

TIA

- Revista TIA - Tecnología, Investigación y Academia -
Publicación Facultad de Ingeniería y Red de Investigaciones de Tecnología Avanzada - RITA

Neurotopología bajo el enfoque de las redes neuronales biológicas y artificiales

Jairo Eduardo Márquez-Díaz¹

Citar este documento: Márquez-Díaz, J.E. (2022). Neurotopología bajo el enfoque de las redes neuronales biológicas y artificiales. Revista TIA - Tecnología, Investigación y Academia, 9(2), 127-140.

¹ Universidad de Cundinamarca. PhD. en Educación de la Universidad de Baja California. Master en Seguridad empresarial Universidad de Barcelona, Maestría en Bioética, Universidad el Bosque. Especialista en Actuarial Universidad Antonio Nariño, Especialista en bioética y Especialista educación de la Universidad el Bosque. jemarquez@ucundinamarca.edu.co

Resumen: Las redes neuronales biológicas presentan características que puede ser representadas mediante modelos matemáticos topológicos que simbolizan diferentes escalas espaciales que están lejos de ser triviales. En este sentido, el presente estudio muestra la relación existente de los espacios topológicos, la teoría de conjuntos y la teoría de grafos enmarcados en el contexto de explicar la funcionalidad y operatividad del cerebro en cuanto al procesamiento, almacenamiento y optimización de la información. Bajo esta mirada, se plantea cómo la topología en conjunto con otros constructos matemáticos permite explicar la dinámica funcional de las redes neuronales biológicas en sus diferentes escalas, que puede ser llevado eventualmente a la inteligencia artificial, la computación neuromórfica y robótica entre otras disciplinas emergentes y convergentes. De igual manera, se escala cómo las redes neuronales biológicas operan tanto en un espacio bidimensional como tridimensional, mostrando con ello su dinámica de adaptación y funcionalidad normal o en estadios de neuroplasticidad, que corroboran de manera teórica lo que sucede de manera normal en el cerebro. Asimismo, basado en estas características, se expone la dinámica estructural del cerebro y funcionalidad, donde disciplinas como la topología algebraica, la teoría de grafos y las neurociencias, se integran de tal manera en busca de explicar cómo las redes neuronales biológicas operan en la gestión y/o administración de la información que circula por las mismas, que a la vez puede ser extrapolado a las redes neuronales artificiales.

Palabras clave: espacios topológicos, grafos, métricas, neurotopología, redes neuronales, vecindad.

Abstract: Biological neural networks present characteristics that can be represented by topological mathematical models that symbolize different spatial scales that are far from trivial. In this sense, the present study shows the existing relationship of topological spaces, set theory and framed graph theory in the context of explaining the functionality and operability of the brain in terms of information processing, storage and optimization. From this point of view, it is proposed how topology in conjunction with other mathematical constructs allows to explain the functional dynamics of biological neural networks at their different scales, which can eventually be taken to artificial intelligence, neuromorphic and robotic computing, among other emerging disciplines and converging. In the same way, it is scaled how biological neural networks operate in both a two-dimensional and three-dimensional space, thereby showing their adaptation dynamics and normal functionality or in neuroplasticity stages, which theoretically corroborate what happens normally in the brain. Likewise, based on these characteristics, the structural dynamics of the brain and functionality are exposed, where disciplines such as algebraic topology, graph theory and neurosciences, are integrated in such a way in search of explaining how biological neural networks operate in the management and/or administration of the information that circulates through them, which in turn can be extrapolated to artificial neural networks.

Keywords: graphs, metrics, neurotopology, neighborhood, neural networks, topological spaces.

Introducción

El cerebro es un órgano que presenta una gran complejidad, cuya estructura y funcionalidad alberga todo lo que implica y significa ser un humano, que está representado tanto en lo cognitivo, como aquello que lo identifica y particulariza como un individuo en términos de la conciencia, personalidad, experiencias y habilidades. En términos fisiológicos, el

cerebro tiene una masa que varía entre 1400 g y 1500 g según el género, con un volumen promedio de 1195 cm³ y una superficie de alrededor de 1200 cm² (Toro et al., 2008). Su forma ovoide está dividida en dos hemisferios cerebrales, formados por pliegues o circunvoluciones que se encuentran separados por surcos o cisuras, dos hemisferios y seis lóbulos, con un número aproximado de 86.000 a 100.000 millones de neuronas y un estimado de 100 billones de conexiones o sinapsis.

Basado en estas características, se presenta un estudio enmarcado en un proyecto de investigación teórico, cuyo objetivo busca explicar la relación que tienen las neurociencias, la biología molecular, la física y química cuántica, con la funcionalidad y operatividad del cerebro a escala neuronal. Así mismo, se expone la dinámica estructural del cerebro y funcionalidad, donde disciplinas como la topología algebraica, la teoría de grafos y las neurociencias, se integran en busca de explicar cómo las redes neuronales biológicas operan en la gestión y/o administración de la información que circula por las mismas, que a la vez puede ser extrapolado a las redes neuronales artificiales.

Topología algebraica

La topología algebraica es una disciplina que pertenece a las matemáticas, encargada de estudiar las propiedades de los espacios topológicos y las funciones continuas. También, se encarga de estudiar conceptos tales como: número de agujeros, consistencia, comparación y clasificación de objetos, proximidad, morfología, conectividad, compacidad y métricas entre otros múltiples atributos de un sistema topológico.

En términos de la teoría de conjuntos, la topología algebraica relaciona familias de subconjuntos de un conjunto abierto determinado, que cumplen ciertas reglas sobre la unión, intersección, contorno, entorno, vecindad y métrica. Es así, que todo sistema que tenga una morfología definida o cuasi definida, puede ser representada mediante un espacio topológico.

Dicho esto, el cerebro, las redes neuronales, las neuronas y su conformación molecular, pueden ser modelados mediante un formalismo matemático al verse como subsistemas contenidos dentro de un sistema, cuya organización se ajusta a un sistema complejo. Asimismo, la topología se encuentra implícita en la forma y funcionalidad del cerebro y demás seres vivos indistinto de su escala, actuando como un campo físico que protege la información que procesa y almacena en el mismo.

