, in Table II the process is shown.

**Table I.** Pseudo code for the Centroid-based Heuristic Algorithm, Phase I

```

Start phase I
Set  $i = 0$  and  $Q = \text{vehicle capacity}$ 
while (unvisited block exist)
 $v_j$  = the farthest block among un-clustered blocks from the origin
Generate cluster  $l_i$  with  $v_j$ 
Set capacity of  $l_i = Q$ 
while (waste of  $v_j$  do not exceed available capacity of  $l_i$ )
    Add  $v_j$  to  $l_i$ 
    Reduce available capacity of  $l_i$  by  $v_j$ 
    Calculate  $GC(l_i)$ 
     $v_j$  = the closest block among un-clustered blocks from  $GC(l_i)$ 
End while
 $i = i + 1$ 
End while
End phase I
    
```

**Table II.** Pseudo code for the Centroid-based Heuristic Algorithm, Phase II

```

Start phase II
Set  $L = \{l_0, l_1, \dots, l_m\}$ 
For  $i = 0$  to  $m$  repeat
For every block  $v_k$  in  $l_i$ 
For every  $l_j$  in  $L$ 
If ( $i \neq j$  and  $v_k$  is closer to  $GC(l_j)$  than  $GC(l_i)$  and available capacity of  $l_j$  is equal to or bigger than waste of  $v_k$ )
    Move  $v_k$  from  $l_i$  to  $l_j$ 
    Recalculate  $GC(l_i)$  and  $GC(l_j)$ 
End if
End for
End for
End for
End phase II
    
```

## 4.2. Sweep algorithm

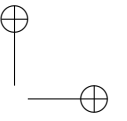
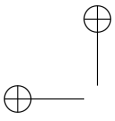
This heuristic gives shape to the cluster based on the geometry of polar coordinates. From an origin point, there is displayed a straight that rotates on the zone where nodes must be assigned. The area cover by this straight is a cluster only while capacity constraints are respected [33]. Table III shows the pseudocode.

**Table III.** Pseudo code for the of the Sweep Algorithm

```

Start initialization
Set  $i = 0$  and  $Q = \text{Vehicle capacity}$ 
Calculate polar coordinates of blocks ( $\rho_i, \theta_i$ )
Sort the blocks by  $\theta_i$ 
If ( $\theta_i = \theta_{i+1}$ )
    Sort the blocks by  $\rho_i$ 
End If
End Initialization
Start cluster generation
Select an initial block  $v_j$ 
Do  $k = 1$  y  $C_k = \{v_j\}$ 
while (unvisited block exist)
    Visit the next block  $v_{j+1}$ 
If (Waste generated in the block  $v_{j+1}$  do no break capacity restrictions)
         $C_k = C_k \cup \{v_j\}$ .
    Else
         $k = k + 1$  and create  $C_k = \{v_j\}$ 
    End if
End while
End cluster generation
    
```





### 4.3. Proposed localization model

Another way to establish cluster is the application of localization models. Fisher and Jaikumar proposed a Gen-eralized Assignment Problem (GAP) for which initial seeds must be selected [34]. Another approach was proposed by Bramel and Simchi-Levi in which some nodes are previously selected to be possible locations for concentrators [33]. Around these concentrators other nodes are assigned as terminals and then, cluster are determined; for this model seeds are found from the solution of the problem, but there must be previous selection of possible locations [33]. We propose a modified approach in which concentrators of cluster can be selected from the entire set of nodes.

#### 4.3.1. Index sets

The index set are described as follows:

- $I : \{I_1, I_2, I_3, \dots, I_m\}$  Set of blocks indexed by  $i$ .
- $J : \{J_0, J_1, J_2, J_3, \dots, J_n\}$  Set of concentrators indexed by  $j$ .
- $K : \{K_1, K_2, K_3, \dots, K_\sigma\}$  Set of vehicles indexed by  $k$ .

