NOCIONES DE MEJORAMIENTO EN TEORIA DE CATEGORIAS

Subcategoría reflexiva – subcategorías correflexivas

JORGE A. HERNÁNDEZ PARDO[@]

JOSÉ REINALDO MONTAÑÉS PUENTES[@@]

Resumen

En éste artículo se trabajan los conceptos de subcategorías reflexivas y correflexivas. El artículo presenta las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de subcategorías reflexivas, así como varios ejemplos en diferentes áreas de la matemática.

Palabras Clave: Categorías. Funtor. Reflexiva. Subcategoría.

Abstract

This article deals with concepts and definitions of reflexive and coreflexive subcategories. The article presents the necessary and sufficient conditions for the existence of reflexive subcategories as well as several examples in different areas of mathematics.

Key Words: Categories. Funtor. Reflexive. Subcategorie

1. INTRODUCCIÓN

Es frecuente en el trabajo de ciertas estructuras matemáticas construir objetos enriquecidos estructuralmente a partir de objetos dados. Por ejemplo, dado un espacio topológico, asociarle el mejor espacio compacto, dado un espacio pseudométrico construir a partir de él un espacio métrico, dado un grupo construirle el mejor grupo abeliano. Estas ideas conllevan las acciones de subcategorías reflexivas y correflexivas.

[@] Matemático de la Universidad Nacional de Colombia. Docente Universidad Distrital adscrito a la Facultad Tecnológica. joadez@latinmail.com

[@@] Matemático de la Universidad Nacional de Colombia. Magíster en Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia.

En el presente trabajo se presentan y caracterizan tales conceptos, así como se muestran una variedad de ejemplos en las áreas de la topología y del álgebra entre otros.

2. SUBCATEGORIAS REFLEXIVAS

2.1 Definición (Subcategorías Reflexivas)

Sea *C* una Categoría y H una subcategoría de *C.* Se dice que H es REFLEXIVA en *C,* si para cada objeto *v* de *C,* existen: Un objeto v^* en H (llamado la Reflexión de *v*) y un Morfismo r_v; $v \to v^*$ tales que, para todo objeto *u* de H y todo Morfismo $f: v \to u$, existe un único Morfismo $\alpha_f : v^* \to u$ que cumple $f = \alpha_f \circ r_v$

$$\begin{tikzcd} v \arrow[r, "r_v"] \arrow[dr, "f"'] & v^* \arrow[d, "\alpha_f"] \\ & u \end{tikzcd}$$

2.2 Observaciones

a. La Reflexión de cada objeto es única salvo Isomorfismos
b. El Morfismo r_v: $v \to v^*$ es un Epimorfismo.

En efecto, sean $g, h \in Mor(v^*,w)$ tales que $h \circ r_v = g \circ r_v$, entonces, si consideramos el morfismo $f \in Mor(v,w)$ por la propiedad Universal de la Reflexividad se cumple que $h = g$.

c. Si H es reflexiva en *C* y K es una subcategoría reflexiva de H, entonces K es reflexiva en ***C.***

En efecto, sea *v* un objeto de *C*; como H es reflexiva en *C* existen:
v^* objeto de H y $r_v: v \to v^*$

y como K es reflexiva en H para v^* objeto de H existen:

v^{**} objeto de k y $r_{v^*}: v^* \to v^{**}$

Sea $f: v \to u$, dado que v^* es la reflexión de v, existe un único morfismo $a_f: v^* \to u$ tal que

$f = \alpha_f \circ r_v$

$$\begin{tikzcd} v \arrow[r, "r_v"] \arrow[dr, "f"'] & v^* \arrow[d, "a_{ff}"] \\ & u \end{tikzcd}$$

Como a_f; $v^* \to u$ y v^{**} es la reflexión de v^*, existe un único Morfismo α_f tal que $\alpha_f = \alpha'_f \circ r_{v^*}$

$$\begin{tikzcd} v^* \arrow[r, "r_{v^*}"] \arrow[dr, "\alpha_f"'] & v^{**} \arrow[d, "\alpha'_f"] \\ & u \end{tikzcd}$$

Es decir, si v es un objeto de ***C,*** existen:

v^{**} de K y un morfismo $r_{v^*} \circ r_v: v \to v^{**}$ tal que para todo morfismo $f: v \to u$, el morfismo $\alpha'_f : v^{**} \to u$ es el único que cumple $f = \alpha'_f \circ r_{v^*} \circ r_v$

2.3 Proposición

Una subcategoría H de una categoría C es Reflexiva sí y sólo sí el Funtor Inclusión $I : H \to C$ es Adjunto.

