Los problemas irresolubles en la formalización de la idea de divisibilidad

Unsolvable Problems in the Formalization of the Idea of Divisibility

Alberto Díaz Montes*

Fecha de recepción: 10 de mayo de 2012
Fecha de aceptación: 4 de agosto de 2012

Resumen

No se puede negar que actualmente la clase de matemáticas se ha vuelto monótona, basada en el cúmulo de procedimientos y algoritmos que no tiene sentido para su aplicación. Tal es la situación que al resolver un problema un estudiante no sabe qué hacer y solo tiene en su cabeza algunas ecuaciones que no entiende cómo utilizarlas, ni cuál es su aplicación.

En Colombia basta ojear algunas de las clases para tener un panorama de cómo se imparte la clase de matemáticas; por ejemplo, en grado octavo se dictan unos casos para factorizar, pero el estudiante al afrontar una evaluación no sabe cuál utilizar y lo más complicado es que antes de dicha evaluación ya ha elaborado una miscelánea con cien o más ejercicios para aprender a utilizar los casos y aún no sabe cómo emplearlos.

Palabras clave: importancia del papel del educador, problemas irresolubles, divisibilidad, estrategia de aula, historia de la matemática.

* Lic. Matemáticas, U. Distrital. Magister (C) Educación en Lecto-escritura y Matemáticas, U. Externado de Colombia.

Abstract

This project responds to the need to involve situations or problems as classroom math work for students looking for alternatives to their learning of this subject that is complicated when dealing with it.

Is required to realize the Math class format you want to use, one handed down algorithms meaningless, or that the student seek initiatives from his possessions so you can build your own math, their own reality. The job of mathematics refers not only to find the formula that solves the problem, but the student will construct to make sense of what he does.

Keywords: important role of the educator, unsolvable problems, severability, strategy classroom, history of mathematics.

1. Introducción

Este proyecto responde a la necesidad de involucrar situaciones o problemas en el aula de clases como trabajo de matemáticas para que los estudiantes busquen otras alternativas para el aprendizaje de esta asignatura que resulta complicada de abordar.

Para empezar, el Ministerio de Educación Nacional define que la competencia matemática refiere a "… formular, plantear, transformar y resolver problemas a partir de situaciones de la vida cotidiana, de las otras ciencias y de las matemáticas mismas. Ello requiere analizar la situación; identificar lo relevante en ella; establecer relaciones entre sus componentes… estas actividades integran el razonamiento, en tanto que exigen formular argumentos, que justifiquen los análisis, procedimientos y la validez de las soluciones propuestas" [1].

Por lo anterior, se requiere tomar conciencia del formato de clase de matemáticas que se quiere utilizar: uno en que se dicten algoritmos sin sentido, o que el estudiante busque iniciativas desde lo que posee para que pueda construir su propia matemática, su propia realidad. El trabajo en cuanto a matemáticas se refiere no solo a buscar la fórmula que solucione el problema, sino que también el estudiante la construya para que le dé sentido a lo que hace.

La presente investigación busca abordar el tema de los problemas irresolubles haciendo un enlace con la formalización de la idea de la divisibilidad, ya que resultaría innovador trabajar con problemas que por lo general no se trabajan en clase de matemáticas y en un tema tan complicado de entender para los estudiantes como es la divisibilidad.

2. Problema de investigación

2.1. Descripción del problema

En la experiencia diaria durante la enseñanza de la matemática en los grados de la secundaria se ha podido analizar que los estudiantes tienen cierta dificultad para establecer relaciones entre lo que les enseña el docente y las aplicaciones que se puedan hacer a los problemas propuestos para su solución. Esto se evidencia, por ejemplo, al aplicar una prueba frente a la que el estudiante no sabe cuál es el conocimiento matemático útil para solucionar el problema propuesto, que puede ser un teorema, un procedimiento de corte aritmético, geométrico o algebraico. Situaciones como las rebajas de los establecimientos comerciales, las promociones, encontrar la edad de las personas teniendo en cuenta un patrón, mediciones de tiempo y distancia, fracciones, etc., no les permiten entender que las matemáticas les proporcionan herramientas para comprender la realidad.

Las razones anteriormente expuestas, y debido a que las prácticas docentes parecieran, según autores como Bodí [2], Andonegui [3], Codina y Lupiañez [4] y Gentile [5], estas desde hace algunos años, no permiten que los estudiantes avancen y sepan qué hacer; se hace necesario no obligar al estudiante que busque un número que satisfaga la solución del problema, sino que plantee y justifique sus propias conjeturas aplicando varios procesos de razonamiento y extrayendo conclusiones lógicas.

2.2. Delimitación del problema

Diversas investigaciones desarrolladas en torno a problemas irresolubles, particularmente las propuestas desde la Escuela Pedagógica Experimental (*La búsqueda de la solución en problemas irresolubles, un camino hacia la construcción disciplinar de la matemática* [6] y *La búsqueda de solución a problemas irresolubles, un camino hacia la construcción de la disciplina matemática en el aula* [7]), han permitido ampliar este espacio para usarlo como una estrategia de aula que puede permitir avances en la consecución de clases innovadoras y de carácter científico.

