UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

**Revista Vínculos**

http://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/vinculos

Entorno Social

# Una nota sobre la exponenciación en Top

## A Note on Exponentiation in Top

José Reinaldo Montañez Puentes* Jorge Adelmo Hernández Pardo**

*En memoria del Maestro*
*Carlos Javier Ruiz Salguero*

**Para citar este artículo:** J. R. Montañez y J. A. Hernández (2015). Una nota sobre la exponenciación en Top. *Revista Vínculos*, 12(1), 98-106.

**Recibido: 03-marzo-2015 / Modificado: 11-marzo-2015 / Aprobado: 12-marzo-2015**

**Resumen**

El problema de la exponenciación en Top tiene una solución interna en los espacios secuenciales y otra externa en los espacios pseudotopológicos; estos hechos son conocidos y se encuentran dispersos en la literatura. En ambos casos las categorías que resuelven el problema son categorías topológicas y el carácter unificador de estos resultados es la motivación del trabajo. En particular, en este artículo se muestra un nuevo método de construir la categoría de los espacios secuenciales, el cual genera subcategorías topológicas reflexivas y correflexivas de Top. Al final nos preguntamos si la categoría de los espacios pseudotopológicos y otras ampliaciones de Top se pueden generar de forma similar.

**Palabras clave:** Topologías iniciales, topologías finales, funtor topológico, subcategorías reflexivas, categoría cartesiana cerrada.

**Abstract**

The problem of exponentiation Top has two solutions in one, in sequential spaces and other spaces in pseudotopológicos. These facts are known in the literature. In both cases the ca- tegories that solve the problem are topological categories and the unifying nature of these results is the motivation of the work. In particular in this paper a new method to construct the category of sequential spaces, which generates and reflective subcategories of Top correfle- xivas topological shown. At the end we wonder if the category of spaces and other extensions pseudotopológicos Top can be generated similarly.

**Keywords:** Initial topologies, final topologies, topological funtor, reflextive subcategories, cartesian closed categories.

* Lic. en matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional, Colombia. Msc Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Colombia. PhD Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia. Profesor, Universidad Nacional de Colombia, Colombia. jrmontanezp@unal.edu.co

** Matemático, Universidad Nacional de Colombia, Colombia. Msc Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Colombia. Profesor, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia. jahernandezp@udistrital.edu.co

## 1. INTRODUCCIÓN

La falta de exponenciación en Top la limita para trabajar algunos aspectos de la topología algebraica y el análisis funcional. Ahora bien, en una categoría la exponenciación es un adjunto a derecha del producto y en tal situación el adjunto a izquierda preserva colímites. En este sentido, una razón para que Top no tenga exponenciación la justifica el hecho de que el producto no preserva coigualadores.
En [1] se demuestra que la categoría de los espacios secuenciales es cartesiana cerrada y que esta es una subcategoría topológica de la categoría de los espacios topológicos. En [2 y 3], se muestra otro camino haciendo uso de las denominadas *KM categorías* que la categoría de los espacios secuenciales es cartesiana cerrada. En este trabajo, haciendo uso de endofuntores de Top denominados elevadores de estructura, se muestra que en particular los espacios secuenciales son una subcategoría topológica y correflexiva de Top. Este método genera de forma general subcategorías reflexivas y correflexivas de Top y se generaliza cuando se toma como punto de partida un constructo topológico.
En [4] se presenta la topología como una relación de convergencia de filtros. Al debilitar esta definición se obtienen otras categorías topológicas que se constituyen en ampliaciones óptimas de la categoría de los espacios topológicos, entre ellas aparecen la categoría de los espacios Pretopológicos Prtop y Pseudotopológicos PsTop, en esta última se resuelve el problema de la exponenciación en Top. La categoría PsTop aparece como la envolvente cartesiana de las categoría Top, esto da como resultado que Top es una subcategoría reflexiva de la categoría PsTop.
En este trabajo se presenta en forma unificada estos resultados que hemos encontrado dispersos en la literatura, se hace notar que no es frecuente encontrar la solución a un problema por dentro y por fuera. Para el caso que nos ocupa con esto queremos expresar que en la categoría de los espacios secuenciales se resuelve el problema, por dentro, de la exponenciación en Top para algunos espacios topológicos y en la categoría PsTop se resuelve, por fuera, para todos los espacios topológicos. Finalmente es de anotar que el trabajo enriquece los resultados encontrados en la literatura a través de teorías nuevas y propias de los autores, entre ellas métodos de construcción de subcategorías topológicas reflexivas y correflexivas [5-8].
Con esta idea en mente, para contextualizar al lector, varios de los conceptos clásicos y conocidos son introducidos y en lo posible presentados con variedad de ejemplos; se trata de hacer que el artículo sea presentado al máximo de una forma autocontenida.