La información está codificada al interior del cerebro mediante moléculas e inframoléculas especializadas, por espines o procesos equivalentes, donde la estructura topológica brinda un soporte ideal que comprime gran cantidad de procesos físico químicos que presentan un comportamiento escalar o fractal relacionados con las conexiones neuronales y su dinámica operativa resumidos en lo que se ha denominado como conectoma (Witvliet, 2020).

Al considerarse el cerebro como un espacio topológico escalar, contienen las funciones neuroeléctricas y estructuras celulares, donde la memoria se encuentra resguardada y anidada bajo los espacios de Hilbert (López, 2017), esto incluye la información que se procesa y/o almacena además de los procesos de la psique. En este sentido, la topología algebraica permite mapear regiones del cerebro mediante segmentaciones matemáticas, que permiten realizar un análisis localizado sobre la distribución y almacenamiento de información procesada por las sinapsis. De igual manera, al emplear los formalismos que sustentan la topología algébrica permite evaluar de manera teórica las conexiones sinápticas y de sus interacciones con otras neuronas, que derivan en el procesamiento de información en paralelo.

Neurotopología

Morfológicamente el cerebro presenta una estructura compleja altamente evolucionada, cuya organización celular aún guarda muchos secretos. Las redes neuronales en sus conexiones y estructuras internas, se encuentran mediados por procesos electroquímicos y catalíticos (autocatalíticos), que son el medio y conducto del procesamiento y almacenamiento de información que fluye por el cerebro, y debido a esta estructura, presentan un comportamiento dinámico autoorganizado, para el cual cada neurona tiene la propiedad de optimizar sus funciones energéticas internas, de tal manera que la información que circula por sus vecindades sea tratada de forma específica minimizando en cada proceso gastos innecesarios de energía. Esto sugiere que dentro del sistema mente-cerebro está implícito el caos y la irregularidad, que en cierta medida nos ha permitido conocer y describir lo intrincado y complejo que es, no sólo en la escala morfológica, fisiológica y evolutiva, sino también a nivel de la psique. Este escenario, lleva a pensar que la dinámica propia del cerebro está lejos de la linealidad, y más cerca de la frontera del caos, que no es de extrañar, tomando en cuenta que es un sistema termodinámico fuera del equilibrio.

El siguiente paso, es poder desentrañar los fenómenos fisicoquímicos que se suscitan continuamente en el interior de las neuronas, donde moléculas y átomos en forma conjunta e individual desempeñan un rol muy importante en el correcto funcionamiento del sistema mente-cerebro.

Una forma de saber cómo el cerebro de manera natural ha modificado su estructura celular para optimizar su operatividad y ahorrar en el proceso energía, es por medio de las matemáticas, en particular la geometría espacial y la topología que, al fusionarlas con las neurociencias, surge la propuesta de la “Neurotopología”. Con este tipo de estudio, se puede analizar cómo las neuronas minimizan el gasto de energía cuando se transfiere o fluye información por una red localizada, que incluye procesos particulares como la neuroplasticidad, al igual que su distribución celular, morfología de la corteza cerebral y redes perineuronales (que son “regiones de matriz extracelular que rodean algunos tipos de células neuronales”) (Yang et al. 2021, p.3) entre otros, que confluyen a al sistema complejo denominado cerebro. Esto implica que a nivel biológico y evolutivo existe un orden espacial y temporal que busca el mínimo gasto de energía con una eficiencia óptima. Para ello, las redes neuronales biológicas, presentan un comportamiento asimétrico en su estructura y simétrico en la forma de almacenar la información, entendido esto último, en que al parecer se presentan redundancias en los datos a la hora de almacenar, procesar y volver a llamar la información, que converge en los recuerdos y memoria.

Las redes neuronales en conjunto con sus sinapsis se pueden considerar como un conjunto abierto U por el que fluye la información X_p , donde cada elemento x_i contenido en este conjunto en cualquier dirección pertenece a U ; lo que implica, que si x_i está rodeado directamente por elementos del conjunto U , no puede estar en el borde del mismo, es decir, morfológicamente el cerebro con su masa acumulada se considera como un conjunto cerrado, cuyos puntos de acumulación pertenecen al conjunto, o lo que es lo mismo, no existen puntos de acumulación fuera del conjunto. Bajo este argumento, los componentes neuronales y celulares como la neuroglía (conformada por los astrocitos, oligodendrocitos, células ependimarias y microglía) al presentar un comportamiento dinámico, flexible y adaptativo se comportan como un conjunto abierto. Una particularidad de los astrocitos, es que estos al parecer forman parte activa del procesamiento, almacenamiento y transferencia de información (Santello, Toni y Volterra, 2019), ampliando con ello las funciones que desarrolla el cerebro, debido a que la información fluye en ambos tipos de células.

Las redes neuronales a nivel de conexiones y estructura interna, incluyendo los procesos electroquímicos, relacionan el procesamiento de información y la psique que como se anotó, presentan un comportamiento altamente complejo y dinámico a la vez, que conllevan al caos e irregularidad que permiten conocer y describir en cierta medida, lo intrincado que es el cerebro en su funcionalidad y procesos cognitivos. En el

cerebro, las redes neuronales y en particular en cada neurona, se manifiesta un flujo de información generado por reacciones eléctricas y electroquímicas que se mueven en un espacio topológico n dimensional. Por consiguiente, lo que se busca demostrar mediante el uso de la topología algebraica es que, debido a la forma del cerebro y distribución de las neuronas en el mismo, presentan un comportamiento estructural topológico de tipo cíclico, donde el espacio y tiempo de los procesos psíquicos (mente) es no orientable.