#### 4.3.2. Parameters

The parameters are described as follows:

- $f_i$ : Distance between the origin and a concentrator  $j$ .
- $c_{ij}$ : Distance between a concentrator  $j$  and a block  $i$ .
- $R_i$ : Amount of waste generated by the block  $i$ .
- $C_{jk}$ : Capacity of the concentrator  $j$  for the assigned vehicle  $k$ .

#### 4.3.3. Decision variables

The decision variables are described as follows:

- $x_{ij}$ : Take the value of 1 if block  $i$  is assigned to the concentrator  $j$ , 0 otherwise.
- $y_{jk}$ : Take the value of 1 if the vehicle  $k$  is assigned to the concentrator  $j$ , 0 otherwise.

#### 4.3.4. Model

The mathematical formulation of our MIP model is described as follows:

$$\text{Min } Z = \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} f_j y_{jk} + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} \quad (18)$$

Subject to:

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in I \quad (19)$$

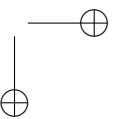
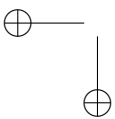
$$\sum_{k \in K} C_{jk} y_{jk} - \sum_{i \in I \setminus \{0\}} R_i x_{ij} \geq 0 \quad \forall j \in J \quad (20)$$

$$\sum_{j \in J} y_{jk} = 1 \quad \forall k \in K \quad (21)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, j \in J \quad (22)$$

$$y_{jk} \in \{0, 1\} \quad \forall j \in J, k \in K \quad (23)$$

The objective function (18) minimizes the distance between the origin and each block that could be a concentrator and the distance between concentrators and the blocks associated with a concentrator. Constraints (19) force each block to belong only to one concentrator. Constraints (20) ensure that cluster capacity is respected. Constraints (21) limit to one the number of concentrators assigned to each vehicle. Constraints (22) and (23) define the nature of variables  $x_{ij}$  and  $y_{jk}$  as binaries.

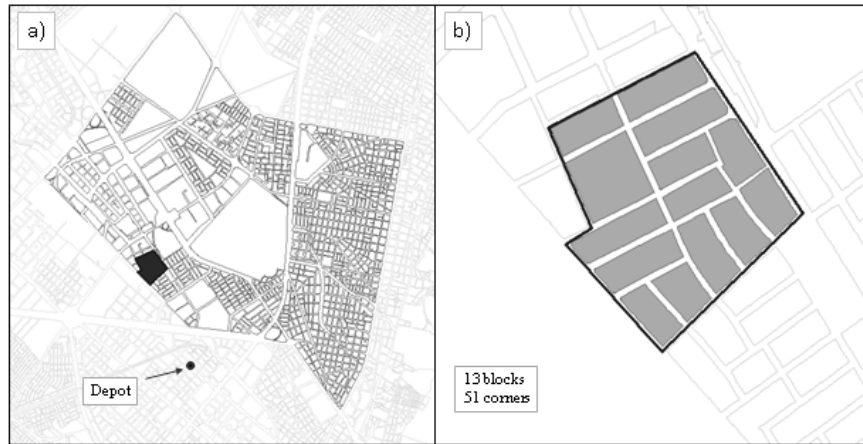


## 5. Results

We run some experiments in the context of waste collection system in Bogotá. We selected two ORAs that do collection in the area of Teusaquillo, where there are eight organizations that have a delimited zone of work according to their historical routes. The ORAs selected are “La Colombianita” (see Figure 1) whose area has less users and it is possible to design a route with the proposed model in an acceptable computational time. In addition, we selected the ORA called “EMRS” (see Figure 2) that has more blocks in order to apply cluster methods and generate a comparison.

### 5.1. Case 1: La Colombianita

Table IV and Table V presents the information about “La Colombianita” case.



**Figure 1.** (a) Work zone of “La Colombianita” in Teusaquillo, area of Bogotá. (b) Blocks and corners of the work zone of “La Colombianita”.

