La búsqueda de solución a problemas irresolubles

Un camino hacia la construcción de la disciplina matemática en el aula

The search of solution to problems without algorithm solution

Enfoque de argumentación: experiencia de aula en matemáticas. Escuela Pedagógica Experimental. Originalmente presentado en la Universidad Francisco José de Caldas. Revisado en 2007

***Alberto Díaz Montes**

****Rossmery Guevara Amaya**

*****Diego Andrés Prieto Díaz**

Fecha de recepción: 25 de septiembre de 2008
Fecha de aceptación: 22 de octubre de 2008

Resumen

El tema de los problemas irresolubles se enfoca particularmente a la luz de la teoría de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. La visión del texto está en el enfoque de la argumentación, el cual propone que los problemas irresolubles generan conocimiento en matemáticas cuando son argumentados por los estudiantes desde

* Licenciado en Educación Básica con énfasis en Matemáticas, Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Auxiliar de investigación, Escuela Pedagógica Experimental. Asesor en el diseño de actividades y material didáctico para la enseñanza de las matemáticas en la comunidad indígena U'wa en la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. betojes@hotmail.com

** Licenciada en Educación Básica con énfasis en Matemáticas, Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Auxiliar de investigación, Escuela Pedagógica Experimental. rous061285@hotmail.com

*** Licenciado en Educación Básica con énfasis en Matemáticas, Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Docente Colegio Las Palmas. Auxiliar de investigación, Escuela Pedagógica Experimental. diegos2k1@hotmail.com

su irresolubilidad. En esta perspectiva, se discute la naturaleza y el contenido los problemas irresolubles y su aprendizaje desde la argumentación. Además, se focaliza la metodología de la investigación y se dan ejemplos de investigaciones. La intención del texto es, principalmente, la de servir como introducción al asunto de los problemas irresolubles con vistas a la investigación en enseñanza de las ciencias.

Palabras clave: problemas irresolubles, enseñanza-aprendizaje, argumentación, disciplina matemática, conocimiento matemático, investigación, discurso argumentativo, concepto matemático.

Abstract

The theme of unsolvable problems is focused particularly in the light of the theory teaching and learning of mathematics. The vision of the text is in the focus of the argument, which suggests that the problems unsolvable generate knowledge in mathematics, when they are substantiated by students since the unsolvable. In this perspective, we discuss the nature and content of unsolvable problems and learning from the argument.

Key words: Unsolvable problems, teaching and learning, reasoning, mathematical discipline, mathematical knowledge, research, argumentative discourse, mathematical concept.

Introducción

Es importante que como docentes de matemáticas tengamos conciencia crítica, innovadora e investigativa, estar siempre dispuestos a buscar nuevas metodologías de educación, estar en constante búsqueda de formas innovadoras de enseñanza, pretender *cambiar el mundo con nuestros actos*.

Por otro lado, la construcción de las disciplinas científicas se constituye cuando las comunidades logran dar validez universal a un conocimiento que se asume finalmente como verdadero. Estas dos partes históricas, *problemas irresolubles y la construcción de las disciplinas científicas*, se conforman para dar sustento a la construcción de la disciplina a través de problemas irresolubles. Es por eso que la Escuela Pedagógica Experimental realiza dicha investigación cuyos planteamientos se fundamentan en hacer que el estudiante genere actividad científica a través de la argumentación dada luego de un problema que desde su enunciado es irresoluble. En el proceso de construcción de la disciplina se supone la construcción o apropiación de conocimientos por el estudiante.

Como observadores dentro del aula, entender los argumentos que tienen los estudiantes, y de esta forma colaborar a los maestros con la información suficiente que les permita comprender las discusiones que se dan en el aula, así como las formas de enriquecerlas. Con los problemas que se propusieron en común acuerdo con el grupo investigador, se busca encontrar las formas de argumentar que nos permitan establecer que estos argumentos colaboran en la construcción de lo que llamamos la disciplina matemática. Todo esto se elaboró en el ambiente de la Escuela Pedagógica Experimental, una institución de innovación pedagógica donde se permite la libertad de crear y proyectar.

