

# Consideraciones Prácticas sobre la Linealización de Modelos y su Simulación Respecto al Sistema No Lineal Original

## Practical Considerations on Model Linearization and its Simulation with Respect to the Original Nonlinear System

Luis Francisco Cómbita Alfonso<sup>1</sup>, Diana Marcela Ovalle Martínez<sup>2</sup>

### **Resumen:**

Con este artículo se busca aclarar algunas consideraciones prácticas que se deben tener en cuenta a la hora de obtener aproximaciones lineales de sistemas no lineales en las vecindades de puntos de operación. En particular, busca aclarar cómo se llega a las expresiones clásicas en variables de estado desde la aproximación por serie de Taylor y cómo obtener la simulación adecuada de una aproximación lineal, que realmente evidencie comportamientos similares al sistema no lineal. Se ejemplifica la teoría presentada con un sistema de nivel de líquido de cuatro tanques,

---

<sup>1</sup> Ingeniero Electrónico, Universidad Distrital “Francisco José de Caldas”, Magister en Ingeniería y Doctor en Ingeniería, Universidad de los Andes. Docente de planta, Universidad Distrital “Francisco José de Caldas”, [lfcmbita@udistrital.edu.co](mailto:lfcmbita@udistrital.edu.co), Colombia, ORCID: 0000-0001-9835-4453

<sup>2</sup> Ingeniera Electrónica, Universidad Distrital “Francisco José de Caldas”, Magister en Ingeniería, Universidad de los Andes, Doctora en Tecnologías Industriales, Universidad Politécnica de Cartagena (España). Docente de planta, Universidad Distrital “Francisco José de Caldas”, [dmovallem@udistrital.edu.co](mailto:dmovallem@udistrital.edu.co), Colombia, ORCID: 0000-0002-3650-4273

presentando su linealización y la comparación del comportamiento de los sistemas tanto lineal como no lineal, en la vecindad del punto de operación.

**Palabras clave:** *Linealización, sistemas no lineales, simulación, variables incrementales.*

**Abstract:**

*This article seeks to clarify some practical considerations to consider when obtaining linear approximations from nonlinear systems about the operation points. Particularly, we clarify how to get the classical expressions in state-space from the Taylor series of a function, and how to get an adequate simulation of the linear approximation that resembles the behavior of the nonlinear system. We give a numerical example with the quadruple-tank system, presenting its linearization and the comparison of the dynamical behavior of the nonlinear system with the linear approximation about the operation point.*

**Keywords:** *Linearization, nonlinear systems, simulation, incremental variables.*

## I. INTRODUCCIÓN

En la mayoría de los sistemas que encontramos en las aplicaciones de control y automatización, si no en todos, se pueden observar comportamientos dinámicos no lineales. En la primera aproximación que se hace para obtener un modelo dinámico del sistema, típicamente se restringe el análisis a regiones de trabajo pequeñas, en las que los comportamientos no lineales pueden ser obviados, y así obtener modelos lineales. Sin embargo, dependiendo de la aplicación, puede ser necesario generar modelos más generales, donde términos no lineales estarán presentes. La primera aproximación que se hace al análisis de sistemas no lineales, debido al amplio conocimiento que se tiene de los sistemas lineales, consiste en la linealización.

El proceso de linealización, como es ampliamente conocido, se hace utilizando la aproximación de funciones a partir de su expansión en serie de Taylor, hasta el término de primer orden. Aunque muchos libros de texto clásicos de sistemas dinámicos como en Close (2001); de control como en Nise (2011), D’Azzo y Houpis (1995), Phillips y Harbor (1999), Ogata (2001), Kuo y Golnaraghi (2003); de sistemas no lineales como en Khalil (2002), Vidyasagar (1993), Sastry (1999); y de control no lineal como en Slotine y Li (1991), Khalil (2014), Isidori et al. (1995), se presentan detalles sobre la obtención de la linealización de modelos no lineales, en su mayoría orientada a la representación de estados.

a mayoría de los libros de texto rápidamente llegan a la obtención de matrices Jacobianas y, aunque hablan de variables incrementales como las variables del sistema lineal, la mayoría de los ejemplos se hacen alrededor del origen, donde no es muy clara la diferencia entre las variables incrementales y las variables originales absolutas. Esto genera confusiones, principalmente, al generar simulaciones que comparen el comportamiento del sistema no lineal y su linealización alrededor de cierto punto de trabajo (un punto de equilibrio).

Este documento, busca dar detalles claros respecto a cómo y porqué se obtiene la linealización de modelos no lineales en función de variables incrementales, cómo están definidas dichas variables incrementales, y cómo simular el comportamiento del sistema linealizado para obtener el comportamiento de las variables absolutas (variables originales del sistema no lineal) en función de las variables incrementales.