**Table IV.** Parameters of “La Colombianita”

Users	3.860
Number of houses	1.453
Number of blocks	13
Number of corners	51
Amount of potentially recyclable waste per day (Kg)	302,2187

**Table V.** Transportation modes of “La Colombianita”

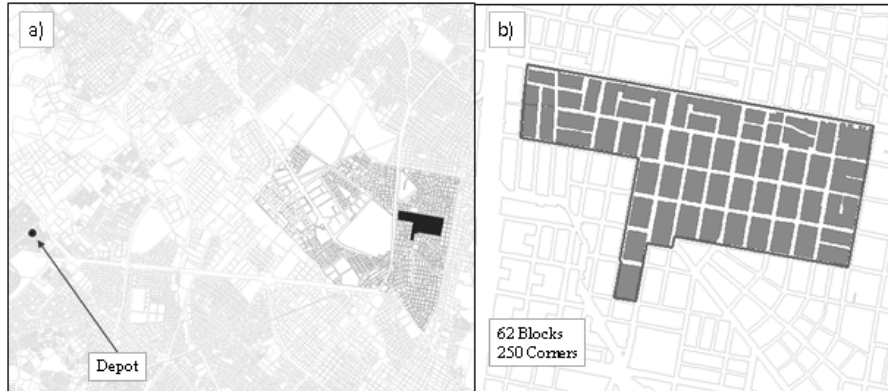
Type	Quantity	Speed	Capacity
Truck	2	23	2.800
Wheelbarrow	1	4,4	120

Trucks were codified as K1 and K2, and the wheelbarrow was codified as K3. Corners were organized by a number from 1 to 51. The distances of combination among corners were calculated applying Floyd-Warshall Algorithm, considering the real direction of the streets. The legal workday is eight hours. In the solution (see Table VI)  $J_0$  corresponds at origin and  $J_{52}$  is the depot. Each corner belongs to a different block and every constraint is satisfied.

**Table VI.** Results with “La Colombianita”

Vehicle – Day	Route	Collected Waste (Kg)	Distance (m)
K1 – T1	J0-J32-J26-J41-J39-J52	32,41413	669,0741159
K2 – T1	J0-J22-J7-J29-J2-J47-J15-J11 -J52	236,372605	1.937,41542
K1 – T2	J0-J10-J30-J39-J47-J20-J52	161,365995	1.490,099395
K2 – T2	J0-J33-J15-J4-J8-J26-J43-J49-J16 -J52	174,28467	2.164,435921
<b>Total</b>		604,4374	6.891,190868

## 5.2. Case 2: EMRS



**Figure 2.** (a) Work zone of “EMRS” in Teusaquillo, area of Bogotá. (b) Blocks and corners of the work zone of “EMRS”.

In Table VII and Table VIII is presented the information about “EMRS”.

Users	8.741
Number of houses	3.796
Number of blocks	62
Number of corners	250
Amount of potentially recyclable waste per day (Kg)	651,82

Type of transport	Quantity	Speed (Km/h)	Capacity (Kg)
Truck	1	23	800

For each clustering method, we have joined the results of every cluster in order to obtain just one route. The connections were made having into account the distance between the origin, the first and last nodes of the clusters.

Table IX shows the results with the centroid-based heuristic, where 0 corresponds at origin and  $F$  is the depot. Each corner belongs to a different block and every constraint is satisfied.

Day	Route	Distance (m)	Collected Waste (Kg)
T1	0 – 133 – 147 – 190 – 136 – 39 – 246 – 130 – 145 – 56 – 119 – 106 – 138 – 115 – 111 – 69 – 75 – 218 – 224 – 23 – 211 – 244 – 8 – 12 – 43 – 19 – 248 – 27 – 155 – 11 – 40 – 163 – 31 – 206 – 195 – 194 – 51 – F	47006,47	435,88
T2	0 – 781 – 873 – 680 – 773 – 789 – 753 – 744 – 760 – 754 – 697 – 766 – 709 – 856 – 703 – 783 – 711 – 748 – 2.688 – 898 – 993 – 331 – 665 – 389 – 693 – 330 – 388 – 852 – 3.350 – 669 – 834 – 678 – 3.305 – 738 – 659 – 700 – 685 – 687 – 735 – 875 – 770 – 827 – 880 – 870 – 774 – 730 – 902 – 714 – 988 – 726 – 857 – 861 – 695 – 890 – 883 – 692 – 872 – 878 – F	67174,06	782,43
Total		114.180,51	1.218,31