Prueba: Sea H una subcategoría reflexiva en C. El Funtor R: $C \to H$ definido así:

a. Para cada objeto v de C , $R(v) = v^*$.

b. Para cada morfismo $f : v \to u$ de C: $R(f) := \alpha_{(r_u \circ f)} : v^* \to u^*$

$$\begin{tikzcd} v \arrow[r, "r_v"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr] & v^* \arrow[d, "\alpha_{(r_v \circ f)}"] \\ u \arrow[r, "r_u"'] & u^* \end{tikzcd}$$

Claramente, R: $C \rightarrow$ H es un Funtor.

Veamos ahora que el funtor I es adjunto a derecha de R, es decir, se debe probar que *Hom(v,I(u))* $\cong$ *Hom(R(v),u)* para todo objeto v de C y todo u de H. En efecto, se define Φ: *Hom(v,I(u))* $\rightarrow$ *Hom(R(v),u)* por $\Phi(f) = \alpha_f$ para cada morfismo $f: v \rightarrow u$.

a. Φ está bien definida, puesto que para cada morfismo f, el morfismo $\alpha_f : v^* \rightarrow u$ *es,* por la propiedad universal, único.
b. Φ es Inyectiva.
   En efecto, sea $\Phi(f) = \Phi(g)$, es decir, $\alpha_f = \alpha_g$, entonces, $\alpha_f \circ r_v = \alpha_g \circ r_v$; luego, $f = g$
c. Ahora, sea $p: v^* \rightarrow u$ se define $f: v \rightarrow u$ por $f := p \circ r_v$ entonces, $\Phi(f) = p$ $(p = \alpha_f)$
   De a, b, y c se concluye que Φ es isomorfismo.

Supongamos ahora que el funtor $I: H \rightarrow C$ es adjunto a derecha de un funtor R: $C \rightarrow$ H es decir que existe una biyección Φ, $\Phi: Hom(v,I(u)) \rightarrow Hom(R(v), u)$
para cada $v \in C$; y $u \in H$; veamos que la subcategoría H es reflexiva en C. Tomando u = R(v), para cada objeto v de C, existe el objeto R(v) y el morfismo $\Phi^{-1}(I_{r(v)})$: $v \rightarrow R(v)$ donde $I_{R(V)}: R(v) \rightarrow R(v)$ es el morfismo Identidad.

El objeto R(v) de es la reflexión del objeto v de C.
En efecto, sea f: $v \rightarrow w$ un morfismo, como Φ es una función, existe, y se cumple:
$\Phi(f) \circ \Phi^{-1}(1_{R(v)}) = f$.

Además, si g o $\Phi^{-1}(1_{R(V)}) = f$ entonces, $\Phi(f)$ o $\Phi^{-1}(1_{R(V)})$ = g o $\Phi^{-1}(1_{R(V)})$ luego, es decir, el morfismo $\Phi(f) : R(v) \rightarrow w$ es único. De esta forma $v^* = R(v)$ y $r_v := \Phi^{-1}(1_{R(V)})$.

2.4 Ejemplos

a. Sea C la categoría de los espacios pseudométricos; los objetos de esta categoría son los espacios pseudométricos y los morfismos son las contracciones.

Sea H la categoría de los espacios métricos, es claro que H es subcategoría de *C* , H es reflexiva en *C;* sea (v, d) un objeto de *C,* en el conjunto v se define una relación denotada por $\approx$, así $x \approx y$ y sí y sólo sí $d(x, y) = 0$.

La relación $\approx$ es de equivalencia.

Sobre el conjunto cociente $v/\approx$, se define la función $\overline{d}: v/\approx \times v/\approx \to \Re$ por $\overline{d}(\overline{x}, \overline{y}) := d(x, y)$.

$\overline{d}$ está bien definida: En efecto, sean $x \approx x_1$, y , $y \approx y_1$ veamos que $\overline{d}(\overline{x}, \overline{y}) = d(x_1, y_1)$.

Se tiene $d(x, y) \leq d(x, x_1) + d(x_1, y) \leq d(x, x_1) + d(x_1, y_1) + d(x_1, y)$ como

$d(x, x_1) = 0$, y, $d(y, y_1) = 0$ entonces: $d(x, y) \leq d(x_1, y_2)$.

