Algunas construcciones asociadas a categorías topológicas

Jorge Adelmo Hernández Pardo*
José Reinaldo Montañez Puentes**
Rodrigo Rincón Zarta***
Carlos Javier Ruiz Salguero****

Resumen

Dado un funtor topológico F : C -» D se muestra la manera de asociar a algunas construcciones dadas en D, las respectivas construcciones en C, en particular las relacionadas con subcategorías reflexivas, correflexivas, uniones, intersecciones y topologías de Grothendieck.

Palabras claves

Funtor topológico, subcategoría refl exiva, subcategoría correfl exiva, uniones, intersecciones, topos, topos de Grothendieck, topologías, haces.

Abstract

They summarize In view of a funtor topológico F: C à D there appears the way of associating with some constructions given in D, the respective constructions in C, especially the related ones to reflexive (reflective) subcategories, coreflexive, unions, intersections and topologies of Grothendieck.

Key words

Refl exive subcategory, unions, intersections, moles, grothendieck's moles.

Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá, Colombia. Correo electrónico: jahernandezp@udistrital.edu.co.

Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, Colombia. Correo electrónico: jrmontanezp@unal.edu.co.

Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá, Colombia. Correo electrónico: rrinconz@udistrital.edu.co.

Pontifi cia Universidad Javeriana, Universidad Sergio Arboleda, Escuela Colombiana de Ingeniería. Correo electrónico: cruiz@escuelaing.edu.co.

1. Introducción

En una de sus direcciones de trabajo la topología categórica aparece como el estudio de la generalización del funtor olvido de estructura, defi nido como la categoría de los espacios topológicos en la categoría de los conjuntos, en especial de las propiedades relativas a la existencia de estructuras iniciales y fi nales que tiene dicho funtor.

1.1. Defi nición

Sea F : C -» D 2) un funtor. Se dice que F es un funtor topológico y que C es una categoría topológica relativa a F y a D si se cumplen las siguientes condiciones:

1. F es fi el.
2. F es apto para construir estructuras ini ciales y fi nales.
3. Para cada conjunto X, la fi bra Fib(X) tie ne estructura de retículo completo.

Esta defi nición es equivalente a la dada por Adamek, Herrlich y Strecker en Abstract and Concrete Categories [2], lo cual se demuestra en Nociones equivalentes de categorías topológicas [14], artículo en el que se relaciona esta noción con la dada por Preuss en Theory of Topogical Structures [13].

Las categorías de los espacios topológicos, de los espacios uniformes y de los espacios de proximidad son algunos ejemplos de categorías topológicas. Estas categorías guardan relación con la categoría de los espacios topológicos, hechos que pueden encontrarse en General Topology [15].

Los objetos y morfi smos de una categoría topológica los notaremos X, Y, Z;f, g, h... , respectivamente, y su imagen por el funtor F la escribiremos X, Y, Z,; f, g, h,. Por ejemplo, en la categoría de los espacios topológicos f: X -* Y simboliza una función continua y f: X -* Y denota su función correspondiente en la categoría de los conjuntos. La colección de funciones continuas de X en Y la notaremos [X, Y].

Con el fi n de introducir al lector en el tema y tomando como base las referencias indicadas, presentamos algunos de los conceptos básicos involucrados en la noción de categoría topológica y de uso frecuente en el desarrollo del trabajo.

Sea F: C -* *D* S un funtor. Se dice que *F* es fi el, si para todos: g, f: X^ Y morfi smos de *C* tales que *F(f) = F(g)* se tiene que f = *g*.

Sea *X* un objeto de *D*. Notemos con *Fib(X)* la colección de los objetos X de C, tales que F(X) = *X*. En Fib(X) se defi ne la relación *"<"* así: dados X_1 y X_2 en *Fib(X)*, se dice que $X_1 < X_2$, si y solamente si, existe un morfi smo *f : X_1X_2* tal que *F(f) = 1x. A* la pareja *(Fib(X), <)* se le llama la fi bra de *X* y algunas veces se notará en la forma *Fib (F,X)* o simplemente *Fib(X).*

Sea f : X -» Y un morfi smo de *C*. Se dice que f cumple la propiedad universal a izquierda relativa al funtor *F*, el cual se omite en la escritura, cuando no hay lugar a confusión, si para todo objeto Z de *C*, con *F(Z)* = Z y toda función g : Z -» X, para la cual exista un morfi smo h : Z -* Y tal que *F(h) = f o g*, existe un morfi smo g : Z -» X tal que / o *g = h* y *F(g) = g*. En tal caso se dice que f es pui.