Ahora bien, desde la experiencia diaria en la enseñanza de las matemáticas en diferentes grados de educación básica y media, se ha podido observar que los estudiantes pueden establecer relaciones entre lo que han aprendido y los problemas irresolubles desde su argumentación como razonamiento, permitiéndole al estudiante crear conciencia sobre su propio quehacer, ya que cuando se apropia del problema este le permite significar, interactuar y transformar su realidad.

Esto se evidencia históricamente, puesto que los problemas irresolubles han abierto caminos interesantes que gozan de ayuda en la evolución del conocimiento matemático, ya que desde la Antigüedad gran parte de las matemáticas se ha desarrollado a partir de aquellos. Este es el caso de los tres problemas clásicos de la Antigua Grecia: la creación de nuevas geometrías a partir de la negación del quinto postulado de Euclides y los aportes realizados tras los intentos de demostrar o argumentar el teorema de Fermat, entre otros.

El docente, al plantear en el aula problemas que no tienen solución, busca en los estudiantes que construyan una mirada más amplia de lo que es la matemática y de lo que es un problema; no solamente asumir que se puede resolver y emprender el camino, sino también considerar las variables que se proponen para determinar la resolución y la validación y además argumentar la irresolubilidad dado caso.

¿Qué incidencia tiene el abordaje de problemas irresolubles en los procesos de formalización de la idea de divisibilidad?

2.3. Antecedentes de investigación

Las matemáticas se han construido a partir de problemas que no han tenido solución en un momento dado. Estos problemas han variado en sus orígenes y en sus contextos: problemas de orden doméstico (división de tierras, cálculo de créditos, entre otros); problemas planteados en estrecha vinculación con otras ciencias (astronomía, física, etc.); especulaciones en apariencia a partir de las matemáticas mismas, necesidad de organizar elementos ya existentes, de estructurarlos, por ejemplo, por las exigencias de la enseñanza.

En este caso los problemas son irresolubles, puesto que las soluciones son casi siempre parciales, pero aun sin chispazos sobresalientes provocan avances espectaculares, que a veces no son reconocidos desde el principio. En el uso frecuente de textos originales y también en el de obras generales, suma de saberes históricamente acumulados en este dominio, se ha descubierto un tejido complejo y difuso hecho de conjeturas, de dudas, de lo que hoy llamamos matemáticas.

2.4. Justificación de la investigación

Desde el punto de vista personal, trabajar este tema es de interés ya que se convertiría en una herramienta bastante útil para el propio desempeño profesional como docente, además de brindar una alternativa para seguir ahondando en futuras investigaciones.

Por otro lado, esta investigación se permite un espacio adecuado para explorar sobre nuevas e innovadoras estrategias en los procesos pedagógicos que se adelantan en matemáticas, con el fin de alcanzar buenos resultados con los estudiantes, es decir, lograr que los alumnos tomen la clase de matemáticas como un incentivo de trabajo y para que su aprendizaje sea de un nivel más alto, que les brinden las herramientas necesarias para adquirir nuevos conocimientos matemáticos.

Esta investigación pretende potenciar en los estudiantes la comprensión y la importancia de trabajar problemas irresolubles, dado que la formación no puede reducirse al aprendizaje de unos contenidos disciplinares para ser enseñados, a unos elementos culturales descontextualizados y a unos principios pedagógicos y didácticos que deben ser aprendidos para aplicarlos.

2.5. Objetivos

2.5.1. Objetivo general

Analizar la incidencia en el abordaje de problemas irresolubles en los procesos de formalización de la idea de divisibilidad.

2.5.2. Objetivos específicos

- Identificar los elementos teóricos necesarios para definir la formalización de la idea de divisibilidad y problema irresoluble.

- Describir el proceso de formalización de la idea de divisibilidad que logra un grupo de estudiantes al trabajar con problemas irresolubles en el aula de clases.

- Identificar el impacto que tiene el abordaje de problemas irresolubles en comparación con dinámicas tradicionales en clase de matemáticas.

3. Marco teórico

3.1. Construcción histórica en la formalización de la idea de divisibilidad

Si se observan con curiosidad los números, en particular los números primos son unos números que no se dejan dividir por otros números; de esta forma están vacíos de divisores entre la unidad y ellos mismos. Estos números llamaron la atención de los estudiosos hace más de 2000 años. Euclides (300 a. C.), uno de los primeros matemáticos en observar este sistema numérico, demostró que el número de números primos es infinito, matemáticamente, si se imagina una lista que contiene a todos los números primos; P_1, P_2, P_3, P_4, P_4, …, P_n. Entonces se puede generar otro número Q, mayor tal que: Q= (P_1 x P_2 x P_3 x P_4 x P_5x… x P_n)+1. Este nuevo número Q puede ser primo o no. Si es primo, se tiene un nuevo número primo que no pertenece a la lista general; por lo tanto, esta no es completa. Ahora, en el caso que Q no sea un número primo, definitivamente tiene que ser divisible por algún número primo que no puede ser uno de los números de la lista, puesto que al dividir Q por cualquiera de los primos de la lista siempre se obtiene 1 como resto. Por lo tanto, se tiene un número primo P_{n+i}.