## 2. CONCEPTOS BÁSICOS EN TEORÍA DE CATEGORÍAS

El estudio de la topología categórica puede considerarse como el estudio de la generalización del funtor olvido $O_e$ de la categoría de los espacios topológicos Top en la categoría de los conjuntos Sets, en particular de las construcciones relacionadas con topologías iniciales y finales que permite dicho funtor. Veamos, entre otros, estas construcciones, las cuales será bueno tener a la mano, pues como se verá estas son la clave para el desarrollo del trabajo.

### 2.1 La categoría de los espacios topológicos y su estructura de categoría topológica

Si Y es un conjunto y $\{Xi\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos, la topología final para un sumidero $\{fi: Xi \to Y\}_{i\in I}$ corresponde a la intersección de la familia $\{A|\ f_i^{-1}(A)$ es abierto en $Xi\}_{i\in I}$. Dicha construcción verifica la siguiente propiedad universal: para todo espacio topológico Z y toda función g: Y → Z tal que $g \circ f_i$ es continua, se tiene que g es continua[1].
De manera dual se tiene la definición de topología

1. Para facilitar la comprensión de algunas definiciones y resultados en algunos apartes del trabajo, los objetos y morfismos de una categoría topológica los notaremos en negrilla y su imagen por el funtor los escribiremos sin negrilla. Por ejemplo, en la categoría de los espacios topológicos f: X → Y simboliza una función continua y f: X → Y su función correspondiente en la categoría de los conjuntos.


ISSN 1794-211X • e-ISSN 2322-939X • Vol 12, No 1 (enero-junio 2015). pp. 98-106. Universidad Distrital Francisco Jose de Caldas-Facultad Tecnologica.

inicial para una fuente. Ahora bien, se puede notar que la construcción de topologías iniciales y finales de familias arbitrarias usa el hecho de que la colección de topologías sobre un conjunto (la fibra) tiene estructura de retículo completo, con el orden inducido por la inclusión. En particular, dada una familia de topologías sobre un conjunto, el ínfimo está dado por la intersección y el supremo por la topología generada por la reunión.

Algunos espacios de interés en la topología algebraica se obtienen a partir de topologías finales, por ejemplo: el cilindro, el toro, la cinta de Mobiüs y la botella de Klein.

La esencia de una categoría topológica es la existencia de estructuras similares a las de las topologías iniciales y finales. A continuación se presenta dicha noción, que será un poco particular debido al interés de este trabajo.

### *2.1.1 La noción de categoría topológica*

*Definición 1.1:*

[9] Sea F: C → Sets un funtor. Se dice que F es un funtor topológico y que C es una categoría topológica, si se cumplen las siguientes condiciones:

I. F es fiel.
II. F es apto para construir estructuras iniciales y finales de fuentes y sumideros unitarios.
III. Para cada conjunto X, la fibra F ib(X) tiene estructura de retículo completo.

Como lo acabamos de anotar, esta definición es un poco restrictiva pues Sets puede reemplazarse por otra categoría. Aquí conviene anotar que la propiedad II generaliza las nociones de topología inicial y final. Es decir, se definen como estas y con semejantes propiedades universales. La propiedad (iii) captura el hecho de que la colección de topologías sobre cada conjunto tiene estructura de retículo completo con el orden dado por la inclusión. En particular para el caso que nos ocupa, si X es un conjunto, notamos con F ib(X) la colección de los objetos X de C, tales que F(X)= X. En F ib(X) se define la relación "≤" así: dados $X_1$ y $X_2$ en F ib(X), se dice que **X1** ≤ **X2**, si y solamente si, existe un morfismos **f:** $\mathbf{X_2} \to \mathbf{X_1}$ tal que F(**f**)= $1_X$.

A la pareja (F ib(X), ≤) se le llama la fibra de X. Es de anotar que en general la relación "≤" definida en F ib(X) es reflexiva y transitiva, pero recalcamos que la exigencia en III es que este orden sea un retículo completo.