Ahora, se dice que un morfi smo f: X -* *Y es* apto para construir estructuras iniciales, si para todo objeto Y de C, tal que *F(Y) = Y*, existe un objeto X en *C*, con *F(X) = X* y un morfi smo f : X -» Y que cumpla la propiedad universal a izquierda. En tal caso, se dice que X es la estructura inicial relativa a f y Y.

De manera dual, se tienen las defi niciones de morfi smo con propiedad universal a derecha y estructura fi nal.

Toda función es apta para construir estructuras iniciales y fi nales en la categoría de los espacios topológicos Top, como se muestra a continuación:

Sea f: X-»7 una función y *a* una topología sobre *Y.* Sea r = *{f 1(A)* | *A* G *a}*, entonces r es una topología sobre X. La función *f:X-* Y* resulta continua con respecto a las topologías *a* y r y además f cumple la propiedad universal a izquierda.

Ahora, sea *g: W* -*Z una función y *X* una topología sobre *W.* Sea Q = *{B* | *g-^{1}(B)* G A }. Entonces, Q es una topología sobre Z. La función *g : W~>Z* resulta continua con respecto a las topologías Q y A y además g cumple la propiedad universal a derecha.

Dados dos objetos X y Y de *C,* se dice que X es subobjeto Pui de Y, si X es un subobjeto de Y y X tiene la estructura inicial con respecto a Y como subobjeto de Y.

Si (Y, r) es un espacio topológico, un subobjeto de Y corresponde a un espacio topológico *(X, a),* donde *X* C *Y* y *a={XCY; A* | *A Erj*.

1.2. Afi rmación

Una categoría topológica fi brada sobre una categoría completa (completa) es completa (comple-

2. Subcategorías refl exivas y correfl exivas

Las nociones de subcategorías refl exiva (correfl exiva) sugieren ideas de densidad y de mejoramiento de estructuras.

2.1. Categoría refl exiva

Sea *C* una categoría y H una subcategoría de *C* se dice que H es refl exiva en *C* si para todo V G C existe V* G H y un morfismo r_V: y-> V* tal que para cualquier objeto í/GHy cualquier morfismo f: V^U existe un único morfi smo r_f: tal que r_f o r_v = r_f [1].

La siguiente proposición caracteriza las categorías refl exivas.

2.2. Proposición

H es una subcategoría refl exiva de *C* si el funtor de inclusión I: H^d admite adjunto a izquierda [1].

De manera dual se tiene la defi nición de subcategoría correfl exiva y su caracterización correspondiente.

2.3. Ejemplo

1. Sea X un espacio topológico. Se dice que X es un espacio completamente regular, si para todo *A* cerrado *A* ^ *(p* y todo x de X que no pertenezca a A, existe una función continuaf:X -» [0,1] tal quef(x) = 0 y f (A) = 1 [15]. Los espacios completamente regulares junto con las funciones continuas determinan la categoría que notamos CR.

   Se dice que un espacio topológico X satisface el axioma de separación T_1 si para todos xjGX, existen abiertos *A* y *B* con

   Un espacio de Tychonoff, es un espacio completamente regular que satisface el axioma de separación T_1

   Todo espacio compacto-Hausdorff es un espacio de Tychonoff. La categoría de los espacios compactos-Hausdorff es una subcategoría refl exiva de la categoría de los espacios de Tychonoff. En este caso la refl exión de un espacio de Tychonoff corresponde a la compartifi cación de Stone- ech [15].