Eratóstenes, matemático y geógrafo griego que vivió en el siglo III a. C., inventó una criba para ir obteniéndolos. El método, aunque sencillo, es un poco lento: en la lista de todos los números positivos, con excepción del 1, que no es primo ya que tiene un divisor que es el mismo 1, se respeta cada número que se va encontrando sin tachar. Por ejemplo, se tachan todos los múltiplos del número escogido mayores que él. De esta forma, se van tachando los de 2 (4, 6, 8, etc.), luego los de 3 que no hayan sido tachados antes, 9, 15, etc.; y, sucesivamente, los múltiplos de los números que van quedando sin tachar (los de 5, 7, 11, etc.). De esta forma van quedando, filtrados y ordenados, los números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, etc. Si se observa con atención la lista se nota que hay *un solo número primo par, el* 2; y que, *a partir de* 5, *los posibles números primos terminan en* 1, 3, 7 ó 9.

3.1.1. Divisibilidad: de las conjeturas y los problemas abiertos, a las demostraciones

Siguiendo con la conclusión anterior, no hay que pensar que lo de la curiosidad es simplemente un buen consejo [3]. Pues no, la actitud indagatoria es la esencia de cualquier descubrimiento científico. Así lo demuestra la historia de la matemática, considerada como una aventura humana, según Andonegui. En ella, en el principio fueron la curiosidad y la observación atenta. De ahí se desprenden las conjeturas. Hay muchas en la historia del desarrollo de la divisibilidad.

Por ejemplo, los chinos, antes de Cristo, afirmaban que si p es un número primo, entonces p es divisor de $2^p – 2$, así, para p = 5, $2^5 – 2 = 32 – 2 = 30$ y, ciertamente, 5 divide a 30. Además, pensaban que la cosa funcionaba también al revés, es decir, que si un número p es divisor de $2^p – 2$, entonces p debía ser un número primo [5].

La primera parte de esta conjetura es cierta y fue demostrada, entre otros, por Fermat (1601-1665) en el siglo XVII, pero la segunda parte de la conjetura es falsa, ya que se verificó que 341 divide a $2^{341} – 2$; sin embargo, 341 no es primo: 341 = 11 x 31. Otra conjetura interesante fue propuesta por Girard (1590-1633) a comienzos del siglo XVII, quien menciona que: si un número primo es de la forma 4 x n + 1, un múltiplo de 4, más 1; por ejemplo, 5, 13, 29... etc., entonces puede expresarse de una y solo una manera como suma de dos cuadrados. Por ejemplo, 5 = 4 + 1; 13 = 4 + 9; 29 = 25 + 4; etc. Fermat, quien también demostró la conjetura anterior, adelantó a su vez unas cuantas [8]:

- El cuadrado de todo número primo de la forma anterior: 4 x *n* + 1, por ejemplo, 52, 132,..., también puede expresarse de una y solo una manera como suma de dos cuadrados. Así, $5^2 = 25 = 16 + 9$; $13^2 = 169 = 144 + 25 = 12^2 + 5^2$; etc.

- Ningún número primo de la forma 4 x *n* + 3; un múltiplo de 4, más 3; por ejemplo, 7, 11, 19..., puede expresarse como suma de dos cuadrados.

- Si un número primo es de la forma 6 x *n* + 1; un múltiplo de 6, más 1; por ejemplo, 13, 19..., entonces puede expresarse de una y solo una manera como suma de un cuadrado más el triple de otro cuadrado. Así, 13 = 1 + 3 x 4; 19 = 16 + 3 x 1.

3.2. La enseñanza de la divisibilidad en la secundaria

En el proceso de enseñanza aprendizaje de cualquier asignatura y en particular de la matemática es frecuente que el estudiante ante una determinada tarea exprese que no sabe lo que debe hacer y aún más cuando el maestro le ofrece una indicación, sugerencia o consejo inmediatamente trata de darle respuesta, por lo que el maestro le ha ofrecido un impulso o lo que algunos llaman ayuda al escolar.

Albarrán plantea que un impulso didáctico es un nivel de ayuda que, de acuerdo con el diagnóstico del desarrollo real de cada escolar, debe ser la que realmente necesite en el transcurso de la realización de una tarea con carácter de problema, con el propósito de mover su pensamiento hacia los contenidos que ya posee y que pueden serle útiles para vencer el obstáculo en el aprendizaje y activar su participación de manera independiente.

3.3. Proceso de la argumentación a la demostración

Ingresar a la cultura de los teoremas significa desarrollar competencias específicas inherentes a la producción de teoremas y a la prueba de las conjeturas producidas mediante elementos del saber teórico. Se necesitan análisis epistemológicos y cognitivos para elegir elementos peculiares esenciales para la producción y prueba de conjeturas y la gestión de teorías que los estudiantes encontrarán en su aprendizaje. El rol de la argumentación en las actividades matemáticas que involucran teoremas debe considerar varios aspectos de esas actividades, según Boero:

- ***Producción de una conjetura***, incluyendo exploración de la situación problemática, identificación de *regularidades*, identificación de condiciones bajo las cuales tales regularidades ocurren, identificación de argumentos para la plausibilidad de la conjetura producida, etc. Esta fase pertenece a la esfera privada del trabajo de los matemáticos. Podríamos agregar que la apropiación de un enunciado dado comparte características importantes con esta fase, exploración de la situación problemática subyacente en el enunciado, identificación de argumentos para su plausibilidad, etc.