1. Disciplina matemática

Para empezar a abordar la disciplina matemática, nos referimos a la matemática como ciencia desde un carácter científico y su epistemología; es importante mencionar que la idea surge por saber cuándo nació propiamente el conocimiento matemático.

La disciplina matemática nace en el mismo instante en que se formula como la primera teoría matemática, es decir, la primera organización axiomático-deductiva[1] de enunciados matemáticos, instante a partir del cual puede considerarse que ha alcanzado un estado científico. Es a partir de aquí donde la historia juega un papel muy importante.

La disciplina nace desde los elementos de Euclides de Alejandría, que fue el primer ejemplo donde se utiliza un sistema del método axiomático-deductivo. Con él nacería la matemática como ciencia y comenzaría su historia.

Empieza Euclides con la relación de 23 definiciones que constituyen el punto de partida de la que se ha venido en considerar *axiomática material*, la cual propone diferentes proposiciones que compondrán los 13 libros del tratado: punto, línea o *segmento rectilíneo*, extremos de la línea, superficie, ángulo, entre otros. Continúa dividiendo los axiomas de su geometría en dos grupos:

- Postulados o axiomas propiamente geométricos.

- Nociones comunes o axiomas de validez universal que se podrían aplicar a todas las disciplinas a las que se quiera dar carácter científico.

2. Problemas irresolubles

Históricamente los problemas irresolubles han abierto caminos que han ayudado a la evolución del conocimiento matemático. Desde la antigüedad gran parte de las matemáticas se han desarrollado a partir de estos; tal es el caso de la creación de nuevas geometrías con la negación del quinto (5º) postulado de Euclides y los aportes realizados tras los intentos de demostrar el teorema de Fermat, entre otros.

Por el contrario, los *problemas matemáticos* en el contexto escolar tradicional son los ejercicios que se encuentran al final de capítulo en los textos. Estos son el indicador que el maestro utiliza para determinar la comprensión de los conceptos abordados. Partiendo de estas dinámicas de trabajo, se desarrollan las actividades escolares en la cotidianidad. Los problemas se resuelven si se aplican correctamente los algoritmos y generalmente la solución es única; no existe construcción de conocimiento, es simplemente una aproximación a una serie de informaciones hechas

1 Entendiendo esta por el método deductivo, que suele decir que se pasa de lo general a lo particular, de forma que, partiendo de unos enunciados de carácter universal y utilizando instrumentos científicos, se infieren enunciados particulares, pudiendo ser axiomático-deductivo, cuando las premisas de partida están constituidas por axiomas, es decir, proposiciones no demostrables, o hipotético-deductivo si las premisas de partida son hipótesis contrastables.

y acabadas, muchas veces sin significación para los estudiantes.

Por lo tanto, pensamos que es posible hacer aportes a la disciplina matemática a través de la búsqueda de solución a problemas irresolubles, la caracterización del pensamiento matemático, generar otras formas de pensar y actuar en los estudiantes. Además la matemática es asumida como fuente de retos y múltiples posibilidades.

3. Argumentación

La argumentación la definiremos, según Perelman (1988), como *intentar convencer o persuadir, en forma razonada, a otro de las tesis que se tienen por ciertas*. De esta afirmación deducimos que la argumentación es una práctica de comunicación, que se piensa de manera razonable y se llega a convencer a la otra persona de sus ideas.