2. Sea *(X, r)* un espacio topológico y sea P(X) el conjunto de las partes de X. Consideramos a r y P(X) como las categorías inducidas por el orden dado por la inclusión. Entonces, r es correfl exiva sobre P(X). En este caso, la correfl exión indica que el interior de un conjunto es el mayor abierto contenido en el conjunto. Notando con r' la colección de los cerrados, r' es refl exiva en P(X), en tal caso esto indica que la adherencia de un conjunto es el menor cerrado que contiene al conjunto.

2.4. Proposición

Sea F: C -» D un funtor topológico. Sea H una subcategoría refl exiva en D. Sea H* la subcategoría plena de *C*, formada por los objetos *Y* de D tales que *F(Y)* es un objeto de H. Entonces *H** es refl exiva en *C*.

Demostración

Sea X un objeto de *C*. Sea F(X) = *X y* sea r : *X*-* Yla reflexión deXen D. Puesto que Fes topológico existe Y en *C* tal que *Y* G *H**, *F(Y)* =*Y y* r_x : X -* *Y* es morfi smo en *C*, con *F(r)*= *r* . Veamos que Y es la refl exión de X. Sea Z un objeto de *C* y f : X -* f un morfi smo de *C*, entonces *f:X* -* *Z* es morfi smo en D y puesto que *H* es reflexiva en D, existe *a* : *Y* -» Z tal que *a* o r =/ Como *F* es funtor topológico existe a:Y -* Z tal que *F(a) = a*. La fidelidad de *F* garantiza la unicidad de *a*.

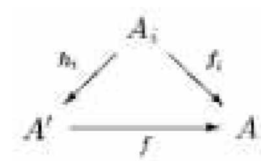
Si en la proposición anterior, *H es* correfl exiva en D, con una construcción dual se prueba que *H** es correfl exiva en **C**

3. Uniones e intersecciones

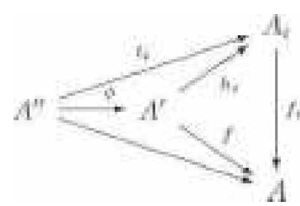
3.1. Defi nición

Sea A un objeto de una categoría C Sea {(Ai , fi)} iG I una familia no vacía de subobjetos de A. La pareja (A’, f) se denomina la intersección de la familia dada si f: A -» A, es un morfi smo tal que: 1. f se puede factorizar a través de cada fi ,

es decir, existe hi :A -* Ai, tal que fi o hi = f para cada i G I.



2. Para cada pareja (A", f’), para la cual existe ti : A"^ Ai, tal que fi o ti = f’, para cada i G I, entonces, existe un único morfismo *(p:* A" -» A', tal que f 00 = f’ [9].



La intersección de una familia vacía de subobjetos de A, se defi ne como la pareja (A, 1a). La intersección se acostumbra escribir: {A^1, f), (DAi, f), (f : A -» A) o simplemente n Ai.

También puede comprobarse que f es monomorfi smo con lo cual (A^r, f) es un subobjeto de A y que para cada i G I, hi es único y es monomorfi smo. Por otra parte, la intersección es única salvo isomorfi smos.

Se dice que una categoría C tiene intersecciones, si cada conjunto de subobjetos de cualquier objeto de *C* tiene intersección. De manera natural, se defi ne entonces, categoría con intersecciones fi nitas.

3.2. Defi nición

Sea *C* una categoría y h:A -» B, un morfi smo de C. Sean (A', u) y (B', v), subobjetos de A y B respectivamente. Se dice que A' es llevado en B' a través de h, si existe un morfi smo *a:* A -» B' tal que *v* o *a* = hou [9].

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "a"] \arrow[d, "u"'] & B' \arrow[d, "v"] \\ A \arrow[r, "h"'] & B \end{tikzcd}$$

Si A' puede ser llevado en B' a través de h, el morfi smo *a* es único, puesto que v es monomorfi smo.