El documento inicialmente presenta la linealización de representaciones de estado no lineales, en la sección II. Posteriormente, en la sección III, a partir del modelo de un sistema de nivel de líquido de cuatro tanques, se muestra cómo hacer el proceso de linealización del modelo y, lo más importante en, cómo simular el sistema no lineal, cómo generar la entrada incremental para simular el sistema lineal y cómo ajustar las variables de salida para pasarlas de incrementales a absolutas y así poder comparar el comportamiento de los dos modelos del mismo sistema. Finalmente, en la sección IV, se presentan algunas conclusiones respecto al trabajo realizado.

## II. LINEALIZACIÓN DE REPRESENTACIONES DE ESTADO

Los sistemas no lineales típicamente se representan a partir de su representación de estados

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad (2)$$

donde  $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{R}^n$ ,  $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{R}^m$ ,  $\mathbf{y}(t) \in \mathcal{R}^p$  representan los vectores de estado, entrada y salida, respectivamente;  $\mathbf{f}(\cdot)$  y  $\mathbf{g}(\cdot)$  son funciones no lineales de  $\mathbf{x}(t)$  y  $\mathbf{u}(t)$ , y  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  es la primera derivada del vector de estados. Para obtener la representación de estados lineal del sistema representado por (1) y (2), en cualquier punto  $(\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o)$ , basta con obtener las series de Taylor de  $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$  y  $\mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$  alrededor de  $(\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o)$ . Es decir

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o) + (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_o)^T \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{f}|_{\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o} + (\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_o)^T \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{f}|_{\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o} + T.O.S., \quad (3)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o) + (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_o)^T \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{g}|_{\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o} + (\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_o)^T \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{g}|_{\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o} + T.O.S., \quad (4)$$

donde  $\nabla_{\mathbf{x}}$  y  $\nabla_{\mathbf{u}}$  representan el operador gradiente de la función respecto a los vectores  $\mathbf{x}(t)$  y  $\mathbf{u}(t)$ , respectivamente; que matemáticamente se pueden escribir como

$$\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{f} = \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_n} \right]^T, \quad (5)$$

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{f} = \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1} \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_2} \quad \dots \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_n} \right]^T, \quad (6)$$

y *T.O.S.* hace referencia a términos de orden superior de las series de Taylor de  $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$  y  $\mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ , de la forma  $(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_o)^k$  y  $(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_o)^k$  para  $k \geq 2$ , que no deben ser considerados, porque añadirían no linealidades a nuestra aproximación y ya dejaría de ser lineal, que es el propósito fundamental. Reemplazando (5) y (6) en (3) y (4), reescribimos la aproximación lineal de  $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$  y  $\mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$  alrededor de  $(\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o)$  como

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \approx & \mathbf{f}(\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o} (x_1(t) - x_{1o}) + \cdots + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_n} \right|_{\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o} (x_n(t) - x_{no}) + \\ & + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1} \right|_{\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o} (u_1(t) - u_{1o}) + \cdots + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_m} \right|_{\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o} (u_m(t) - u_{mo}), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \approx & \mathbf{g}(\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o) + \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o} (x_1(t) - x_{1o}) + \cdots + \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x_n} \right|_{\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o} (x_n(t) - x_{no}) + \\ & + \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u_1} \right|_{\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o} (u_1(t) - u_{1o}) + \cdots + \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u_m} \right|_{\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o} (u_m(t) - u_{mo}). \end{aligned} \quad (8)$$

Note que (7) y (8) son aproximaciones afines, más no lineales, de  $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$  y  $\mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$  alrededor de  $(\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o)$ , debido a la presencia de los términos  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o)$  y  $\mathbf{g}(\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o)$ . Es justamente por esa razón que, en lugar de aproximar la función, vamos a aproximar el incremento de la misma, así

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o) \approx & (x_1(t) - x_{1o}) \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o} + \cdots + (x_n(t) - x_{no}) \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_n} \right|_{\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o} + \\ & + (u_1(t) - u_{1o}) \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1} \right|_{\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o} + \cdots + (u_m(t) - u_{mo}) \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_m} \right|_{\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) - \mathbf{g}(\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o) \approx & (x_1(t) - x_{1o}) \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o} + \cdots + (x_n(t) - x_{no}) \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x_n} \right|_{\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o} + \\ & + (u_1(t) - u_{1o}) \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u_1} \right|_{\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o} + \cdots + (u_m(t) - u_{mo}) \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u_m} \right|_{\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o}. \end{aligned} \quad (10)$$