*Observación:*

Con estas ideas en mente interpretaremos inicialmente a C como una subcategoría de Top fibrada sobre Sets por medio del funtor olvido y en las propiedades I y II como topologías iniciales y finales y más adelante en la siguiente sección como una categoría que extiende a la categoría de los espacios topológicos. Ahora bien, advertimos que no toda subcategoría incluso plena de Top es una categoría topológica, tal es el caso de la subcategoría plena de Top formada por los espacios de Haudorff[2].

*Ejemplo:*

Las categorías de los espacios uniformes, espacios secuenciales, pretopológicos y pseudotopológicos son categorías topológicas fibradas sobre la categoría de los conjuntos [9].

- **Subcategorías reflexivas y correflexivas**

*Definición 1.2:*

[9] Sean C una categoría y H una subcategoría de C. Se dice que H es reflexiva en C, si para todo objeto V

2. Herrlich y Strecker proponen en [9] una definición de funtor topológico que exige la existencia de estructuras iniciales de fuentes arbitrarias. La definición considerada en este trabajo corresponde a una caracterización de funtor topológico. Probar que esta es una caracterización es un problema propuesto en [9]. En [10] hemos demostrado este resultado, en donde además hemos relacionado estas nociones con la de constructo topológico dada por Preuss en [11].

de C existe un objeto $V^*$ en H y un morfismo $r_V$: V → $V^*$, llamado la reflexión de V, tal que para cualquier objeto U de H y cualquier morfismo f: V → U existe un único morfismo en H $f^*$: $V^*$ → U tal que $f^* \circ r_V = f$. Pensando en H como una subcategoría de C pero con mejores propiedades, la definición expresa que todo objeto de C puede ser mejorado de manera óptima por medio de un determinado proceso, que realmente será un funtor. Dicho funtor asigna a cada objeto de C su mejorado en H con una propiedad universal, estando además los dos objetos, el de partida y su mejorado, debidamente relacionados. Una proposición que caracteriza las categorías reflexivas está asociada a la adjunción, noción que se presenta a continuación.

*Definición 1.3:*

[12] Dados los funtores F: C → D y G: D → C, se dice que F es adjunto a izquierda de G y que G es adjunto a derecha de F, si para todos los objetos X de C y Y de D, se tiene el isomorfismo natural de clases [F (X), Y]D ~= [X, G(Y )]C.
En tal caso F preserva colímites y G preserva límites. Ahora enunciamos una proposición que caracteriza las categorías reflexivas. H es una subcategoría reflexiva de C, si y solamente si, el funtor de inclusión I : H → C admite adjunto a izquierda. De manera dual se tiene la definición de subcategoría correflexiva y su caracterización correspondiente.

*Ejemplos:*

1. La categoría de los espacios compactos de Hausdorf es una subcategoría reflexiva de los espacios completamente regulares.
2. La categoría de los espacios métricos es una subcategoría reflexiva de los espacios pseudométricos.
3. La categoría de los espacios topológicos es una subcategoría reflexiva de la categoría de los espacios pseudotopológicos.
4. La categoría de los espacios secuenciales es una subcategoría correflexiva de la categoría de los espacios topológicos.
5. Es de anotar que los ejemplos 3 y 4 serán tratados en algún detalle más adelante.

A continuación se muestra un método de construir subcategorías reflexivas (correflexivas) topológicas de Top haciendo uso de topologías iniciales (finales). En particular, en la siguiente sección se muestra que la categoría de los espacios secuenciales es generada por este método, esto da como resultado que esta es una categoría topológica fibrada sobre la categoría de los conjuntos y además una subcategoría correflexiva de Top. El método se basa en funtores que hemos denominado *elevadores de estructura* en [5] y de los cuales aquí se considera un caso particular. El estudio de estos funtores es motivado desde la topología, con un poco más de precisión, en la búsqueda de endofuntores de Top que respeten las fibras y al mismo tiempo asignen topologías más finas.