- ***Formulación del enunciado*** de acuerdo con convenciones culturales compartidas; esta fase suele conducir a un texto publicable.

- ***Exploración del contenido*** y los límites de validez de la conjetura; elaboraciones heurísticas, semánticas acerca de las relaciones entre hipótesis y tesis; identificación de argumentos apropiados para la validación, relacionados con la teoría de referencia, y ponderación de relaciones posibles entre ellos. Esta fase suele pertenecer a la esfera privada del trabajo de los matemáticos.

- ***Selección y encadenamiento de argumentos*** teóricos coherentes en una cadena deductiva, frecuentemente bajo la guía de la analogía o en casos específicos y apropiados, etc. Esta fase es frecuentemente resumida cuando los matemáticos presentan sus trabajos a colegas de una manera informal, y aun en presentaciones públicas, por ejemplo seminarios.

- ***Organización de la cadena de argumentos*** en la forma de una prueba que es aceptable desde el punto de vista de los estándares matemáticos vigentes. Esta fase conduce a la producción de un texto para publicación. Podemos observar que los estándares matemáticos para esta fase no son absolutos; claramente difieren si comparamos un artículo publicado hoy en día con uno del siglo XVIII, o un capítulo de un libro de texto para la escuela secundaria con uno para el nivel universitario.

- ***Aproximación a la prueba formal*;** esta fase puede faltar en los teoremas de los matemáticos, aunque la mayoría de ellos son conscientes del hecho de que una prueba formal puede ser producida y algunos de ellos pueden a veces lograrlo. A veces esta fase concierne solamente a algunas partes de la prueba, donde el tratamiento formal es sencillo o donde detalles o errores sutiles deben ser identificados. Sin embargo, Thurston afirma que es prácticamente imposible, y sin sentido para el matemático profesional, producir una prueba formal completa para la mayoría de los teoremas matemáticos. Thurston indica que deberíamos reconocer que esas pruebas humanamente comprensibles y humanamente controlables que los matemáticos efectivamente producimos son lo que es más importante para nosotros, y que ellas son diferentes de las pruebas formales. Al presente, las pruebas formales están fuera de alcance y son en su mayoría irrelevantes: tenemos buenos procesos humanos para controlar la validez matemática.

3.4. Problemas irresolubles

La historia nos muestra que los problemas irresolubles han sido desencadenantes en el progreso del conocimiento matemático, toda vez que el comienzo de la matemática se ha dado por las búsquedas para resolver problemas. Tal es el caso de los griegos y sus tres problemas clásicos: la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección del ángulo.

Quizás en la historia de las matemáticas el problema más conocido como irresoluble sea el de la cuadratura del círculo que consistía en hallar geométricamente, mediante regla y compás, el cuadrado de área igual a la de un círculo tomado como referencia. A lo largo de los siglos, matemáticos, filósofos, físicos y un centenar de científicos intentaron dar respuesta para lograr la cuadratura del círculo; una de las propuestas más conocidas es la de Thomas Hobbes, sin que se alcanzara nunca el resultado esperado. Solo hasta 1882 de manera definitiva se demostró que el problema no admite solución alguna.

Según Boyer, estos tres problemas, la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección del ángulo, han sido conocidos desde entonces como los tres problemas clásicos o famosos de la Antigüedad. Más de 2200 años más tarde se iba a demostrar que todos estos tres problemas eran insolubles utilizando únicamente la regla y el compás. No obstante, la mejor parte de la matemática griega, y en parte la del pensamiento matemático posterior, vino motivada por los esfuerzos para lograr lo imposible o, si estos esfuerzos fracasaban, para modificar las reglas del problema; la Época Heroica fracasó en su objetivo inmediato, respetando las reglas fijadas, pero los esfuerzos realizados se vieron coronados con un éxito brillante desde otros puntos de vista.

4. Desarrollo metodológico

4.1. Tipo de investigación

La investigación es de tipo descriptivo-exploratorio; con ella se pretende describir el abordaje de los problemas irresolubles en el campo de la divisibilidad para analizar su incidencia en clase de matemáticas; de esta forma, la investigación se basa en una observación sistemática de los procesos en la formalización de la idea de divisibilidad. Cabe aclarar que el método descriptivo incluye los estudios de desarrollo que tienen como principal objetivo conocer los cambios que se producen en los sujetos con el transcurso del tiempo. En el trabajo de campo la orientación básica es generar conocimiento desde situaciones a que el estudiante espera encontrar respuesta, pero que al abordarlos no la va encontrar; se busca que logren argumentar usando una red conceptual para mostrar que los problemas no tienen solución.