Las aproximaciones de los incrementos de las funciones,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o)$  y  $\mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) - \mathbf{g}(\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o)$ , mostradas en (9) y (10) son lineales en  $\mathbf{x}(t)$  y  $\mathbf{u}(t)$ , así como también en  $\Delta \mathbf{x}(t) = (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_o)$  y  $\Delta \mathbf{u}(t) = (\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_o)$ . Por lo que finalmente, las aproximaciones de los incrementos de las funciones  $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o)$  y  $\mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) - \mathbf{g}(\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o)$ , en función de los incrementos de las variables de estados y control (también denominadas variables incrementales),  $\Delta \mathbf{x}(t)$  y  $\Delta \mathbf{u}(t)$ , se pueden escribir como

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{f}(\Delta \mathbf{x}(t), \Delta \mathbf{u}(t)) &\approx \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o} \Delta x_1(t) + \cdots + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_n} \right|_{\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o} \Delta x_n(t) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1} \right|_{\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o} \Delta u_1(t) + \cdots + \\ &+ \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_m} \right|_{\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o} \Delta u_m(t), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{g}(\Delta \mathbf{x}(t), \Delta \mathbf{u}(t)) &\approx \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o} \Delta x_1(t) + \cdots + \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x_n} \right|_{\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o} \Delta x_n(t) + \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u_1} \right|_{\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o} \Delta u_1(t) + \cdots + \\ &+ \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u_m} \right|_{\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o} \Delta u_m(t). \end{aligned} \quad (12)$$

Ahora, se tiene las aproximaciones de los incrementos de las funciones, en función de los incrementos de las variables de estado y control, se podrá escribir la representación de estados lineal del sistema, teniendo en cuenta que la aproximación que se tiene no es de las variables originales (absolutas) del sistema,  $\mathbf{x}(t)$  y  $\mathbf{u}(t)$ , sino de sus incrementos,  $\Delta \mathbf{x}(t)$  y  $\Delta \mathbf{u}(t)$ . Note que en este punto, en lugar de tener una aproximación de (1) y (2), en el punto  $(\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o)$ , se tiene la aproximación de

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}(t) = \Delta \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad (13)$$

$$\Delta \mathbf{y}(t) = \Delta \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad (14)$$

donde el incremento de la salida está definido como  $\Delta \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_o = \mathbf{y}(t) - \mathbf{g}(\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o)$ . Sin embargo, para obtener las variables absolutas a partir de las incrementales, únicamente hace falta adicionarles el valor de las variables en el punto de operación, que son constantes. Así que la aproximación lineal de (13) y (14) nos es completamente útil para saber cómo se comporta el sistema definido por (1) y (2) en las vecindades del punto de operación  $(\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o)$ . Por lo que la representación lineal del sistema no lineal definido por (1) y (2) en variables incrementales, se puede escribir como

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}(t) \approx \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \Delta x_1(t) + \dots + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_n} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \Delta x_n(t) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_1} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \Delta u_1(t) + \dots + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_m} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \Delta u_m(t), \quad (15)$$

$$\Delta \mathbf{y}(t) \approx \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x_1} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \Delta x_1(t) + \dots + \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x_n} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \Delta x_n(t) + \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u_1} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \Delta u_1(t) + \dots + \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u_m} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \Delta u_m(t), \quad (16)$$

que se puede escribir de forma matricial, como encontramos en los libros de texto comúnmente, así

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}(t), \quad (17)$$

$$\Delta \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \Delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \Delta \mathbf{u}(t), \quad (18)$$

con

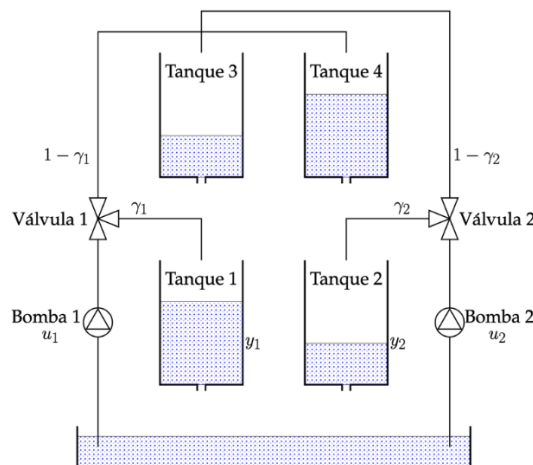
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial u_1} & \frac{\partial g}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial g}{\partial u_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u_1} & \frac{\partial g_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial u_1} & \frac{\partial g_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial u_n} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0}.$$

### III. COMPARACIÓN DE LA SIMULACIÓN DEL SISTEMA NO LINEAL Y SU LINEALIZACIÓN

De acuerdo con lo mencionado en la introducción, el objetivo de la linealización de sistemas no lineales es tener un equivalente lineal en un punto de interés del sistema no lineal. Así las cosas, esperaríamos que los comportamientos de los dos sistemas sean cercanos en la vecindad del punto de interés (punto de operación o punto de equilibrio). Para verificar lo anterior, se utilizara un modelo de sistema no lineal ampliamente utilizado en control, el sistema de cuatro tanques, propuesto por Johanson (2000), mostrado en la Figura 1.