## 2.2 Un método de construcción de subcategorías topológicas reflexivas y correflexivas de Top

Haciendo uso de estructuras finales los espacios topológicos definen funtores que determinan subcategorías topológicas y correflexivas de Top, como se ilustra a continuación.
Sean **W** y **X** espacios topológicos. En la colección de funciones continuas de **W** en **X**, $[\mathbf{W}, \mathbf{X}]_{Top}$ , al olvidar la topología de **X** se obtiene el sumidero que notamos $S_{(W, X)} = \{f: \mathbf{W} \to X \mid f \in [\mathbf{W}, \mathbf{X}]_{Top}\}$. La estructura final para $S_{(W, X)}$ la notaremos $FS_{(W, X)}$.
Sea **W** un espacio topológico. Se determina el funtor: $E_W$: Top → Top definido por $E_W$ (**X**): $FS_{(W, X)}$ y $E_W$(**f**): **f**. $E_W$ es un funtor idempotente, esto es $E_W$ o $E_W = E_W$. Por lo tanto sus puntos fijos coinciden con su imagen que notamos $E_W$(Top).
Ahora bien, los puntos fijos del funtor $E_W$ forman una subcategoría topológica de Top. En efecto, basta observar que los supremos, ínfimos, topologías iniciales y topologías finales se construyen en Top y luego se trasladan por medio del funtor $E_W$ a $E_W$ (Top). De otro lado $E_W$ (Top) es una subcategoría correflexiva


ISSN 1794-211X • e-ISSN 2322-939X • Vol 12, No 1 (enero-junio 2015). pp. 98-106. Universidad Distrital Francisco Jose de Caldas-Facultad Tecnologica.

de Top. En efecto basta observar que el funtor $E_W$ es adjunto a derecha del funtor de inclusión de $E_W$ (Top) en Top.

De manera dual, haciendo uso de topologías iniciales, un espacio topológico W da origen a un funtor idempotente $C_W$, obteniéndose los resultados duales[3].

*Ejemplos:*

1. Consideremos N∞= {0, 1, 1/2,…, 1/n,…} como subespacio del conjunto de los números reales R con su topología usual. La categoría $E_{N\infty}$ (Top) corresponde a la categoría de los espacios secuenciales, ejemplo que será tratado en detalle en la sección 4.
2. Consideremos el espacio de Sierpinski S= (S, τ) donde S= {0, 1} y τ= {∅, {0, 1}, {1}}. Entonces, $C_S$(Top)= Top.
3. Sea I el intervalo [0, 1] con su topología usual. La categoría $C_I$(Top) corresponde a la categoría de los espacios completamente regulares.
4. La categoría de los espacios uniformes U nif es isomorfa a la categoría de los espacios completamente regulares, véase por ejemplo [13]. Por lo tanto U nif es una subcategoría topológica y reflexiva de Top.

## 2.3 La falta de exponenciación en Top

*Definición 2.1:*

[12] Sea C una categoría con productos finitos. Se dice que C tiene exponenciación si para todo objeto X de C el funtor – × X: C → C que asigna a cada objeto Y de C el objeto Y × X y a cada morfismo f: Y → Z el morfismo $f \times 1_X$: Y × X → Z × X tiene adjunto a derecha. En forma equivalente, C tiene exponenciación si para todo par de objetos X y Y de C existe un objeto notado $Y^X$ y un morfismo $e_v$: $Y^X$ × X → Y, llamado la evaluación, tal que para todo objeto Z de C y todo morfismo f: Z × X → Y existe un único morfismo φ: Z → $Y^X$ tal que $e_v \circ (\varphi \times 1_X)= f$. Esta es otra manera de decir que el funtor exponenciación es adjunto a izquierda del funtor producto.

*Observación:*

Nótese que de existir la exponenciación en Top, de acuerdo a la definición anterior, si X y Y son dos espacios topológicos, tomando el objeto Z de la definición precedente como un espacio topológico con un solo elemento, se deduce que el conjunto subyacente de $Y^X$ debe corresponder al conjunto de funciones de X en Y. La carencia de una topología para dicho conjunto limita la categoría de los espacios topológicos para trabajar algunos aspectos de la teoría de la homotopía y del análisis funcional [2]. En particular Top no tiene exponenciales. En efecto, consideremos el conjunto de los números reales R con su topología usual y el conjunto de los números racionales Q como subespacio de R. El funtor – × Q: Top → Top no preserva colímites pues no preserva coigualadores y por lo tanto el resultado se sigue, ver [1]. Otra forma de ver que Top no tiene exponenciación es considerando los espacios de los números racionales Q y el intervalo [0, 1] como subespacios del conjunto de los números reales R, en tal caso suponer que existe el espacio $[0, 1]^Q$ lleva a concluir que Q es localmente compacto, lo cual es un absurdo [4].

**Definición 2.2:** [12] Se dice que una categoría C es cartesiana cerrada si tiene objeto terminal, productos finitos y exponenciación.