Para abordar las redes neuronales y sus procesos eléctricos y electroquímicos en términos topológicos, estos se toman como sistemas abiertos, que cumplen la norma de unión e intersección de espacios topológicos, es decir, este espacio topológico es un conjunto U sobre el cual Drakos y Moore (2001) la definen como “una familia F o un conjunto de subconjuntos de U llamados abiertos, que cumplen las siguientes propiedades” (p. 4):

El conjunto vacío \emptyset y el conjunto total $U \in F$

La unión de una subfamilia arbitraria de $F \in F$

La intersección de una subfamilia finita de $F \in F$

Existe un conjunto A , donde $A \subset U$ llamado cerrado, cuando $U - A$ es abierto. Si $A \subset U$ se conoce como vecindad de $U \in u$, si existe un conjunto abierto B que se espera cumpla con la condición $U \in B \subset A$. Este concepto de vecindad, se extiende al comportamiento de las redes neuronales en el marco celular y comportamiento eléctrico y electroquímico, cuyo rango de acción en una determinada zona límite o frontera no es cerrada, presenta un comportamiento difuso bajo ciertos contextos de excitación (asociados a algún tipo de factor externo que activa los sentidos, procesos de aprendizaje, fases de sueño, etc.), considerándose como un sistema abierto, donde las interacciones de señales sobrepasan la escala clásica, abarcando otras regiones con dimensiones menores. Esto lleva a establecer que las señales neuronales son el resultado de la sumatoria de sub-señales provenientes de estados celulares y moleculares.

Topológicamente el complemento (sinapsis y señales sinápticas) de un conjunto cerrado (cerebro) es abierto. Por ejemplo, sea el intervalo $(a, b) \subset R$ es abierto puesto que si $c \in (a, b)$ entonces,

$$V(c, \delta) = (c - \delta, c + \delta) \subset (a, b)$$

Con $\delta = \text{mínimo}(c - a, b - c)$

En una región eléctricamente activa, existen puntos interiores, exteriores y de frontera que se relacionan con las conexiones sinápticas; las cuales operan para la ejecución de funciones específicas al interior del cerebro (habla, visión, sonido, procesamiento lógico-matemático, locomoción, etc.).

Dado un conjunto N con un $x \in N$ es un punto interior de N , existe una vecindad $V(x, \delta) \subset N$. Se dice que existe un y que es un punto exterior de N , si existe una vecindad $V(y, b)$, que no contiene puntos de N . En particular este punto no tendría actividad eléctrica relacionada con el procesamiento y/o almacenamiento de la información en la zona neuronal activa. Luego, se presenta un punto de frontera z , caracterizado porque no está ni al interior ni exterior de N , es decir, “es un punto de frontera de N si toda vecindad contiene por lo menos un punto de N y un punto fuera de N .” (Takeuchi, 1974, p. 71)

La actividad neuroeléctrica en la frontera de una región es difusa, de lo que se infiere que, si existe como mínimo una señal a tomada como punto de frontera de N , y $a \notin N$, entonces a es un punto de acumulación de N , que será el límite de actividad a nivel molecular de una señal. Así, los puntos interiores y de frontera, definen la actividad neuroeléctrica y térmica de las neuronas, ya que ambas están relacionadas,

donde el interior y exterior de N es abierto, pero la frontera de N es cerrada. El punto de frontera marca la región crítica para las señales que denotan alguna actividad, incluso a escala cuántica, por ende, los puntos interiores representan señales clásicas (eléctricas y electroquímicas).

De lo anterior se deduce que la probabilidad de encontrar un electrón o conjunto de electrones portadores de información en un elemento diferencial de volumen representado por $|\Psi|^2 r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$ está sujeto a un sector espacial finitamente pequeño, donde el sistema a evaluar presenta características de un espacio topológico. No obstante, el papel que desempeñan los conjuntos abiertos definidos en un espacio topológico es decisivo, porque se pueden conocer sus características con relación al medio que se encuentra e interactúa con otros sistemas vecinos. En consecuencia, las propiedades que cumplen los conjuntos abiertos que son extrapolables al cerebro son:

- $C \subset N$ es abierto $\Leftrightarrow N - C$ es cerrado.
- $C \subset N$ es abierto $\Leftrightarrow C$ es una vecindad de cada uno de los puntos.
- $C \subset N$ es abierto $\Leftrightarrow N - C = \overline{N - C}$

La condición $N-C$ es extrapolable a la topología del cerebro, partiendo del hecho que morfológicamente es un sistema cerrado, cuyos componentes internos se comportan como sistemas abiertos, es decir, los subsistemas (neuronas) tienen completa libertad de interactuar entre ellas, tanto química como eléctricamente (sinapsis), que se ajustan a un proceso propio de las redes neuronales biológicas denominadas como plasticidad neural (Sierra y León, 2019; Mateos y Rodríguez, 2019), relacionados con los procesos anatómicos y funciones asociados con los procesos de memoria y aprendizaje.

Para el caso de un mismo conjunto N que denota una red neuronal, se pueden definir varias topologías con base en determinar diversas familias F_i y F_j , que cumplan con los axiomas de un espacio topológico. Entonces, si F_i y F_j son topologías sobre N y $F_i \subset F_j$, entonces F_j se dice que es más fina que F_i o que F_j es más débil o gruesa que F_i . En términos neuronales, el conjunto N define varias topologías, y es evidente cuando se observa detenidamente su estructura externa e interna de un grupo de neuronas activas e inactivas según estímulo presente.

Por lo anterior, existen subsistemas o subconjuntos inter e intra relacionados, que muestra que la topología del cerebro con sus partes constituyentes sea altamente dinámica en su operatividad y funcionalidad, y que de una u otra forma altera de manera muy sutil su funcionalidad bajo estados de excitación localizados asociados al procesamiento y almacenamiento de información, a lo que se denomina como “entropía topológica cerebral” (Sánchez y Márquez, 2009, P.); asociada a todos los procesos físico químicos neuronales estándar y neurodegenerativos. Esto último atribuido a desarreglos o desordenes topológicos en el cerebro, por ejemplo, muerte neuronal y enfermedades que modifican la sustancia gris y blanca alterando la sinapsis y morfología del tejido celular.

Espacios Neurotopológicos y Mapeos

Sea N un espacio topológico donde existe un conjunto $C \subset N$ entonces, se afirma que es una base de N , si cumple que cada conjunto abierto de este conjunto se genera por la unión de conjuntos de C . De manera equivalente, la base de un sistema topológico es capaz de generar todos los elementos (neuronas y células gliales) del espacio topológico a través de la unión. Entonces, sea B y C dos espacios topológicos, se dice que hay un mapeo o función de B en C , es decir, una función $f: B \rightarrow C$ continua, cuya imagen inversa de un conjunto abierto de esta relación es siempre otro conjunto abierto.