El sistema de la Figura 1 está compuesto por cuatro tanques cilíndricos y dos bombas conectadas a dos válvulas encargadas de la distribución del fluido hacia los tanques. La bomba 1 se usa para suministrar el fluido del depósito, situado en la parte inferior de la planta, a los tanques 1 y 4. Los caudales que se dirigen a estos tanques están determinados por la posición que tenga la válvula 1; ocurre el mismo caso para la bomba 2, la cual proporciona fluido a los tanques 2 y 3, y a su vez, la válvula 2 establece la cantidad de caudal. Este sistema cuenta con dos sensores de nivel de líquido que se encuentran en los tanques 1 y 2. Los tanques 3 y 4 tienen orificios en su parte inferior, que permiten que el líquido se descargue hacia los tanques 1 y 2, respectivamente, y estos últimos, también con orificios en su parte inferior, se descargarán hacia el depósito colector. Esta interacción crea un fuerte acoplamiento entre los tanques 3 y 1, y 2 y 4, respectivamente.



**Figura 1.** Diagrama esquemático del sistema de cuatro tanques, adaptado de Johansson (2000).



De acuerdo con la descripción anterior, las entradas del sistema corresponden a los voltajes  $u_1$  y  $u_2$  aplicados a las bombas, las salidas son los voltajes  $y_1$  y  $y_2$  medidos por los sensores de nivel y las variables de estado corresponden al nivel de líquido en cada tanque  $x_1, x_2, x_3$  y  $x_4$ , respectivamente. El sistema de ecuaciones que describe el comportamiento dinámico del sistema se presenta a continuación

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{a_1}{A_1} \sqrt{2g x_1(t)} + \frac{a_3}{A_1} \sqrt{2g x_3(t)} + \frac{\gamma_1 k_1}{A_1} u_1(t) \\ -\frac{a_2}{A_2} \sqrt{2g x_2(t)} + \frac{a_4}{A_2} \sqrt{2g x_4(t)} + \frac{\gamma_2 k_2}{A_2} u_2(t) \\ -\frac{a_3}{A_3} \sqrt{2g x_3(t)} + \frac{(1-\gamma_2) k_2}{A_3} u_2(t) \\ -\frac{a_4}{A_4} \sqrt{2g x_4(t)} + \frac{(1-\gamma_1) k_1}{A_4} u_1(t) \end{bmatrix}, \quad (19)$$

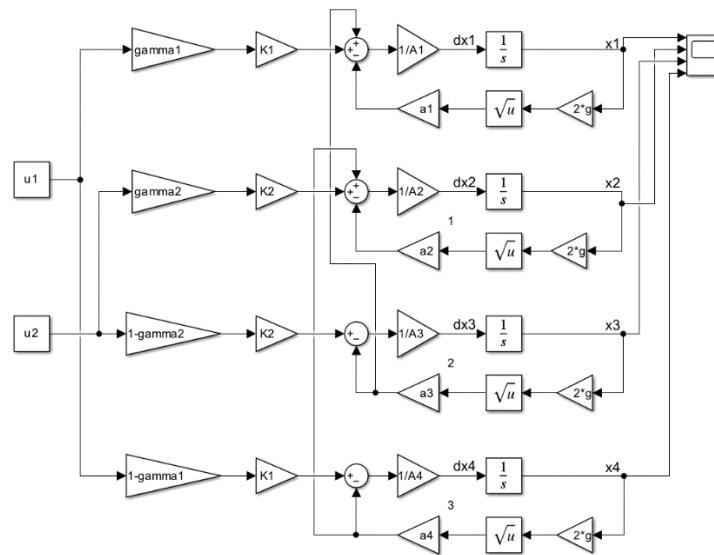
$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_c x_1(t) \\ k_c x_2(t) \end{bmatrix}, \quad (20)$$

donde  $a_i$  corresponde al área de la sección transversal del orificio de descarga del tanque  $i$ ,  $A_i$  denota el área de la sección transversal del tanque  $i$ , la aceleración debida a la gravedad se denota como  $g$ ;  $\gamma_j \in [0, 1]$  corresponde a la configuración de la válvula que divide el flujo de la bomba  $j$ ,  $k_j$  es la constante de la bomba  $j$ , y  $k_c$  es la constante del sensor. Los valores de las constantes del modelo se muestran en la Tabla 1. El lector puede encontrar detalles del proceso de modelamiento en Johansson (2000) o en Bernal Romero y Rodríguez Guzmán (2018).