3.3. Defi nición

Sea C una categoría y {(Ai, fi)} i £ I una familia no vacía de subobjetos de un objeto A. Un subobjeto (A', f) de A se denomina la unión de la familia dada, si:

1. Cada fi se puede factorizar a través de cada f, es decir, existen hi: Ai -» A', tales que f o hi = f i para cada i G I.
2. Si h : A -» B es un morfi smo y cada Ai, puede ser llevado en un subobjeto (B', v) de B a través de f, entonces A' también puede ser llevado en (B', v) a través de h.

La unión se denota (U Ai, f) o simplemente U Ai. Algunas veces se identifi ca con el morfismo f: A^1 -» A.

Nótese que la unión no es el concepto dual de la intersección. Puesto que f es monomorfi smo, cada h es único en la condición de la factorización y además monomorfi smo puesto que cada f . lo es.

La unión de la familia {(Ai, f $_i$} $_{i\ eI}$ es única salvo isomorfi smos.

Se dice que una categoría C, tiene uniones, si cada familia de subobjetos de un objeto dado tiene unión. De manera natural se define categoría con uniones fi nitas.

3.4. Proposición

Sea F: C -» D un funtor topológico. Si D es una categoría con uniones, entonces *C* es una categoría con uniones de subobjetos pui.

Demostración

Sea { f_i : A_i -» A}$_{i\ e\ I}$ una familia de subobjetos pui de A £ C. Entonces en D se determina una familia de subobjetos de A, {f.:A.-»A}. Sea f:B -» A la unión de esta familia.

1. Puesto que F es un funtor topológico, existen B con F(B)=B y f: B -» A pui, con F(f)=f. Veamos que f : B -* *A* es la unión de la familia {f_i}$_{i\ e\ I}$ de subobjetos de A. Puesto que f : B -» A es la unión de la familia {fi}i $_{eI}$ existe una familia {h : A -» B} tal que f o h = f. Como F es un funtor topológico y f : B -* *A* es pui, existe la familia {h : A -» B}$_{i\ eI}$ con F(h_i) = h_i y f o h_i = f $_i$ para cada i G I.

2. Sean g : A - » C y h : D - » C morfismos de *C* con h subobjeto pui de C. Supongamos que existe una familia de morfismos {t_i: A_i -^ D}$_{i\ eI}$ tal que h o t_i = g o L Entonces en *D*, h es monomor fi smo y h o t = g o f. Puesto que f : B -» A es la unión de la familia {f_i: A_i -* *A}* en *D*, existe un morfismo *a* : B^D tal que g o f = h o *a*. Puesto que h es pui, existe *a* : B -» D tal que *F[a) = a.* y h o *a* = g o f. La unicidad de *a* se sigue de la fi delidad de F y la unicidad de *a*.

3.5. Proposición

Sea F : C -* D un funtor topológico. Si D es una categoría con intersecciones, entonces C es una categoría con intersecciones de subobjetos pui.

Dem os tración

Sea A un objeto de C y sea {f : A -» A} E I una familia de subobjetos pui de A. Entonces se determina en D la familia de subobjetos de A: {fi : A_i -» A}$_{i\ e}$ I. Sea f: B->A junto con la familia {h : B -> A} la intersección de dicha familia. Puesto que F es un funtor topológico, existen B en C tal que F(B) = B y f : B -» A tales que F(f) = f. Puesto que para cada i G I, f : A -» A es subobjeto pui de A, existe h : B -» Ai tal que F(h) = h y f . o h= f. Para completar la prueba:

Sean B' un objeto de *C*, {gi : B' -» A_i}$_{i\ eI}$ una familia de morfi smos y g : B' -* A tales que f o g = g. Entonces, en D, f. o g = g. Luego en D existe, por la propiedad universal de la intersección, un morfismo *(p* : B' -* B tal que f o <*p* = g y h_i o <*p* = gi. Puesto que f : B -» A es pui, existe <*p* : B' -» B tal que *F[<p)* = <*p* y f o <*p* = g. Análogamente, para cada i G I, h : B -» A_i es pui, luego h_i o *(p* = gi. La unicidad de *(p* está garantizada por la fi delidad de F.