Table X presents the results with the sweep algorithm, where 0 corresponds at origin and  $F$  is the depot. Each corner belongs to a different block and every constraint is satisfied.

**Table X.** Results with the sweep heuristic of “EMRS”

Day	Route	Distance (m)	Collected Waste (Kg)
T1	0-3.350-709-682-874-783-780-786-678-902-2.688-899-1.054-741-748-756-753-735-884-872-891-877-F	51.458,70	391,71
T2	0-769-712-760-894-1.299-658-904-899-857-3.324-825-868-684-671-848-1.054-750-746-736-755-741-701-720-777-887-679-780-786-689-783-873-988-906-707-662-668-675-696-691-879-864-331-391-327-992-655-722-829-729-994-730-854-835-865-988-906-707-662-668-675-F	63.380,90	796,77
Total		114.839,60	1.188,48

Table XI shows the results with the sweep algorithm, where 0 corresponds at origin and  $F$  is the depot. Each corner belong to a different block and every constraint is satisfied.

**Table XI.** Results with the location model proposed of “EMRS”

Day	Route	Distance (m)	Collected Waste (Kg)
T1	0-758-789-694-751-754-781-769-745-761-755-692-777-750-780-687-730-678-725-906-850-726-677-661-331-668-662-387-708-2.688-719-654-716-713-859-705-332-3.305-832-1.052-836-985-672-989-739-1.010-846-827-735-995-701-697-F	46.921,29	456,89
T2	0-770-744-687-690-752-779-3.351-1.053-832-987-835-682-845-738-1.009-996-734-992-825-332-705-747-686-754-719-390-717-712-2.688-858-906-849-722-733-677-679-853-727-388-709-663-667-331-659-769-758-694-699-F	49.335,03	548,91
Total		96.256,32	1.005,80

For EMRS, the potential amount of waste to be collected was 1.303,64 Kg in both days. With the centroid-base heuristic were collected 91%, with sweep algorithm 93% and with localization model 77%. In a first view of the results, we could infer that the best solution method is the sweep algorithm. Nevertheless, there must be accomplished several tests to have a strong validation of the performance of each method.

## 6. Conclusions

We present a MIP approach model for selective waste collection as a variant of a VRP model. The problem was applied in real world case in an area of Bogotá, Colombia. From literature review, in selective waste collection there are several models and solution approach. In general, models depend on waste collection necessities and its environment. The selected MIP approach was VRP that takes into account additional aspects such as corners which are the nodes that must belong to specific blocks. Waste is generated by each block and its accumulation is allowed just until ordinary collection occurs.

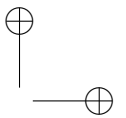
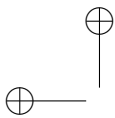
In the solution with the ORA “La Colombianita”, all recyclable waste are collected so it can be ensured 100% of its return to the productive cycle. The model proposed can be applied in contexts where separation at source is a regular activity, and also where there are fixed points so that users could dispose their waste.

We analyzed zones with more number of blocks that are served by other organizations. However, it could not be found an optimal solution in a reasonable computational time. So we perform some test with three clustering methods. These methods could have influenced the solution when the MIP approach was applied, since all off them look for the minimization of distance within the cluster. For these reasons, initial parameters have some improvement in the reduction of distances which could mean more efficiency but not necessarily higher coverage. Future work will concentrate on validation of results in order select the most appropriate method.