Con el fin de simular el sistema no lineal, se podrá hacer uso de *Matlab*<sup>®</sup> o *Simulink*<sup>®</sup>. En la Figura 2, se muestra un esquema de simulación en *Simulink*<sup>®</sup> del sistema definido por (19) y (20), con los parámetros de la Tabla 1. El comportamiento del sistema para entradas tipo escalón, con entradas definidas como

$$u_1(t) = \begin{cases} 3, & 0 < t \leq 1000s, \\ 2.75, & 500s < t \leq 1000s. \end{cases} \quad u_2(t) = \begin{cases} 3, & 0 < t \leq 1000s, \\ 3.25, & 500s < t \leq 2000s. \end{cases} \quad (21)$$

se puede observar en la Figura 3.

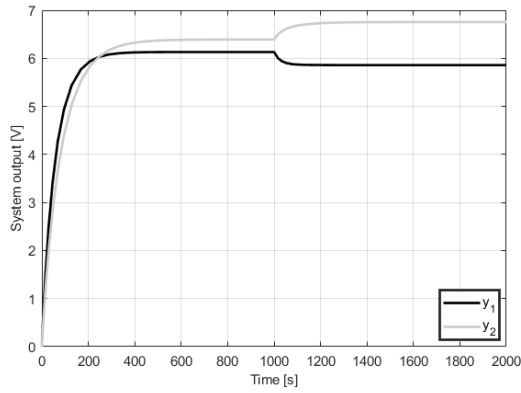


**Figura 2.** Diagrama de Simulink® para el sistema definido en (19) y (20).

**Tabla 1.** Parámetros del modelo del sistema de cuatro tanques.

Parameter	Unit	Value
A1, A3	[cm <sup>2</sup> ]	28
A2, A4	[cm <sup>2</sup> ]	32
a1, a3	[cm <sup>2</sup> ]	0,071
a2, a4	[cm <sup>2</sup> ]	0,057
$k_c$	[V/cm]	0,50
$g$	[cm/s <sup>2</sup> ]	981
$\gamma_1, \gamma_2$		(0.70, 0.60)
$k_1, k_2$	[cm <sup>3</sup> /(Vs)]	(3,33, 3,35)

Fuente: Adaptado de Johansson (2000).



**Figura 3.** Respuesta del sistema no lineal definido en (19) y (20).

Ahora, es el momento de conocer el comportamiento de la aproximación lineal y compararlo con el comportamiento del sistema no lineal. Siguiendo el proceso explicado en la sección previa, el modelo linealizado para el sistema de cuatro tanques se puede escribir como en (17) y (18), con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 & \frac{A_3}{A_1 T_3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} & 0 & \frac{A_4}{A_2 T_4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_4} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1 k_1}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_2 k_2}{A_2} \\ 0 & \frac{(1 - \gamma_1) k_1}{A_3} \\ \frac{(1 - \gamma_2) k_2}{A_4} & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{x}_o, \mathbf{u}_o} \quad (22)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} k_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_c & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donde, por simplicidad en la notación, se ha definido  $T_i = \frac{A_i}{a_i} \sqrt{\frac{2x_i}{g}}$ . Note que en este punto es indispensable definir el punto alrededor del cual se va a linealizar el sistema. Dado que la simulación del modelo no lineal se hizo para ambas entradas iniciando en 3V, podríamos calcular los estados que generarían esas entradas y linealizar alrededor de ese punto. Para calcular los estados que genera el vector  $\mathbf{u}_o = [3 \quad 3]$ , se debe tomar (19), reemplazar  $\dot{\mathbf{x}}(t) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$  y despejar las variables de estado en función de las entradas, obteniendo

$$\begin{aligned}
x_{1_o} &= \frac{[\gamma_1 k_1 u_{1_o} + (1 - \gamma_2) k_2 u_{2_o}]^2}{2 g a_1^2}, & x_{3_o} &= \frac{(1 - \gamma_2)^2 k_2^2 u_{2_o}^2}{2 g a_3^2}, \\
x_{2_o} &= \frac{[(1 - \gamma_1) k_1 u_{1_o} + \gamma_2 k_2 u_{2_o}]^2}{2 g a_2^2}, & x_{4_o} &= \frac{(1 - \gamma_1)^2 k_1^2 u_{1_o}^2}{2 g a_4^2}.
\end{aligned} \tag{23}$$

Para  $\mathbf{u}_o = [3 \ 3]$ , se tiene  $\mathbf{x}_o = [12.263 \ 12.78732 \ 1.6339 \ 1.409]$ . Por lo que, al remplazar los parámetros de la Tabla 1 en las expresiones para las matrices definidas en (22), la representación de estados lineal del sistema de cuatro tanques puede ser escrita finalmente como