El objetivo de una investigación como esta es interpretar y comprender los fenómenos, en este caso los educativos, y se interesa por el estudio de los significados e intenciones de las acciones humanas desde la perspectiva de los propios agentes sociales, abordándose el mundo personal de los sujetos, cómo interpretan las situaciones, qué significado tienen para ellos, lo cual no es observable directamente ni susceptible de experimentación. Se utilizan técnicas y procedimientos de tipo cualitativo y se enfatiza el contexto de descubrimiento [9].

4.1.1. El uso del estudio de casos en la enseñanza

Más allá del análisis particular, el método de estudio de casos se comienza a utilizar de una manera amplia en la Universidad de Harvard en 1914, aplicado a los estudios de Derecho, desarrollado tradicionalmente en los ámbitos de formación del Derecho y la Medicina, en que se presentan casos de historias reales cuya resolución ilustra principios generales y buenas prácticas, especialmente en la Medicina.

Una reformulación más sistematizada del método del estudio de casos se puede encontrar en la resolución basada en problemas (RBP), creada por McMaster en la Universidad de Canadá. Allí, presentado un problema, el profesor deja de ser un transmisor de conocimientos y se convierte en un guía y animador del grupo: alguien que pregunta, encamina, prueba y desafía el pensamiento de los estudiantes.

Si bien la resolución de problemas es una aplicación concreta y limitada del estudio de casos, su desarrollo y aplicación puede alimentar la mejora del planteamiento y desarrollo de casos. Por lo tanto, son importantes las reflexiones sobre la formulación de buenas preguntas, la identificación de cuestiones claves y la importancia del lenguaje en los procesos de interacción.

4.2. Base teórica

4.2.1. Categorías de análisis

Para la construcción de categorías de análisis se tuvieron en cuenta dos aspectos centrales:

a) *Los ejes.* Se construyeron atendiendo a que la solución de problemas, según Andonegui [3], se puede lograr si se tiene un nivel de argumentación, ligado a la demostración; además, Alsina y De Guzmán [10] mencionan que los problemas para ser resueltos requieren de una representación para su entendimiento y de la utilización de un concepto en el campo de las matemáticas. Así, se logró definir tres ejes: i) formas de representación, ii) tipos de argumentación y iii) red conceptual. A continuación se explica a qué refiere cada uno de ellos.

- *Eje de las formas de representación;* se otorga énfasis a la detección de modelos mentales que posibilitan la comprensión de la situación por resolver; de igual modo se establece que para la formalización en cuanto a la representación en matemáticas se tienen cinco momentos, los cuales se denominan: hablado, numérico sin ejemplificar, numérico con ejemplificación, gráfico-algebraico, algebraico.

- *Eje de tipos de argumentos;* se favorece el ingreso a la cultura de los teoremas y en este sentido al desarrollo de la producción de teoremas y a la prueba de las conjeturas producidas mediante el análisis epistemológico y cognitivo para elegir elementos característicos para la producción y prueba de conjeturas. En el papel de la argumentación en las actividades matemáticas que conciernen a teoremas se deben considerar varios aspectos de esas actividades y se muestran en los siguientes momentos: formulación, caracterización, regularidades, conjeturas, validación y la aproximación a lo formal.

- *Eje de red conceptual;* se prioriza la búsqueda de significado y utilización de conceptos en la construcción de la idea de divisibilidad; este es el caso que se plantean los siguientes momentos: divisores y múltiplos de un número natural, descomposición de un número en factores primos, divisores de un número, las potencias desde el punto de vista de sus divisores, número primo o compuesto, máximo común divisor, y mínimo común múltiplo.

b) *Los momentos.* Estos refieren a los estados que puede tener cada eje al darle solución a un problema irresoluble. En este sentido, se identificaron siete momentos que corresponden al camino para darle solución al problema. Para identificarlos se usó la numeración de 1 a 7, presentación que se mantiene en el cuadro de categorías. A continuación se explica cada uno de los momentos.

Cabe aclarar que los momentos definidos en las categorías de análisis, aunque delimitados en cada uno de los ejes, no van ligados de un eje a otro, lo que proporciona diferentes formas de uso de los momentos en los distintos ejes.

A continuación se explica cada uno de los momentos.

Formas de representación

- Ensayo y error: se remite simplemente a la explicación verbal sin recurrir a algoritmos para la interpretación física de resultados.

- Numérico sin ejemplificar: el uso de un algoritmo que no permite la interpretación física de resultados.

- Numérico con ejemplificación: uso de algoritmos hacia la interpretación de resultados.

- Gráfico-algebraico: el uso de elementos geométricos para la solución del problema contiene elementos algebraicos.

- Algebraico: resolución eficiente, planteamiento e interpretación de resultados.

Tipos de argumentos

- Formulación: según Boero, exploración de la situación problemática, identificación de *regularidades*.

- Caracterización: identificación de argumentos apropiados para la validación, relacionados con la teoría de referencia.

- Regularidades: búsqueda de argumentos entrelazados para una validación de su tesis.

- Conjeturas: conduce a la producción de un texto matemático para su validez.

- Validación: argumento que convence al otro de su tesis.

- Aproximación a lo formal: el uso de expresiones de corte algebraico y generación de fórmulas para su generalización.