También, se presentan los mapeos biyectivos, donde la función f se llama *homeomorfismo* si cuando esta y su inversa son continuas; esto implica que para $C \subset N$, C es abierto $\Leftrightarrow f(B) \subset C$ es abierto también. Por

lo tanto, las redes neuronales del cerebro preservan muchas propiedades topológicas de continuidad. Los lóbulos cerebrales establecen una relación biunívoca que se especializan a medida que crecen y se adaptan a los estímulos entrantes, en cuyo caso los homeomorfismos en los espacios topológicos representan lo mismo que los isomorfismos en espacios vectoriales, donde los primeros conservan sus propiedades topológicas cuando se mapea un espacio a otro. “Esto se debe a que el mapeo de una base es a su vez la base del espacio imagen”. (Drakos y Moore, 2001) Bajo este esquema como señala Jänich (1984), “trabajar con homeomorfismos es muy útil puesto que, si se conocen las propiedades de un espacio topológico dado, se puede encontrar estas mismas características en todos los espacios homeomórficos a este” (p. 13).

Es importante anotar, que esta propuesta también se extiende a las topologías intrínsecas que existen en las distribuciones de carga molecular, que se deducen del campo vectorial asociado de la densidad electrónica $\rho(\mathbf{r})$ y de su gradiente $\nabla\rho(\mathbf{r}, X, t)$. Estos se caracterizan por sus trayectorias en R^3 o las líneas del gradiente para una configuración nuclear X dada; los cuales se encuentran determinados mediante el número y tipo de puntos críticos de la densidad, que relacionan conceptos como máximos locales y atractores del campo de gradiente atómicos propios y vecinos. Estos conceptos se relacionan con la teoría de grafos molecular (Nouleho et al. 2018), que permite definir la estabilidad estructural de una molécula y los posibles caminos para una reacción química. También, este estudio permite establecer las propiedades atómicas de un sistema molecular a través de su densidad monoeléctrica en alguna región del mismo, al igual que las propiedades promedio aditivas sobre todos los átomos.

Espacios conexos

Sobre la superficie del cerebro se pueden fabricar variedades pegando otras más sencillas, procedimiento que es válido en cualquier dimensión. En su formación, existe un solo conjunto que se especializa en dos conjuntos que representan el lóbulo izquierdo y derecho del cerebro no disyuntos. Esta formación cumple con los principios topológicos de deformaciones que sufre un sistema para transformarse en otro denominado como homotopía. Por consiguiente, el cerebro es un espacio topológico que puede ser representado como la relación (X, τ) conexo, donde X representa la unión de dos subconjuntos no vacíos y separados, y la colección de conjuntos abiertos de dicho espacio. Para el caso contrario, X es tomado como no conexo, -que para nuestro caso de estudio no aplica- por tanto, este planteamiento cumple con un conjunto de condiciones definidas por (Muñoz, Ferrando y López, 2014; Mesa, Correa y Guzmán, 2013). En términos gráficos los conjuntos conexos trasladados a la topología del cerebro toman la forma representada en la Figura 1:

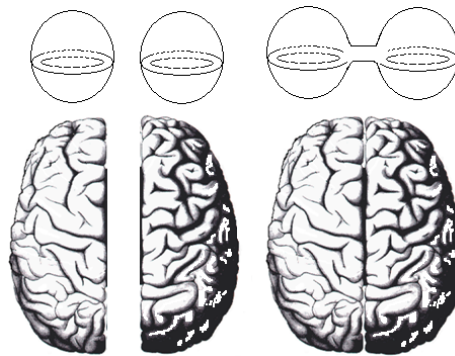


Figura 1. El lóbulo izquierdo y derecho del cerebro humano conforman un espacio topológico conexo, en el que existe una suma conexa que genera una superficie compacta de género n o esfera de n asas.

La superficie generada por esta topología es homeomorfa a la suma conexa, que permite formar toroides que se encuentran pegados a la base de la esfera. La esfera sirve de base para contener agujeros simples, bordes circulares, asas de mangas de un toroide y bandas de Möbius (Kosniowski, 1986). Cuando se deforma la topología esférica, esta puede adoptar diversas formas, que para el caso del cerebro humano tiene topología trivial, y por ende es conexo. Esta topología tridimensional actúa como reservorio de miles de millones de conexiones sinápticas que conforman el constructo del procesamiento y almacenamiento de información que caracterizan la individualidad, el pensamiento, las acciones, las habilidades y la conciencia entre otros aspectos que hacen al ser humano único.

La geometría que describe perfectamente la topología del cerebro es una esfera, tal como se muestra en la figura 2 que, al intersectar un plano con la esfera se genera un círculo que es la base de un toroide y constructo del estudio de la topología del cerebro.

En tal sentido, para delimitar un punto de una superficie esférica, se recurre a determinar los ángulos θ y φ y el radio r , que representados en coordenadas esféricas (r, θ, φ) se aplican en espacios euclídeos. En el caso de espacios de más de tres dimensiones se usan los espacios vectoriales. A partir de la cuarta dimensión no es posible una representación gráfica, pero la definición de esfera se mantiene siendo un conjunto de puntos equidistantes de un punto fijo. Cabe agregar que recientes investigaciones han demostrado que el cerebro en el neocórtex crea permanentemente formas y espacios geométricos multidimensionales matemáticamente hablando, con hasta 11 dimensiones (Reimann et al. 2017), que permite establecer la relación sobre lo que se ha venido exponiendo a lo largo del presente artículo.

Este descubrimiento plantea los campos cuánticos, en los que presumiblemente se procesa y almacena la información cerebral (Sánchez y Márquez, 2009; Dirk et al. 2017); los cuales están compuestos por fibrados de una hipersfera de n dimensiones, representados por una n -esfera. Este fibrado es una función continua sobreyectiva de un espacio topológico a otro. Un espacio vectorial sobre los números reales constituye un fibrado vectorial, que se acopla al estudio en cuestión. De hecho, puede extenderse al marco fractal, en particular las redes fractales (Xu et al. 2021), que eventualmente podrían explicar las propiedades cuánticas de conducción en un sistema biológico a temperatura ambiente.