4. Topos de Grothendieck asociados a un funtor topológico

Intuitivamente un topos puede considerarse como un universo que de alguna manera generaliza la categoría de los conjuntos, en el cual se interpreta la lógica intuicionista y en el que potencialmente se pueden desarrollar distintas áreas de las matemáticas. Es de anotar que fueron Lawvere y Tierney los primeros en proponer una defi nición de topos elemental; posteriormente Mikkelsen halló defi niciones equivalentes.

En Sketches of an Elephant a Thopos Theory Compendium [7], Johnstone hace diferentes descripciones de la defi nición de topos, veamos algunas de ellas:

"Un topos es una categoría de haces sobre un sitio"; "Un topos es una categoría con límites fi nitos y objetos potencia"; "Un topos es un espacio generalizado"; "Un topos es una semántica para sistemas formales intuicionistas". Como se señala en Introducción a la teoría de topos **[11]** y en Sheaves in Geometry and Logic [8] una de las primeras fuentes de la teoría de topos es la geometría algebraica, en particular el estudio de los haces, a cuya presentación deseamos aproximarnos a través de ejemplos conocidos, de los que sólo mencionaremos su defi nición, los cuales se relacionan con las categorías de conjuntos y espacios topológicos. Las defi niciones dadas en este parágrafo siguen a Topoi, the Categorial Analysis of Logic [5].

4.1. La noción de topos

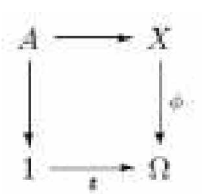
Formalmente un topos elemental es una categoría E tal que:

1. E es fi nitamente completa.
2. E tiene exponenciación.
3. E tiene subobjeto clasifi cador.

Los puntos 1. y 2. constituyen la defi nición de "cartesiana cerrada" y 1. puede ser reemplazada por "E tiene objeto terminal y productos fi brados".

Se dice que una categoría E tiene exponenciación si el funtor Ax tiene adjunto a derecha, lo cual es equivalente a decir que dados dos objetos A y B en E, existe un objeto notado B^A y un morfismo £:B^AxA->B llamado la evaluación tal que para todo objeto C de E y todo morfi smo f : C x A^ B existe un único morfismo <*p:* C -» B^A tal que £ o *{<p* x lj = f. De este modo, se generaliza la noción de conjunto potencia y la función evaluación de la categoría de los conjuntos [5].

El subobjeto clasifi cador en un topos generaliza algunos de los papeles del conjunto {0,1} en la categoría de los conjuntos, esto es, determinar los subobjetos de un objeto dado y el de ser el ambiente para definir la lógica interna en el topos. Con más precisión, se dice que un objeto de E es el objeto clasificador de E si existe un morfismo t:1 -», llamado morfismo de verdad, de tal manera que para todo subobjeto A de un objeto X, existe un único morfismo *(p* : X -* que hace el siguiente diagrama conmutativo.



4.2. El topos S_t(I)

Sea I un espacio topológico y *Q* la colección de sus abiertos. Un prehaz F sobre I es un funtor contra variante F : *&* -» Conj en el que *Q* es una categoría al considerar *&* como un conjunto ordenado por la inclusión. La categoría S_t(I) tiene como objetos a los prehaces F : *&* —> Conj y como morfismos °° : F -» G a las transformaciones naturales. S (I) es un topos.

Un hecho importante es que la categoría Top(I) es equivalente a la categoría Sh(I), cuyos objetos se llaman haces de secciones sobre I, la cual es una sub-categoría plena de S_t(I) formada por los prehaces que satisfacen el siguiente axioma:

> Dado un cubrimiento abierto {V / j E J} de un abierto V y una selección de elementos s E F(Vj), para todo j E J, tal que $F^j_t(s_j j)$ = F \ (s_j), para todos j,t E J, entonces existe un único elemento s E F(V) tal que Fj(s) = s para todo j E J [5].

Aclaremos la notación involucrada en este axioma. Si F : *Q* -» Conj es un prehaz, para cada V C V se determina por medio de F una función notada F : F(V) -» F(V) y para todos j,t E J, puesto que V_j n V_t C V_j y V_j n V C V se determinan por medio de F funciones que notamos F \ : F(V_t)-» F(V_j n V)
l () F(V. n V_t).
y F_t : F(V)

Los topos Top(I), S_t(I), y S_h(I) motivan el estudio de los topos de Grothendieck.