Red conceptual

Para la construcción de la idea de divisibilidad se tiene en cuenta cómo se fueron construyendo las nociones en cuanto a divisibilidad se refiere; a continuación se menciona el orden en el que fueron apareciendo las nociones para la construcción de la idea de divisibilidad, según Andonegui [3]:

- Divisores y múltiplos de un número natural.

- Descomposición de un número en factores primos.

- Divisores de un número.

- Las potencias desde el punto de vista de sus divisores.

- Número primo o compuesto.

- Máximo común divisor.

- Mínimo común múltiplo.

4.2.2. Construcción inicial de casos

Para la construcción de los casos se tuvieron en cuenta las habilidades que tenían los estudiantes cuando resolvían un problema con contenido de divisibilidad, puesto que los estudiantes tienen distintas maneras de representar un problema, argumentar sus explicaciones y utilizar una noción en particular. Para esto se dispuso de la construcción de un instrumento diagnóstico que mostrará cuáles son los estudiantes que tienen una forma similar de resolver los problemas, y ponerlos en grupos, lo que se llamarán casos, y analizar sus avances.

4.2.3. Instrumentos de investigación

La información se obtuvo a través de la observación pasiva y participante, la cual utiliza las siguientes herramientas:

Instrumentos de campo elaborados por el investigador

- *Instrumento diagnóstico*

Instrumento con el cual se buscó identificar el proceso que se utiliza para la solución de problemas a partir de situaciones que involucra la divisibilidad. Además con el instrumento se indagó sobre las habilidades y dificultades que tienen los estudiantes frente al proceso de formalización, formas de representación y la red conceptual, alcanzado por los estudiantes.

Dicho instrumento diagnóstico consistió en la solución a seis situaciones, en la cual los estudiantes debieron resolver los problemas mostrando las formas de representación que utilizaban, así como la red conceptual y los argumentos utilizados.

4.3. Trabajo de campo

El trabajo de campo se inicia con la aplicación del instrumento diagnóstico para explorar en los estudiantes el nivel de formalización, argumentación y representación al resolver un taller con problemas de divisibilidad. Con base en las respuestas de los alumnos, se identificaron los aspectos en los que habían registrado dificultades para resolver los problemas. Después se aplicaron dos pruebas donde los estudiantes, conformados en grupos de cuatro, iban avanzando en la construcción de la idea de divisibilidad, además registraban en un protocolo de clase los avances significativos que lograban obtener, así como el registro de las soluciones a cada situación. Por último se hizo una sesión en que se manifestaron los avances obtenidos.

4.3.1. Universo y muestra poblacional

- **Población:** estudiantes del Gimnasio Santa María del Alcázar que han tenido experiencia en el desarrollo de problemas en torno al tema de divisibilidad.

El Gimnasio Santa María del Alcázar es una entidad educativa cuyos principios se orientan hacia la búsqueda de la excelencia en virtud de los valores y el desarrollo de las capacidades individuales de los educandos; ellos son los promotores de su aprendizaje.

- *Muestra:* se escogieron 60 estudiantes de grado undécimo puesto que son los que han tenido más contacto con la solución de problemas.

- *Objetivos institucionales:* calidad: hacer las cosas bien, cumpliendo con los requisitos establecidos. Incorporar la filosofía, valores y conocimientos de calidad a todas las funciones y actividades del gimnasio.

Excelencia: sobrepasar el cumplimiento de los requisitos establecidos.

Innovación: capacidad de generar, transformar, ejecutar, aceptar y promover cambios positivos.

4.3.2. Realización de los instrumentos

- *Instrumento diagnóstico:* la realización del instrumento diagnóstico consistió en el desarrollo de un taller, entre el 3 y el 7 de octubre del 2011, en dos sesiones. Durante esta aplicación se solicitó a los 60 estudiantes resolver seis situaciones, en las cuales los estudiantes debían solucionar los problemas mostrando las formas de representación que utilizaban, así como la red conceptual y los argumentos utilizados.

- *Instrumento de aplicación. Primera parte:* la realización del primer instrumento de aplicación consiste en el desarrollo de dos problemas que no tiene solución, entre el 10 y el 21 de octubre en cuatro sesiones. Durante esta aplicación se solicitó a los quince grupos resolver las dos situaciones; los diferentes grupos debían solucionar los problemas mostrando sus procedimientos y argumentando el porqué de su solución. Hay que aclarar que los problemas que se utilizaron son de autoría de la Escuela Pedagógica Experimental, quienes los utilizaron en el 2005 para una prueba piloto que hizo parte de una investigación similar.

- *Instrumento de aplicación. Segunda parte:* la aplicación del segundo instrumento de aplicación consiste en el desarrollo de dos nuevos problemas que no tienen solución, entre el 24 de octubre y el 4 de noviembre en cuatro sesiones. Durante esta aplicación se solicitó a los quince grupos resolver las dos situaciones; los diferentes grupos debían solucionar los problemas mostrando sus avances en las formas de representación, la búsqueda de fórmulas que mostraran la solución del problema y la validación de sus aportes. Estos problemas fueron tomados de la Escuela Pedagógica Experimental.