## References

- [1] T. P. B. Brandão Vecchi, L. M. de Matos Jorge, M. A. da Silva Sá Ravagnani, and P. R. Paraíso, “Optimization of planning routes in solid waste collection,” *Journal of Chemistry and Chemical Engineering*, vol. 8, no. 6, pp.

- 596–601, Jun. 2014.
- [2] R. S. Xavier, A. C. Lisboa, D. A. G. Vieira, and R. R. Saldanha, “Heurística para modelagem e minimização do consumo de combustível para rotas de coleta de lixo,” Bento Gonçalves, 2010, p. 12.
  - [3] B.-I. Kim, S. Kim, and S. Sahoo, “Waste collection vehicle routing problem with time windows,” *Computers & Operations Research*, vol. 33, no. 12, pp. 3624–3642, Dec. 2006.
  - [4] T. Y. Alfonso Llorente, “Optimización de rutas de recogida de residuos en zonas mixtas urbana-rurales y orografía singular,” Trabajo de Fin de Grado, Universidad de la laguna, La Laguna, 2014.
  - [5] R. K. Pati, P. Vrat, and P. Kumar, “A goal programming model for paper recycling system,” *Omega*, vol. 36, no. 3, pp. 405–417, Jun. 2008.
  - [6] F. Beijoco, V. Semiao, and Z. Zsidgraiová, “Optimization of a municipal solid waste collection and transportation system,” Lisboa, Portugal, 2011.
  - [7] S. Simón, J. Demaldé, J. Hernández, and M. Carnero, “Optimización de Recorridos para la Recolección de Residuos Infecciosos,” *Información tecnológica*, vol. 23, no. 4, pp. 125–132, 2012.
  - [8] A. Méndez, S. Simón, D. Palumbo, E. Chiachera, and M. Carnero, “Dos Enfoques para la Solución del Problema de Ruteo De Vehículos (CVRP): Aplicación a un Caso Real de Recolección de Residuos,” *Mecánica Computacional*, vol. XXIX, pp. 9367–9377, Nov. 2010.
  - [9] Y. T. Chen, F. T. S. Chan, S. H. Chung, and B. Niu, “Closed-Loop Supply Chain Network Optimization For Hong Kong Cartridge Recycling Industry,” Hong Kong Polytechnic University, Department of Industrial and Systems Engineering, Hong Kong, 2013.
  - [10] . Aksent, O. Kaya, F. S. Salman, and Y. Akça, “Selective and periodic inventory routing problem for waste vegetable oil collection,” *Optim Lett.*, vol. 6, no. 6, pp. 1063–1080, Jan. 2012.
  - [11] J. Beliën, L. De Boeck, and J. Van Ackere, “Municipal Solid Waste Collection and Management Problems: A Literature Review,” *Transportation Science*, vol. 48, no. 1, pp. 78–102, Nov. 2012.
  - [12] K. Bührkal, A. Larsen, and S. Ropke, “The Waste Collection Vehicle Routing Problem with Time Windows in a City Logistics Context,” *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, vol. 39, pp. 241–254, 2012.
  - [13] T. Bianchi-Aguiar, M. A. Carravilla, and J. F. Oliveira, “Vehicle routing for mixed solid waste collection - comparing alternative hierarchical formulations,” *Strathprints Institutional Repository*, p. 137, 2011.
  - [14] R. J. A. Fortunato, “Problema de determinação de circuitos de recolha de resíduos sólidos urbanos da Câmara Municipal de Oeiras,” *Maestria, Universidade de Lisboa. Instituto Superior de Economia e Gestão.*, Lisboa, Portugal, 2014.
  - [15] L. Bardales, “Heurística para la colecta de residuos domiciliarios en la ciudad de Trujillo basado en el ruteo de vehículos con ventana de tiempo,” Universidad Nacional de Trujillo, Trujillo, Perú, Informe de Trabajo de Graduación 3, Dec. 2013.
  - [16] A. M. Benjamin and J. E. Beasley, “Metaheuristics for the waste collection vehicle routing problem with time windows, driver rest period and multiple disposal facilities,” *Computers & Operations Research*, vol. 37, no. 12, pp. 2270–2280, Dec. 2010.
  - [17] I. Markov, S. Varone, and M. Bierlaire, “Vehicle routing for a complex waste collection problem,” presented at the 14th Swiss Transport Research Conference (STRC), 2014.
  - [18] E. A. V. Toso and D. Alem, “Effective location models for sorting recyclables in public management,” *European Journal of Operational Research*, vol. 234, no. 3, pp. 839–860, May 2014.
  - [19] S. Fooladi, H. Fazlollahtabar, and I. Mahdavi, “Waste Collection Vehicle Routing Problem Considering Similarity Pattern of Trashcan,” *International Journal of Applied Operational Research - An Open Access Journal*, vol. 3, no. 3, pp. 0–0, Jun. 2013.
  - [20] F. Samanlıoğlu, “A multi-objective mathematical model for the industrial hazardous waste location-routing problem,” *European Journal of Operational Research*, vol. 226, no. 2, pp. 332–340, Apr. 2013.
  - [21] C. S. Fatih Rahim, “A location-routing problem in glass recycling,” *Annals of Operations Research*, vol. 223, no. 1, pp. 329–353, 2014.
  - [22] E. D. Antmann, X. Shi, N. Celik, and Y. Dai, “Continuous-discrete simulation-based decision making framework for solid waste management and recycling programs,” *Computers & Industrial Engineering*, vol. 65, no. 3, pp. 438–454, Jul. 2013.
  - [23] L. B. R. Medina, E. C. G. L. Rotta, and J. A. O. Castro, “Una Revisión al Estado del Arte del Problema de Ruteo de Vehículos: Evolución Histórica Y Métodos De Solución,” *Ingeniería*, vol. 16, no. 2, pp. 35–55, Dec. 2011.
  - [24] S. Pirkwieser and G. R. Raidl, “A column generation approach for the periodic vehicle routing problem with time windows,” in *International network optimization conference*, Pisa, Italia, 2009, vol. 2009.