El argumento es a la argumentación su manifestación, su objeto visible; la posibilidad de reconocer el carácter argumentativo que asume, en un momento dado, la lengua como elemento de la comunicación social por excelencia

4. Otras investigaciones

En investigaciones adelantadas por el grupo EPE de matemáticas se han realizado caracterizaciones del pensamiento matemático y se han encontrado elementos como la capacidad de razonar lógicamente, la creatividad, los modelos matemáticos y la operatoria que se visibilizan y promueven trabajando en el aula alrededor de situaciones problemáticas. Pues bien, en uno de los aspectos citados, el de la creatividad, se afirma:

RELACIÓN ENTRE UNA PROPOSICIÓN DADA Y OTRA PROPOSICIÓN			
Relación de justificación (constitutiva de un argumento): la primera proposición se presenta como "tesis".		Relación de derivación (constitutiva de un paso de deducción): la primera proposición se presenta como "hipótesis" o "premisa".	
➢ Razones relativas al interlocutor ➢ Argumentación retórica	➢ Razones relativas a las restricciones de la situación o del problema ➢ Argumentación heurística	directa: inferencia semántica Lógica de una lengua	Por un enunciado mediador, teorema, definición Demostración

Tabla 1. Relación entre una proposición dada y otra proposición

Estas distinciones se refieren a funciones cognitivas muy diferentes. Es por eso que ellas devienen esenciales para estudiar, desde una perspectiva del aprendizaje, todas las cuestiones relativas a las relaciones entre argumentación y demostración.

... El crecimiento [matemático] se dio como una consecuencia de la posibilidad de concebir otros espacios posibles en términos de trasformar los axiomas de partida. Por otra parte, existen ocasiones en que el progreso se debe a la necesidad de contar con técnicas y métodos

que permitan solucionar problemas prácticos o teóricos, derivados unas veces de otras disciplinas, otras de las incoherencias internas de las matemáticas mismas [1].

Nosotros, como definición de problemas irresolubles, consideramos que son: "*Situaciones en contexto matemático que inicialmente por su enunciado parecen tener respuesta, pero que por su planteamiento no se pueden solucionar*".

5. Parte experimental

Con lo anterior propusimos explorar como los estudiantes argumentar la irresolubilidad de un problema, acudiendo a las diferentes nociones en matemáticas que ellos poseen y que de esta forma genera construcción en la disciplina matemática.

Institución: Escuela Pedagógica Experimental. Kilómetro 4,5, vía a la Calera. Bogotá, Colombia.

Población: grupos de grado 6° con edades que oscilan entre 10 y 12 años, grupos de grado 9° con edades que oscilan entre 14 y 16 años.

Para el desarrollo de esta investigación se tuvo en cuenta que los problemas desde su enunciado tuvieran una solución, y que al ser tratados fueran irresolubles, para que el estudiante argumentara, desde la matemática, su irresolubilidad. Los problemas basados en este marco fueron:

Buscar tres números consecutivos cuya suma sea 122.

En un parqueadero hay carros y motos; hay 123 llantas entre los 2. ¿Cuántos carros y motos hay? No pueden sobrar ni faltar llantas.

6. Categorías de análisis

El planteamiento de problemas como los anteriores corresponde a situaciones en las que el estudiante debe buscar una solución desde lo que sabe; encuentra una posible solución y evidencia que el problema posee una inconsistencia de fondo como podría ser la falta de "*razón de ser*", es decir, no tiene una solución en un contexto, y plantea una serie de argumentos para probar o demostrar que el problema no posee solución.

Para la argumentación debemos tener en cuenta tres aspectos importantes en las situaciones que les presentamos a los estudiantes, mencionados por Balacheff :

- Un discurso que pretende convencer al otro.

- La validez del enunciado y posible argumento que en un contexto es aceptado.

- Conjeturas que llevan a la demostración.

7. Categorías

Hemos construido las siguientes categorías bajo el sentimiento de la argumentación propuesta por Duval y Balacheff :

- ***Apreciación inicial***

Aquí se ubica al estudiante que simplemente se restringe a decir si se puede o no se puede solucionar el problema. No presenta ningún soporte a sus argumentos, como recurrir a conceptos que previamente ha construido. Ej.: *no se puede solucionar el problema.*

- ***Suposición sin generalizar***

En esta categoría se encuentra el estudiante que argumenta con un solo ejemplo; este es su único soporte de convencimiento y descarta otras posibilidades de solución.