4.3.3. Recolección de los datos

Para comenzar, la información se obtuvo trabajando en el aula de clase con dominios de conocimiento específico en el área de Matemáticas, planteando seis situaciones problema que posibilitaran la organización de los casos; en la situación 1, de diagnóstico, se plantea a los estudiantes que den solución a dichos problemas usando diferentes tipos de representación, la argumentación del porqué de dicha solución y la utilización de la divisibilidad como solución del problema.

En la situación 2, de presentación de los problemas irresolubles, se plantean dos situaciones que no tienen solución y se interroga sobre su solución. Aquí se pretende que los estudiantes busquen alternativas de solución, indaguen acerca de la divisibilidad y puedan generalizar el problema; una vez escogidos los casos en grupos de cuatro estudiantes, cada uno de ellos hará un protocolo de lo que va sucediendo en la medida que va solucionando cada problema, luego presentarán una exposición de lo elaborado y se construirán las definiciones pertinentes.

En cada situación problema es posible analizar las tres fases de la formalización de la idea de divisibilidad, así como identificar los criterios con que construyen dicha formalización. Luego de tener los protocolos y los instrumentos, se codifica plasmando las formas de representación, los argumentos utilizados y la red conceptual que se usó para resolver los problemas; como tercera y última fase, en la metodología se procede a organizar la información retomando las categorías para el análisis y se confronta la teoría con las soluciones de los estudiantes.

Para la interpretación de la información se tuvieron en cuenta los resultados arrojados en los instrumentos, contrastándolos con la revisión de los documentos, para establecer si se registra algún cambio significativo en la formalización de la idea de divisibilidad en los estudiantes, que se pueda ver reflejado en sus respuestas a los problemas irresolubles.

Luego se analizaron los alcances que se obtuvieron con el trabajo de problemas irresolubles en la construcción de la idea de divisibilidad por medio de los estudios de caso. Por último, se construye el informe, en el que se busca identificar los aspectos más relevantes de la investigación y se plasman todas las evidencias de la realización de dicha investigación.

5. Conclusiones y sugerencias

5.1. La formalización de la idea de divisibilidad desde los problemas irresolubles

Con los mencionados resultados, específicamente los relacionados con el eje del proceso de argumentación, la cual es definida como la exploración, formulación, identificación de posturas, validez de una conjetura, que finalmente son una cadena de argumentos y se aproxima a lo formal, y teniendo en cuenta que este aspecto fue el más explorado, tanto en los instrumentos utilizados en la recolección de los datos como en los instrumentos de investigación, se observaron diferencias significativas en los tres casos, identificándose una tendencia positiva hacia el trabajo de problemas irresolubles como estrategia de aula.

Se logró evidenciar y establecer un incremento en la formalización de la idea de la divisibilidad pues los estudiantes reconocieron más fácilmente, a partir de una situación que no tiene solución, llegar a plantear ecuaciones y de esta forma llegar a convertir en algebraico el problema, además de validar sus conjeturas en la utilización de argumentos desde un punto de vista basado en la red conceptual evidenciada.

En un principio, trabajar con una situación que al parecer tenía solución, y que luego se demostró que no, se les dificultó mucho. Para ilustrar esta afirmación, se retoman apartes de los expresado por el caso 1 en una de las soluciones que dieron en la que se abordó el problema "En un campeonato se jugaron 25 partidos de voleibol. Si los equipos participantes jugaron un partido entre sí, y por cada colegio había un equipo, ¿cuántos colegios participaron?". Un grupo del caso 1 narraba que no se podía resolver el problema, debido a que no entendía qué era un número consecutivo, situación que se resolvió en una explicación acerca de los números naturales y enteros, en los cuales se encuentran este tipo de números. Hacia el final de la investigación, los grupos que pertenecían al caso 1 ya no respondían que no tenía solución el problema, sino que su iniciativa se basaba en la búsqueda de teoría para fundamentarse y buscar una posible solución.

5.2. Avance en el proceso de formalización por eje y atendiendo a las características de cada grupo

El aspecto de la *red conceptual* mostró cambios evidentes durante la aplicación de los dos instrumentos y las exposiciones realizadas. Al iniciarse la aplicación de los instrumentos y abordar los problemas irresolubles se identificó que los diferentes grupos no encontraban relación de los problemas con el tema de la divisibilidad; en un momento de la discusión en las exposiciones hubo la necesidad de definir qué era *un número consecutivo* y desde ese instante se supo que se tenía que trabajar en el campo de la divisibilidad, lo cual permitió que se abordara el tema a profundidad.

Hacia el final del proceso investigativo se observó un cambio positivo: se reconoció no solo cuál era el tema que se iba a trabajar, sino también que los problemas no tenían solución; se necesitaba mostrar, por medio de fórmulas, argumentos y un uso adecuado de representaciones, por qué los problemas no tenían solución; se plasmó esto en los protocolos y las exposiciones realizadas por los casos.

Con respecto a los protocolos y las exposiciones realizadas por los grupos que conformaban los tres casos, los estudiantes afirmaron que lo más importante de haberlo hecho fue analizar diferentes posturas para darle validez y generar conceptos en grupo con el fin de avanzar en el aprendizaje de un tema que para ellos era un tanto difícil.