Los fibrados abren otras posibilidades de estudio sobre la funcionalidad de las neuronas a nanoescala. Aunque es una teoría, la posibilidad de establecer una relación de los campos cuánticos con la dinámica de procesamiento y almacenamiento de información en el cerebro no es descartable, máxime cuando aún falta mucho por develar de este complejo órgano, sumado a que ya se ha empezado aceptar la posibilidad de fenómenos cuánticos a su interior.

Espacios Métricos

Cada espacio métrico es de por sí de manera natural un espacio topológico (abierto para nuestro caso). Aunque hay espacios topológicos que no son necesariamente espacios métricos. Al considerar dos conjuntos de redes neuronales, se crea “una aplicación entre espacios métricos que envía conjuntos abiertos en abiertos, llamada aplicación abierta” (Rivero, s.f), que relaciona sistemas asimétricos y simétricos.

Para la forma *asimétrica* consiste que, entre un par cualquiera de neuronas existen dos rutas directas bidireccionales, para las cuales la distancia recorrida por una de ellas es diferente a la otra, que dentro de la métrica matemática es posible. Entonces, sean i y j neuronas con d_{ij} la distancia entre ellas. De igual manera, existen una i y j que pertenece a un conjunto N tal que $d_{ij} \neq d_{ji}$ donde N es el conjunto de las neuronas asociado a los números naturales visto dentro de la teoría de conjuntos.

En la forma *simétrica*, existe una única ruta entre estas neuronas cuyo flujo de información se mueve en forma bidireccional, luego, la distancia entre ellas es aproximadamente igual. Por consiguiente, para toda i y j que pertenece a un conjunto N tal que $d_{ij} \cong d_{ji}$, donde N es el conjunto de las neuronas, la distancia medida se calcula a través de la métrica euclidiana:

$$d_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$$

Significa que cualquiera par de neuronas cumplen la desigualdad triangular,

$$d_{ij} + d_{jk} \geq d_{ik} \quad \forall i, j, k \in N$$

Esto implica, que cumple la definición topológica para espacios métricos.

Otro tipo de métricas no euclidianas que no cumplen con esta desigualdad, y que eventualmente pueden aplicarse a las configuraciones topológicas neuronales manteniendo su forma asimétrica son la distancia de Afín, la distancia de Manhattan y la distancia Chebyshev, entre otras, que se aplican de manera rutinaria en ciertos algoritmos de visión artificial e inteligencia artificial. Estas distancias están circunscritas en un espacio topológico abierto, con fronteras difusas o límites no continuos, referido a que la pulsión neuroeléctrica abarca una zona determinada, que se conoce su origen más no se sabe con certeza cuál es su frontera de manera exacta, donde no hay actividad eléctrica o electroquímica propiamente dicha.

Los espacios topológicos citados no son los únicos, de hecho, existe una amplia y variada gama de ellos que pueden ser extrapolados a la morfología cerebral, configuración neuronal y tráfico neuroeléctrico, considerados en este caso como un sistema o sistemas, según la escala espacial a la que se evalúe. Estos espacios son: *Euclidiano, Riesz, Kolmogorov, Hausdorff, Regulares, Tychonov y Normal*.

Los espacios pueden ser llevados al plano neurofisiológico, neurológico y neuroartificial, si se considera que el cerebro como tal es un sistema compuesto por n elementos (neuronas = transistores) agrupados en subconjuntos, que a la vez están subdivididos según su grado de operatividad, funciones eléctricas, electroquímicas y químicas, al igual que dicha subdivisión se extrapola a las zonas de mayor actividad relacionada con el almacenamiento y procesamiento de información, cuyo comportamiento es de tipo escalar. Este escenario lleva a pensar que los espacios topológicos se extienden incluso al plano molecular, atómico y cuántico asociados con el consumo de energía y disipación térmica que se presenta en las regiones activas de una red neuronal. Por consiguiente, los electrones dentro de los microtúbulos, neurofibrillas, núcleo celular y el propio material genético, están condicionados a fenómenos que se mueven dentro de la escala molecular y cuántica, donde trayectorias, energía (hamiltonianos) y demás fenómenos relacionados con el almacenamiento, flujo y procesamiento de la información, se mueven en un espacio que hasta ahora se está explorando.

Todo esto nos lleva a dilucidar que la métrica llevada al cerebro en la que se encuentran un sinnúmero de conexiones sinápticas, tiene un comportamiento diferente según la escala a la que se evalúe la red neuronal, tanto a nivel espacial como químico y electroquímico, al igual que la relación espacio-tiempo de las cargas eléctricas que se mueven a través de los microtúbulos y sistemas moleculares conexos entre las neuronas, portando códigos de información cuántica.

Existe la posibilidad que en determinados casos se comporten las cargas como ondas, donde la cuantización a nivel molecular (empleen valores discretos de energía) interfiere en reacciones químicas específicas entre las paredes interna y externa de los microtúbulos, de hecho, es muy probable que así lo sea, para que permita el movimiento y transporte de señales químicas de las moléculas de miosina, actina y tubulina, donde la información podría guardarse a través de fijaciones moleculares y/o atómicas, por medio de las inversiones de espín en los electrones, o por medio de la ocupación de los niveles de energía desplazando otros electrones.

Esto quiere decir que, si la energía supera cierto umbral, el flujo de información electrónica, seguirá su camino a la(s) siguiente(s) neurona(s), hasta encontrar un espacio topológico (atómico-molecular) suficiente para su almacenamiento y/o intercambio cuántico de información manifiesta a través de coherencias y decoherencias cuánticas (Lloyd, 2011; Kosloff et al. 2011). Sobre esta afirmación hasta hace poco se ponía en tela de juicio que los fenómenos cuánticos no estaban presentes en sistemas orgánicos, lo cual ha venido refutándose conforme las investigaciones avanzan en este sentido (Cao et al. 2020; Offord, 2019; Marais et al. 2018).

En síntesis, con estos tipos de métricas, se puede analizar cómo el flujo de información electroquímica que circula por una red neuronal, opta por diferentes caminos según el grado de excitación celular. Estas métricas están relacionadas íntimamente con la teoría de grafos. Por lo tanto, si existe un recorrido de un punto x a y , entonces, también existe n caminos que conducen a los mismos puntos; luego el grafo se considera fuertemente conexo, si x está conectado con y (neurona a neurona). Entonces, existe una distancia $d(x;y)$ cuando hay conexión, caso contrario, la distancia $d(x;y) = I$. Veamos con mayor detalle cómo funciona un grafo en una red neuronal cualesquiera.