Ej.: *no se puede porque 40 + 41 + 42 = 123*

- ***Conjetura basada en algunos casos***

El estudiante que plantea dos o más ejemplos para argumentar el porqué de su solución, recurriendo al cacharreo.

Ej.: *no se puede porque 40 + 41 + 42 = 123 y además 39 + 40 + 41 = 120; por esto ninguna suma da.*

- ***Discurso basado en conceptos ya construidos de la matemática***

Un estudiante hace uso de un concepto matemático, que ya había interiorizado, para dar validez a sus argumentos. Así mismo lo utiliza para ejemplificar situaciones y generalizarlas.

Ej.: *no se puede porque la suma de los 3 dígitos es 5 y no es múltiplo de tres; para que se pueda solucionar el problema, en vez de 122 cambiaríamos por 123 o por uno que sea múltiplo de 3 o la suma de sus dígitos sea 6.*

8. Conceptos

Los problemas anteriores se formularon en las sesiones que se tuvieron en la Escuela y que, desde la perspectiva de los investigadores y asesores nuestros durante el trabajo, muestran dos tendencias de resolución por los estudiantes: caracterización de la divisibilidad (MCD y MCM) dada en el problema de los *números consecutivos,* de la cual haremos un acercamiento de los conceptos que se desarrollan, y sistemas de ecuaciones dada en el problema de las *llantas.*

- ***Criterios de divisibilidad***

Números primos y compuestos. Números primos entre sí.

Los criterios de divisibilidad nos permiten encontrar con rapidez divisores de un número. Algunos números, como 7, 13, 19 y otros, tienen solo dos divisores: la unidad y él mismo. Estos números se llaman números primos. Los números que no son primos se llaman números compuestos.

- ***Máximo común divisor y mínimo común múltiplo***

El máximo común divisor (MCD) de dos o más números es el divisor común más grande que tienen estos números. El mínimo común múltiplo de dos o más números es el múltiplo común más pequeño que tienen dos números.

- ***Propiedades del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo***

o Si un número es múltiplo de otro, el más grande será el MCM de los dos y el más pequeño será su MCD.

o Los divisores comunes de dos o más números son divisores del MCD de estos números.

o El MCM de dos números primos entre sí es igual al producto de estos números.

o Los múltiplos comunes de dos o más números son múltiplos del MCM de estos números. El producto del MCM por el MCD de dos números cualesquiera es igual al producto de estos números. Si dividimos dos números por su MCD, los cocientes que se obtienen son primos entre ellos.

Conclusiones

A partir del análisis anterior encontramos que la argumentación permite o es el paso para la construcción de la disciplina matemática; la argumentación establece un resultado final por medio de la convicción, pero para ello es importante referirnos a la validación ya que estos dos son componentes muy importantes. Al respecto mencionaremos algunos aspectos que se dieron a través del análisis ya mencionado:

- La argumentación exige no solo convencerse a sí mismo sino convencer al otro. Este tipo de reflexión se observó en las discusiones que se generaron en la segunda prueba, pues algunos estudiantes descubrieron que a partir de los números decimales se puede encontrar el número que da como resultado al encontrar la suma de dichos números, pero sus compañeros al escuchar esta afirmación refutaban y afirmaban que no se podía porque los números consecutivos se generan solo en los números naturales; aunque no se ve un algoritmo formal, su manera de argumentar hace ver que no se está tan errado acerca de lo que se busca con este problema.

- La validación de los argumentos promueve el uso de conceptos más formales: al enfrentarse en su hoja de trabajo, los estudiantes buscan una manera de ver si lo que le dice su compañero es verdadero o falso, para luego "atacarlo", y se dan cuenta que su afirmación o argumento era válido o errado.