## 2.4. Una solución interna al problema de la exponenciación en Top

### *2.4.1. La categoría de los espacios secuenciales como subcategoría topólogica y correflexiva de Top*

*Definición 3.1:*

[15] Se dice que un espacio X es secuencial, si cada subconjunto secuencialmente abierto de X es

3. Otros trabajos que relacionan subcategorías generadas a través de topologías iniciales y temas afines, han sido publicados por A. Oostra en [7, 14].


ISSN 1794-211X • e-ISSN 2322-939X • Vol 12, No 1 (enero-junio 2015). pp. 98-106. Universidad Distrital Francisco Jose de Caldas-Facultad Tecnologica.

abierto. Un subconjunto $A \subseteq X$ es secuencialmente abierto si cada sucesión en X que converge a un punto de A esta eventualmente en A, en otras palabras, por fuera de A solo hay un número finito de términos de la sucesión.

Dentro de los espacios secuenciales se encuentran espacios importantes para el trabajo del análisis y de la topología. Los espacios 1-contables, en particular los espacios métricos son secuenciales, véase por ejemplo [13, 15].

Veremos en seguida que la categoría de los espacios secuenciales es una subcategoría topológica y correflexiva de Top, construcción que toma como base [16].

Consideremos el conjunto de los números naturales N. Notemos con $N\,\infty$ al espacio $\{0, 1, 1/2,\ldots, 1/n,\ldots\}$ como subespacio de los números reales R con su topología usual.

**Proposición 1:** Sea **X** un espacio topológico. Una función $s: N\,\infty \rightarrow \mathbf{X}$ es continua, si y solamente si, la sucesión $s: N \rightarrow \mathbf{X}$ es convergente a $s(0)$.

**Demostración:** Supongamos que $s: N\,\infty \rightarrow X$ es una función continua. Sea $s(0) = x_0$ . Veamos que la sucesión $s: N \rightarrow \mathbf{X}$ converge a $x_0$. Sea A abierto en X tal que $x_0 \in A$. Entonces, puesto que $s: N\,\infty \rightarrow X$ es continua, $s^{-1}(A)$ es abierto en $N\,\infty$ y su complemento es finito. Por lo tanto la sucesión $s: N \rightarrow X$ converge a $x_0$.

Recíprocamente, sea $s: N\,\infty \rightarrow X$ una función tal que la sucesión $s: N \rightarrow X$ es convergente a $s(0)$. Supongamos que $s(0) = x_0$. Sea A un abierto de X. Si $x_0 \notin A$, entonces $s^{-1}(A)$ no contiene a 0 y por lo tanto $s^{-1}(A) \subseteq N$, de donde $s^{-1}(A)$ es abierto en $N\,\infty$. Si $x^0 \in A$, entonces, puesto que la sucesión $s: N \rightarrow X$ converge a $x_0$, $s^{-1}(A)$ contiene a 0 y su complemente es finito, luego $s^{-1}(A)$ es abierto en $N\,\infty$. Por lo tanto $s: N\,\infty \rightarrow \mathbf{X}$ es continua.

**Proposición 2:** Las subcategoría plena de Top formada por los espacios secuenciales corresponde a la categoría $E_{N\,\infty}$ (Top).

**Demostración:** Sea $\mathbf{X} \in E_{N\,\infty}$ (Top). Veamos que **X** es secuencial. Sea $A \subseteq \mathbf{X}$, A secuencialmente abierto. Sea F el conjunto de funciones continuas de $N\,\infty$ en **X** y S el conjunto de funciones continuas de $N\,\infty$ en **X** determinadas por las sucesiones convergentes de **X** a elementos de A. Entonces $f^{-1}(A)$ es finito y $0 \notin f^{-1}(A)$ para toda $f \in S$, lo cual significa que $f^{-1}(A) \subseteq N$ y por lo tanto $f^{-1}(A)$ es abierto en $N\,\infty$. Ahora, $0 \notin f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(A)^c$ es finito para toda $f \in F - S$, luego $f^{-1}(A)$ es abierto en $N\,\infty$. Entonces para toda $f \in F$, $f(A)$ es abierto en $N\,\infty$ y por la forma como se construye la estructura final para el sumidero determinado por F, se sigue que A es abierto en $N\,\infty$, que era lo que se quería demostrar.