Grafos neuronales

Los grafos se definen como una colección de nodos o vértices que se conectan por líneas o arcos llamados aristas, las cuales determinan una dirección. Normalmente se emplean en los sistemas de computación, redes y estructuración de datos, entre otros, cuya generalidad matemática se aproxima de manera equivalente a los procesos neuronales, por lo que pueden ser explicados bajo este contexto. En particular, los grafos ayudan a explicar la síntesis de los circuitos que operan de manera secuencial y las trayectorias del flujo de señales por diversas rutas, para los cuales las neuronas emplean algún tipo de algoritmo celular y molecular para su funcionalidad. Por consiguiente, lleva a pensar que dentro de estos grafos neuronales se presenten subgrafos cuando las reglas de aprendizaje se afinan y no emplean tantas neuronas para procesar información.

En el caso de las redes neuronales, el tipo de grafo es conexo, ya que este no tiene ciclos y conectan todos los vértices activos, por tanto, puede presentar una estructura de árbol entre otras estructuras, cuyas trayectorias del flujo de información son finitas con n vértices, en la que según la zona donde se evalúe y procese la información, presenta un comportamiento de tipo periódico o cuasiperiódico. Bajo esta mirada, las redes neuronales presentan un comportamiento estocástico, porque cada una es única en cuanto a su funcionalidad, manejo y forma de procesar la información que recibe y emite bajo un cierto margen de aleatoriedad.

Entonces, para $n-1$ aristas hay n^{n-2} árboles posibles. Luego, al tener un conjunto A de neuronas eléctricamente activas que pertenecen a una determinada zona X , entonces, $A \subseteq X$ asume el rol de un atractor si existe una función $T(A) = A$, esto implica que los atractores neuronales pueden adoptar puntos fijos o ciclos límites, que es lo que se observa en una tomografía cuando se sondea determinadas áreas activas del cerebro. Ahora, debido a la dinámica biomolecular propia de las redes neuronales, puede que en algún momento no haya ningún atractor, en cuyo caso se habla de un atractor minimal presente en zonas eléctricamente inactivas o con umbrales eléctricos o electroquímicos muy por debajo del estándar medible, cuyas actividades neuroeléctricas se encuentran a una escala perteneciente al mundo cuántico (Sánchez y Márquez, 2009).

Para el caso de un atractor A , se procede a definir su valle de atracción como:

$$V(A) = \{x \in X : (\exists t \in \mathbb{N}) T^t(x) \in A\}$$

Donde $V(A)$ consiste en todos los componentes neuronales asociados a alguna actividad electroquímica manifiesta a través de fluctuaciones térmicas que convergen en A , bajo un tiempo t finito. Si X es un espacio topológico, el valle de atracción lo definen el conjunto de puntos (señales y/o fluctuaciones térmicas) que convergen hacia A . Por ejemplo, en los ciclos y caminos hamiltonianos, la señal que circula no recorre dos veces la misma arista y no hay retorno al punto de partida, con la condición que la señal debe recorrer todos los vértices.

Existen grafos simples, conexos, no conexos, completos y bipartitos, cuyos comportamientos están sujetos a la complejidad y dinámica de un sistema. Para el caso de un grafo conexo, las colisiones están prohibidas y el tipo de atractor es convergente después de un número m de interacciones. Ahora, si X es finito, los atractores minimales en un sistema dinámico neuronal presentan órbitas que se mantienen en un punto periódico, que pueden pertenecer a algún valle atractor. En consecuencia, se habla de una familia de valles de atracción que particiona el espacio neuronal y, por ende, las zonas operativas del cerebro. Dichas zonas presentan neuro eléctricamente hablando un número de enlaces de la red neuronal, mostrando patrones locales que derivan en agrupaciones globales de neuronas o nodos conectados cuya complejidad se incrementa y se ajusta a un espacio topológico descrito anteriormente. Este tipo de comportamiento se asocia a la teoría de la percolación, donde “cada red constituye un sistema complejo distinto con su propio comportamiento emergente, y a la vez estas redes crean sistemas aún más complejos” (Kelsey, 2021, p.34).

Para visualizar un sistema dinámico bajo la condición de un tiempo discreto en un espacio finito, consiste a trazar un grafo de transición. Este tipo de grafo está asociado a unos puntos $(X; T)$ que representa el grafo dirigido a un conjunto $M = (X; B)$, donde B está definido por $B = \{x, T(x): x \in X\}$. El flujo de información, puede disponer de diferentes caminos o nodos, donde la cantidad de energía presente en el proceso está de una u otra forma relacionada con la memoria y procesos cognitivos en general.

El grafo de la Figura 2 fue trazado empleando el modelo de Watts-Strogatz; el cual permite calcular agrupamientos con longitudes de ruta corta, que conlleva a la generación de grafos aleatorios cercanos al escenario de una red neuronal con actividad sináptica localizada bajo un espacio topológico abierto. Este modelo se desarrolla con base en el número de Betti, caracterizado por distinguir espacios topológicos con base en el número de elementos conectados y el número de agujeros “circulares bidimensionales” o “vacíos tridimensionales”. Contextualizado este tipo de grafo a una red neuronal, se interpreta que entre más conexiones existan, más se refuerza la información entrante, que puede asociarse a la memoria de largo plazo, caso opuesto a menos conexiones, memoria a corto plazo u optimización de la información procesada que converge al aprendizaje, etc.

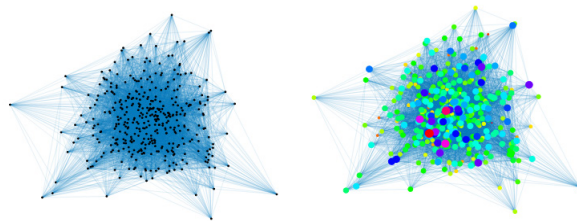


Figura 2. Concentración de nodos en un grafo que describe puntos de convergencia de mayor a menor actividad sináptica (colores oscuros y claros respectivamente), donde las trayectorias de las señales, aunque aleatorias, se mantienen bajo un mismo atractor que lo define la región topológica especializada del cerebro. En el proceso de aprendizaje se involucran trayectorias complejas, donde miles de conexiones sinápticas hiperestimuladas demandan gran cantidad de energía para tal proceso. Cuando se ha adquirido el

conocimiento la energía decrece al igual que el número de conexiones sinápticas, debido en parte a la optimización del proceso de aprendizaje, adoptando varias opciones métricas del tránsito del flujo de información, como es el hamiltoniano que modifica su morfología en sus conexiones, dando paso a otros procesos de la psique que se encuentran en etapa de formación.