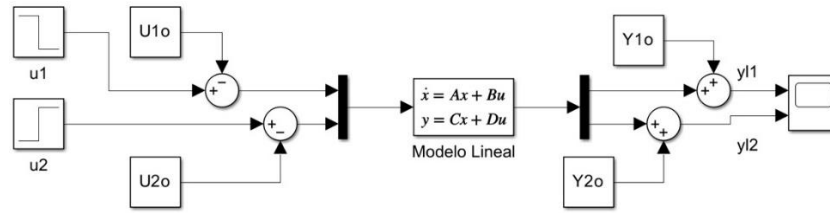
$$\begin{aligned}
\Delta \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} -0.0159 & 0 & 0.0419 & 0 \\ 0 & -0.0111 & 0 & 0.0333 \\ 0 & 0 & -0.0419 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0333 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{x}(t) \\
&+ \begin{bmatrix} 0.0833 & 0 \\ 0 & 0.0628 \\ 0 & 0.0479 \\ 0.0312 & 0 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}(t), \tag{26} \\
\Delta \mathbf{y}(t) &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}(t), \tag{27}
\end{aligned}$$

Para simular el sistema lineal con representación de estados definida por (26) y (27), definimos el sistema por su representación de estados. La clave está en la definición de las señales de entrada y salida, para poder comparar el comportamiento de los dos modelos. Las señales de entrada para el sistema no lineal están definidas en (21). Por lo que, las entradas del sistema lineal, dado que son variables incrementales, estarán definidas como

$$\begin{aligned}
\Delta u_1(t) &= \begin{cases} 3 - u_{1_o} = 0, & 0 < t \leq 1000s, \\ 2.75 - u_{1_o} = -0.25, & 1000s < t \leq 2000s, \end{cases} \\
\Delta u_2(t) &= \begin{cases} 3 - u_{2_o} = 0, & 0 < t \leq 1000s, \\ 3.25 - u_{2_o} = 0.25, & 1000s < t \leq 2000s. \end{cases}
\end{aligned}$$

Recuerde que las salidas del modelo lineal también son variables incrementales. Por lo que para compararlas con las salidas del modelo no lineal, será necesario ajustarlas. La definición del incremento de la salida es  $\Delta \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_o$ . Entonces, para obtener el comportamiento de la salida lineal,  $\mathbf{y}_l(t)$ , se tendrá que sumarle  $\mathbf{y}_o$  a  $\Delta \mathbf{y}(t)$ , que en general no será igual a  $\mathbf{y}(t)$ . Para este caso, de acuerdo con la definición de las salidas, dado que  $y_1(t) = k_c x_1(t)$  y  $y_2(t) =$

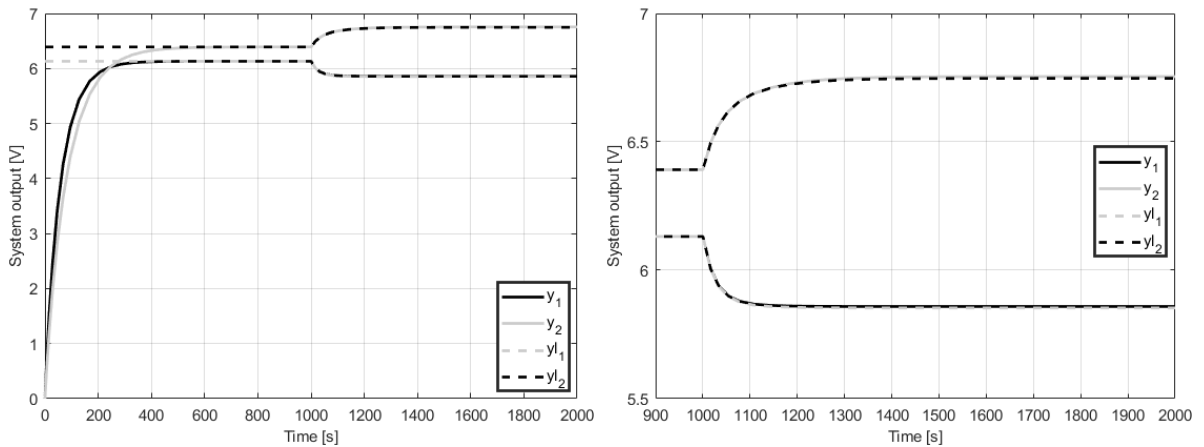
$k_c x_2(t)$ , entonces  $y_{1o} = k_c x_{1o} = 6.1315$  y  $y_{2o} = k_c x_{2o} = 6.3937$ . Lo anterior se puede visualizar claramente en la Figura 4, donde se muestra el diagrama de simulación en Simulink® del sistema lineal.