En cuanto al aspecto de *las formas de representación*, los resultados arrojados por los dos instrumentos no muestran una variación significativa, ya que la representación que hacían pasaba de lo numérico sin ejemplificación, luego retomaban algunos ejemplos para mostrar lo hecho y por último la utilización de ecuaciones y fórmulas (algebraico) para generalizar cada uno de los problemas.

Los tres casos cumplieron con la tarea. En el seguimiento que se hizo a la elaboración de los protocolos se observó que en la primera semana fue difícil para los grupos mostrar las discusiones en torno a los problemas, ya que se basaban en lo que se decía, por ejemplo "no se puede", "qué hacemos"… y no en las elaboraciones matemáticas que debían registrar. Los grupos que corresponden al caso 1 específicamente, no lograron hacer unos protocolos acordes para el análisis de su contenido. Ya en la segunda semana lograron realizar el ejercicio enfocándose en lo matemático, referente a las representaciones, los argumentos y los conceptos que involucraban los problemas.

5.3. Implicaciones para el aula de clase (papel del profesor, dinámicas de clase y abordaje de problemas irresolubles)

En cuanto a la metodología utilizada, el estudio de casos resultó una herramienta adecuada para el propósito y objetivos que perseguía la presente investigación; se tuvieron en cuenta las limitaciones de tiempo, de recursos y el bajo control sobre la diversidad de procesos y acontecimientos con los que se cuenta en la situación natural que representa la cotidianidad institucional. Sin embargo, la muestra no resulta representativa para permitir formular generalizaciones y, además, fue evidente una baja confiabilidad y validez.

En cuanto a los instrumentos que se utilizaron, la variación en los avances de los casos en las dos aplicaciones realizadas reflejan tendencias del momento por el cual están atravesando, y para una investigación más rigurosa se hace necesario un instrumento estandarizado con mayor grado de validez y confiabilidad que pueda medir el avance en lo formal de los sujetos participantes (pretest-postest) para poder identificar las diferencias entre una y otra aplicación y así medir realmente el impacto de los problemas irresolubles, contrastando esta información con observaciones de corte científico, es decir que sean orientadas hacia un objetivo ya formulado, con un plan sistemático y controlado, sobre el avance y desempeño de los estudiantes en cuanto al trabajo con el tema de la divisibilidad.

Se sugiere, además, recoger información de los documentos o registros, como protocolos, exposiciones u otro tipo de registro que se tienen de cada grupo y que forman parte del proceso pedagógico-institucional que cada caso adelantó. Lo anterior es necesario porque los datos que reflejaron mayor confiabilidad en el estudio de casos fueron los protocolos y las exposiciones de los grupos, realizados a partir de los documentos revisados.

5.4. Proyecciones, expectativas y sugerencias

Para la realización de una investigación más rigurosa, un estudio de casos no resulta ser la metodología adecuada que permita formular generalizaciones con un grado de control y validez interna y externa medio o alto; se sugiere una metodología en la que el investigador deba inspirar a los estudiantes dándoles confianza para un trabajo más completo y así lograr más fácilmente un avance en lo formal basado en los problemas irresolubles como estrategia de aula; o también se puede utilizar una investigación enmarcada en el paradigma empírico-analítico y de corte cuasi experimental, pues en la presente investigación no se tuvieron en cuenta muchas variables extrañas o intervinientes, a las cuales, posiblemente, puedan deberse algunos de los cambios detectados en los casos.

Como se tenía pronosticado desde un principio, esta investigación simboliza solo los primeros pasos de un prolongado camino que apenas se aprecia. Tal vez lo importante fue empezar por esta travesía, ya que los próximos pasos serán dados con mayor seguridad para alcanzar la siguiente meta de este recorrido.

6. Referencias

[1] Ministerio de Educación Nacional, *Estándares básicos de competencias en matemáticas. Potenciar el pensamiento matemático: ¡Un reto escolar!* Bogotá, 2006.

[2] S. Bodí *et al*., *La comprensión de la divisibilidad en N. Un análisis implicativo*. Alicante: Departamento de Innovación Didáctica, 2007.

[3] M. Andonegui, *Divisibilidad*, Serie del Pensamiento Matemático, No. 8. Bogotá: Fe y Alegría de Colombia, 2006.

[4] A. Codina y J. Lupiañez, *El razonamiento matemático: Argumentación y demostración*. México, 2009.

[5] E. Gentile, *Aritmética elemental*. Washington: OEA, 1985.

[6] Escuela Pedagógica Experimental, *La búsqueda de la solución en problemas irresolubles, un camino hacia la construcción disciplinar de la matemática*. Bogotá: Corporación EPE, 2006.

[7] Escuela Pedagógica Experimental, *La búsqueda de solución a problemas irresolubles, un camino hacia la construcción de la disciplina matemática en el aula*. Bogotá: Corporación EPE, 2008.

[8] M. Kline, *El pensamiento matemático, de la Antigüedad a nuestros días*, vol. I. Madrid: Alianza, 1992.

[9] J. Arnal *et al*., *Investigación educativa: fundamentos y metodologías*. Barcelona: Labor, 1992.

[10] C. Alsina y M. de Guzmán, *Los matemáticos no son gente seria*. Barcelona: Rubes, 1998.