Supongamos ahora que **X** es un espacio secuencial y veamos que $\mathbf{X} \in E_{N\,\infty}$ (Top). Para esto supongamos que $E_{N\,\infty}(\mathbf{X}) = \overline{\mathbf{X}}$ veamos que $\mathbf{X} = \overline{\mathbf{X}}$. Puesto que $EN\,\infty$ es elevador $X \subseteq \overline{X}$ luego resta probar que $\overline{\mathbf{X}} \subseteq \mathbf{X}$. Sea A abierto en X. Nuevamente, sean F el conjunto de funciones continuas de $N\,\infty$ en X y S el conjunto de funciones continuas de $N\,\infty$ en X determinadas por las sucesiones convergentes de X a elementos de A. Entonces, puesto que F también corresponde al conjunto de funciones de $N\,\infty$ en X, se tiene que para toda $f \in F$, con $f: N \rightarrow \overline{\mathbf{X}}$, $f^{-1}(A)$ es abierto en N; pero también considerando a $f: N \rightarrow X$, $f^{-1}(A)$ es abierto en $N\,\infty$. Entonces en este último caso, si $f \in S$, entonces $f(0) \in A$ y como $f^{-1}(A)$ es abierto en $N\,\infty$, $0 \in f^{-1}(A)$ y $f-1(A)^c$ es finito, lo cual implica que A contiene casi todos los términos de cada sucesión f convergente en **X** a elementos de A. Por lo tanto A es un subconjunto secuencialmente abierto de **X** y como **X** es secuencial se tiene que A es abierto en X.

**Corolario:** La categoría de los espacios secuenciales es una categoría topológica y una subcategoría correflexiva de Top.

## 3. OBSERVACIÓN

Puesto que la categoría $E_{N\,\infty}$ (Top) es topológica, resulta completa y co-completa. Al respecto, es de anotar, que en general los límites en $E_{N\,\infty}$ (Top) no coinciden con los de Top, hecho que sí se tiene con los colímites; en particular los límites en $EN\,\infty$ (Top) se construyen en Top y luego se trasladan a esta por medio del funtor $E_{N\,\infty}$.


ISSN 1794-211X • e-ISSN 2322-939X • Vol 12, No 1 (enero-junio 2015). pp. 98-106. Universidad Distrital Francisco Jose de Caldas-Facultad Tecnologica.

Para finalizar esta sección, un resultado interesante que debemos citar es que la categoría de los espacios secuenciales es cartesiana cerrada, véase [2]. En efecto dados dos espacios topológicos **X** y **Y** sobre el conjunto de funciones continuas de **X** en **Y**, que notamos [X, Y )] se define la topología compacto abierta, este objeto es la exponencial $Y^X$ función evaluación e : [X, Y ]xX → Y es continua y satisface la propiedad universal. Pero más aún la categoría de los espacios secuenciales es cartesiana cerrada.

### 3.1 Una solución externa al problema de la exponenciación en Top: La categoría de los espacios pseudotopológicos

Recordemos que el problema que nos ocupa es que la categoría de los espacios topológicos no tiene exponenciación. Ahora bien, al definir la categoría de los espacios topológicos mediante una función de filtros convergentes y debilitar las condiciones, se obtienen entre las otras categorías de los espacios pseudotopológicos que aparece como la envolvente cartesiana de Top. Es de anotar, que esta sección toma como base la referencia [4], de donde, con el ánimo de contextualizar al lector, hemos tomado las definiciones y resultados básicos. Es de anotar que [17], de carácter didáctico, toma como base la primera [4].

## 4. LA CATEGORÍA DE LOS ESPACIOS DE CONVERGENCIA DE FILTROS

**Definición 4.1:** Un subconjunto F de P (X) (es decir, F ∈ P (P (X))) es un filtro si:

1. $\emptyset \notin F$.
2. si A, B ∈ F, entonces, $A \cap B \in F$.
3. si A ∈ F y A ⊆ B ∈ P (X), entonces, B∈F.

Si X es un conjunto, la colección de filtros sobre X se denota por F (X).
Un ultrafiltro G sobre X es filtro maximal, esto es si F es un filtro y G ⊆ F; entonces, F = G. La colección de ultrafiltro de X se simboliza U (X) ⊆ F (X).