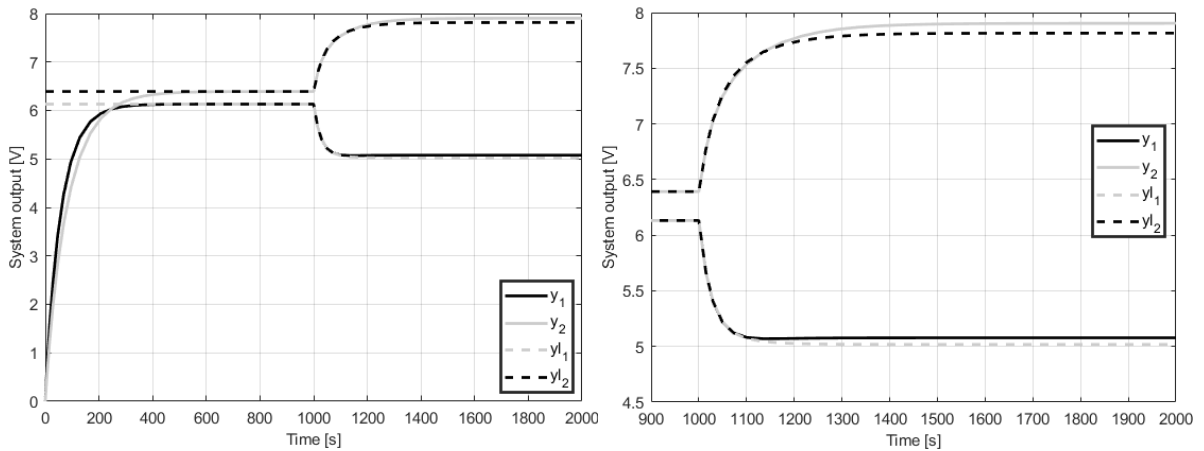
**Figura 4.** Esquemático para la simulación del sistema lineal definido en (26) y (27).

La Figura 5 muestra la comparación de la respuesta del modelo lineal con la respuesta del modelo no lineal para la misma señal de entrada  $\mathbf{u}(t)$ , con componentes  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$ , definidas en (21). A la izquierda se muestran los 2000 s de simulación y a la derecha un zoom, donde se visualiza un poco más en detalle lo que sería la respuesta al escalón de los modelos lineal y no lineal, entre 900 s y 2000 s. En líneas continuas, se representan las salidas del modelo no lineal, en negro para  $y_1(t)$  y en gris para  $y_2(t)$ ; y, en líneas discontinuas se presentan las salidas del modelo lineal, en gris para  $yl_1(t)$  y en negro para  $yl_2(t)$ . Note que los primeros 1000 s permiten que el modelo no lineal llegue al punto de operación, donde  $\mathbf{y}_o = [6.1315 \quad 6.3937]$ , que se evidencia en la salida debido a que las salidas del modelo no lineal coinciden con los valores iniciales del modelo lineal. Si se hubiere iniciado las señales de entrada en otro valor diferente a  $\mathbf{u}_o$ , los valores del modelo no lineal no se estabilizarían en  $\mathbf{y}_o$  y existiría un *offset* entre la salida del modelo lineal y la del no lineal. La gráfica de la derecha de las Figura 5 muestra que los comportamientos de los modelos lineal y no lineal coinciden bastante.

Lo anterior se presenta porque alrededor del punto seleccionado parece que el sistema se comporta de forma cercana a la lineal y una variación de la entrada de  $\Delta \mathbf{u}(t) = [-0.25 \quad 0.25]$  no parece generar comportamientos no lineales muy perceptibles. Sin embargo, con el fin de ilustrar mejor este último punto, en la Figura 6 mostramos el comportamiento de los modelos lineal y no lineal para una variación de la entrada de  $\Delta \mathbf{u}(t) = [-1 \quad 1]$ , que es lo suficientemente grande para empezar a evidenciar diferencias entre el comportamiento de los modelos lineal y no lineal.



**Figura 5.** Respuesta de la simulación del sistema lineal definido en (26) y (27),  
con  $\Delta \mathbf{u}(t) = [-0.25 \quad 0.25]$ .



**Figura 6.** Respuesta de la simulación del sistema lineal definido en (26) y (27),  
con  $\Delta \mathbf{u}(t) = [-1 \quad 1]$ .