- A través de los discursos argumentativos los estudiantes se ven obligados a ser más reflexivos con respecto a las propuestas que llevan y a las soluciones que dan, es decir, buscan referentes teóricos que sustenten los argumentos que ellos pretenden defender.

Como menciona Piaget, se trata de un modelo que da lugar esencial a la implicación (el "si… entonces…") y relativiza el rol del lenguaje en el desarrollo del razonamiento preposicional (las "operaciones formales"). Pero rápidamente tal modelo se reveló inadaptado por cuanto no permitía analizar las dificultades encontradas por los alumnos cuando se trataba de hacer una demostración y tampoco permitía tomar en cuenta las condiciones del trabajo en grupo, en un momento en que el uso de actividades de investigación como método de enseñanza de las matemáticas, devenía posible y que las interacciones entre los estudiantes podían tomarse en cuenta como factores de aprendizaje.

Pero en la Escuela estuvimos trabajando cómo el estudiante llegaría a lo formal y nuestra labor en la investigación fue cómo realizar preguntas para que se diera más interés en los estudiantes; esto se realizó con el grupo de investigación en algunas de las accesorias buscando en nosotros mismos ese tipo de respuestas. De aquí surgió la idea del trabajo de Nicolás Balacheff sobre la prueba y la demostración en el ciclo básico de la escuela secundaria (1982), el cual fue el primero en tomar en cuenta esta nueva situación. Dicho trabajo propuso una aproximación más completa a la iniciación en la prueba, partiendo de las actividades de investigación de un problema. Dentro de esta nueva perspectiva se comenzó a desarrollar un interés en las formas de argumentación que aparecen en el marco de una resolución de problemas y esto condujo a preguntarse si no serían las formas de argumentación el camino para descubrir la demostración.

A partir de lo expuesto se generan "etapas" del desarrollo de la matemática, denominadas prematemática, matemática y protomatemática, a saber: el conjunto de descubrimientos que aportan a la construcción de los conceptos matemáticos se denominaría prematemática, así mismo el carácter científico, es decir, lo axiomático-deductivo haría referencia a la matemática, y por último los conceptos abstractos interrelacionados entre ellos no sometidos a un formato teórico serían la protomatemática. Como se mencionó, justificada en nuestra aproximación al marco teórico.

Estos tres factores que hacen parte de la disciplina matemática se están trabajando en la Escuela Pedagógica Experimental, pues no hay que olvidar que lo que nosotros elaboramos fue una investigación preliminar y queremos mostrar cómo la argumentación es un elemento indispensable para la construcción de la disciplina matemática.

Bibliografía

[1] Segura, Dino y Romero, J. *Planteamientos en Educación,* Nº 3. Escuela Pedagógica Experimental. Bogotá. 1992, p. 13.

[2] Ibáñez, Marcelino. *Analizadores específicos para la demostración matemática.* Universidad de Valladolid. España. 2003.

[3] Rico, L. Los organizadores del currículo de matemáticas. Investigación "La educación matemática en la enseñanza secundaria". Universidad de Barcelona. España. 1997.

[4] Godino, Juan D. y Recio, Ángel M. Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática**.** *Investigación Didáctica*. Vol. 19, No. 3. España. 2001.

[5] Francisco, A. Una visión histórica en torno a la generación del conocimiento matemático. *Revista Complutense de Madrid*. Vol. 12, No. 2. Madrid. 2001, pp. 623-637.

[6] Godino, Juan D. *Evaluación de la resolución de problemas aritméticos en el marco de un proyecto europeo.* GEEUG. Universidad de Granada. España. 2001.

[7] Balacheff, Nicolás. *¿Es la argumentación un obstáculo? Invitación a un debate.* Grenoble, Francia. 2002.

[8] León, O. y Calderón, D. Argumentar y validar en matemáticas: ¿una relación necesaria? *Hacia una comprensión del desarrollo de competencias argumentativas en matemáticas*. Cap. 2. Colciencias. Bogotá. 2003.