En forma similar se prueba que: $d(x_1, y_1) \leq d(x, y)$ es decir que: $d(x, y) = d(x_1, y_1)$ por lo tanto, $\overline{d}$ está bien definida, luego $(v/\approx, \overline{d})$ es un Espacio Métrico.

Se determina la función $r_v: v \to v/\approx$ por $r_v(x) := \overline{x}$, la cual es una contracción, en efecto,

$d(r_v(x), r_v(y)) := \overline{d}(\overline{x}, \overline{y}) = d(x, y)$

Finalmente, veamos que $v/\approx$ es la Reflexión de v:

Sea (u, d) un Espacio Métrico y $f: v \to u$ una contracción, se define la función $\alpha_f: v/\approx \to u$ *por* $\alpha_f(\overline{x}) :=_f (x)$; α_f está bien definida pues si $\overline{x} = \overline{y}$ entonces $d(x, y) = 0$, como f es una contracción se cumple que $0 \leq d_u(f(x), f(y)) \leq d(x, y) = 0$ pero d_u es una Métrica, es decir, $f(x) = f(y)$ y así $\alpha_f(\overline{x}) = \alpha_f(\overline{y})$. Ahora, la aplicación $\alpha_f: v/\approx \to u$ es una contracción puesto que si $\overline{x}$, $\overline{y}$ son elementos de $v/\approx$ entonces $d_u(\alpha_f(\overline{x}); \alpha_f(\overline{y})) = d_u(f(x), f(y)) \leq d(x, y) \leq \overline{d}(\overline{x}, \overline{y})$, ahora r_v es un Epimorfismo luego es el único que cumple la relación $\alpha_f \circ r_v = f$.

b. Sea *C* la categoría de los espacios topológicos, los objetos de esta categoría son los espacios topológicos y los morfismos las funciones continuas. Sea H la categoría cuyos objetos son los espacios topológicos con la topología trivial, es decir, si u es un conjunto no vacío, su topología es $\{\phi, u\}$; los morfismos de esta categoría son las funciones continuas. Claramente H es una subcategoría de *C.*

Veamos, además, que H es reflexiva en *C:*
Sea (v,τ) un objeto de *C,* entonces $(v, \{\phi,v\})$ es un objeto de H. La aplicación identidad i: $(v,\tau) \rightarrow (v,\{\phi ,v\})$ es una función continua y es la reflexión de (v,τ) puesto que para todo espacio topológico $(u, \{\phi ,u\})$ de H y toda función continua $f: (v,\tau) \rightarrow (u,\{\phi,u\})$ de H, la función α_f: $(v, \{\phi,v\}) \rightarrow (u, \{\phi,u\})$ definida por $\alpha_f(v) =: f(v)$ para todo v es continua y es tal que $\alpha_f \circ i = f$. Ahora, α_f es la única que verifica esta última igualdad puesto que i es epimorfismo.

c. Sea *C* la categoría de los conjuntos preordenados, los objetos de esta categoría son los conjuntos en cada uno de los cuales está definida una relación entre sus elementos que denotaremos $(\leq)$, la cual es reflexiva y transitiva. Los morfismos de esta categoría son las funciones que preservan el orden, es decir, si A y B son conjuntos preordenados, una función g: A $\rightarrow$ B es un morfismo en esta categoría, si para todos a_1, a_2 elementos de A, tales que $a_1 \leq a_2$ se tiene que $g(a_1) \leq g(a_2)$.

Sea H la categoría de los conjuntos parcialmente ordenados, los objetos de esta categoría son los conjuntos parcialmente ordenados, es decir, conjuntos en cada uno de los cuales está definida una relación entre sus elementos también notada $(\leq)$, la cual es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Los morfismos de esta categoría son funciones que preservan el orden en el mismo sentido de la categoría *C*. Claramente H es una subcategoría de ***C.***

Veamos, además, que H es reflexiva en *C:*
Sea $(V, \leq)$ un conjunto preordenado. En el conjunto V se define una relación entre sus elementos, la cual notaremos "$\approx$", así: para todos x y y elementos de V, $x \approx y$ si y solamente si $x \leq y$ y $y \leq x$, la relación "$\approx$" así definida es de equivalencia en V. Determinamos entonces el conjunto cociente $V/\approx$ cuyos elementos notaremos con $\bar{x}$, siempre que x sea elemento de V.