Los grafos que se trazan en una red neuronal biológica son dinámicos, con un comportamiento caótico y complejo, por ende, la existencia de patrones cíclicos es poco probable, precisamente porque el cerebro permanentemente está optimizando sus sinapsis y energía conforme una región procesa y almacena información. Los grafos se actualizan en sus nodos (neuronas) bien sea creando nuevos o modificando las trayectorias de las señales sinápticas conforme la red neuronal aprende y se adapta bajo determinados estímulos. Por ejemplo, sea el conjunto $N = \{n_1, n_2, \dots, n_i\}$ de neuronas en la que para cada par $\{n_i, n_j\}$ se encuentran a una distancia $d(n_i, n_j)$. La distancia total del conjunto es:

$$d_T = \sum_{i=1}^{N-1} d(n_{n(i)}, n_{n(i+1)}) + d(n_{n(N)}, n_{n(1)})$$

Los grafos involucran trayectorias y multitrayectorias que permiten analizar las direcciones de los pulsos químicos, eléctricos y electroquímicos a lo largo de la red neuronal, armando secuencias de árboles grafológicos, al igual que el comportamiento flexible o plasticidad sobre el crecimiento o decrecimiento de conexiones sinápticas. De igual manera, los grafos en una red neuronal pueden ser convergentes o divergentes según las señales lleguen o partan de un nodo(s). Asimismo, las redes neuronales pueden presentar un comportamiento centralizado, descentralizado y distribuido. Estas estructuras se encuentran localizadas en zonas del cerebro conforme a estimulaciones específicas. Si se consideran N neuronas de un sistema eléctricamente activo, las distribuciones o combinaciones posibles son N factorial ($N!$); de éstas solo $(N-1)!$ corresponden a ciclos hamiltonianos (en un grafo completo y dirigido), ya que sí se unen dos neuronas o nodos, ya solo se tiene $N-1$ nodos para combinar, sí el grafo es no dirigido o aleatorio, entonces se tiene $1/2(N-1)!$ de posibles ciclos.

Conclusiones

El cerebro es uno de los órganos más complejos de la naturaleza, cuya dinámica relacionada con su funcionamiento está aún muy lejos de ser desenmascarada. Lo cierto de todo esto, es que se busca establecer cómo los procesos cognitivos se organizan y autoorganizan bajo una topología celular y molecular específicos, donde la memoria y plasticidad sináptica cambian permanentemente, sujetos bajo múltiples escalas espaciales y temporales. En este sentido, la arquitectura morfológica de las redes neuronales evoca métodos de optimización de procesamiento y almacenamiento de información en diferentes etapas, tendientes a maximizar los procesos propios de la psique humana y minimizar el gasto de energía, aspecto que permite en la actualidad el diseño de neuronas y sinapsis artificiales en el área de la Espintrónica, que eventualmente podrían reemplazar los algoritmos de redes neuronales mediante la creación de uniones túnel magnéticas (Grollier y Querlioz, 2021).

La neurotopología relacionada con la topología algebraica, la teoría de conjuntos y la teoría de grafos, permiten un acercamiento a dar respuesta del por qué la estructura neuronal funciona bajo principios químicos, eléctricos, electroquímicos y termodinámicos locales con fronteras difusas. Bajo esta óptica, la orientación axónica y neuronal no es arbitraria, sino que está gobernada por la dinámica topológica del cerebro auspiciada por el propio ADN hablando en términos evolutivos. En tal sentido, entra en juego diversas teorías matemáticas para dar soporte a lo planteado en este estudio, por ejemplo, la teoría de la percolación, el modelo de Markov oculto y el modelo de Watts-Strogatz, por mencionar algunos.

Por medio de la neurotopología se pueden definir las trayectorias de las señales sinápticas en determinadas regiones del cerebro, que liberan a posteriori los diferentes impulsos eléctricos, químicos y electroquímicos que desarrollan un proceso en cascada de múltiples factores de conectividad inter e intraneuronal recurrentes, que se van optimizando conforme se modifica la morfología neuroeléctrica, minimizando los recursos invertidos en esta y maximizando el procesamiento y almacenamiento de información.

En definitiva, con este tipo de análisis y resultados expuestos, permite no solo explicar en parte la dinámica compleja del cerebro, evaluando cómo su morfología celular y neuroeléctrica actúan en determinadas enfermedades, sino incluso, predecirlas y tratarlas. Además, se extiende este estudio a ser abordado en la ingeniería de tejidos, organoides cerebrales (Gabriel et al. 2021), disciplinas como la inteligencia artificial, computación neuromórfica y transistores de neurofibras orgánicas (Kim et al. 2021) entre otros.

Referencias bibliográficas

Cao, J., Cogdell, R., Coker, D., Duan, H-G., Hauer, J., Kleinekathöfer, U., Jansen, T., Mančal, T., Miller, D., Ogilvie, J., Prokhorenko, V., Renger, T., Tan, H-S., Tempelaar, R., Thorwart, M., Thyryhaug, E., Westenhoff, S. and Zigmantas, D. (2020). Quantum biology revisited. *Science Advances* 6(14), eaaz4888 <http://dx.doi.org/10.1126 / sciadv.aaz4888>

Dirk, K. Meijer, F., Hans, J. & Geesink, H. (2017). Consciousness in the Universe is Scale Invariant and Implies an Event Horizon of the Human Brain. *NeuroQuantology*. <https://doi.org/10.14704/nq.2017.15.3.1079>.