La diferencia de comportamientos de los modelos lineal y no lineal de la Figura 6 es debida a que la aproximación lineal es válida en la vecindad del punto de operación, es decir en  $\mathbf{u}_o \pm \Delta \mathbf{u}(t)$ , donde el incremento de la entrada debe ser suficientemente pequeño. Note que en nuestro caso, para la Figura 5,  $\Delta \mathbf{u}(t) = [-0.25 \quad 0.25]$ , y para ese valor la aproximación lineal es muy cercana al comportamiento del modelo no lineal. En teoría, para valores de  $\Delta \mathbf{u}(t)$  con magnitud menor, los comportamientos deberían ser más similares y para valores mayores, debería divergir mucho más. Esto último, es lo que visualizamos en la Figura 6, con  $\Delta \mathbf{u}(t) = [-1 \quad 1]$ . Como es de esperarse, el valor de  $\Delta \mathbf{u}(t)$  para el cual el sistema se comporta

aproximadamente lineal no será el mismo para cualquier sistema y dependerá de la dinámica no lineal específica que exhiba el sistema.

#### IV. CONCLUSIONES

En este documento se presenta la forma de obtener simulaciones comparables de modelos no lineales y su aproximación lineal, en la vecindad del punto de operación. Con el fin de lograr dichas simulaciones es necesario tener en cuenta lo siguiente:

- Las variables del modelo no lineal siempre son variables absolutas, mientras que las variables del modelo lineal son incrementales y deben ser ajustadas de forma adecuada, a partir de los valores de las entradas y salidas en el punto de operación.
- El comportamiento dinámico de modelos lineales y no lineales es comparable solo si el modelo no lineal tiene como estado inicial el punto de operación para el cual se generó la aproximación lineal, de lo contrario existirá un offset entre las salidas de uno y otro modelo. Por eso, para las simulaciones mostradas en la sección III, se esperan 1000 s a que el modelo no lineal se estabilice en el punto de operación.
- Las entradas del modelo lineal se generan a partir de las del modelo no lineal, quitándole el valor del punto de operación, para generar  $\Delta \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_o$ .
- Las salidas del modelo lineal son los incrementos de la salida del modelo no lineal, por lo que, para tener los valores absolutos, comparables con el modelo no lineal, debe sumárseles el valor de la salida en el punto de operación, es decir  $\mathbf{y}_l(t) = \Delta \mathbf{y}(t) + \mathbf{y}_o$ .
- Los comportamientos del sistema lineal y no lineal serán comparables únicamente en la vecindad del punto de operación, es decir, para valores pequeños de  $\Delta \mathbf{u}(t)$ . Como es de esperarse, el valor de  $\Delta \mathbf{u}(t)$  para el cual el sistema se comporta aproximadamente lineal no será el mismo para cualquier sistema y dependerá de la dinámica no lineal específica que exhiba el sistema en la vecindad del punto de operación.

#### IV. AGRADECIMIENTO

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por la Comisión de Estudios No. 015 de 2014 de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

#### VI Referencias

- Bernal Romero, J. C. y Rodríguez Guzmán, H. E. (2018). Diseño y simulación de controladores multivariables para el sistema de los cuatro tanques de Johansson y estudio del comportamiento del sistema en lazo cerrado a ataques Ciber-Físicos. Tesis de Pregrado. Universidad Distrital “Francisco José de Caldas”.
- Close, C., Frederick, D., y Newell, J. (2001). Modeling and Analysis of Dynamic Systems. Wiley.
- D’Azzo, J. y Houpis, C. (1995). Linear Control System Analysis and Design: Conventional and Modern. Control engineering. McGraw-Hill.
- Isidori, A., Thoma, M., Sontag, E. D., Dickinson, B. W., Fettweis, A., Massey, J. L., y Modestino, J. W. (1995). Nonlinear Control Systems (3rd ed.). Springer-Verlag.
- Johansson, K. H. (2000). The quadruple-tank process: a multivariable laboratory process with an adjustable zero. IEEE Transactions on Control Systems Technology, pages 456–465.
- Khalil, H. (2014). Nonlinear Control. Always Learning. Pearson.
- Khalil, H. K. (2002). Nonlinear systems (3rd ed.). Prentice-Hall.
- Kuo, B. y Golnaraghi, F. (2003). Automatic control systems (10th ed.). John Wiley Sons.
- Nise, N. (2011). Control Systems Engineering (6th ed.). John Wiley & Sons, Incorporated.
- Ogata, K. (2001). Modern Control Engineering (4th ed.). Prentice Hall PTR.
- Phillips, C. L. and Harbor, R. D. (1999). Feedback control systems (4th ed.). Prentice-Hall, Inc.
- Sastry, S. (1999). Nonlinear Systems: Analysis, Stability, and Control. Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer.
- Slotine, J. and Li, W. (1991). Applied Nonlinear Control. Prentice Hall.
- Vidyasagar, M. (1993). Nonlinear systems analysis (2nd ed.). Prentice-Hall, Inc.





Publicación Facultad de Ingeniería y Red de Investigaciones de Tecnología Avanzada – RITA

# REVISTA TIA