Ahora, en el conjunto $V/\approx$ definimos una relación entre sus elementos la cual notaremos por "$\leq^1$", así: para todo $\bar{x}$, $\bar{y}$ elementos de $V/\approx$, $\bar{x} \leq^1 \bar{y}$ si y solamente si $x \leq y$**.** Nótese que la relación $\leq^1$ está bien definida, en efecto, supongamos que $\bar{x} = \bar{x}^1$ y $\bar{x} = \bar{y}^1$ entonces $x \leq$

x^1, $x^1 \leq x$, $y \leq y^1$, $y^1 \leq y$ luego:

$\bar{x} \leq^1 \bar{y} \leftrightarrow x \leq y \leftrightarrow x^1 \leq x \leq y \leq y^1 \leftrightarrow \bar{x}^1 \leq^1 \bar{y}^1$.

De otra parte, la aplicación $r_V : V \to V/\approx$ definida por $r_V(x) = x$ es un morfismo en esta categoría y es además la reflexión de V.

En efecto, si $(U, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado y $f: V \to U$ es un morfismo en esta categoría, entonces la aplicación $\alpha_f: V/\approx \to U$ definida por $\alpha_f(\bar{x}) =: f(x)$ es un morfismo de conjuntos parcialmente ordenados y verifica la igualdad $\alpha_f \circ r_V = f$.

Obsérvese que α_f es el único morfismo que verifica esta última igualdad porque r_V es epimorfismo por ser éste una función sobreyectiva.

d. Sea X un conjunto no vacío y P(X) el conjunto potencia. Sea *C* la categoría que determina la relación de contenencia en el conjunto P(X). Sea τ una topología sobre X y sea H la categoría que determina la relación de contenencia en el complemento de τ, (τ^C) con respecto a P(X). Entonces H es una subcategoría reflexiva de *C*. En efecto, sea $A \in$ P(X), entonces A es subconjunto de $\bar{A}$ (adherencia de *A)* y $\bar{A} \in \tau^C$, ahora, si existe un conjunto B en τ^C tal que *A* es subconjunto de B, de todo lo anterior se concluye que $\bar{A}$ es la reflexión de *A.*

e. Sea C una categoría y H una subcategoría reflexiva de *C* determinamos una categoría *C'* de la siguiente manera:

i) Objetos de *C':* morfismos de *C*

ii) Morfismos de *C':* Dados dos objetos f y g de *C',* los morfismos con dominio f y codominio g son las parejas *(h,k)* donde *h* y *k* son morfismos de *C* tales que $k \circ f = g \circ h$.

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & \bullet \arrow[d, "k"] \\ \bullet \arrow[r, "g"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

iii) Composición de morfismos: Si (h, k) *y* (h_1, k_1) son morfismos de f en g y de g en t respectivamente,

($(h,k): f \to g$, $(h_1,k_1) : g \to t$) se define

$(h_1,k_1) \circ (h,k) =: (h_1 \circ h, k_1 \circ k)$

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & \cdot \arrow[d, "k"] \\ \cdot \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "h_1"'] & \cdot \arrow[d, "k_1"] \\ \cdot \arrow[r, "t"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

Como $g \circ h = k \circ f$ y $t \circ h_1 = k_1 \circ g$ se tiene que $t \circ (h_1 \circ h) = (k_1 \circ k) \circ f$

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h_1 \circ h"'] & \cdot \arrow[d, "k_1 \circ k"] \\ \cdot \arrow[r, "t"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

C' así determinada es efectivamente una categoría como puede comprobarse fácilmente.

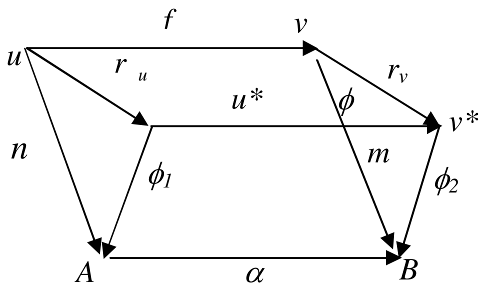
De forma similar se determina una categoría H' con los morfismos de H, resultando que H' es una subcategoría de C', como lo veremos a continuación:

Sea $f: u \rightarrow v$ un objeto de C'. Sean $r_u: u \rightarrow u^*$ y $r_v: v \rightarrow v^*$ las reflexiones de u y v respectivamente. Entonces, por definición de reflexión, existe un único morfismo $\phi: u^* \rightarrow v^*$ talque $\phi \circ r_u = r_v \circ f$

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r_u"'] & v \arrow[d, "r_v"] \\ u^* \arrow[r, "\phi"'] & v^* \end{tikzcd}$$

Veamos que el morfismo $(r_v, r_u): f \rightarrow \phi$ es la reflexión de f.