- [25] F. Baniel, "Prise en compte d'objectifs de stabilité pour l'organisation de collectes de déchets," Doctorat, Université de Toulouse, 2009.
- [26] R. A. J. Pirabán, "Métodos Aproximados para la Solución del Problema de Enrutamiento de Vehículos (Dic 2008)," Universidad Nacional de Colombia, Dec-2018.
- [27] Y. X. Daza Cruz, J. A. Patiño Chirva, and E. R. López-Santana, "A mixed integer optimization model to design a selective collection routing problem for domestic solid waste," in 2015 Workshop on Engineering Applications - International Congress on Engineering (WEA), 2015, pp. 1–5.
- [28] JICA and UAESP, "Proyecto de Estudio del Plan Maestro para el manejo Integral de Residuos sólidos en Bogotá, D.C.," Unidad Administrativa Especial de Servicios Públicos, Bogotá, Colombia, 3, Nov. 2013.
- [29] Corte Constitucional, Auto 275 de 2011. 2011, p. 190.
- [30] UAESP, "Esquema de Metas a Cumplir para la Inclusión de la Población Recicladora en la gestión pública de los residuos sólidos en la ciudad de Bogotá D.C.," Secretaría del Hábitat, Bogotá, Colombia, 2011.
- [31] K. Shin and S. Han, "A Centroid-based Heuristic Algorithm for the Capacitated Vehicle Routing Problem," *Computing and Informatics*, vol. 30, no. 4, pp. 721–732, Jan. 2012.
- [32] E. R. López-Santana and J. de J. Romero Carvajal, "A hybrid column generation and clustering approach to the school bus routing problem with time windows," *Ingeniería*, vol. 20, no. 1, pp. 111–127, Mar. 2015.
- [33] A. Olivera, "Heurísticas para Problemas de Ruteo de vehículos," Universidad de la República de Montevideo, Uruguay, Reporte técnico serie 04 - 08, Aug. 2004.
- [34] S. Ropke, "Heuristic and exact algorithms for vehicle routing problems," Doctorate, University of Copenhagen, Copenhagen, 2005.