Drakos, N. & Moore, R. (2001). Conceptos Básicos de Topología en Autómatas Celulares Lineales. Consultado el 2 de abril de 2021 de: <http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh/comun/summer99/seck/node37.html>

Gabriel, E., Albanna, W., Pasquini, G., Ramani, A., Josipovic, N., Mariappan, A., Schinzel, F., Karch, C., Bao, G., Gottardo, M., Suren, A., Hescheler, J., Wolfrum, K., Persico, V., Rizzoli, S., Altmüller, J., Riparbelli, M., Callaini, G., Goureau, O., Papantonis, A., Busskamp, V., Schneider, T. & Gopalakrishnan, J. (2021). Human brain organoids assemble functionally integrated bilateral optic vesicles. *Cell Stem Cell*, 1-18. <https://doi.org/10.1016/j.stem.2021.07.010>.

Govindappa, N. y Charantimath, R.G. (2018). Properties of gsp-Hausdorff spaces in topology. *International Journal of Research in Engineering and Innovation*, 2(4), 360-363.

Grollier, J. y Querlioz, D. (2021). La espintrónica imita al cerebro. *Investigación y ciencia*, 22-30.

Janich, K. (1995). *Topology*. New York, United States, Springer-Verlag.

Kelsey, H. E. (2021). Las leyes matemáticas de la conectividad. *Investigación y ciencia*, 30-37.

Kim, S. J., Jeong, J., Jang, H. W., Yi, H., Yang, H., Ju, H., & Lim, J. A. (2021). Dendritic Network Implementable Organic Neurofiber Transistors with Enhanced Memory Cyclic Endurance for Spatiotemporal Iterative Learning. *Advanced Materials*, 2100475. <http://doi.org/10.1002/adma.202100475>

Kosloff, R., Ratner, M., Katz, G. & Khasin, M. (2011). 22nd Solvay Conference on Chemistry. Application of quantum coherence and decoherence. *Procedia Chemistry* 3, 322–331. <https://doi.org/10.1016/j.proche.2011.08.040>

Kosniowski, C. (1986). *Topología algebraica*. Barcelona, España, Ed, Reverté, S. A.

Lloyd, S. (2011). Quantum coherence in biological systems. *Phys.: Conf. Ser.* 302 012037. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/302/1/012037>

López, R. N. (2017). Sobre el control en sistemas dinámicos de dimensión infinita en espacios de hilbert y de freché. *Revista de La Facultad de Ciencias*, 6(2), 141–162. <http://doi.org/0.15446/rev.fac.cienc.v6n2.64535>

- Marais, A., Adams, B., Ringsmuth, A., Ferreti, M., Gruber, M., Hendrikx, R., Schuld, M., Smith, S., Sinayskiy, I., Krüger, T., Petruccione, F. and n Grondelle, R. (2018). The future of quantum biology. *J. R. Soc. Interface* 15: 20180640. <http://dx.doi.org/10.1098/rsif.2018.0640>
- Mateos, A, P. & Rodríguez, M. A. (2019). The Impact of Studying Brain Plasticity. *Frontiers in Cellular Neuroscience*, 13(66), 1-5. <https://doi.org/10.3389/fncel.2019.00066>
- Mesa, F., Correa, G. & Guzmán, J. (2013). *Continuidad en espacios topológicos*. Madrid, España, ECOE Ediciones.
- Nouleho, S., Barth, D., Quessette, F., AWeisser, M-A., Watel, D. & David, O. (2018). 1-32. A new graph modelisation for molecule similarity. arXiv:1807.04528v1 [cs.DS]
- Offord, C. (2019). Quantum Biology May Help Solve Some of Life's Greatest Mysteries. <https://www.the-scientist.com/features/quantum-biology-may-help-solve-some-of-lifes-greatest-mysteries-65873>
- Reimann, M. W., Nolte, M., Scolamiero, M., Turner, K., Perin, R., Chindemi, G., ... Markram, H. (2017). Cliques of Neurons Bound into Cavities Provide a Missing Link between Structure and Function. *Frontiers in Computational Neuroscience*, 11. doi:10.3389/fncom.2017.00048
- Rivero, F. (s. f). Curso de topología. Universidad de los Andes. Consultado el 1 de abril de 2021 de: <http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/lico/web-topologia/curso-topologia.htm>
- Sánchez, M. G. y Márquez, D. J. (2009). *Cerebro mente. El Pensamiento cuántico*. Bogotá D. C., Colombia, Ed. Carvajal.
- Santello, M., Toni, N. & Volterra, A. (2019). Astrocyte function from information processing to cognition and cognitive impairment. *Nat Neurosci*, 22, 154–166 (2019). <https://doi.org/10.1038/s41593-018-0325-8>
- Sierra, B. E. & León, P. M. (2019). Plasticidad cerebral, una realidad neuronal. *Revista de Ciencias Médicas de Pinar del Río*, 23(4), 599-609.
- Takeuchi, Y. (1974). *Análisis matemático*. Departamento de matemáticas y estadística. Facultad de ciencias (Bogotá).
- Toro, R; Perron M; Pike B; Richer L. Veillette S; Pausova Z; Paus T (2008). Brain size and folding of the human cerebral cortex. *Cerebral cortex (New York, N.Y.: 1991)* 18 (10): 2352-7. PMID 18267953. <https://doi.org/10.1093/cercor/bhm26>
- Witvliet, D., Mulcahy, B., Mitchell, J., Meirovitch, Y., Berger, D., Wu, Y., Liu, Y., Xian, K. W., Parvathala, R., Holmyard, D., Schalek, R., Shavit, N., Chisholm, A., Lichtman, J., Aravinthan, D., Samuel, T. & Zhen, M. (2020). Connectomes across development reveal principles of brain maturation in *C. elegans*. *bioRxiv* 2020.04.30.066209. <https://doi.org/10.1101/2020.04.30.066209>
- Xu, XY., Wang, XW., Chen, DY. et al. (2021). Transporte cuántico en redes fractales. *Nat. Fotón*. <https://doi.org/10.1038/s41566-021-00845-4>
- Yang, S., Gigout, S., Molinaro, A., Matsui, Y., Hilton, S., Foscari, S., Nieuwenhuis, B., Tan, C., Verhaagen, J., Pizzorusso, T., Saksida, L., Bussey, T., Kitagawa, H., Kwok, J. & Fawcett, J. (2021). Chondroitin 6-sulphate is required for neuroplasticity and memory in ageing. *Mol Psychiatry*, 1-11. <https://doi.org/10.1038/s41380-021-01208-9>