**Definición 4.2:** una función

$$\begin{aligned} q: X &\to P(F(X)) \\ x &\to q(x) \end{aligned}$$

Se llama función de convergencia de filtros si satisface los siguientes axiomas

1. $\mathring{x} \in q(x)$, donde $\mathring{x}$, es un ultrafiltro sobre X y $\mathring{x} = \{A \subseteq X \mid x \in A\}$.
2. si F ∈ q (x) y F ⊆ G ∈ F (X), entonces, G ∈ q (x).
3. Si {Gi} i ∈ I es una familia de filtros Gi ∈ q (x), para todo i ∈ I, entonces ∩ Gi ∈ q(x)

4. Sea A un subconjunto de X. Si a ∈ A, F ∈ q (a), y {Gx}x∈X es una familia de filtros tal que Gx ∈ q (x) para todo x ∈ X

$$\bigcup_{\in F} \bigcap_{x \in A} Gx \in q(a)$$

Para cada x ∈ X, los elementos de q (x) se llaman filtros convergentes a x.

A la pareja (X, q) donde X es un conjunto cualquiera, y q es una función de convergencia de filtros se le llama espacio de convergencia de filtros.

**Definición 4.3:** Se define la categoría de los espacios de convergencia de filtros así:

1. Los objetos son parejas (X, q) donde X es un conjunto cualquiera y q es una función de convergencia de filtros.
2. Los morfismos entre dos objetos (X, q) (Y, p) son funciones f: X → Y tales que si F ∈ q (x), Entonces, f [F ] ∈ p (f (x)).

*Ejemplos:*

Si (X, T) es un espacio topológico se define:

$$\begin{aligned} q_\tau &: X \to P(F(X)) \\ x &\to q_\tau(x) = \{F \in F(x) \mid v(x) \subseteq F\} \end{aligned}$$

donde v(x) es el filtro de vecindades de x. Entonces, $q_\tau$ (x) es una función de convergencia de filtros.
Si (X, q) es un espacio de convergencia de filtros, este genera un espacio topológico $X_1$ el cual genera de nuevo un espacio de convergencia de filtros y este a su vez genera un nuevo espacio $X_2$, resultando $X_1$ y $X_2$ espacios isomorfos. De este hecho se sigue que un espacio de convergencia de filtros se puede identificar con un espacio topológico.

- **Las categorías Top, Prtop y Pstop**

**Definición 4.4:**

Sea q: X → P (F (X)) una función de convergencia de filtros. Entonces:

a. (X, q) es un espacio topológico si satisface las propiedades, 1, 2, 3 y 4 de la definición 4.2.
b. (X, q) es un espacio Pretopológicos si q satisface las propiedades 1 y 2 y 3 de la definición 4.2.
c. (X, q) es un espacio Pseudotopológicos si q satisface las propiedades 1 y 2 de la definición 4.2 y 30 : para cada F ∈ F (X) si F ⊆ V ∈ U (X), implica V ∈ q (x), entonces, F ∈ q (x); siendo U (X) la colección de los ultrafiltros sobre X.

De esta manera, a partir de filtros convergentes, se determinan las categorías de los espacios topológicos Top, pretopológicos Prtop y pseudotopológicos Pstop, haciendo notar que en cada caso los morfismos son como los definidos en 4.3. Estas categorías son fibradas sobre la categoría de los conjuntos y resultan categorías topológicas. En particular Top es una subcategoría reflexiva de Prtop y a su vez Prtop es reflexiva sobre Pstop, hechos demostrados en [4].
Ahora bien, funtores como los mencionados en la sección "Un método de construcción de subcategorías topológicas reflexivas y correflexivas de Top", EW y CW , son ejemplos de funtores elevadores y coelevadores de estructura en Top respectivamente. Recalcamos que la categoría de los puntos fijos de estos endofuntores son subcategorías topológicas de Top y en el primer caso subcategorías reflexivas de Top y en el segundo son subcategorías correflexivas de Top; pero todos estos resultados se tienen si en lugar de Top se consideran endofuntores idempotentes de definidos en constructos topológicos como Prtop y Pstop. En este sentido como tema de trabajo, nos planteamos si haciendo uso de endofuntores definidos en Prtop se obtienen Top y P stop como categorías reflexivas.
El siguiente resultado da respuesta positiva a una de las preguntas formuladas. En efecto, consideremos la aplicación

$$C: \text{Pstop} \rightarrow \text{Pstop}$$

Definida por C(X, q)= C(X, $\bar{q}$) y C(f) = f donde $\bar{q}$: X→ P(F(X)) esta última aplicación se define de la siguiente forma