Sea $\alpha: A \rightarrow B$ un objeto de H' y sea $(m, n): f \rightarrow \alpha$ un morfismo de C'. Entonces, por definición de reflexión, existen los morfismos $\phi_1 : u^* \rightarrow A$ y $\phi_2: v^* \rightarrow B$ tales que $\phi_1 \circ r_u = n$ y $\phi_2 \circ r_v = m$, es decir,
$(\phi_1, \phi_2) \circ (r_u, r_v) = (n,m)$.



Es de anotar que el morfismo (ϕ_1, ϕ_2): $\phi \rightarrow \alpha$ es el único que verifica esta igualdad, debido a la unicidad de ϕ_1 y ϕ_2 en la definición de reflexión aplicada en H y C.

En los ejemplos precedentes se evidencia que en cada categoría tratada, la subcategoría construida en algunas ocasiones por relaciones de equivalencia y en otras utilizando métodos distintos tiene objetos "mejorados", objetos óptimos que de alguna forma representan los ya existentes.

2. SUBCATEGORÍAS CORREFLEXIVAS

2.1 Definición (Subcategoría Correflexiva)

Sea ξ una categoría y H una subcategoría de ξ. Se dice que H es correflexiva en ξ si para todo objeto v de ξ existe un objeto v^* en H y un morfismo $C_v : v^* \to v$ llamado la correflexión de v y para todo u de H y todo morfismo f: u $\to v$, existe un único morfismo α_f: $u \to v^*$ tal que $C_v \circ \alpha_f = f$.

2.2 Observaciones

a) Para cada objeto v de ξ la correflexión es única, salvo isomorfismos.
b) Si K es una subcategoría correflexiva en H y H es correflexiva en ξ, entonces K es correflexiva en ξ.

2.3 Proposición

Sea ξ una categoría y H una subcategoría de ξ entonces, H es correflexiva en ξ si y solamente si el funtor inclusión I: H $\to \xi$ es adjunto a izquierda.
La demostración es análoga (dual a la elaboración en 1.3.)

2.4 Ejemplos

a) Sea ξ la categoría de los espacios topológicos punteados. Los objetos de esta categoría son los espacios topológicos en los cuales se ha fijado un punto llamado punto base.
Así pues, un objeto de esta categoría es una tripla (X, Z_x, x_o) donde (X, Z_x) es un espacio topológico y x_o es un punto de x. Los morfismos de esta categoría son las

funciones continuas que preservan el punto base. Es decir, si (X, Z_x, x_o) y (Y, Z_y, y_o) son objetos de ξ, un morfismo en esta categoría, es una función $g: X \to Y$ la cual es continua y tal que $g(x_o) = y_o$.

Sea H la categoría de los espacios topológicos conexos punteados. Los objetos de esta categoría son los espacios topológicos conexos punteados en el mismo sentido de la categoría ξ, y los morfismos son las funciones continuas que preservan el punto base. Puede observarse fácilmente que H es una subcategoría de ξ.

Sea (X, Z_x, x_o) un espacio topológico con punto base x_o. Entonces sea X^* la componente de x_o. Se determina entonces el espacio topológico (X^*, Z_{x^*}, x_o) donde Z_{x^*} es la topología relativa a Z_x.

El espacio topológico (X^*, Z_x) es conexo y la aplicación inclusión $i: X^* \to X$ es continua y es la correflexión de X, como se prueba a continuación.

Sea (Y, Z_y, y_o) un espacio topológico conexo punteado y $f: Y \to X$ una función continua. Determinamos entonces la aplicación $\alpha_f: Y \to X^*$ por $\alpha_f(Y) := f(Y)$; α_f está bien definida puesto que f(Y) es conexo y por lo tanto $f(Y) \subset X^*$; además, $\alpha_f(Y_o) = f(y_o) = x_o$, ahora α_f es continua puesto que f lo es. De otra parte α_f es la única que verifica la igualdad $i \circ \alpha_f = f$ porque i es monomorfismo.

b) Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Sea Y un subconjunto de X tal que:

i) Para todo $x \in X$, existe $y \in Y$ tal que $y \leq x$.

ii) El conjunto Y es cerrado para extremos superiores, es decir, para todo subconjunto A de Y, existe un elemento y_o en Y tal que $a \leq y_o$ para todo $a \in A$, y, además si existe y_1 en Y tal que $a \leq y_1$ para todo $a \in A$, se tienen que $y_o \leq y_1$.