La generalización de haz, de carácter funtorial dada por Grothendieck, se basa en que tanto la noción de cubrimiento abierto, sus propiedades y el axioma anterior pueden ser defi nidas en términos de propiedades categóricas [5].

4.3. El topos de prehaces

Sea *C* una categoría pequeña. Un prehaz de conjuntos sobre *C* es un funtor contra variante F : *C* -» Conj. La categoría Set^{C^op} tiene como objetos a los prehaces de *C* y por morfi smos a las transformaciones naturales. Set^{C^op} es un topos.

4.4. Topos de Grothendieck

Con el fi n de ilustrar la noción general de haz y, por lo tanto, de Topos de Grothendieck mencionamos primero, en forma intuitiva algunas de las propiedades de los cubrimientos abiertos dados en topología.

Dados un espacio topológico X y un abierto A de X es claro que A recubre a A y que un recubrimiento de recubrimientos de abiertos de A es un recubrimiento de A. Además, si B es un abierto de A, las intersecciones de un recubrimiento de A con B constituyen un recubrimiento de B.

Estas propiedades son expresables en términos de morfi smos y conducen a la noción de "recubrimiento", con más precisión a la noción de pretopología en una categoría.

Así, una pretopología sobre una categoría pequeña C con productos fi brados, es una aplicación Cub : obj C -» Conj que asigna a cada objeto A de *C* una colección de conjuntos de morfi smos con codominio A, llamados cubrimientos de A, Cub (A) que satisface los siguientes axiomas:

1. La identidad de A está en Cub (A), esto es 1_A G Cub(A).

2. Si {fi : A ->$A_{\}}$. $_{EI}$ GCub(A), y para cada i G I, {f_j^i : A_j^i -> A. } .$_{EJE}$ Cub (A_i), entonces:

3. Si {f_i: A_j^i -» A}$_{i\,eIe}$ Cub(A) Yg : B -> A es un morfi smo en C, entonces para cada i G I el producto fi brado de fi y g existe y { g_i : Bx_AA-»B}. $_{e\,I}$ G Cub(B)

$$\begin{tikzcd} B \times_A A_i \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g_i"'] & A_i \arrow[d, "f_i"] \\ B \arrow[r, "g"'] & A \end{tikzcd}$$

La pareja *(C,* Cub) es llamada un sitio.

Sea F un prehaz sobre C y Cub una pretopología sobre C. Sea {f : A -» A} G Cub (A). Consideremos el producto fi brado de fi , fj para i, j G I. Entonces, al aplicar el funtor F se determinan las funciones

Fji:F(A_i) -»F(A.x_AA),
Ri:F(Aj)^F(A.x_AA),yF.:F(A) F(A)

Un prehaz sobre el sitio (C, Cub) es un haz, si y solamente si, para todo cubrimiento

{fi : Ai^ A } .$_{e\,I}$G Cub(A)

y para toda selección de elementos s G F(A) para todo i G I tales que F^i (S) = F^j (S) para todos i, j G I, existe un único elemento s G F(A) tal que F(s) = si para todo i G I. La subcategoría plena de $Set^{C^{op}}$ cuyos objetos son los haces sobre el sitio (C, CUB) se nota S_h(Cub).

Un topos de Grothendieck es una categoría equivalente a una categoría de la forma Sh(Cub). Las nociones de carácter más general de haz y topos de Grothendieck sobre un sitio (C, J) en el que J es una topología de Grothendieck pueden encontrarse entre otros en Introducción a los topos de Grothendieck [4], Sheaves in Geometry and Logic [8] o Introducción a la teoría de topos [11].