$$F \in q(x) \text{ si solo si } \cap q(x) \in F$$

Es decir que

$$\bar{q}(X) = \{F \in q(x) \,/\, \cap q(x) \in F\}$$

Es fácil ver que C es un endofuntor idempotente y que susppuntos fijos corresponden a los espacios pretopologicos. De este hecho se sigue que Prtop es una subcategoría reflexiva de Pstop.
Ahora bien, volviendo al caso que nos ocupa, la categoría P stop de los espacios pseudotopológicos tiene exponenciación. En efecto, dados (X, q), (Y, p) espacios pseudotopológicos, la estructura cartesiana sobre [X, Y] está determinada por la función r : [X, Y] → ℘(F [X, Y ]) donde para cada f ∈ [X, Y]se tiene que H ∈ r(f), si y solamente si, e[H ×F ] ∈ ℘(f (x)) para cada F ∈ q(x).Es de anotar que es la evaluación natural y que H×F = {C ⊂ [X, Y ] × X ∃A ∈ H, B ∈ F con A × B ⊂ C} es un filtro sobre [X, Y ] × X, luego e[H × F] es un filtro sobre Y[4].
De esta manera, finalmente en Pstop se resuelve el problema de la falta de exponenciación en Top.


ISSN 1794-211X • e-ISSN 2322-939X • Vol 12, No 1 (enero-junio 2015). pp. 98-106. Universidad Distrital Francisco Jose de Caldas-Facultad Tecnologica.

## 5. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecemos al grupo del seminario Vialtopo que orientó el profesor Carlos Javier Ruiz Salguero, Q.E.P.D.

## 6. REFERENCIAS

[1] J. Šlapal, "A cartesian closed topological category of sequential spaces". *Periodica Mathematica Hungarica*, Vol. 21, No 2, pp.109-112, 1990.

[2] A. Frölicher, *Cartesian closed categories and analysis of smooth maps,* Berlin: Springer Heidelberg, 1986.

[3] L. Lambán Pardo, "M-estructuras y espacios secuenciales". *Actas de la II Reunión del Grupo de Geometría y Topología de Zaragoza, Sevilla y Logroño*, Zaragoza: Universidad de Zaragoza, 1987.

[4] R. Lowen, *et al.*, *Improving constructions in topology, Category Theory at Work*, Berlin: Heldermann Verlag, 1991.

[5] R. Montañez y C. Ruiz, "Elevadores de estructura", Boletín de Matemáticas, Nueva serie, XIII, no. 2, pp. 111-35, 2006.

[6] J. Hernández, "Sobre las subcategorías reflexivas y correflexivas en la categoría de los espacios topológicos" (Tesis de Maestría). Universidad Nacional de Colombia, 2012.

[7] A. Oostra, "Subcategorías generadas mediante estructuras iniciales", *Lecturas Matemáticas*, 16, pp. 63-72, 1995.

[8] A. Oostra, "The Uniformizable Spaces Are Generated by the Real Numbers", Ann. New York: Acad, Sc., 767, pp.165-167, 1995.

[9] J. Adamek *et al.*, *Abstract and Concrete Categories*, New York: John Wiley and Sons Inc., 1990.

[10] V. Ardila, J. Montañez y C. Ruiz, "Nociones equivalentes de Categorías Topológicas", *Boletín de Matemáticas, Nueva serie*, Vol. 7, No 1, pp.19-27, 2000.

[11] G. Preuss, *Theory of Topological Structures*, Dordrecht: D. Reidel Publishing Company,1988.

[12] S. Mac Lane, I. *Moerdijk, Sheaves in Geometry and Logic, A first introduction to topos Theory*", New York: Springer-Verlag, 1992.

[13] S. Willard, *General Topology*. Adisson Wesley Publishing Company, 1970.

[14] A. Oostra, "The Uniformizable Spaces Are Generated by the Real Numbers", Ann. New York: Acad., pp.165-167, 1995.

[15] S. P. Franklin, "Spaces in which sequences suffice". *Fund. Math*, Vol. 57, pp.107-115, 1965.

[16] R. Montañez, "La sucesión {1/n} como generadora de los espacios secuenciales", *Boletín de Matemáticas. Nueva serie*, XX No. 2 pp. 97-107, 2013.

[17] A. Oostra y R. Montañez, "Ampliación de la categoría de los espacios topológicos", Encuentro de geometría, Universidad Pedagógica Nacional, junio de 1995.