---

#### **Johana Andrea Patiño Chirva**

She was born in Bogotá, Colombia. She obtained his bachelor degree on Industrial Engineer of the Universidad Distrital Francisco José de Caldas-Bogotá, Colombia in 2015.  
e-mail: japatinoc@correo.udistrital.edu.co

---

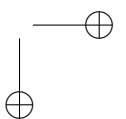
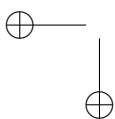
#### **Yesica Xiomara Daza Cruz**

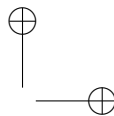
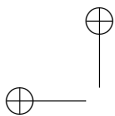
She was born in Bogotá, Colombia. She obtained his bachelor degree on Industrial Engineer of the Universidad Distrital Francisco José de Caldas-Bogotá, Colombia in 2015  
e-mail: yxdazac@correo.udistrital.edu.co

---

#### **Eduyn Ramiro López-Santana**

He is Assistant Professor at the Engineering Faculty of the Universidad Distrital Francisco José de Caldas - Bogotá, Colombia. He obtained his bachelor degree on Industrial Engineering at the same university in 2009, a Master degree on Industrial Engineering at the Universidad de los Andes –Bogotá, Colombia in 2013, and currently he is performing Doctoral studies on Engineering at the Universidad Distrital Francisco José de Caldas.  
e-mail: erlopezs@udistrital.edu.co





## Instrucciones para los Autores

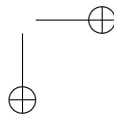
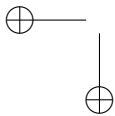
### Introducción

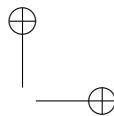
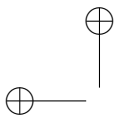
La revista INGENIERÍA es una publicación periódica-científica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Tiene como propósito principal divulgar los resultados de investigación de la comunidad académica de la Facultad del país y del exterior. Por tal motivo, los artículos que se publican en la revista deben tener relación con el trabajo en ingeniería, en general, y con las derivaciones de la ingeniería que se desarrollan en la Universidad, en particular. Su frecuencia es cuatrimestral (tres ediciones por año). Todo artículo es evaluado de manera doble-ciega por pares revisores antes de ser calificado como candidato para publicar. El Comité Editorial, tomando en cuenta los conceptos emitidos por los evaluadores y el cumplimiento de las políticas editoriales de la Revista, decide la publicación del artículo en una edición futura. Todos los artículos presentados a la revista INGENIERÍA deben ser inéditos. No se publicarán artículos que hayan sido anteriormente publicados o que hubieren sido sometidos por el autor o los autores a otros medios de difusión nacional o internacional para su publicación.

### Clasificación de los artículos

La clasificación de los artículos dentro de la revista INGENIERÍA se hace de acuerdo con la categorización sugerida por el Departamento Administrativo de Ciencia, Tecnología y e Innovación COLCIENCIAS, para revistas científicas y tecnológicas indexadas. Los autores deben definir y comunicar en la carta de presentación y en la plantilla del artículo la categoría del mismo. Las categorías de los artículos están identificadas por el número de orden de la siguiente lista y sus características son:

1. Artículo de investigación científica y tecnológica: Documento que presenta, de manera detallada, los resultados originales de proyectos de investigación. La estructura generalmente utilizada contiene cuatro apartes importantes: introducción, metodología, resultados y conclusiones.
2. Artículo de reflexión: Documento que presenta resultados de investigación desde una perspectiva analítica, interpretativa o crítica del autor, sobre un tema específico, recurriendo a fuentes originales.
3. Artículo de revisión: Documento resultado de una investigación donde se analizan, sistematizan e integran resultados de investigaciones publicadas o no publicadas, sobre un campo en ciencia o tecnología, con el fin de dar cuenta de los avances y las tendencias de desarrollo. Se caracteriza por presentar una cuidadosa revisión bibliográfica de por lo menos 50 referencias.
4. Artículo cortó: Documento breve que presenta resultados originales preliminares o parciales de una investigación científica o tecnológica, que por lo general requieren de una pronta difusión.
5. Reporte de caso: Documento que presenta los resultados de un estudio sobre una situación particular con el fin de dar a conocer las experiencias técnicas y metodológicas consideradas en un caso específico. Incluye una revisión sistemática comentada de la literatura sobre casos análogos.





6. Revisión de tema: Documento resultado de la revisión crítica de la literatura sobre un tema en particular.

La Revista INGENIERÍA dará prelación a aquellos documentos que se clasificarían en los artículos tipo 1, 2 ó 3.

### **Procedimiento para el envío de artículos para publicación**

Los autores deberán enviar al Editor los siguientes documentos mediante la plataforma Open Journal System (OJS) de la Revista:

- Carta de presentación y originalidad del artículo: El formato de la presente carta puede descargarse en el siguiente enlace:  
<http://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/reving/pages/view/Formatos>.  
La finalidad de la carta es certificar que el artículo es inédito, que no está sometido a otra publicación y que se aceptan las normas de publicación de la Revista.
- El artículo en formato digital utilizando la plantilla y las normas de presentación que se pueden consultar en el siguiente enlace (instrucciones a los autores):  
<http://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/reving/pages/view/Instructivos>.  
Los autores relacionarán en el correo de postulación del artículo dos posibles evaluadores que cumplan las siguientes condiciones:
  - Debe tener al menos título de maestría
  - Pertenecer a una institución diferente a la de los autores
  - Haber realizado publicaciones en los últimos tres años

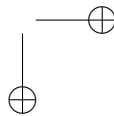
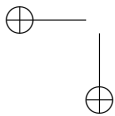
Nota: Enviar los datos de los contactos de los posibles evaluadores (nombre completo, institución y correo electrónico). Esta información también puede ser enviada a la siguiente dirección electrónica [revista\\_ing@udistrital.edu.co](mailto:revista_ing@udistrital.edu.co)

- En caso de ser aceptado, los autores del artículo se comprometen a diligenciar el formato de cesión de derechos para publicación. Se puede descargar en el siguiente enlace:  
<http://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/reving/pages/view/Formatos>

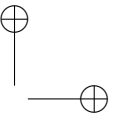
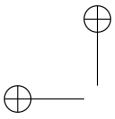
Se puede consultar la guía rápida para autores en la plataforma OJS en el enlace:  
<http://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/reving/article/view/5540/7070>

### **Aspectos a tener en cuenta**

- Se considera un artículo largo cuando tiene más de diez (10) páginas con este formato. Por consiguiente se recomienda tener como límite diez (10) páginas para la elaboración de un artículo. El Comité Editorial podría solicitar a los autores reducir el tamaño del artículo cuando lo considere demasiado largo.
- Los resultados de las evaluaciones de los pares árbitros y las modificaciones que requiera el Comité Editorial serán notificados a los autores a través de la plataforma OJS y al correo electrónico del autor de correspondencia. Los autores deberán enviar nuevamente los artículos con las modificaciones sugeridas sin nombres y sin biografías. En general, este intercambio de sugerencias y modificaciones puede llegar a presentarse una o dos veces después de presentar el artículo.







- Cuando un artículo no cumple con las condiciones definidas para la revista, el Comité Editorial podría decidir no publicarlo. En este caso, el autor o los autores serán notificados de la decisión.

## **DERECHOS DE AUTOR**

El contenido completo de la licencia Creative Commons, bajo la cual se resguardan los derechos de autor de aquellos que publican en la Revista Ingeniería, puede consultarse en: Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License.