Sean ξ la categoría que determina la relación "$\leq$" en el conjunto X, y H la categoría que determina la relación "$\leq$" en el conjunto Y. Se tiene entonces que H es una subcategoría de ξ, y, además correflexiva en ξ, como lo veremos a continuación.

Sea $x \in X$, determinamos entonces el conjunto $A = \{y \in Y / y \leq x\}$, $A \neq \phi$ por la condición

(i) que caracteriza el conjunto Y. De la condición (ii) anotada anteriormente se sigue la existencia de un elemento y_o en Y tal que y_o es el extremo superior de A. Puede observarse entonces que $y_o \leq x$, y que este hecho determina la correflexión de X.

d. Sea ξ la categoría de los grupos punteados. Los objetos de esa categoría son los grupos en los cuales se ha fijado un punto, llamado punto base. Así pues, un objeto de esta categoría es una tripla (G, ·, a) donde (G, ·) es un grupo y "a" es un punto de G. Los morfismos de esta categoría son los homomorfismos que preservan el punto base. Es decir, si (G, ·, a) y (M, · , m) son objetos de ξ, un morfismo en esta categoría, es un homomorfismo $g: G \to M$ tal que $g(a) = m$.

Sea H la categoría de los grupos Abelianos punteados. Los objetos de esta categoría son los grupos Abelianos en los cuales se ha fijado un punto también llamado punto base y los morfismos son los homomorfismos que preservan el punto base.

Claramente H es una subcategoría de ξ. Veamos que H es correflexiva en ξ.

Sea (G, ·, a) un grupo punteado. Sea N_a el conjunto formado por los elementos que conmutan con a. Entonces (Na, ·, a) es un grupo abeliano punteado. Veamos que la función inclusión $i: N_a \to G$ es la correflexión de G. Puede observarse fácilmente que "i" es un homomorfismo de grupos tal que i (a) = a. Ahora, sea (K, ·, b) un grupo abeliano punteado y $f: K \to G$ un homomorfismo tal que f(b) = a. Definimos entonces la aplicación $\alpha_f: K \to N_a$ por $\alpha_f(k) =: f(k)$; $\alpha_f(k) \in N_a$, o sea que
α_f (k).a = a. α_f (k), pero α_f (k).a = f(k).a = f(k). F(b) = f(k.b) = f(b.k) = f(b).f(k) = a. α_f (k); ahora,
α_f (b) = f(b) = a. De otra parte α_f es un homomorfismo de grupos puesto que f lo es. Además, α_f es el único homomorfismo que verifica la igualdad $i \circ \alpha_f = f$ porque "i" es monomorfismo.

c) Sea X un conjunto no vacío y P(X) el conjunto formado por todos los subconjuntos de X. Sea ξ la categoría que determina la relación de contenencia en el conjunto P(X).

Sea Z una topología para X y sea H la categoría que determina la relación de contenencia en el conjunto Z. Entonces, H es una subcategoría correflexiva en ξ. En efecto; sea A $\in$ P(X) entonces A^{o} es subconjunto de A (A^{o} es el interior de A), y, $A^{o} \in$ Z; ahora si existe un conjunto B en Z, tal que B es subconjunto de A, por ser A^{o} el mayor conjunto abierto contenido en A, se tiene que B es un subconjunto de A^{o}, de lo cual se induce la correflexión de A.

3. CONCLUSIONES

- La Reflexión de cada objeto en aquellas Subcategorías Reflexivas son objetos mejorados, es decir, objetos enriquecidos con más propiedades.

- Aunque ya están caracterizadas las Subcategorías Reflexivas, es interesante la construcción de los ejemplos por su riqueza didáctica en diferentes áreas de la Matemática. Razón por la cual no debe generar extrañeza la construcción de nuevos ejemplos.

Referencias Bibliográficas

[1] ADAMEX, Jiri. Theory of Matematícal Structures. Library of Congress Cataloging in publication Data, 1983.

[2] HERNANDEZ, P. Jorge. Categoría de los Módulos. Universidad Nacional de Colombia Trabajo de Grado, 1989.

[3] PREUSS, Gerhard. Theory of Topological Structures. Library of Congress Cataloging in publication Data, 1988.