Veamos ahora la manera de asociar una categoría de haces a una categoría topológica C, asociada a un funtor topológico F : *C* -» U siendo *D* una categoría pequeña con productos fi brados

1. Sea Cub : obj *D* -» Conj. una pretopo logía. Entonces para cada objeto A de C, un cubrimiento de A en D determina por estructuras iniciales un cubrimien to de A en C. Por lo tanto, se determina una pretopología Cub : obj <*C* -» Conj determinada por Cub. Este hecho sigue haciendo uso de las propiedades que tie ne el funtor F, resultando en este caso la existencia de los productos fi brados en (£ cuando *D* los tiene.

2. Si además (D, Cub) es un sitio, entonces (C, Cub) es un sitio.

Sea H : D -» Conj un haz asociado a (D, Cub), entonces H o F : *C* -» Conj es un haz asociado a (C, Cub). En efecto, sea { $f_{i:}A_i$ -» A}$_{ieI\ E}$ Cub(A). Entonces, por la observación anterior, este ha sido construido con base en una familia { fA -» A} G Cub(A). Sea {S} con s_i G (H o F)$_i$j(S_i) para i G I, tal que (H o F)ij(s_i) = (H o F)^j(S). Entonces se ha determinado la familia s con s G H(A) y H^i (S) = H j(s). Como H es haz existe s G H(A) tal que H(s) = s, luego se(HoF)(A) y (H o F)(s) = s. Si z e (H o F)(A) verifi ca (H o F)(z) = si, entonces z G H(A) y H_i(z) = si, y como H es haz entonces z = s. Por lo tanto, H o F es un haz. Entonces, se ha determinado una categoría de haces sobre *C* asociada a F ya (D, Cub).

5. Notas fi nales

1. En el parágrafo 4 queda la pregunta ¿la categoría de los haces determinados de esa manera es un topos?, ¿es un topos de Grothendiek?
2. Nótese la potencia de las propiedades del funtor F. ¿Qué otras construcciones de este estilo se pueden obtener?
3. Ante todo, se plantea la inquietud de dar ejemplos de las construcciones anterio res.

Referencias bibliográfi cas

[1] Adamek, J.(1983). *Theory of Mathematical Structures.* Boston, Lancaster: D. Reidel Publishing Company.

[2] ________., Herrlich, H., Strecker, G. (1990). *Abstract and Concrete Categories.* Nueva York: John Wiley and Sons Inc.

[3] Ardila, V., Montañez, R. y Rosas, D. (1997). "Topologías asociadas a algunos con-structos topológicos - La categoría de los espacios de proximidad". *Encuentro de geometría y sus aplicaciones,* Universidad Pedagógica Nacional.

[4] Caicedo, X. (1998). *Introducción a los topos de Grothendieck.* Bogotá: Publicación Departamento de Matemáticas, Universidad de los Andes.

[5] Golblatt, Robert. (s.d.). *Topoi, the categorial analysis of logic.* s.d.

[6] Hernández, Jorge A. (1989). *Categoría de los Módulos.* Bogota: Tesis de grado de Especialista en Matemática Avanzada. Universidad Nacional de Colombia.

[7] Johnstone, Peter T. (2002). *Sketches of an Elephant a Topos Theory Compendium.* Vol 1, 2. s.d.: Oxford Science, Publications.

[8] Mac Lane, Saunders e Ieke Moerdijk. (1994). *Sheaves in Geometry and Logic.* s.d.: Springer Verlag.

[9] Mitchell, B. (1965). *Theory of Categories.* Nueva York: Academic Press.

[10] Montañez, R., Ruiz, C. (2005). *Elevadores y coelevadores de estructuras.* Bogotá: Preprint.

[11] Oostra, A. (1996). *Introducción a la teoría de topos.* Bogotá: Publicación del Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística.

[12] Pareigis, B. (1970). *Categories and Functors.* Nueva York: Academics Press.

[13] Preuss, G. (s.d.). *Theory of Topological Structures.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

[14] Ruiz, C., Ardila, V. y Montañez, R. (2000). "Nociones equivalentes de categorías topológicas". *Boletín de Matemáticas,* Nueva serie, Volumen VII, Número 1; Junio. Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia.

[15] Willard S.(1970). General Topology. s.d.: Addison Wesley Publisshing Company.